日本銀行金融研究所「金融研究」第8巻第2号（平成元年6月）

円先物オプションの価格決定と異質的期待*

岩田暁一**
辻幸民***

1. はじめに

この論文の目的は異質的期待の立場に立って先物オプション価格の決定に関し新たな理論を提出するとともに、CMEの円先物オプション・データによりその実証を行うことにある。

CAPM（Capital Asset Pricing Model、資本資産評価モデル）の理論に代表されるように、投機的市場の価格決定に関する現在の主要な理論では、同質的期待の仮定を採用している。しかしそれは明らかに非現実的であるしまた非常に強い仮定でもある。同質的期待の仮定の下ではどの投資家も無数の資産価格の将来の価格変化に関する確率分布を知っていなければならない。しかし現実の大多数の投資家はその中のごく一部分の資産に関する予想を持つに過ぎないだろう。しかもそれらの予想は客観的な確率分布とは異なるであろうし、また投資家の間で予想は相異なるであろう。

* 本論文は岩田が日本銀行金融研究所の客員研究員、辻が客員研究生として同研究所滞在中（1986年12月～88年12月）に行った共同研究の成果である。研究にあたっては、鈴木淑夫前所長（現日本銀行理事）、三宅純一所長、岡部光明氏、深尾光洋氏、佐藤節也氏、高木信二氏、山川哲史氏その他の金融研究所の方々から多くのご援助とご教示を頂いた。また同研究所に客員研究員として滞在していた吉川洋・大阪大学助教授（現東京大学助教授）と Adrian E. Tschoegl・ミシガン大学助教授、および慶応大学 Keio Economic Observatory の小尾恵一郎教授、吉岡完治助教授その他の方々から有益なコメントを頂いた。しかし本論文におけるありうべき誤りはすべて筆者の責任であること言うまでもない。

** 慶応義塾大学教授
*** 慶応義塾大学助手

投機的市場におけるほとんど全ての取引は売手と買手の予想の違いによって行われていると考えるのが自然であろう。

このような明らかに非現実的な同質的期待の仮定が採用されてきた主な理由は、同質的期待の仮定を外そうとすると理論が著しく複雑になってしまうと考えられたためである。Lintner (1969) の異質的期待導入の試みがその良い例である。

オプション価格の決定についての Black and Scholes (1973) の理論は、リスクレスな裁定機会が存在しないという意味での均衡を成立させる価格として有名なB–S式を導いた。2.で述べるように、B–S模型におけるオプションの原資産価格の確率過程に関する仮定は現実の価格の経験的な分布と合致しないようである。すなわち原資産価格変化率の標準偏差 (volatility) の可変性と原資産価格変化率の分布の非正規性が指摘されている。また、連続的ヘッジングにより安全ポートフォリオを組みうるとする想定にも疑問の余地がある。更に、B–S模型ではヨーロッパ型オプションを前提にしているが、満期前の権利行使を許すアメリカ型オプションについては別の模型が考えられなければならない。

そこでその後B–S模型の仮定を緩める模型が多数提出されている。しかしそれらの模型はB–S模型に比べて著しく複雑になる。また導かれたオプション価格式の現実説明力はB–S式よりそれほど良くなるわけでもない。後に述べるように、明らかにB–S模型が当て嵌まらない筈のアメリカ型先物オプション・データに対し、解析的アメリカ型オプションの模型の説明力はB–S模型より劣る場合さえある。これらのパラドックスはどのように説明されるべきであろうか。

この論文はこの問に対し一つの解答を与えようとするものである。前述のようにこの論文では同質的期待の仮定を除去して、異質的期待を前提にして投機的価格、特に先物価格とオプション価格の決定を説明する。その模型は3.以降で展開される予想の個体間分布の模型である。その模型では、原資産価格に特定の確率過程を仮定する必要はなく、またアメリカ型先物オプションに対してもB–S式が有効であることが示される。ただしそこでのB–S式にはB–S模型とは全く別個の解釈が与えられている。

ここで予想の個体間分布の意味を簡単に説明しておこう。投資家は将来の資産価格について各自主観的な予想を持っている。これを予想の主観的確率分布として把えることにしよう。特定の資産価格の主観的期待値をYで表わすと、Yは個体間で異なりうるので、Yの個体間の変動を表わす確率分布を想定し、これを予想の個体間分布と呼ぶ。予想の個体間分布に基づいてオプション価格を説明する模型は素朴な形で最初岩田 (1986) で提出され、岩田 (1989) ではそれを精緻化した模型が提示された。本論文の模型は後者を更に改良したものである。

以下、2.では簡単にB–S模型の考え方を説明したのち、それ以後提出されたオプションの諸理論を含めてその問題点を検討する。3.から6.までは個体間分布模型が展開される。すなわち3.では先物契約も資産選択の対象に含めたときの投資家の最適資産選択行動に基づいて資産の需要関数が導出される。4.では予想の個体間分布が定式化され、それと均衡先物価格との関係が説明される。5.では個体間分布に基づくオプション価格決定の説明が与えられる。6.では取組高と出来高が予

想の個体間分布によりどのように説明されるかを示す。7.と8.では以上の個体間分布模型の実証を行う。まず7.ではCMEの円先物オプション・データを使用してB−S式と個体間分布模型価格式の推定を行う。8.では7.で得られた母数推定値と先物価格・取組高・出来高のデータを使用して、個体間分布模型から結論される幾つかの関係のテストを行う。

2. 現行オプション理論の問題点

ここでは、オプション価格の決定に関し現在どのような理論があるかを概観し、それらの理論の問題点を指摘する。

オプション価格の決定を均衡論的に不満のない形で最初に説明したのは Black and Scholes (1973) であるとされている。この論文は株式を原資産とする現物オプションに関するものであったが、その後 Black (1976) は先物を原資産とする理論を提出した。両者は同一の考え方に基づくものであり以下一括してB−S模型と呼ぶことにする。B−S模型はその後の種々のオプション模型および本論文の議論の出発点でもあるので、以下にその骨子を本論文の対象である先物オプションについて述べておく。

次のように記号を定める。

$\overline{C}$：ヨーロッパ型コールの価格
$\overline{P}$：ヨーロッパ型プットの価格
F：先物価格
t：現在時点
r：瞬間利子率
C：アメリカ型コールの価格
P：アメリカ型プットの価格
K：行使価格
t^*：オプションの消滅時点

次のような仮定をおく。

仮定1：利子率 r は t から t^* まで一定である。
仮定2：利子率 r で安全資産の借入れ・貸出しが無制限に行える。
仮定3：取引費用・税金は存在しない。
仮定4：先物やオプション取引の証拠金は不要である。
仮定5：取引の最小単位の制約はない。
仮定6：先物価格Fは次の伊藤の確率微分方程式に従う。

$$dF/F = fdt + vdW \tag{1}$$

ここに f は t と F の関数であり，v は正の一定値である。また W は標準 Wiener 過程である。

上記の先物を原資産とするヨーロッパ型コールの価格が t と F の関数 $\overline{C}(F,t)$ で表わされ、かつこの関数が連続な2階の偏導関数を持つとすると、伊藤のレンマにより(1)から

$$d\overline{C}=\overline{C}_1dF+(1/2)\overline{C}_{11}v^2F^2dt+\overline{C}_2dt \tag{2}$$

というコール価格を記述する確率微分方程式が導かれる。ただし $\overline{C}_1\equiv\partial\overline{C}/\partial F$、$\overline{C}_{11}\equiv\partial^2\overline{C}/\partial F^2$、$\overline{C}_2\equiv\partial\overline{C}/\partial t$ である。

ここで1単位のコール・オプションの買持ちと $\overline{C}_1$ 単位の先物の売持ちからなるポートフォリオを組んでみる。このポートフォリオは微小時間 dt の間にその市場価値が $d\overline{C}-\overline{C}_1dF$ だけ変化するが、この $d\overline{C}$ に(2)式を代入するとこのポートフォリオの市場価値の変化は $(1/2)\overline{C}_{11}v^2F^2dt+\overline{C}_2dt$ であることが分る。これには dF を含む項が存在しないから、このポートフォリオは安全ポートフォリオである。一方このポートフォリオに投下した資金と同額の $\overline{C}$ ドルを安全資産に投下したとすれば、dt 時間に $\overline{C}e^{rdt}-\overline{C}\simeq r\overline{C}dt$ の収益

がえられる。そこでポートフォリオの収益率と安全利子率とが等しくなるように裁定が働いて

$$r\bar{C} = (1/2)\bar{C}_{11}v^2F^2 + \bar{C}_2 \tag{3}$$

が成立しなければならない。一方、消滅時点 t^*においてコール価格は

$$\begin{aligned}\bar{C}(F,t^*) &= F-K, \quad \text{if} \quad F>K, \\ &= 0, \quad \text{if} \quad F\leqq K,\end{aligned} \tag{4}$$

となる。この(4)式を境界条件とする偏微分方程式(3)の解は

$$\begin{aligned}&\bar{C}(F,t)\\ &=e^{-rT}\{F\Phi[\ln(F/K)/(v\sqrt{T})+v\sqrt{T}/2]\\ &\quad -K\Phi[\ln(F/K)/(v\sqrt{T})-v\sqrt{T}/2]\}\end{aligned} \tag{5}$$

ただし $T=t-t^*$かつ$\Phi(\cdot)$は標準正規累積分布関数である。この(5)式がB−S式に外ならない。

プット・オプションの価格 $\bar{P}$ については、同様な考え方で

$$\bar{P}(F,\ t)=\bar{C}(F,\ t)+e^{-rT}(K-F) \tag{6}$$

が導かれる。ただし右辺の $\bar{C}(F,\ t)$ は(5)式の右辺を意味する。

B−S模型に対してはその後多くの実証分析がなされた。例えばコール価格に関する(5)式について言えば、この式に現れる変数のうち $\bar{C}$、F、K、T、r は観測可能であるが、v だけは直接には観測できない。v は原資産価格の volatility（価格変化率の標準偏差）であるから、原資産価格の時系列データから価格変化率の標本標準偏差を計算することで推定出来るかもしれない。この推定値を historical volatility または HSD (historical standard deviation) と呼ぶ。一方(5)式または(6)式において v を母数と見做し $\bar{C}$、F、K、T、r のデータを用いて非線型最小自乗法などにより v を推定することも出来る。このようにして得られた推定値を implied volatility または ISD (implied standard deviation) と呼ぶ。

株式オプションに関して行われた Latané and Rendleman (1976)、MacBeth and Marville (1979) その他の実証結果では ISD がオプションの消滅時点までの期間において一定ではないことが指摘された。また特定の期間について計算された ISD はその期間が変わると変動することが見出された。これらの観測事実はB−S模型の volatility 一定の仮定と矛盾する。そこで Cox (1975) は価格変化率の分散弾力性一定を仮定する CEV (constant elasticity of variance) モデルを提案した。また Scott (1987) は volatility そのものが特定の確率過程に従う確率変数であるとするモデルを提案した。これらはいずれもB−S模型価格式よりも著しく複雑な価格式をもたらす。

また Fama (1965)、Clark (1973) その他の株価や先物価格に関する多くの実証分析により、B−S模型の仮定に疑問が持たれるようになった。即ち彼等の価格変化率に関する統計的分析によればその経験的度数分布は正規分布よりも裾の厚い高尖度の分布であり、これは原資産価格変化率が正規分布するという仮定に反する。Fama (1965) は価格変化率が特性指数 α が 2 より小さな安定パレート分布に従うとし、Clark (1973) は変動する分散を伴う正規分布に従うという解釈を与えている。後者の解釈は前述の volatility 可変のオプション模型と整合的である。また、情報の発生は時間的に連続的とは考え難いということから、価格が離散的なポアソン過程

に従うと仮定する Cox and Ross (1976) の純粋ジャンプ模型や離散的なポアソン過程と連続的幾何ブラウン運動のミックスした過程に従うとする Merton (1976) の拡散ジャンプ混合模型が提案された。純粋ジャンプ模型は、Cox, Ross and Rubinstein (1979) の乗法的2項過程 (multiplicative binomial process) の模型の特殊形としてえられる。乗法的2項過程模型はその極限の形において B–S 模型を含み、余り難しい数学を必要としないことから、多くの解説書でこの模型によるオプション価格決定の説明がなされている。

B–S 式の導出方法はもう1つ知られている。これは Cox and Ross (1976) により示された危険中立的世界の理論による方法である。偏微分方程式(3)と境界条件(4)を見れば分るように、そこには投資家の危険回避度を示すパラメターは何ら含まれていない。このことは連続的ヘッジによりリスクレスな裁定機会が排除されるという条件が満たされる限り、投資家の危険選好の状態がどのようであっても同一のオプション価格式すなわち B–S 式が導かれることを意味している。従ってすべての投資家が危険中立的である世界を仮定しても B–S 式が導かれるであろう。すべての投資家は同一の予想を持っていると仮定すると、危険中立的世界ではリスク・プレミアムは存在しないから、均衡先物価格は予想先物価格の期待値に等しく、株式やオプションなどの資本資産の価格は予想価格期待値の(安全資産利子率で割り引いた)現在価値に等しく定まる。従って消滅時点の先物価格とオプション価格の予想値をそれぞれ F^*、$\bar{C}^*$で表わすと、

$$F = E(F^*|F)$$

$$\bar{C} = e^{-rT}E(\bar{C}^*|\bar{C}) \tag{7}$$

が成立する。ただし T は現在から消滅時点までの時間である。(7)式は

$$\begin{aligned}\bar{C} &= e^{-rT}E[\mathrm{Max}(F^*-K,\ 0)\,|F] \\ &= e^{-rT}\int_K^\infty (F^*-K)f(F^*|F)\,dF^*\end{aligned} \tag{8}$$

と書ける。ただし $f(F^* \mid F)$ は F を与えたときの F^*の条件付密度関数である。F は(1)式に従うが、先物価格の場合、危険中立的世界では市場均衡条件から $E(dF/F|F)=fdt=0$ だから、係数 f について $f=0$ が成立するので、(1)式は $dF/F=vdW$ となる。従って伊藤のレンマにより

$$d\ln F = -(1/2)v^2dt + vdW$$

が成立する。これより

$$\ln(F^*/F_0) = -(1/2)v^2T + v(W^*-W_0)$$

がえられる。ただし F_0 は現在の F の値、W^* と W_0 は消滅時点と現在の W の値である。それ故、F_0 を与えたとき、$\ln F^*$は平均 $\ln F_0-(1/2)v^2T$、分散 v^2T の正規分布に従う。F_0 を単に F と書き、$g(x|F)$ を $x\equiv\ln F^*$の条件付密度関数とすると、(8)式より

$$\begin{aligned}\bar{C} &= e^{-rT}\int_{\ln K}^\infty (e^x-K)g(x|F)\,dx \\ &= e^{-rT}\{F\int_{[\ln K-\ln F-(1/2)v^2T]/(v\sqrt{T})}^\infty \phi(z)\,dz \\ &\quad -K\int_{[\ln K-\ln F+(1/2)v^2T]/(v\sqrt{T})}^\infty \phi(z)\,dz\} \\ &= e^{-rT}\{F\Phi[\ln(F/K)/(v\sqrt{T})+v\sqrt{T}/2] \\ &\quad -K\Phi[\ln(F/K)/(v\sqrt{T})-v\sqrt{T}/2]\}\end{aligned}$$

がえられる。ただし $\phi(z)$ は標準正規密度関数を示す。最後の辺は(5)の B–S 式に他ならない。

B–S 模型はヨーロッパ型オプション市場を前提としているが、実際のオプション市場

はほとんどがアメリカ型である。アメリカ型ではオプションの消滅時点t^*以前の任意の時点で権利行使（満期前行使）が許されるから、もしアメリカ型コールの価格Cよりも権利行使によってえられるキャッシュ・フロー$F-K$の方が大きければ、コールの所有者は権利行使するであろう。Merton（1973）は、配当のない株式を原資産とするアメリカ型コールは消滅日まで権利行使されることはないことを証明した。しかし、配当のある株式のアメリカ型コールとすべてのアメリカ型プットについては、満期前行使の可能性を否定できない。

先物を原資産とするアメリカ型コールは、次のようなポートフォリオΘを原資産とするアメリカ型コールと同等であることが言える。すなわちΘはその先物の1単位の買持ちとその先物価格Fドルの期間1日の貸付けからなる。次の日には値洗いにより先物価格の変化分のキャッシュ・フローがあるから、それと前日の貸付けの返済分を用いて貸付け額をその日の先物価格に等しくとり、毎日Θを組み替えて行くと、Θの市場価値はその日の先物価格Fに等しくかつ貸付けからの利子収入が入る。従ってΘは毎日配当のある株式と見做せよう。権利行使によってΘを原資産とするコールも先物を原資産とするコールも同一のキャッシュ・フロー$F-K$をもたらすから、2つのコールは同等である。かくしてアメリカ型先物オプションについては満期前行使の可能性を否定できない。なおこの点に関連した詳しい議論については辻（1988）を参照して欲しい。

そこで、Geske and Johnson（1984）はアメリカ型現物プットについての価格式を、B−S模型と同一の仮定の下で導入した。また Shastri and Tandon（1986）はそれに倣ってアメリカ型先物オプションの価格式を導出した。以下、後者の考え方を簡単に説明しておこう。彼等は Cox and Ross（1976）の危険中立的世界の論理による方法を採用する。$t_i=t+iT/n\,(i=0,1,2,\cdots,n)$ とし、区間 (t,t^*) を長さ T/n の小区間 (t_0,t_1)，(t_1,t_2)，$\cdots$，(t_{n-1},t_n) に分割する。ただし$t=t_0$、$t^*=t_n$とする。また$T_i=t_i-t$ とする。各時点t_iにおいてアメリカ型先物コールの所有者は、その時点の先物価格Fが$F>a_i$であれば権利行使して$F-K$ドルを取得し、$F\leqq a_i$であれば権利行使せずコールを保有し続けるとしよう。そのような臨界値a_iは明らかに

$$F-K=C(F,t^*-t_i\,;K),\quad i=0,1,2,\cdots,n-1$$

をみたすFの値として与えられる。ただし$C(F,t^*-t_i\,;K)$は原先物価格F、残存期間t^*-t_i、行使価格Kのアメリカ型先物コールの価格を示す。連続的ヘッジが行われているとすると、危険中立世界ではアメリカ型先物コールの価格Cは将来のキャッシュ・フローの期待値の現在価値として次のように表わされる。

$$\begin{aligned}C=&\exp(-rT_1)\int_{a_1}^{\infty}(F_1-K)f(F_1)\,dF_1\\&+\exp(-rT_2)\int_0^{a_1}\int_{a_2}^{\infty}(F_2-K)f(F_2|F_1)f(F_1)\,dF_2dF_1\\&+\exp(-rT_3)\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\int_{a_3}^{\infty}(F_3-K)f(F_3|F_1,F_2)f(F_2|F_1)f(F_1)\,dF_3dF_2dF_1+\cdots\end{aligned}\tag{9}$$

この(9)式から単純な確率計算により次が導ける。

$$C=Fw_1-Kw_2,\tag{10}$$

ただし

$$
\begin{aligned}
w_j = {} & \exp(-rT_1)\Phi(d_{1j}) \\
& +\exp(-rT_2)\Phi_2(-d_{1j}, d_{2j}; -\rho_{12}) \\
& +\exp(-rT_3)\Phi_3(-d_{1j}, -d_{2j}, d_{3j}; \\
& \rho_{12}, -\rho_{13}, -\rho_{23}) + \cdots, \quad j=1,2, \\
d_{i1} = {} & [\ln(F/a_i) + v^2 T_i/2]/(v\sqrt{T_i}), \\
d_{i2} = {} & d_{i1} - v\sqrt{T_i}, \\
\rho_{ij} = {} & \sqrt{T_i}/\sqrt{T_j}, \qquad i,j=1,2,\cdots,(i<j)
\end{aligned}
$$

であり、Φ_k は k 変量標準正規累積分布関数、ρ_{ij} は母相関係数である。$n\to\infty$ のときの⑽式を解析的アメリカ型コールの価格式と呼ぶ。なお臨界値 a_i の求め方や $n\to\infty$ のときの⑽式の近似計算のやり方についての説明は省略する。

さて、以上のようなオプション価格の諸理論について次のような問題点を指摘できよう。

(1) B−S 模型を始めとして CEV 模型、解析的アメリカ型模型など主要なオプション模型は、連続的ヘッジングによって安全ポートフォリオを組めることを前提としている。投資家は最適ヘッジ比率 $\partial\bar{C}/\partial F$ すなわちデルタの値をどのようにして知るのだろうか。一般にデルタの計算には volatility の推定を必要とし、その推定値は誤差を含むので組まれたポートフォリオはリスクを伴い、安全ポートフォリオとは言えないであろう。このことは Cox, Ross and Rubinstein (1979) の乗法的 2 項過程の模型についても言える。この模型では株価が毎期、前の期の値から u 倍または d 倍のいずれかになると仮定されている（この仮定そのものも非現実的である）が、最適ヘッジ比率を求めるには投資家は u と d の値を正確に知っていなければならない。裁定理論の適用によりオプション価格を説明しようとする試みは、最適ヘッジ比率に関する投資家の完全な知識を前提とする点で問題を含むものと言えよう。

(2) Scott (1987) の random volatility の模型や Merton (1976) の拡散ジャンプ混合模型では、裁定理論の適用の可能性は理論の性質上最初から排除されている。そこで彼等は異時点間 CAPM などの他の原理に頼る。異時点間 CAPM が成立しているとすれば、株式オプションに関する B−S 式は B−S のような裁定理論を用いなくても導出可能である。これを簡単に説明しよう。株価 S の確率微分方程式を

$$dS/S = f dt + v dW \tag{11}$$

とし、株式コールの価格 $\bar{C}$ の確率微分方程式を

$$d\bar{C}/\bar{C} = \bar{f} dt + \bar{v} dW$$

と仮定しよう。時点 t における各変数の値を所与とすると、微小時間 (t, t+dt) における株式とコールの各収益率期待値はそれぞれ $E(dS/S) = f dt$ と $E(d\bar{C}/\bar{C}) = \bar{f} dt$ である。異時点間 CAPM の結論によれば、安全利子率を r とすると

$$\bar{f} = r + [\mathrm{Cov}(d\bar{C}/\bar{C}, dY_M/Y_M) / \mathrm{Cov}(dS/S, dY_M/Y_M)](f-r) \tag{12}$$

が成立する。ただし Y_M はマーケット・ポートフォリオの市場価値である。$d\bar{C}/\bar{C}$ と dS/S は完全相関するから、$\mathrm{Cov}(d\bar{C}/\bar{C}, dY_M/Y_M) = (\bar{C}_1 S/\bar{C})\,\mathrm{Cov}(dS/S, dY_M/Y_M)$ が成立し、これを⑿式に代入すれば

$$\bar{f} = r + (\bar{C}_1 S/\bar{C})(f-r) \tag{13}$$

がえられる。一方⑾式から伊藤のレンマに

より

$$d\bar{C}=\bar{C}_1 fSdt+(1/2)\bar{C}_{11}v^2S^2dt+\bar{C}_2dt+\bar{C}_1vSdW$$

であるから $\bar{f}=(\bar{C}_1fS+(1/2)\bar{C}_{11}v^2S^2+\bar{C}_2)/\bar{C}$ である。そこでこれと(13)式より

$$r\bar{C}-r\bar{C}_1S=(1/2)\bar{C}_{11}v^2S^2+\bar{C}_2 \tag{14}$$

がえられる。この(14)式は Black and Scholes (1973) の株式コールに関する偏微分方程式と同一である。

従って、異時点間 CAPM が成立するのであれば B−S 式の導出に裁定論理の適用は不要である。しかし異時点間 CAPM は全ての種類の資本資産の価格の確率過程に関する仮定と同質的期待の仮定を必要とする。

(3) どのオプション理論においても原資産価格に何らかの確率過程が仮定されている。どのような確率過程を仮定するかによって、導かれるオプション価格式は当然異なる。しかし原資産価格がどのような確率過程で記述できるかについては未だ定説がない。現実には volatility が絶えず変動し、また新たなニュースが不連続に発生しているので価格の確率過程を定めることは至難なことであろう。従って、現状のままではどのオプション理論が正しいかを決めることはできないと言うべきである。

現行のオプション諸理論については以上のような問題点を指摘できる。

不思議なことにアメリカ型と先物オプションを含めて実際のオプション価格は最も単純な B−S 式により非常に良く説明できる。Rubinstein (1985) はヨーロッパ型株式コールについて純粋ジャンプ模型、拡散ジャンプ混合模型、CEV 模型その他の模型と B−S 模型の説明力の比較を独自のやり方で行っているが、どの模型が最も良いという結論はえられなかった。また Shastri and Tandon (1986) が行った実証結果では解析的アメリカ模型の価格式と B−S 式の当て嵌まりにはほとんど差が認められなかった。また本論文で用いたアメリカ型円先物オプション・データによる辻 (1988) の実証結果では、B−S 式の当て嵌まりは、満期までの日数が70日ないし80日を越えるオプションについてはほとんど例外なく解析的アメリカ模型の価格式より良好であり、日数がそれ以下のオプションについては後者が勝った。しかしいずれの場合も決定係数で評価した両者の差は著しく小さかった。これらの事実はどのように説明したらよいのだろうか。3.以下の個体間分布の模型はこれに対する一つの解答を与えようとするものである。

3. 資産の需要関数

最初に、先物の保有を含めた投資家の最適資産選択の模型を述べる。先物と区別するため通常の金融資産や実物資産を以下では資本資産と呼ぶことにする。

いま任意の投資家を選びその行動について述べる。その投資家の資産選択の対象となる資本資産の種類を n_1+1 個、先物の種類を n_2 個とする。

次のように記号を定める。

W_t ：t 時点における富

P_{it} ：t 時点における第 i 資本資産の価格 $(i=0,1,\cdots,n_1)$

$\tilde{P}_{i,t+T}$ ：t+T 時点における第 i 資本資産の価格の予想値 $(i=0,1,\cdots,n_1)$

$\widetilde{D}_{i,t+T}$ ：tからt+T時点までの第i資本資産の配当など（資本資産が利付証券の場合はクーポン、現物資産の場合は単位当り利益）の予想値、ただしすべてt+T時点に支払われるものとする（$i=0,1,\cdots,n_1$）

x_{it} ：t時点における第i資本資産の保有量（$i=0,1,\cdots,n_1$）

$\widetilde{F}_{j,t+T}$ ：t+T時点における第j先物価格の予想値（$j=1,\cdots,n_2$）

F_{jt} ：t時点における第j先物価格（$j=1,\cdots,n_2$）

g_{jt} ：t時点における第j先物の取組高、ただし正値は買い、負値は売りポジションとする（$j=1,\cdots,n_2$）

投資家は彼自身の投資の計画期間Tを持ち、現在をt時点とするときt+T時点における富$\widetilde{W}_{t+T}$に関し効用$u(\widetilde{W}_{t+T})$を持つとする。取引に伴う手数料や税金は無視でき、かつ先物の証拠金は不要と仮定する。このとき

$$\sum_{i=0}^{n1} P_{it}x_{it} = W_t \tag{15}$$

が成立している。また$\widetilde{W}_{t+T}$は次のように定義される。

$$\widetilde{W}_{t+T} = \sum_{i=0}^{n1}(\widetilde{P}_{i,t+T}+\widetilde{D}_{i,t+T})x_{it} + \sum_{j=1}^{n2}(\widetilde{F}_{j,t+T}-F_{jt})g_{jt}$$

効用$u(\widetilde{W}_{t+T})$の期待値は次のように$\widetilde{W}_{t+T}$の平均と分散で表わされるものとする。

$$E[u(\widetilde{W}_{t+T})]=E(\widetilde{W}_{t+T}) -(1/2)a\mathrm{Var}(\widetilde{W}_{t+T}) \tag{16}$$

ただしaは正の一定値である。以下第0資本資産は安全資産とし、$E(\widetilde{P}_{o,t+T}+\widetilde{D}_{o,t+T})=1$かつ$\mathrm{Var}(\widetilde{P}_{o,t+T}+\widetilde{D}_{o,t+T})=0$とする。$P_{ot}$をBで表わす。

次のようなベクトルまたは行列（下線を付けて表わす）を定義する。

$$\begin{aligned}
\underline{q}_t' &= (q_{1t},\cdots,q_{nt})\\
&= (x_{1t},\cdots,x_{n1,t},g_{1t},\cdots,g_{n2,t}),\\
\underline{p}_t' &= (p_{1t},\cdots,p_{nt})\\
&= (P_{1t},\cdots,P_{n1,t},F_{1t},\cdots,F_{n2,t}),\\
\underline{\widetilde{p}}_{t+T}' &= (\widetilde{P}_{1,t+T}+\widetilde{D}_{1,t+T},\cdots,\widetilde{P}_{n1,t+T}\\
&\quad +\widetilde{D}_{n1,t+T},\widetilde{F}_{1,t+T},\cdots,\widetilde{F}_{n2,t+T}),\\
\underline{Y}' &= (Y_1,\cdots,Y_n)\\
&= (E(\widetilde{P}_{1,t+T}+\widetilde{D}_{1,t+T}),\cdots,\\
&\quad E(\widetilde{P}_{n1,t+T}+\widetilde{D}_{n1,t+T}),E(\widetilde{F}_{1,t+T}),\cdots,\\
&\quad E(\widetilde{F}_{n2,t+T})),\\
\underline{S} &= E((\underline{\widetilde{p}}_{t+T}-\underline{Y})(\underline{\widetilde{p}}_{t+T}-\underline{Y})')\\
&= [s_{ij}]\ (i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n)
\end{aligned}$$

ただし、$n=n_1+n_2$とする。

投資家は共分散行列$\underline{S}$が非特異行列となるような危険資産だけを選択していると仮定する。このとき投資家が(15)式の制約のもとで(16)式の$E[u(\widetilde{W}_{t+T})]$を最大にするように$q_{it}$を定めるとすると、危険資産の最適保有量のベクトルは

$$\underline{q}_t = a^{-1}\,\underline{S}^{-1}(\underline{Y}-\underline{X}) \tag{17}$$

となり、安全資産の最適保有量は

$$q_{ot} = B^{-1}(W_t-\sum_{i=1}^{n1} p_{it}q_{it})$$

となる。ただし$\underline{X}'=(X_1,\cdots,X_n)$で

$$\begin{aligned}
X_i &= B^{-1}p_{it}, & i&=1,\cdots,n_1\\
&= p_{it}, & i&=1+n_1,\cdots,n
\end{aligned}$$

とする。

ところで、資本資産や先物の種類は非常に

多く、一人の投資家のポートフォリオに含まれる資産はそれらの極く一部に過ぎない。その時点で利用可能なすべての危険資産の個数をNとし、[1] そのなかの任意の第i危険資産だけに着目し、同一の投資計画期間Tと、t+T時点における第i資産の価格（配当などを含む）の予想値の期待値 Y_i を持つ投資家集団の、第i資産に対する平均的需要関数がどのようになるかを考察する。

投資家の番号をkとし、kに依存する変数はkを付して書きなおすと、⑰式より第i資産の最適保有量の式は

$$q_{ik} = a_k^{-1} \sum_{j=1}^{n} s_k^{ij} (Y_{jk} - X_{jk}) \tag{18}$$

のようになっている。ただし s_k^{ij} は $\underline{S}^{-1}$ の第 (i,j) 要素とする。

ここで、Tと Y_i により投資家全体を層別する。すなわち次の条件を満たす投資家の集団を $G(T, Y_i)$ または簡単にGと呼ぶ。

(a) 投資計画期間がT以上 $T+\Delta T$ 未満で、かつ

(b) 第i資産の価格（配当などを含む）の予想値の期待値が Y_i 以上 $Y_i+\Delta Y_i$ 未満。

ただし ΔT と ΔY_i は正の一定値とする。$G(T, Y_i)$ に属する投資家の数をMとする。第i資産を選択した投資家kが選択したi以外の資産の集合を Q_{ik} とすると、⑱式は次のようにも書ける。

$$q_{ik} = \sum_{j=1}^{N} v_{ijk} \tag{19}$$

ただし

$$\begin{aligned} v_{ijk} &= a_k^{-1} s_k^{ij} (Y_{jk} - X_{jk}), && \text{if } j \in Q_{ik} \\ &= 0, && \text{if } j \notin Q_{ik} \end{aligned} \tag{20}$$

ここで次の仮定を置く。

（仮定1） 任意の投資家kについて⑳式の $v_{ijk}\,(j \neq i)$ が0である確率は1に近い。

仮にすべての資産が等しい確率で投資家kにより選ばれるとすれば、⑳式において v_{ijk} $(j \neq i)$ が0となる確率は $1-(n_k-1)/(N-1)$ であり、Nが n_k に比べ非常に大であれば1に近い確率となる。しかし実際にはどの資産も等しい確率で選ばれることはなく、第i資産を選択した投資家は特定の資産を特に選ぶということが考えられる。例えばもし第i資産が先物だとすれば、それと反対符号のポジションで（その先物の）現物資産を保有する投資家が多くいるであろう。これらの投資家はヘッジャーと呼ばれる。一方その先物を選択した投資家のなかにはその現物資産を選んでいない投資家も多数いるであろう。特にその先物だけしか選択していない（つまりn=1の）投資家もいるであろう。このような投資家は狭義の投機家に相当しよう。ヘッジされる現物資産がただ1種類の場合には、（仮定1）の成立のためにはヘッジャー以外の投資家がヘッジャーに比べ著しく多いことが必要となる。[2] しかし大抵の商品または金融先物ではヘッジの対象となる現物資産の種類は多い（本論文の実証の対象である円先物

1） 厳密には危険資産の数Nは投資の計画期間Tによって異なる。Tが与えられると残存期間Tのdefault-freeの債券が安全資産となり、残存期間T以外の債券は危険資産となる。このような形で展開しても本論文の結論は変わらないが、簡単化のためNは一定としている。

2） この点に関しては、ヘッジされる現物資産の数量は限られているが、投機の量は可能性としては限りがないことを指摘しておきたい。このことは特にTelser (1958) により強調されている。彼はこれを、

のような外国通貨先物ではヘッジの対象となる現物は2国の通貨建て資産でありその種類は無数に多い)。ヘッジされる現物資産の種類が多ければヘッジャーの比率が大であっても(仮定1)が成立するであろう。第i資産がオプションの場合にも上と同様なことが言えよう。

(19)式の両辺を投資家集団 $G(T,Y_i)$ に属するすべての k について合計し、その集団に属する投資家数Mで割ると

$$(1/M)\sum_{k\in G}q_{ik}=(1/M)\sum_{k\in G}v_{iik}+\sum_{j\neq i}(1/M)\sum_{k\in G}v_{ijk} \tag{21}$$

となる。この式で右辺第2項中の $(1/M)\sum^{k\in G}v_{ijk}\ (j\neq i)$ は、v_{ijk} が0となっている確率が1に近いから、1に近い確率で第1項の $(1//M)\sum^{k\in G}v_{iik}$ に比し無視しうる大きさとなろう。

このように右辺第2項全体は個々の影響は著しく小さいがその数は非常に多い要素から成っているから、これを確率変数 ε_i として一括して表わすことが許されよう。これに対し(21)式の右辺第1項 $(1/M)\sum_{k\in G}v_{iik}$ においてはどの v_{iik} も0ではない。かくして(21)式は次のように書ける。

$$(1/M)\sum_{k\in G}q_{ik}=(1/M)\sum_{k\in G}a_k^{-1}s_k^{ii}(Y_{ik}-X_{ik})+\varepsilon_i(T,Y_i) \tag{22}$$

ところで投資家集団 $G(T,Y_i)$ においては T と Y_i はそれぞれ $(T,T+\Delta T)$ と $(Y_i,Y_i+\Delta Y_i)$ の区間に入っている。ΔT と ΔY_i を充分小さくとれば、$G(T,Y_i)$ に属するすべての投資家は同一の投資計画期間Tと同一の予想期待値 Y_i を持つと見做してよいであろう。また同一のTのもとではBも同一だから、第i資産が資本資産のとき $X_{ik}=B^{-1}P_{it}$ であるが、すべて同一の X_i としてよい。かくして(22)式は

$$(1/M)\sum_{k\in G}q_{ik}=\gamma_i(Y_i-X_i)+\varepsilon_i(T,Y_i) \tag{23}$$

ただし

$$\gamma_i=(1/M)\sum_{k\in G}a_k^{-1}s^{ii}{}_k \tag{24}$$

と表わされる。

4. 先物価格の決定

(1) 予想先物価格の個体間分布

ここでは資産を先物に限定して、先物価格が市場においてどのように定まるかを示そう。

(23)式において、資産iを先物とすれば q_{ik} は第k投資家の先物取組高を意味し、$Y_i(T)$ は $t+T$ 時点における第k投資家の先物価格についての予想の期待値 $E(\widetilde{F}_{ik,t+T})$ を意味する。また X_i は先物価格 F_{it} であり、従ってTには依存しない。以下、資産番号の添字iを省略し、代りに現在時点tを陽表的に示すと、(23)式は次のようになる。

$$(1/M)\sum_{k\in G}q_{kt}(T,Y_t)=\gamma_t(T,Y_t)(Y_t(T)-F_t)+\varepsilon_t(T,Y_t) \tag{25}$$

この先物の満期時点をmとする。現在時点tにおいて将来のc時点 $(t\leqq c\leqq m)$ の先物価格を予想する場合、予想の期待値 $Y_{kt}(c)$ は将来時点cが現在時点tよりも遠いほど個体間のばらつきが大きいであろう。そこで次

Keynes-Hicks の提唱した先物価格に関する正常の逆鞘理論(normal backwardation theory)を否定する根拠とした。

のような仮定をする。

（仮定２） 予想先時点 c の変化による予想期待値の変化に関する仮定：

$Y_{kt}(c)$ は、どの k に対しても共通な $Y_t(t)$ を初期値として、区間 $t \leqq c \leqq m$ において c が動くとともに次の確率微分方程式に従って変化する。

$$dY_{kt}(c)/Y_{kt}(c) = g_t dW_{kt}(c) \tag{26}$$

ただし、$W_{kt}(c)$ は標準 Wiener process である。また、所与の t に対しては g_t は正の一定値である。

$y_{kt}(c)=\ln Y_{kt}(c)$ と定義すると、伊藤のレンマにより(26)式から次が成立する。[3)]

$$dy_{kt}(c)=-(1/2)g_t^2\,dc+g_t dW_{kt}(c)$$

この式を確率積分すると、$y_{kt}(c)$ の初期値 $y_t(t)=\ln Y_t(t)$ が与えられているとき、c 時点における値 $y_{kt}(c)$ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} y_{kt}(c) &= y_t(t)-(1/2)g_t^2\textstyle\int_t^c d\tau \\ &\quad +g_t\textstyle\int_t^c dW_{kt}(\tau) \\ &= y_t(t)-(1/2)g_t^2(c-t) \\ &\quad +g_t(W_{kt}(c)-W_{kt}(t)) \end{aligned}$$

Wiener process の性質から、$(W_{kt}(c)-W_{kt}(t))$ は正規分布 $N(0,c-t)$ に従い、また c_1、c_2、c_3 $(c_1<c_2<c_3)$ を任意にとるとき、$W_{kt}(c_2)-W_{kt}(c_1)$ と $W_{kt}(c_3)-W_{kt}(c_2)$ は統計的に独立である。

ここで $T=c-t$ かつ $z_{kt}(c)=(W_{kt}(c)-W_{kt}(t))/\sqrt{T}$ と置くと、$z_{kt}(c)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従い、

$$y_{kt}(c)=y_t(t)-(1/2)g_t^2T+g_t\sqrt{T}z_{kt}(c) \tag{27}$$

と書ける。それ故 $y_t(t)$ を $\mu_t(t)$ で表わすと $y_{kt}(c)$ は正規分布 $N(\mu_t(c),\sigma_t^2(c))$ に従う。ただし $\mu_t(c)=\mu_t(t)-(1/2)g_t^2T$ かつ $\sigma_t^2(c)=g_t^2T$ である。換言すれば $Y_{kt}(c)=\exp(y_{kt}(c))$ は対数正規分布 $\Lambda(\mu_t(c),\sigma_t^2(c))$ に従う。以下 g_t を個体間分布の基準標準偏差と呼ぶことにする。

ここで $\mu_t(t)$ が現在時点 t の動きとともに変化する仕方について次を仮定する。

（仮定３） 母数 $\mu_t(t)$ の変化に関する仮定：

$\mu_t(t)$ は $\mu_{t-1}(t-1)$ から次のように変化する。

$$\mu_t(t)=\mu_{t-1}(t-1)+x_t \tag{28}$$

ここに x_t は時点 $t-1$ から時点 t の間（以下この期間を t 期と呼ぶ）に模型の外部から与えられる共通情報で直接には観測不可能な外生変数である。

次に $z_{kt}(c)\ (=(y_{kt}(c)-\mu_t(c))/(g_t\sqrt{T}))$ が現在時点が $t-1$ の $z_{k,t-1}(c)$ とどのように関係するかについて、次のような仮定をする。

（仮定４） 時間 t の変化による予想期待値の変化に関する仮定：

$z_{kt}(c)$ は $z_{k,t-1}(c)$ と次の関係を持つ。

$$\begin{aligned} g_t z_{kt}(c) &= \alpha_1 g_{t-1} z_{k,t-1}(c) \\ &\quad +\alpha_2 x_t z'_{kt}(c)+v_{kt}(c) \end{aligned} \tag{29}$$

3） 添字その他を省略して表わせば $y=\ln Y$ であるが、伊藤のレンマにより次が成立する。

$$\begin{aligned} dy &= (\partial y/\partial c)dc+(1/2)(\partial^2 y/\partial Y^2)g^2Y^2dc+(\partial y/\partial Y)dY \\ &= 0+(-1/(2Y^2))g^2Y^2dc+(1/Y)dY \\ &= -(1/2)g^2dc+gdW \end{aligned}$$

ただしα_1とα_2は正の一定値である。また$z'_{kt}(c)$は共通情報x_tの解釈についての個体間の相違を表わす確率変数で、標準正規分布$N(0,1)$に従うものとする。最後に$v_{kt}(c)$は第k投資家がt期中に獲得する個別情報で正規分布$N(0,\sigma_v^2)$に従うものとする。また$z_{k,t-1}(c)$、$z'_{kt}(c)$、$v_{kt}(c)$は相互に統計的に独立とする。

以上のように、この模型では共通情報x_tは2重の役割をしている。第1は(28)式において予想の個体間平均のシフトの大きさを定めており、第2は(29)式においてx_tは予想の個体間のばらつきの大きさを定める一つの要因となっている。

(29)式の両辺の2乗の期待値をとると、$z_{kt}(c)$、$z'_{kt}(c)$、$v_{kt}(c)$に関する仮定から

$$g_t^2=\alpha_1^2\, g_{t-1}^2+\alpha_2^2\, x_t^2+\sigma_v^2 \tag{30}$$

という関係がえられる。

(2) 先物市場の均衡

この先物を保有する第k投資家は固有の$(c_k, y_{kt}(c))$を持っている。個々の$(c_k, y_{kt}(c))$は確率変数$(c, y_t(c))$の実現値と考える。cと$y_t(c)$は次のような密度関数と条件付密度関数を持つものとしよう。

$h_t(c)$：予想先時点cの密度関数、$t \leqq c \leqq m$

$f(y_t(c)|c)$：cを与えたときの$y_t(c)$の条件付密度関数、$-\infty < y_t(c) < \infty$

$h_t(c)$は換言すれば投資計画期間$T(=c-t)$の個体間分布である。また、4.(1)で示したように第k投資家の$y_{kt}(c)$は正規分布$N(\mu_t(c), \sigma_t^2(c))$に従う。それ故$y_{kt}(c)$の母集団分布として$y_t(c)$の分布も$N(\mu_t(c), \sigma_t^2(c))$である。従って

$$f(y_t(c)|c)=(2\pi\sigma_t^2(c))^{-1/2}\exp\left[-(y_t-\mu_t(c))^2/(2\sigma_t^2(c))\right]$$

である。

ここで次の仮定を置く。

（仮定5） (25)式における係数γはY_tに依存しない。

前の(24)式より$\gamma=(1/M)\sum_{k\in G} a_k^{-1} s_k^{ii}$である。$a_k$は第k投資家の危険回避度を示し、後者は更に彼の富$W_{kt}$に依存する。富$W_{kt}$が$Y_{kt}$と関係を持つ可能性もあるが、ここでは両者は独立と仮定しよう。次にs_k^{ii}は共分散行列$\underline{S}_k$の逆行列の第(i, i)要素であるが、もし主観的確率分布が正規分布であれば、個々の分散共分散s_{ijk}は期待値Y_{ikt}と独立である。また、もし主観的確率分布が対数正規分布であれば、個々の分散共分散s_{ijk}は期待値Y_{ikt}に依存する形となる。しかし逆行列の要素s_k^{ii}は同時に他のn_k-1個の期待値Y_{jk}の関数であり、Y_{ik}のs_k^{ii}への影響は一般にそれほど大きくないであろう。以上のことから係数γはY_tと独立と見做してよいとする。

従ってγはTのみの関数であり、これを改めて$\gamma_t(c)$と書こう。

かくして、予想先時点cと予想価格期待値の対数$y_t(c)$を持つ投資家集団の平均最適先物契約量を$q_t(c, y_t(c))$と書くと、(25)式より次のようになる。

$$q_t(c, y_t(c))=\gamma_t(c)\,(\exp(y_t(c))-F_t)+\varepsilon_t(c, y_t(c))$$

この先物市場において先物価格F_tは各投資家の最適契約量の合計が0になるような値として決定されるであろう。すなわち市場均衡条件は、

$$\Sigma_k q_{kt}(c_k, y_{kt}(c_k))=0$$

である。ただしΣ_kはこの市場の投資家全体についての合計を意味する。投資家全体の数をH_tとすれば、上の式の左辺をH_tで割った平均についても

$$(1/H_t)\Sigma_k q_{kt}(c_k, y_{kt}(c_k))=0$$

が成立する。大数法則に関するヒンチンの定理によれば、母集団平均が存在するときサンプルサイズが限りなく大きくなるとともに標本平均は母集団平均に確率収束するから、

$$\begin{aligned}&\text{plim}(1/H_t)\Sigma_k q_{kt}(c_k, y_{kt}(c_k))\\&\quad=E[q_t(c, y_t(c))]\end{aligned}$$

である。それ故、市場参加者数が十分多いとき、市場均衡条件は

$$\begin{aligned}&E[q_t(c, y_t(c))]\\&\quad=\int_t^m\int_{-\infty}^{\infty}[\gamma_t(c)(\exp(y_t(c))-F_t)\\&\qquad+\varepsilon_t(c, y_t(c))]f(y_t(c)|c)dy_t(c)h_t(c)dc=0\end{aligned}$$

としてよい。ここで

（仮定６）

$$\int_t^m\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_t(c, y_t(c))f(y_t(c)|c)dy_t(c)h_t(c)dc=0$$

を置く。3.で述べたように、$\varepsilon_t(c, y_t(c))$は$\gamma_t(c)(\exp(y_t(c))-F_t)$に比し無視しうる大きさの無数の項$(\zeta_j\equiv(1/M)\sum_{k\in G}v_{ijk}(j=1,\cdots,N;j\neq i))$の和である。cと$y_t(c)$を動かしたとき、各項$\zeta_j$はその絶対値は無視しうるほど小さな値ながら正、0、負のいろいろな値を取りうるから、ζ_jの期待値は$|\zeta_j|$よりも更に0に近い値をとるであろう。そこで$E(\zeta_j)$は0と仮定すればζ_jの和の期待値も0となるから、（仮定６）が成立する。$E(\zeta_j)$が0でなくても正値、負値の$E(\zeta_j)$が相殺されて近似的に（仮定６）が成立しよう。

かくして市場均衡条件は次のようになる。

$$\begin{aligned}&\int_t^m\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_t(c)(\exp(y_t(c))\\&\quad-F_t)f(y_t(c)|c)dy_t(c)h_t(c)dc=0\end{aligned}\tag{31}$$

ところで

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\exp(y_t(c))f(y_t(c)|c)dy_t(c)\\&\quad=E(\exp(y_t(c))|c)\\&\quad=\exp(\mu_t(t)-(1/2)g_t^2T+(1/2)g_t^2T)\\&\quad=\exp(\mu_t(t))\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\int_t^m\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_t(c)(\exp(y_t(c))\\&\qquad-F_t)f(y_t(c)|c)dy_t(c)h_t(c)dc\\&\quad=[\exp(\mu_t(t))-F_t]\int_t^m\gamma_t(c)h_t(c)dc=0\end{aligned}\tag{32}$$

が成立しなればならない。$\int_t^m\gamma_t(c)h_t(c)dc\neq0$であるから、従って

$$\mu_t(t)=\ln F_t\tag{33}$$

が成立する。

かくして市場均衡の下では

$$\begin{aligned}&\mu_t(c)=\ln F_t-(1/2)g_t^2T,\\&\qquad\text{for all } c\ (t\leqq c\leqq m)\end{aligned}\tag{34}$$

でなければならない。従って

$$E(Y_t(c)|c)=F_t,\ \text{for all } c\ (t\leqq c\leqq m)\tag{35}$$

が成立する。

(28)式と(33)式より

$$\Delta\ln F_t=x_t\tag{36}$$

が成立している。ただし$\Delta\ln F_t=\ln F_t-\ln F_{t-1}$である。

(36)式を(30)式に代入すれば

$$g_t^2 = \alpha_1^2 g_{t-1}^2 + \alpha_2^2 (\Delta \ln F_t)^2 + \sigma_v^2 \tag{37}$$

がえられる。この式は8.で模型の検証のために用いられる。

5. 先物オプション価格の決定

ここでは4.で述べた先物を原資産とする先物オプションのプレミアムの決定についての理論を述べる。

投資家は t 時点においてこの先物について将来の特定の時点 $c=t+T$ における先物価格についての主観的予想値 $\widetilde{F}_t(c)$ を持つものとする。$\widetilde{F}_t(c)$ は主観的確率変数であり、その対数を $\xi_t(c)=\ln\widetilde{F}_t(c)$ と書く。$\xi_t(c)$ は正規分布 $N(m_t(c), s_t^2(c))$ に従うものとしよう。従って $\widetilde{F}_t(c)$ は対数正規分布 $\Lambda(m_t(c), s_t^2(c))$ に従う。このとき $\widetilde{F}_t(c)$ の期待値は $E(\widetilde{F}_t(c))=E(\exp(\xi_t(c)))=\exp(m_t(c)+s_t^2(c)/2)$ であるが、この対数値を $y_t(c)$ と書く（岩田(1986)では m_t を y_t と置いていた)。$y_t(c)=\ln E(\widetilde{F}_t(c))=m_t(c)+s_t^2(c)/2$ である。この $y_t(c)$ は個体間分布として $N(\mu_t(c), \sigma_t^2(c))$ に従うことは4.で示した。

オプションは資本資産の一種であるので、3.における資本資産の最適保有量の式が当てはまる。以下先物を原資産とするアメリカ型コール・オプションの場合についてオプション価格の決り方について考察しよう。

この場合(23)式における Y は t+T におけるコール価格の予想値の期待値であり、X はコール・プレミアムの値 C_t に $B^{-1}=e^{rT}$ を掛けたものである。以下この Y を先物価格の予想値の期待値と区別するためにUで表わし、予想先時点 $c=t+T$ の U を $U_t(c)$ と書こう。すると(23)式より c 時点のコール価格に対する予想の主観的期待値 $U_t(c)$ を持つ投資家集団 $G(c, U_t)$ のアメリカ型コールの平均保有量は

$$(1/M)\sum_{k\in G} q_{kt}(c, U_t) = \bar{\gamma}_t(c)\,(U_t(c)-e^{rT}C_t) + \bar{\varepsilon}_t(c, U_t) \tag{38}$$

と表わせる。ただし先物市場と区別するため γ と ε に ¯ を付けた。ここに（仮定5）と同様に

（仮定7） $\bar{\gamma}_t$ は $U_t(c)$ に依存しない、

が仮定されている。第 k 投資家の $e^{-rT}U_{kt}(c)$ を $A_{kt}(c)$ で表わす。予想先時点 c の変化に伴う $A_{kt}(c)$ の変化に関し、（仮定2）と同様に次を置く。

（仮定8） $A_{kt}(c)$ は、すべての k に共通な $A_t(t)=U_t(t)$ を初期値として、区間 $t \leqq c \leqq t^*$ において c が動くとともにつぎの確率微分方程式に従って変化する。ただし t^* は権利消滅時点とする。

$$dA_{kt}(c)/A_{kt}(c)=\bar{g}_t dW_{kt}(c) \tag{39}$$

ただし、$W_{kt}(c)$ は標準 Wiener process である。また与えられた t においては $\bar{g}_t$ は正の一定値である。

(39)式から伊藤のレンマにより次が成立する。

$$d\ln A_{kt}(c)=-(1/2)\bar{g}_t^2 dc+\bar{g}_t dW_{kt}(c)$$

ところで $A_{kt}(c)$ の定義より $\ln A_{kt}(c)=-r(c-t)+\ln U_{kt}(c)$ だから

$$d\ln A_{kt}(c)=-r dc+d\ln U_{kt}(c)$$

であり、$u_{kt}(c)=\ln U_{kt}(c)$ と書くと

$$du_{kt}(c)=(r-(1/2)\bar{g}_t^2)dc+\bar{g}_t dW_{kt}(c)$$

がえられる。従って c 時点における $u_{kt}(c)$ は

$$u_{kt}(c)=u_t(t)+(r-(1/2)\bar{g}_t^2)(c-t) + \bar{g}_t(W_{kt}(c)-W_{kt}(t))$$

のように表わされる。初期値 $u_t(t)$ を $\bar{\mu}_t(t)$ と書くと $u_{kt}(c)$ は正規分布 $N(\bar{\mu}_t(c),\ \bar{\sigma}_t^2(c))$ に従う。ただし $\bar{\mu}_t(c)=\bar{\mu}_t(t)+(r-(1/2)\bar{g}_t^2)T$ かつ $\bar{\sigma}_t^2(c)=\bar{g}_t^2 T$ である。

$u_{kt}(c)$ の c を与えたときの条件付密度を $f(u_t|c)$ と書くと

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(u_t(c))f(u_t|c)du_t=\exp[\bar{\mu}_t(t)+rT]$$

である。そこで $\bar{h}_t(c)$ をこのコール・オプション市場における投資家の予想先時点の密度関数とし、4.と同様に

（仮定９）

$$\int_t^{t^*}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\varepsilon}_t(c,u_t(c))f(u_t(c)|c)du_t(c)\bar{h}_t(c)dc=0$$

を置くと、市場均衡条件は、(38)式より

$$\int_t^{t^*}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\gamma}_t(c)[\exp(u_t(c))-e^{rT}C_t]$$
$$f(u_t(c)|c)du_t(c)\bar{h}_t(c)dc$$
$$=[\exp(\bar{\mu}_t(t))-C_t]\int_t^{t^*}e^{rT}\bar{\gamma}_t(c)\bar{h}_t(c)dc=0$$

である。したがってこの市場均衡条件(38)式が成立するための必要十分条件は

$$\bar{\mu}_t(t) = \ln C_t$$

である。

かくして市場均衡の下では

$$\bar{\mu}_t(c) = \ln C_t+(r-(1/2)\bar{g}_t^2)T,$$
$$\text{for all } c\ (t \leqq c \leqq t^*)$$

が成立する。従って

$$E[\exp(u_t(c))|c]=E[U_t(c)|c]=e^{rT}C_t,$$
$$\text{for all } c\ (t \leqq c \leqq t^*) \tag{40}$$

が成立する。[4)]

ところで一般には c 時点のコール価格に関する主観的期待値 $U_t(c)$ がどのようになるかを説明することは困難であるが、c が権利消滅時点 t^* に等しいときだけ $U_t(c)$ を次のように確定できる。

オプションの権利消滅時点 t^* におけるコール価格の主観的予想値は

$$\tilde{C}_t(t^*)=\tilde{F}_t(t^*)-K,\quad \text{if } \tilde{F}_t(t^*)>K$$
$$=0,\quad \text{if } \tilde{F}_t(t^*)\leqq K$$

ただしKは権利行使価格、であるからコール価格の主観的期待値 $E(\tilde{C}_t(t^*))=U_t(t^*)$ は、$\xi_t(t^*)=\ln\tilde{F}_t(t^*)$ とすると

$$U_t(t^*)=\int_{\ln K}^{\infty}(\exp(\xi_t(t^*))-K)$$
$$f(\xi_t(t^*))d\xi_t(t^*) \tag{41}$$

である。ただし $f(\xi_t(t^*))$ は正規分布 $N(m_t(t^*),\ s_t^2(t^*))$ の密度関数である。

以下記号を簡略化して添字 t と (t^*) を省略し、例えば $\xi_t(t^*)$ を単に ξ で表す。すると(41)式より

$$U=\exp(m+s^2/2)\int_{\ln K}^{\infty}(2\pi)^{-1/2}s^{-1}$$
$$\exp[-(\xi-m-s^2)^2/2s^2]d\xi$$
$$-K\int_{\ln K}^{\infty}(2\pi)^{-1/2}s^{-1}\exp[-(\xi-m)^2/2s^2]d\xi$$

4）(40)式は $C_t=e^{-rT}E[U_t(c)|c]$ すなわち市場価格が主観的期待値の集団平均値の（安全利子率で割り引いた）現在価値に等しく定まることを意味している。この結論は、危険資産の価格は予想価格の期待値からそのリスク・プレミアムを差し引いて安全利子率で割り引いたものに等しくなるとする通常の考え方からすると奇異に見えるかも知れない。しかし市場均衡でのリスク・プレミアムまたは危険の市場価格という概念そのものが同質的期待の仮定から導かれるものであり、異質的期待のもとでは、個別投資家のリスク・プレミアム（もちろん個別にはそれぞれ存在するが）は市場均衡では irrelevant になりうるのである。以上のことは先物価格の(35)式についてもあてはまる。

$$=\exp(m+s^2/2)\Phi[(m-\ln K)/s+s]$$
$$-K\Phi[(m-\ln K)/s]$$
$$=e^y\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]$$
$$-K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]$$

ここで

(仮定10) どの投資家も同一の主観的標準偏差 s を持つ、

を仮定する。このとき(41)式より市場均衡プレミアムは

$$C=e^{-r(t^*-t)}\int_{-\infty}^{\infty} Uf(U|t^*)dU \tag{42}$$
$$=e^{-r(t^*-t)}\int_{-\infty}^{\infty}\{e^y\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]$$
$$-K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]\}f(y|t^*)dy$$

により定まる。

また、4.の(34)式より次が成立している。

$$\mu=\ln F-\sigma^2/2 \tag{43}$$

ところで y は $N(\mu,\sigma^2)$ に従うから z を標準正規変量とすると $y=\mu+\sigma z$ で表される。そこでこれに(43)式を代入すると

$$y=\ln F-\sigma^2/2+\sigma z \tag{44}$$

がえられる。

(44)式を(42)式に代入すると

$$C=e^{-r(t^*-t)}\int_{-\infty}^{\infty}\{\exp(\ln F-\sigma^2/2+\sigma z)$$
$$\Phi[(\ln(F/K)-\sigma^2/2+\sigma z)/s+s/2]-K\Phi$$
$$[(\ln(F/K)-\sigma^2/2+\sigma z)/s-s/2]\}\phi(z)dz$$

となる。ただし $\phi(z)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-z^2/2)$ である。これを書換れば

$$C=e^{-r(t^*-t)}\int_{-\infty}^{\infty}\{F\Phi[(\ln(F/K)+\sigma z-$$
$$\sigma^2/2)/s+s/2]\exp(\sigma z-\sigma^2/2)$$
$$-K\Phi[(\ln(F/K)+\sigma z-\sigma^2/2)/s-s/2]\}$$
$$\phi(z)dz \tag{45}$$

がえられる。

この(45)式において予想の個体標準偏差 $\sigma=0$ と置くと

$$C_t=e^{-r(t^*-t)}\{F\Phi[\ln(F/K)/s+s/2]$$
$$-K\Phi[\ln(F/K)/s-s/2]\} \tag{46}$$

がえられる。これは同質的期待下のコール価格式と呼ぶべきものであり、もし $s=v\sqrt{T}$ であればB−S式(5)に相当する。

次に(45)式において予想の主観的標準偏差 s を 0 に限りなく近づけてみよう。$a=\ln(F/K)+\sigma z-\sigma^2/2$ と置くと(45)式における 2 つの $\Phi(\cdot)$ は s がゼロに近づくとともに、(i) $a>0$ ならば 1、(ii) $a=0$ ならば 1/2、(iii) $a<0$ ならば 0、にそれぞれ近づく。このうち(ii) $a=0$ となる確率は 0 である。従って $s\to 0$ のときの(45)式の極限値は次のようになる。

$$C_t=e^{-r(t^*-t)}\int_{\sigma/2-\ln(F/K)/\sigma}^{\infty}\{F\exp(\sigma z-\sigma^2/2)$$
$$-K\}\phi(z)dz$$
$$=e^{-r(t^*-t)}[F\int_{\sigma/2-\ln(F/K)/\sigma-\sigma}^{\infty}\phi(z)dz$$
$$-K\int_{\sigma/2-\ln(F/K)/\sigma}^{\infty}\phi(z)dz]$$

これを書き直せば

$$C_t=e^{-r(t^*-t)}\{F\Phi[\ln(F/K)/\sigma+\sigma/2]$$
$$-K\Phi[\ln(F/K)/\sigma-\sigma/2]\} \tag{47}$$

となる。これは s に σ が置き換わっている点を除けば(46)式と同じ形をしている。

岩田 (1986) においては、T ボンド先物オプションについて(45)式が測定され、σに比べ s は著しく小さいという推定結果がえられている。s が十分小さければ(45)式は(47)式により近似されうる。

アメリカ型プット・オプションの価格 P_t についても、上と同様の考え方で

$$P_t = C_t + e^{-r(t^*-t)}(K - F_t) \tag{48}$$

が成立することが示せる（岩田（1986）p.118参照）。ただし右辺の C_t は(45)式により与えられている。

6. 先物の出来高と取組高の決定

t 時点における当該限月の先物の取組高の市場全体の合計を I_t、市場参加者数を H_t で表わそう。(31)式より I_t の期待値は

$$E(I_t) = (1/2)H_t \int_t^m \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_t(c)\,|\exp(y_t(c)) - F_t|\,f(y_t(c)|c)\,dy_t(c)\,h_t(c)\,dc \tag{49}$$

となる。(27)式より

$$\exp(y_t(c)) - F_t = F_t[\exp(g_t\sqrt{T}z_{kt}(c) - (1/2)g_t^2 T) - 1]$$

である。右辺の大括弧の中の期待値は $E[\exp(g_t\sqrt{T}z_{kt}(c) - (1/2)g_t^2 T) - 1] = 0$、またその分散は $Var[\exp(g_t\sqrt{T}z_{kt}(c) - (1/2)g_t^2 T) - 1] = \exp(g_t^2 T) - 1$ である。
従って

$$Var[\exp(y_t(c)) - F_t] = F_t^2[\exp(g_t^2 T) - 1]$$

がえられる。もし $g_t^2 T$ が1よりかなり小さな値であれば

$$Var[\exp(y_t(c)) - F_t] \simeq F_t^2 g_t^2 T$$

より近似できる。以下、展開を簡単にするために、$\exp(y_t(c)) - F_t$ の確率分布を正規分布 $N(0, F_t^2 g_t^2 T)$ で近似する。

ところで標準正規変量 z の絶対値の期待値は $E|z| = \sqrt{2/\pi}$ である。[5)] それ故 $\exp(y_t(c)) - F_t = F_t g_t \sqrt{T} z$ の絶対値の期待値は

$$E|\exp(y_t(c)) - F_t| = \sqrt{2/\pi}\,F_t g_t \sqrt{T} \tag{50}$$

である。かくして(49)式は

$$E(I_t) = (1/2)\sqrt{2/\pi}\,H_t F_t g_t \int_t^m \gamma_t(c)\sqrt{T}\,h_t(c)\,dc \tag{51}$$

により近似される。

次に先物の出来高について考えよう。出来高はすべての売りと買いの量を2で割ったものに等しいから、市場全体のその先物の出来高を V_t とすると次が成立する。

$$V_t = (1/2)\sum_{k=1}^{H}|q_{kt} - q_{kt-1}|$$

ここで予想先時点の個体間分布 $h_t(c)$ の時間的変化について考察する。もし予想先時点の分布に変化がなければ $h_{t-1}(c)$ と $h_t(c)$ との関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} h_t(c) &= h_{t-1}(c)\,[1 + \int_{t-1}^{t} h_{t-1}(c)\,dc \,/ \int_{t-1}^{m} h_{t-1}(c)\,dc], && \text{if } t \leqq c \leqq m \\ &= 0, && \text{if } t-1 \leqq c \leqq t \end{aligned} \tag{52}$$

---

5) $E|z| = \int_{-\infty}^{\infty}|z|(2\pi)^{-1/2}\exp(-z^2/2)\,dz$
$= -\int_{-\infty}^{0} z(2\pi)^{-1/2}\exp(-z^2/2)\,dz + \int_0^{\infty} z(2\pi)^{-1/2}\exp(-z^2/2)\,dz$
$= -2\int_{-\infty}^{0} z(2\pi)^{-1/2}\exp(-z^2/2)\,dz$

ここで

$d[(2\pi)^{-1/2}\exp(-z^2/2)]/dz = -z(2\pi)^{-1/2}\exp(-z^2/2)$

という関係を使えば

$E|z| = 2[(2\pi)^{-1/2}\exp(-z^2/2)]_{-\infty}^{0} = \sqrt{2/\pi}$

がえられる。

これにより

$$\int_t^m h_t(c)\,dc = \int_t^m h_{t-1}(c)\,dc\,[1+\int_{t-1}^t h_{t-1}(c)\,dc \,/ \int_t^m h_{t-1}(c)\,dc] = \int_{t-1}^m h_{t-1}(c)\,dc = 1$$

が満たされる。tが満期mに余り近くないかぎり(52)式における $\int_{t-1}^t h_{t-1}(c)\,dc/\int_{t-1}^m h_{t-1}(c)\,dc$ は1に比べて非常に小さいであろうから、もし予想先時点の分布に変化がなければ $h_t(c)$ は $h_{t-1}(c)$ によって代用できるであろう。

かくして V_t の期待値は、予想先時点の分布に変化がないという仮定の下で

$$E(V_t) = (1/2)\int_{t-1}^m \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta\{H_t\gamma_t(c)\,[\exp(y_t(c)) - F_t]\}| f(y_t(c), y_{t-1}(c)|c)\,dy_{t-1}(c)\,dy_t(c)\,h_{t-1}(c)\,dc \tag{53}$$

により表わされる。

(53)式における絶対値の中身をDで表すと

$$D = \Delta\{H_t\gamma_t(c)\,[\exp(y_t(c)) - F_t]\} = H_t\gamma_t(c)F_t[\exp(g_t\sqrt{T}z_t - g_t^2 T/2) - 1] - H_{t-1}\gamma_{t-1}(c)F_{t-1}[\exp(g_{t-1}\sqrt{T+1}\,z_{t-1} - g_{t-1}^2(T+1)/2) - 1]$$

最後の辺の各項の大括弧の期待値は0だから $E(D)=0$ が成立する。

更にDの分散は

$$\begin{aligned} Var(D) &= E(D^2) \\ &= H_t^2\gamma_t^2F_t^2[\exp(g_t^2T) - 1] + H_{t-1}^2\gamma_{t-1}^2F_{t-1}^2[\exp(g_{t-1}^2(T+1)) - 1] \\ &\quad - 2H_t\gamma_tF_tH_{t-1}\gamma_{t-1}F_{t-1}[\exp(\sqrt{T(T+1)}\,Cov(g_tz_t, g_{t-1}z_{t-1})) - 1] \end{aligned}$$

となる。[6)]

ところで、(仮定4)より

$$Cov(g_tz_t, g_{t-1}z_{t-1}) \simeq \alpha_1 g_{t-1}^2$$

が成立するから[7)]

$$\begin{aligned} &Var(D) \\ &\simeq H_t^2\gamma_t^2F_t^2[\exp(g_t^2T) - 1] \\ &\quad + H_{t-1}^2\gamma_{t-1}^2F_{t-1}^2[\exp(g_{t-1}^2(T+1)) - 1] \\ &\quad - 2H_t\gamma_tF_tH_{t-1}\gamma_{t-1}F_{t-1} \\ &\quad [\exp(\sqrt{T(T+1)}\,\alpha_1 g_{t-1}^2) - 1] \\ &\simeq H_t^2\gamma_t^2F_t^2g_t^2T + H_{t-1}^2\gamma_{t-1}^2F_{t-1}^2g_{t-1}^2(T+1) \end{aligned}$$

---

6)

$$\begin{aligned} E(D^2) &= H_t^2\gamma_t^2F_t^2[E\exp(2g_t\sqrt{T}z_t - g_t^2T) - 2E\exp(g_t\sqrt{T}z_t - g_t^2T/2) + 1] + H_{t-1}^2\gamma_{t-1}^2F_{t-1}^2 \\ &\quad [E\exp(2g_{t-1}\sqrt{T+1}z_{t-1} - g_{t-1}^2(T+1)) - 2E\exp(g_{t-1}\sqrt{T+1}z_{t-1} - g_{t-1}^2(T+1)/2) + 1] - 2H_t\gamma_tF_tH_{t-1}\gamma_{t-1}F_{t-1} \\ &\quad [E\exp(g_t\sqrt{T}z_t - g_t^2T/2 + g_{t-1}\sqrt{T+1}z_{t-1} - g_{t-1}^2(T+1)/2) - E\exp(g_t\sqrt{T}z_t - g_t^2T/2) - E\exp(g_{t-1}\sqrt{T+1}z_{t-1} \\ &\quad - g_{t-1}^2(T+1)/2) + 1] \end{aligned}$$

これから本文の式がえられる。

7) (仮定4)より $Cov(g_tz_{kt}(c), g_{t-1}z_{k,t-1}(c)) = \alpha_1 g_{t-1}^2$ であるが、$z_{kt}(c)$ と z_t の間には

$$g_tz_t = [\exp(y_t(c)) - F_t]/(F_t\sqrt{T}) = [\exp(g_t\sqrt{T}z_{kt}(c) - g_t^2T/2) - 1]/\sqrt{T}$$

という関係がある。一般にuとvが2変量正規分布に従うとき

$$Cov(e^u, e^v) = E(u)E(v)[\exp(Cov(u,v)) - 1]$$

であるから、

$$Cov(g_tz_t, g_{t-1}z_{t-1}) = [\exp(\sqrt{T(T+1)}\,\alpha_1 g_{t-1}^2) - 1]/\sqrt{T(T+1)} \simeq \alpha_1 g_{t-1}^2$$

が成立する。

$$-2H_t\gamma_tF_tH_{t-1}\gamma_{t-1}F_{t-1}\sqrt{T(T+1)}\,\alpha_1 g_{t-1}^2 \tag{54}$$

が導ける。

これは更に

$$\mathrm{Var}(D)=H_{t-1}^2\gamma_{t-1}^2F_{t-1}^2(T+1)\,[g_t^2T/(T+1)+g_{t-1}^2-2\sqrt{T/(T+1)}\,\alpha_1 g_{t-1}^2+R] \tag{55}$$

と書換えられる。ただしRは

$$R=\{\Delta(H_t\gamma_tF_t)^2/(H_{t-1}\gamma_{t-1}F_{t-1})^2\}\,g_t^2T/(T+1)-2\{\Delta(H_t\gamma_tF_t)/(H_{t-1}\gamma_{t-1}F_{t-1})\}\alpha_1 g_{t-1}^2\sqrt{T/(T+1)}$$

である。Tが十分大きいとすると、(55)式の右辺において、$T/(T+1)$は近似的に1と置けるし、またRは他の項に比べてと無視できよう。かくして(54)はTが十分大きいとき

$$\mathrm{Var}(D)=(H_{t-1}\gamma_{t-1}F_{t-1})^2(T+1)\,g_{t-1}^2\,[(g_t/g_{t-1})^2+1-2\alpha_1]$$

と近似できる。

かくして(50)式の導出と同様にして

$$E|D|=\sqrt{2/\pi}\,H_{t-1}\gamma_{t-1}F_{t-1}\sqrt{T+1}\,g_{t-1}\,((g_t/g_{t-1})^2+1-2\alpha_1)^{1/2}$$

となる。従って

$$E(V_t)=(1/2)\sqrt{2/\pi}\,H_{t-1}F_{t-1}g_{t-1}\,((g_t/g_{t-1})^2+1-2\alpha_1)^{1/2}\int^{m}_{t-1}\gamma_{t-1}(c)\sqrt{T+1}\,h_{t-1}(c)\,dc \tag{56}$$

がえられる。

ところで(51)式より

$$E(I_{t-1})=(1/2)\sqrt{2/\pi}\,H_{t-1}F_{t-1}g_{t-1}\int^{m}_{t-1}\gamma_{t-1}(c)\sqrt{T+1}\,h_{t-1}(c)\,dc \tag{57}$$

であるから、(56)式と(57)式より

$$E(V_t)/E(I_{t-1})=((g_t/g_{t-1})^2+1-2\alpha_1)^{1/2} \tag{58}$$

という簡単な関係がえられる。この式は、観測困難なH_t、$\gamma_t(c)$、$h_t(c)$が消去されているので、実証可能な形となっている。8.でこの式の検証を行う。

7.　B－S式と個体間分布模型価格式の推定

(1)　B－S式の計測

B–S模型は現在広く普及するに至り、まずこの模型が実証的にどの程度の説明力を持つのかを確認しておこう。コールについては(5)式が、プットについては(6)がB–S式と呼ばれるプレミアムの決定式であったが、これらから、プレミアムの理論値は、①先物価格F②権利行使価格K③利子率r④満期までの時間T⑤先物価格のボラティリティvの5つの変数に依存することがわかる。これらのうち①～④は実際のデータが利用できるが、⑤のvのみは未知である。それ故計測は未知パラメターvを推定する形の非線形回帰モデルを作ればよい。ところで利用可能なデータは日々の終値であるから、日次単位で計測を行い、1日に存在する様々な権利行使価格に対し成立しているプレミアムが1つのサンプルを構成するものとする。このサンプルから、vの推定値は(5)を $\Psi_C(v;F,K,r,T)$ とすると、

$$\Sigma_i[C_i-\Psi_C(v;F,K_i,r,T)]^2+\Sigma_j[P_j-\Psi_C(v;F,K_j,r,T)-e^{-rT}(K_j-F)]^2 \tag{59}$$

ただしC_i、P_iはK_iに対するコール、プッ

トのプレミアムの現実値

を最小にするような値として求めることができる。ある条件の下この推定値 $\hat{v}$ は v の一致推定量になることが証明されている。なお v の探索方法としては黄金分割法（Golden Section Search：GSS 法）を採用し、探索の上限を0.01、下限を0.001、収束基準を 1.0×10^{-5} とした。[8)]

使用するデータはシカゴの CME (Chicago Mercantile Exchange) で取引されている日本円先物オプションのデータである。先物価格も同じ CME のもので、オプションの満期と同じ限月のものを使った。また利子率については TB レートを用い、オプション満期にその満期日が最も近いものの bid と ask レートの平均値を求めた。これらのデータは全て Wall Street Journal に掲載されている終値である。

計測期間は1986年4月から1988年3月までで、オプションの満期が各年の3、6、9、12月のものを計測した。ここでは紙面の都合上、1987年3月満期物と1987年12月満期物のうち、満期日までの日数が偶数のもののみ掲載する。[9)] これが第1表である。

計測結果を見るとほとんどのもので決定係数が0.999を越え、推定ボラティリティの t 値も非常に高い。掲載したものではわずかに1987年3月満期物の1986年11月7日の結果のみが悪くなっている。これは新聞紙上に発表されているデータそのものが間違っていることが考えられる。以上のことから若干の例外を除きB－S模型は非常に高い説明力を持ち、このこと自体、B−S 式が投資家に広く浸透し、オプションの実際の価格形成に対して大きな影響力を持つに至っていることの証拠なのかもしれない。

(2) 個体間分布模型価格式の推定

7.(1)で B−S 式が非常に高い説明力を持つことがわかったが、これはあくまでも(5)、(6)の式の形がたまたま現実のデータにうまくあてはまるということであって、実際の投資家が B−S 模型で考えられている様な行動をしているということを意味しているのではない。B−S 模型では、投資家による連続的なヘッジングの想定のもと裁定が起こり得ない状況を均衡と定義し、ヘッジポートフォリオの利回りがその要求利回りである安全資産利子率に等しいという均衡条件からプレミアムを導出する。しかし2.で述べたように、実際

8）GSS 法の概略を説明すると以下の通りである。単峰関数 $G(x)$ の最小値を与える x の値 x^* を探索する手順は、探索の範囲として $[\upsilon_1, \chi_1]$ を初めに与え、
$\lambda=1-(2/(1+\sqrt{5}))$ という黄金分割比を仮定し、収束基準を ε とすると、
① $x_{11}=\lambda(\chi_1-\upsilon_1)+\upsilon_1$、$x_{21}=(1-\lambda)(\chi_1-\upsilon_1)+\upsilon_1$ により x_{11}、x_{21} を計算し、$k=1$ とおき③へ進む。
② $x_{1k}=\lambda(\chi_k-\upsilon_k)+\upsilon_k$、$x_{2k}=(1-\lambda)(\chi_k-\upsilon_k)+\upsilon_k$ により x_{1k}、x_{2k} を計算し、もし $x_{2k}-x_{1k}\geqq\varepsilon$ なら③へ、もし $x_{2k}-x_{1k}<\varepsilon$ なら④へ進む。
③ もし $G(x_{1k})>G(x_{2k})$ ならば、$\upsilon_{k+1}=x_{1k}$、$\chi_{k+1}=\chi_k$、$k=k+1$ とおき、②へ進む。もし $G(x_{1k})\leqq G(x_{2k})$ ならば、$\chi_{k+1}=x_{2k}$、$\upsilon_{k+1}=\upsilon_k$、$k=k+1$ とおき、②へ進む。
④ $G(X_{1k})>G(x_{2k})$ ならば、x^* は x_{2k}、$G(x_{1k})\leqq G(x_{2k})$ ならば、x^* は x_{1k} とする。

9）本論文では満期日までの日数が100日を超えるものとそうでないものとの2つの場合を掲載した。その他の満期のものについても同様の結果が得られている。

第1表　Black-Scholes 式の計測

(1)　限月：1987年12月

月	日	年	T	$\hat{v}$	t 値	R^2	S.E.	n
7	14	86	236	0.007374	545.558	0.999836	0.008522	3
	16		234	0.007367	358.330	0.999657	0.014874	4
	18		232	0.007357	288.766	0.999697	0.016129	3
	22		228	0.007346	356.384	0.999852	0.012865	3
	24		226	0.007217	138.393	0.998105	0.037717	4
	28		222	0.006963	690.350	0.999921	0.008076	5
	30		220	0.006928	365.236	0.999687	0.016333	6
8	1		218	0.007029	213.754	0.998727	0.033222	8
	5		214	0.007047	178.468	0.997630	0.039351	8
	7		212	0.006973	40.169	0.960178	0.184210	9
	11		208	0.006618	663.509	0.999883	0.009847	8
	13		206	0.006427	615.299	0.999847	0.010872	9
	15		204	0.006263	504.705	0.999790	0.012825	9
	19		200	0.006433	535.882	0.999835	0.012280	9
	21		198	0.006478	318.264	0.999491	0.020772	9
	25		194	0.006455	484.085	0.999759	0.013482	9
	27		192	0.006433	540.261	0.999743	0.012641	10
	29		190	0.006472	295.922	0.999163	0.023192	10
9	2		186	0.006653	348.773	0.999353	0.020039	10
	4		184	0.006618	239.591	0.998644	0.028642	10
	8		180	0.006416	89.437	0.991114	0.073219	10
	10		178	0.006788	566.361	0.999757	0.012302	10
	12		176	0.006918	334.126	0.999283	0.021077	10
	16		172	0.007137	375.779	0.999420	0.019069	10
	18		170	0.007120	154.345	0.997424	0.044013	9
	22		166	0.007148	198.077	0.998044	0.035963	10
	24		164	0.006810	249.077	0.998808	0.026929	10
	26		162	0.006580	155.524	0.997366	0.041279	10
	30		158	0.005932	47.932	0.980682	0.118033	10
10	2		156	0.005559	413.401	0.999749	0.012664	10
	6		152	0.005531	342.011	0.999643	0.015014	10
	8		150	0.005277	175.326	0.998772	0.027547	10
	10		148	0.005288	222.731	0.999230	0.021559	10
	14		144	0.005204	251.800	0.999462	0.018484	10
	16		142	0.005131	287.396	0.999594	0.015787	10
	20		138	0.005023	215.718	0.999322	0.020149	10
	22		136	0.005131	292.596	0.999638	0.015036	10
	24		134	0.005904	299.699	0.999684	0.016280	10
	28		130	0.005970	301.547	0.999520	0.017183	11
	30		128	0.006134	314.359	0.999593	0.016752	11
11	3		124	0.005587	281.401	0.999705	0.015978	11
	5		122	0.005103	444.258	0.999902	0.009029	11
	7		120	0.004528	5.567	0.340652	0.621077	11

月	日	年	T	$\hat{v}$	t 値	R^2	S.E.	n
	11	86	116	0.005211	403.637	0.999880	0.010064	11
	13		114	0.005187	272.347	0.999661	0.014960	11
	17		110	0.005176	295.319	0.999785	0.013107	11
	19		108	0.005103	489.582	0.999936	0.007708	11
	21		106	0.004804	546.808	0.999949	0.006525	12
	25		102	0.004804	548.348	0.999954	0.006439	12
	27		100	0.000000	0.000	0.000000	0.000000	0
12	1		96	0.004804	211.078	0.999705	0.016111	12
	3		94	0.004804	365.426	0.999907	0.009173	12
	5		92	0.004804	376.215	0.999919	0.008753	12
	9		88	0.004730	293.826	0.999883	0.010648	12
	11		86	0.004657	175.919	0.999702	0.017156	12
	15		82	0.004392	173.119	0.999697	0.015744	12
	17		80	0.004065	172.133	0.999760	0.014006	12
	19		78	0.004156	191.223	0.999847	0.012664	12
	23		74	0.004156	140.496	0.999706	0.016834	12
	25		72	0.000000	0.000	0.000000	0.000000	0
	29		68	0.004692	184.342	0.999646	0.014497	11
	31		66	0.004748	160.655	0.999738	0.016272	11
1	2	87	64	0.004859	220.275	0.999756	0.012253	11
	6		60	0.004567	154.731	0.999606	0.015144	10
	8		58	0.004741	67.544	0.998586	0.025879	6
	12		54	0.004832	124.933	0.999591	0.019055	11
	14		52	0.006168	155.968	0.998970	0.020287	9
	16		50	0.006207	150.207	0.999242	0.021849	11
	20		46	0.007172	179.610	0.999121	0.020021	10
	22		44	0.006855	205.879	0.999452	0.016218	10
	26		40	0.006534	88.849	0.997385	0.033239	10
	28		38	0.006381	20.601	0.985954	0.102273	6
	30		36	0.006872	239.771	0.999805	0.012935	12
2	3		32	0.005615	129.442	0.999549	0.016773	11
	5		30	0.005322	82.858	0.999374	0.023414	12
	9		26	0.005942	95.449	0.999233	0.021508	11
	11		24	0.005768	103.077	0.999637	0.017980	12
	13		22	0.004556	55.057	0.999452	0.022368	12
	17		18	0.004528	50.068	0.999519	0.021021	12
	19		16	0.004765	51.415	0.999568	0.020176	12
	23		12	0.004410	50.253	0.999775	0.014818	12
	25		10	0.004055	42.121	0.999780	0.013627	11
	27		8	0.003097	43.841	0.999945	0.007306	12
3	3		4	0.003215	160.075	0.999998	0.001416	12
	5		2	0.004065	92.440	0.999997	0.001769	12

(2) 限月：1987年12月

月	日	年	T	$\hat{v}$	t 値	R^2	S.E.	n
9	8	87	88	0.006095	348.645	0.999730	0.014682	12
	10		86	0.006099	287.433	0.999669	0.017359	12
	14		82	0.005998	340.049	0.999801	0.013735	12
	16		80	0.005615	236.224	0.999612	0.018202	12
	18		78	0.005570	149.975	0.999238	0.028014	12
	22		74	0.005305	277.703	0.999795	0.013696	12
	24		72	0.005284	230.811	0.999683	0.016281	12
	28		68	0.004901	157.293	0.999578	0.020601	12
	30		66	0.005114	155.016	0.999543	0.021285	12
10	2		64	0.004911	107.688	0.999257	0.028342	12
	6		60	0.004685	93.550	0.999218	0.029339	12
	8		58	0.005267	130.592	0.999365	0.024727	12
	12		54	0.005622	151.234	0.999378	0.022602	12
	14		52	0.005688	135.483	0.999226	0.025094	12
	16		50	0.005852	74.625	0.998076	0.045541	12
	20		46	0.006816	127.760	0.999169	0.030000	12
	22		44	0.006315	88.618	0.998173	0.038762	12
	26		40	0.007283	72.900	0.997406	0.053314	12
	28		38	0.007621	57.952	0.993689	0.072072	12
	30		36	0.007273	49.001	0.991738	0.075139	11
11	3		32	0.007346	73.896	0.996247	0.047771	11
	5		30	0.007520	61.775	0.994100	0.055191	10
	9		26	0.007830	72.817	0.994832	0.043054	9
	11		24	0.008039	88.684	0.997416	0.036449	10
	13		22	0.006618	87.053	0.998249	0.027521	10
	17		18	0.006545	112.937	0.999245	0.018377	10
	19		16	0.006371	76.503	0.998755	0.024175	10
	23		12	0.006461	82.331	0.999430	0.018634	10
	25		10	0.005542	78.395	0.999646	0.013915	10
	27		8	0.005497	48.176	0.999276	0.018247	9
12	1		4	0.005949	55.313	0.999720	0.011449	10
	3		2	0.005604	54.250	0.999942	0.006227	10

(注) Tは満期日までの日数、R^2 は決定係数、S.E. は回帰の標準誤差、n はサンプルサイズ。

にはB−S模型の様な連続的ヘッジングを行うことは不可能である。その意味でB−S式の導出にあたってBlack−Scholesとは異なる想定をし、B−S式の形に様々な解釈を与えることが可能になる。5.で導いた(46)式や(47)式などはその一例であろう。

3.〜6.においては、投機が支配的な市場を想定した場合、人々の期待の異質性を主観的予測値の個体間分布で捉えることにより、その市場の均衡条件からオプションのプレミアムの理論式(45)が導かれることを示した。(45)式はB−S模型のような連続的ヘッジングを全く想定してないにもかかわらず、B−S式を内包する形で導かれている。それ故本論文の

様な個体間分布模型の観点からB−S式を再検討すると、2つの解釈を与えることが可能になる。

(1) 予想の個体間標準偏差$\sigma=0$、かつ、予想の主観的標準偏差sが全ての投資家で同じ場合。すなわち全ての投資家が先物価格について全く同じ主観的予測を持つ場合で、このとき同質的期待模型として(46)式が導かれる。

(2) 予想の主観的標準偏差sが予想の個体間標準偏差σに比べて非常に小さく、無視できる様な場合。すなわち各投資家はその主観的予測値に自信を持っているが、投資家間ではその予測値にかなりの散らばりが見られる場合である。これは異質的確信模型と称することができ、(45)式から$s\to0$とすると(47)式が導かれる。

これらの解釈から、B−S式(5)の$v\sqrt{T}$は、(1)によれば先物価格の予想値(の対数値)の主観的な標準偏差を表わしていることになり、(2)によれば先物価格の予想値(の対数値)の個体間標準偏差を表わしていることになる。

B−S式のvが何を意味しているのかを判断する直接的な方法の1つは、2.で述べたHSD(価格変化率の標本標準偏差)とISD($\hat{v}$)との比較であろう。第2表には限月別に円先物価格の変化率($\Delta\ln F$で近似できる)の標本標準偏差とvの標本平均の値を示した。両者を比較すると、いずれの限月でも$\Delta\ln F$の標準偏差がvの平均をかなり上回っていることがわかる。さらに第1〜3図の(1)には、限月別に、各日における、20営業日前から当日までのデータによる$\Delta\ln F$の標本標準偏差(HSD)と$\hat{v}$(ISD)についての時系列グラフを示した。これらを見ても、ISDとHSDの動きにはかなりの差があることがわかる(第1〜3図の(3)には$\Delta\ln F$の動きをグラフに示した)。以上のことは、$\hat{v}$が先物価格のボラティリティの推定値ではないことを示唆するものである。

個体間分布模型を使うとvには前に述べた2つの解釈が可能になるが、どちらの解釈がより妥当なのであろうか。その判断の材料は、個体間分布模型価格式(45)を使って計測することにより得られるσ、sの各推定値を、B−S

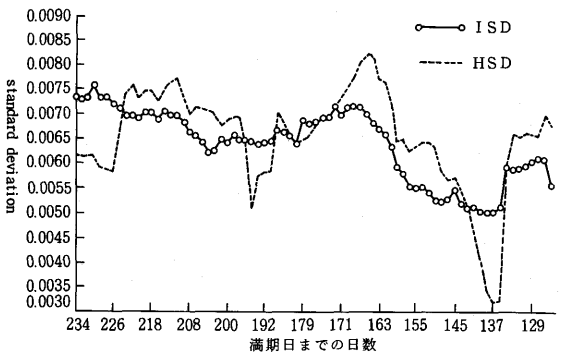
第2表　$\Delta\ln F$の標本標準偏差と$\hat{v}$の標本平均

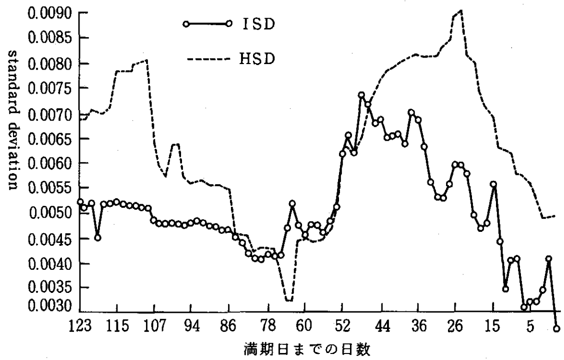
限　月		$\Delta\ln F$の標本標準偏差		$\hat{v}$の標本平均	
1986	6月	0.009796	(46)	0.007876	(47)
	9月	0.008280	(107)	0.007064	(108)
	12月	0.007640	(170)	0.006527	(169)
1987	3月	0.006457	(169)	0.005750	(160)
	6月	0.006412	(124)	0.005403	(122)
	9月	0.007046	(63)	0.005394	(61)
	12月	0.007051	(61)	0.006178	(62)
1988	3月	0.010048	(59)	0.006632	(55)

(注)( )はサンプルサイズ

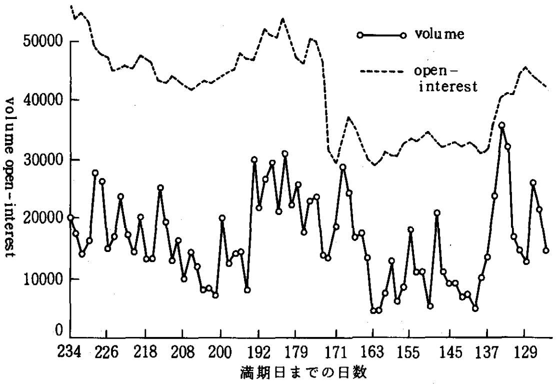
第1図 （限月：1987年3月）

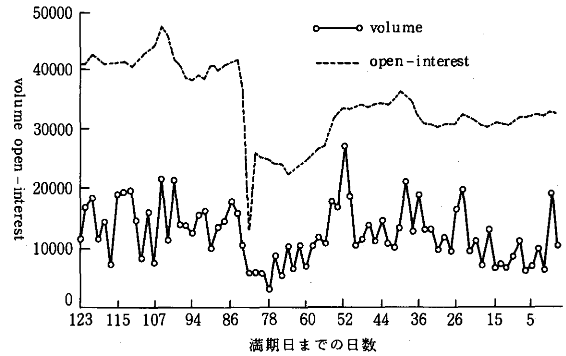
(1) ＩSDとHSD



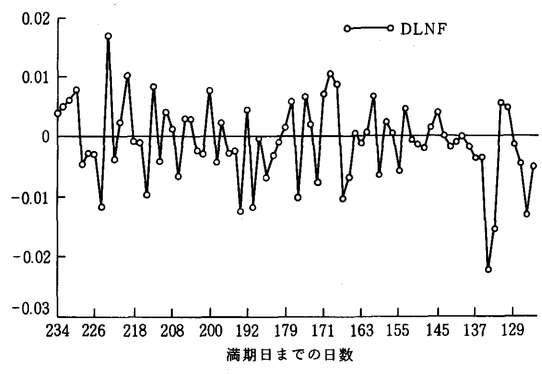


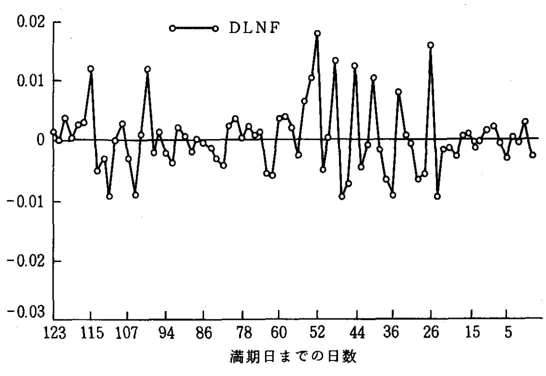
(2) VolumeとOpen－Interest





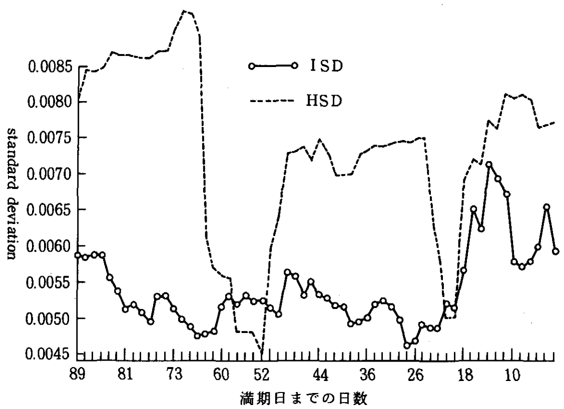
(3) DLNF



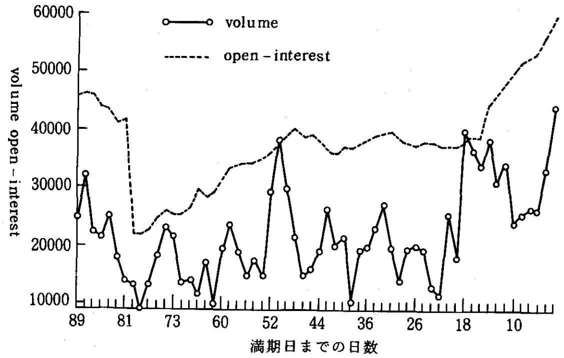


第２図　(限月： 1987 年９月)

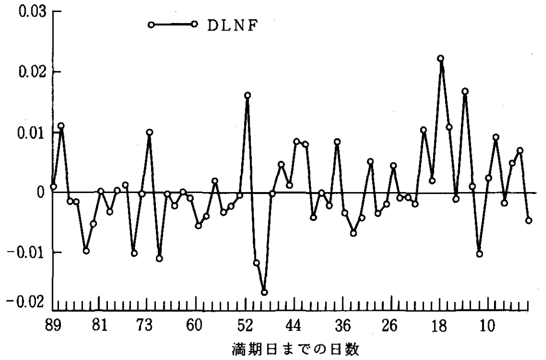
(1)　ISDとHSD



(2)　VolumeとOpen-Interest

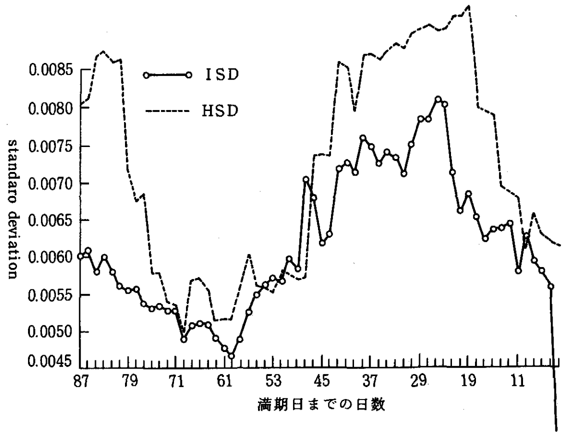


(3)　DLNF

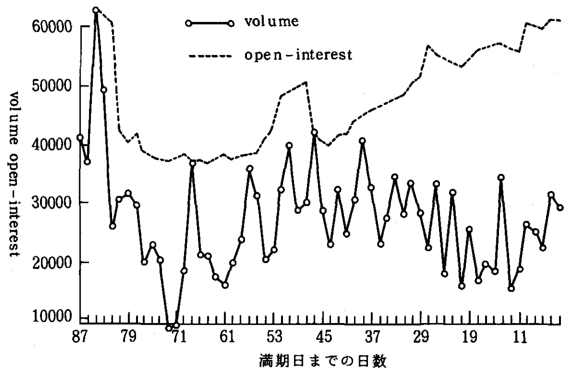


第３図　(限月： 1987 年12月)

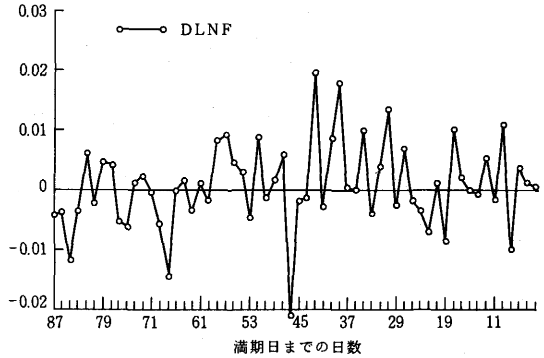
(1)　ISDとHSD



(2)　VolumeとOpen-Interest



(3)　DLNF



第3表　個体間分布模型価格式の計測

(1)　限月：1987年3月

月	日	年	T	$\hat{g}$	t値	$\hat{b}$	t値	R^2	S.E.	n
7	14	86	236	0.007357	270.029	0.000453	2.569	0.999837	0.012012	3
	16		234	0.007346	123.623	0.000406	1.369	0.999762	0.015176	4
	18		232	0.007339	187.613	0.000496	0.310	0.999701	0.022660	3
	22		228	0.007335	127.139	0.000471	1.306	0.999857	0.017905	3
	24		226	0.007206	10.341	0.000525	0.077	0.998149	0.045655	4
	28		222	0.006952	41.418	0.000507	0.315	0.999931	0.008727	5
	30		220	0.006900	244.823	0.000376	1.552	0.999839	0.013101	6
8	1		218	0.007012	27.841	0.000518	0.217	0.998743	0.035662	8
	5		214	0.007019	92.733	0.000394	0.988	0.997731	0.041588	8
	7		212	0.006963	28.217	0.000424	0.249	0.960268	0.196707	9
	11		208	0.006601	116.683	0.000489	0.915	0.999885	0.010587	8
	13		206	0.006409	104.632	0.000471	0.758	0.999853	0.011380	9
	15		204	0.006252	400.310	0.000435	2.007	0.999804	0.013249	9
	19		200	0.006416	100.959	0.000489	0.976	0.999843	0.012812	9
	21		198	0.006461	57.985	0.000489	0.527	0.999508	0.021836	9
	25		194	0.006444	385.717	0.000406	4.136	0.999769	0.014118	9
	27		192	0.006423	38.309	0.000471	0.291	0.999761	0.012937	10
	29		190	0.006461	19.593	0.000478	0.152	0.999179	0.024362	10
9	2		186	0.006642	324.855	0.000431	1.826	0.999352	0.021275	10
	4		184	0.006603	76.393	0.000361	0.403	0.998694	0.029815	10
	8		180	0.006405	14.921	0.000500	0.146	0.991119	0.077642	10
	10		178	0.006771	43.427	0.000500	0.346	0.999774	0.012579	10
	12		176	0.006907	179.556	0.000475	0.871	0.999298	0.022114	10
	16		172	0.007120	258.768	0.000406	2.787	0.999450	0.019698	10
	18		170	0.007103	133.317	0.000489	0.638	0.997462	0.046700	9
	22		166	0.007137	86.553	0.000507	0.499	0.998084	0.037755	10
	24		164	0.006799	31.287	0.000493	0.214	0.998822	0.028392	10
	26		162	0.006569	11.982	0.000482	0.086	0.997406	0.043451	10
	30		158	0.005904	4.315	0.000570	0.039	0.980710	0.125103	10
10	2		156	0.005549	114.049	0.000406	0.775	0.999761	0.013120	10
	6		152	0.005521	303.961	0.000383	1.761	0.999654	0.015671	10
	8		150	0.005267	23.102	0.000394	0.178	0.998817	0.028678	10
	10		148	0.005277	23.486	0.000394	0.179	0.999250	0.022572	10
	14		144	0.005193	213.818	0.000336	2.641	0.999470	0.019453	10
	16		142	0.005120	181.058	0.000365	1.091	0.999594	0.016728	10
	20		138	0.005012	177.589	0.000307	2.595	0.999337	0.021148	10
	22		136	0.005114	239.045	0.000289	2.397	0.999735	0.013652	10
	24		134	0.005887	248.026	0.000401	1.605	0.999688	0.017148	10
	28		130	0.005960	283.578	0.000365	2.546	0.999528	0.017957	11
	30		128	0.006117	173.745	0.000347	1.086	0.999611	0.017281	11
11	3		124	0.005570	248.420	0.000343	3.270	0.999718	0.016481	11
	5		122	0.005086	512.169	0.000275	4.364	0.999934	0.007812	11
	7		120	0.004511	0.706	0.000471	0.007	0.340803	0.654598	11

月	日	年	T	$\hat{g}$	t 値	$\hat{b}$	t 値	R^2	S.E.	n
	11	86	116	0.005200	316.654	0.000289	2.277	0.999891	0.010144	11
	13		114	0.005176	233.373	0.000300	2.879	0.999708	0.014616	11
	17		110	0.005159	266.888	0.000300	3.163	0.999845	0.011724	11
	19		108	0.005092	461.548	0.000300	4.939	0.999948	0.007280	11
	21		106	0.004793	205.969	0.000388	2.366	0.999954	0.006529	12
	25		102	0.004799	527.676	0.000336	4.759	0.999956	0.006616	12
	27		100	0.000000	0.000	0.000000	0.000	0.000000	0.000000	0
12	1		96	0.004786	168.358	0.000271	1.560	0.999740	0.015865	12
	3		94	0.004789	324.477	0.000278	4.397	0.999924	0.008686	12
	5		92	0.004793	332.169	0.000282	5.230	0.999928	0.008638	12
	9		88	0.004713	259.644	0.000275	3.988	0.999897	0.010485	12
	11		86	0.004647	158.785	0.000293	2.928	0.999713	0.017650	12
	15		82	0.004365	24.121	0.000478	0.262	0.999711	0.016124	12
	17		80	0.004037	51.585	0.000467	0.613	0.999765	0.014553	12
	19		78	0.004145	106.556	0.000311	0.826	0.999851	0.013117	12
	23		74	0.004145	131.081	0.000275	3.334	0.999714	0.017418	12
	25		72	0.000000	0.000	0.000000	0.000	0.000000	0.000000	0
	29		68	0.004670	23.986	0.000507	0.254	0.999658	0.015025	11
	31		66	0.004737	135.877	0.000300	2.288	0.999741	0.017061	11
1	2	87	64	0.004849	208.751	0.000336	6.377	0.999770	0.012546	11
	6		60	0.004539	28.428	0.000507	0.315	0.999618	0.015825	10
	8		58	0.004730	58.632	0.000340	0.522	0.998607	0.028716	6
	12		54	0.004821	117.523	0.000332	2.494	0.999599	0.019897	11
	14		52	0.006158	134.982	0.000394	1.840	0.998986	0.021515	9
	16		50	0.006190	131.730	0.000394	3.419	0.999281	0.022436	11
	20		46	0.007154	58.475	0.000525	0.390	0.999151	0.020878	10
	22		44	0.006838	183.759	0.000449	3.293	0.999464	0.017002	10
	26		40	0.006524	79.148	0.000464	0.623	0.997414	0.035055	10
	28		38	0.006347	2.894	0.000696	0.031	0.985976	0.114257	6
	30		36	0.006855	218.424	0.000442	5.008	0.999820	0.013051	12
2	3		32	0.005604	123.265	0.000412	1.553	0.999562	0.017436	11
	5		30	0.005288	14.729	0.000599	0.170	0.999391	0.024221	12
	9		26	0.005908	22.816	0.000671	0.260	0.999237	0.022612	11
	11		24	0.005730	19.568	0.000653	0.227	0.999648	0.018546	12
	13		22	0.004522	16.053	0.000547	0.212	0.999466	0.023157	12
	17		18	0.004494	18.832	0.000565	0.273	0.999545	0.021452	12
	19		16	0.004726	17.582	0.000588	0.246	0.999594	0.020514	12
	23		12	0.004375	40.533	0.000565	1.101	0.999782	0.015323	12
	25		10	0.004027	14.828	0.000482	0.199	0.999786	0.014166	11
	27		8	0.003075	41.721	0.000500	42.515	0.999944	0.007714	12
3	3		4	0.003222	87.261	0.000606	176.266	0.999994	0.002607	12
	5		2	0.004093	28.175	0.000489	146.861	0.999961	0.006569	12

(2) 限月：1987年12月

月	日	年	T	$\hat{g}$	t 値	$\hat{b}$	t 値	R^2	S.E.	n
9	8	87	88	0.006078	211.307	0.000340	1.323	0.999763	0.014441	12
	10		86	0.006089	266.725	0.000379	3.226	0.999679	0.017941	12
	14		82	0.005988	328.982	0.000388	3.215	0.999811	0.014016	12
	16		80	0.005604	219.821	0.000365	2.646	0.999621	0.018865	12
	18		78	0.005553	134.379	0.000343	1.722	0.999252	0.029119	12
	22		74	0.005294	253.284	0.000336	3.438	0.999803	0.014092	12
	24		72	0.005273	215.439	0.000347	3.596	0.999694	0.016793	12
	28		68	0.004890	137.832	0.000347	1.038	0.999585	0.021442	12
	30		66	0.005086	14.419	0.000536	0.147	0.999548	0.022217	12
10	2		64	0.004907	103.004	0.000329	1.131	0.999266	0.029551	12
	6		60	0.004675	82.805	0.000300	1.372	0.999224	0.030640	12
	8		58	0.005256	121.176	0.000372	1.026	0.999377	0.025695	12
	12		54	0.005611	138.058	0.000365	3.136	0.999409	0.023114	12
	14		52	0.005678	131.551	0.000417	2.076	0.999250	0.025909	12
	16		50	0.005841	69.475	0.000406	0.539	0.998090	0.047591	12
	20		46	0.006799	104.959	0.000394	1.141	0.999201	0.030848	12
	22		44	0.006276	8.525	0.000671	0.089	0.998195	0.040399	12
	26		40	0.007266	41.443	0.000518	0.244	0.997431	0.055650	12
	28		38	0.007611	26.358	0.000576	0.207	0.993805	0.074888	12
	30		36	0.007255	9.177	0.000536	0.065	0.991842	0.078706	11
11	3		32	0.007335	70.705	0.000511	0.737	0.996291	0.050059	11
	5		30	0.007503	57.226	0.000518	0.956	0.994142	0.058331	10
	9		26	0.007813	68.070	0.000540	0.539	0.994868	0.045868	9
	11		24	0.008011	76.474	0.000453	0.836	0.997604	0.037227	10
	13		22	0.006580	6.985	0.000700	0.073	0.998275	0.028977	10
	17		18	0.006511	12.715	0.000707	0.137	0.999263	0.019249	10
	19		16	0.006332	12.183	0.000711	0.136	0.998778	0.025403	10
	23		12	0.006423	92.123	0.000424	4.135	0.999669	0.015068	10
	25		10	0.005497	44.686	0.000667	0.740	0.999665	0.014341	10
	27		8	0.005452	16.179	0.000678	0.221	0.999298	0.019195	9
12	1		4	0.005932	53.666	0.000536	18.937	0.999734	0.011824	10
	3		2	0.005566	52.801	0.000500	133.242	0.999945	0.006400	10

(注) Tは満期日までの日数、R^2 は決定係数、S.E. は回帰の標準誤差、n はサンプルサイズ。

式から計算された推定値（$\hat{v}\sqrt{T}$）と比較することであろう。

個体間分布模型(45)の計測に際しては、$\sigma = g\sqrt{T}$、$s = b\sqrt{T}$ とし、g、bを未知パラメターとする非線形回帰モデルを考える。それ故 $\sqrt{T}$ は共通であるから、g、b と v とを比較すればよい。(45)式を $\Psi_C(g,b;F,K,r,T)$ と表わせば、g、b の推定値は

$$\Sigma_i[C_i-\Psi_C(g,b;F,K_i,r,T)]^2 +\Sigma_j[P_j-\Psi_C(g,b;F.K_j,r,T) -e^{-rT}(K_j-F)]^2 \tag{60}$$

ただしC_i、P_i は K_i に対するコール、プットのプレミアムの現実値

を最小にするような値として求めることができる。g、b の探索方法としては 2 段階 GSS 法を用い、[10] g の初期値には B−S 式の $\hat{v}$ を、また s の初期値には0.0005を与えた。収束基準は1.0×10^{-5}である。なお、(45)式には無限区間の積分が含まれているが、その計算に数値積分法の 1 つであるガウス法を用い、分点数64個で計算した。[11] また、データ、計測期間は B−S 式の場合と同じで、その計測結果が第 3 表に示されている。

これらの結果の顕著な点は、b の推定値が g の推定値に比べてかなり小さくなり、その有意性も $\hat{g}$ の有意性に比べると著しく低くなっている点である。満期日直前の日を除けば、$\hat{b}$ は $\hat{g}$ の約1/8～1/19程の大きさであり、t 値を見ると1987年 3 月満期物で67.5%の、1987年12月満期物で73.3%の b が 5 %水準で有意ではない。さらに $\hat{g}$ は $\hat{v}$ よりも若干小さいだけでその動き方は非常に類似したものになっている点も第 3 表から明らかであろう。また決定係数 R^2 は、当然のことながら、個体間分布式が B−S 式を上回っている。しかしその差は極く僅かである。

B−S 式の(5)は、個体間分布模型からその解釈を与えれば、個体間分布模型から導かれる異質的確信模型を表わしている。もしそうであれば一般的に B−S 式から推定される $\hat{v}$ (implied volatility) は投資家個人の主観的な予想によるものではなく、投資家間の予想の個体間分布の散らばり（標準偏差）を反映したものであるということになる。

8. 個体間分布模型の検証

ここでは7.で推定された g を用いて個体間分布模型の検証を行う。ところで個体間分布模型の意義は B−S 式を内包した形でオプ

10) 2 段階 GSS 法は 2 変数の関数を最小化するために GSS 法を多段階に適用するものである。最小化すべき目的関数を $g(x_1,\ x_2)$ とすると、まず j=1段階において x_1 を初期値 x_{10} に固定し、x_2 について GSS 法を適用して g を最小にする値 x_{21} を求める。次に x_2 を x_{21} に固定して、x_1 について GSS 法を適用して g を最小にする x_{11} を求める。このようにして得た $(x_{11},\ x_{21})$ を新たに初期値として、j=2段階において上と同じことを繰り返し $(x_{12},\ x_{22})$ に到達する。このようにして $[(x_{1j}-x_{1,j-1})^2+(x_{2j}-x_{2,j-1})^2]^{1/2}$が収束基準を下回るまで繰り返す。GSS 法の探索区間としては j 段階の下限 υ_{ij} は $\upsilon_{ij}=x_{i,j-1}-R_i$ とし、$\chi_{ij}=(1/\lambda)x_{i,j-1}+(1-1/\lambda)\upsilon_{ij}$ により上限を定める。(ただし i=1 は g の場合を、i=2 は b の場合を示す)。R_i としては g については $R_1=0.0005$、b については $R_2=0.0002$を用いた。初期値を含めこれらの数値の設定は収束回数を減らすため様々に実験を重ねた結果に基づいている。

11) ガウス法による数値積分とは

$$\int_a^b \omega(x)g(x)dx=\Sigma_k W(x_k)g(x_k)$$

積分値を、分点 x_k と重み係数 $W(x_k)$ を予め与え、これらの加重和として求める方法である。その中でも重み関数 $\omega(x)=1$、積分範囲が [−1,1] であるものをガウス・ルシャンドル法と言い、この場合の分点 x_k はルシャンドル多項式のゼロ点になり、重み係数はルシャンドル多項式の漸化式を適当に変形しそのゼロ点を与えることで求められることが知られている。(この導出の具体的な方法は山内二郎・宇野利雄・一松信著『電子計算機のための数値計算法Ⅲ』(培風館、1972) を参照せよ。) なおここでは無限区間の積分を求めているのであるから、元来ならば積分範囲が [−∞,∞] のガウス・エルミット法を使うべきであるが、筆者が実験したところ、エルミット法でもルシャンドル法でもほとんど差がなかった。そこでルシャンドル法を採用することにし、積分範囲の上限つまり ∞ を標準正規密度関数の性質を考慮して5.5とし、積分範囲の [−∞,∞] を [−1,1] に変換することで積分値を計算した。

ションプレミアムの理論式を与えるばかりではなく、既に6.から明らかなように、先物の出来高や取組高を説明するフレームワークをも与えるところにある。従って導出される先物の出来高・取組高の理論モデルが実際のデータとどれほど整合性を持つかをテストすることは、個体間分布模型そのものの現実妥当性を確かめる上で格好の検証材料であろう。

先物の出来高・取組高の理論模型は(58)式に帰着され、最終的にはこの式の計測を行うのであるがそのためには α_1 が必要である。そこでまず(37)式の計測を行う。この式は、t期の先物市場の均衡において、投資家の予想の個体間でのばらつき g_t がどの様に表わされるかを示した式であるから、この式の計測は、α_1 の推定値を得ることのみならず、個体間分布模型の検証の重要な1ステップであろう。

ところで(37)式の計測で用いられる g_t、g_{t-1} は当然、前の個体間分布模型価格式(45)から推定されたものを使わなければならない。しかし岩田（1986）は、g、bの推定には多重共線性が生じる可能性があり、その推定がうまくできるかどうかは専ら(45)式のKに関する非線形性の程度にかかっているということを指摘している。第3表の結果を見る限り、多重共線性が生じているか否かの判断は困難であるが、かりに多重共線性の影響があるのであれば、推定値は真値から乖離している可能性がある。それ故ここではB−S式を異質的確信模型の価格式と見なし、gの推定値としてB−S式から推定された $\hat{v}$ を用いることにする。

またここでは先物の2つの限月をグループにしたデータをサンプルにして計測を行う

第4表　(37) 式の計測

理論式：$\hat{g}_t^2=\sigma_v^2+\alpha_1^2\hat{g}_{t-1}{}^2+\alpha_2{}^2(\Delta \ln F_t)^2$

計測式：$\hat{g}_t{}^2=\beta_0+\beta_1\hat{g}_{t-1}{}^2+\beta_2(\Delta \ln F_t)^2+\varepsilon_t$

ただし ε_t は攪乱項

group	β_0	β_1	β_2	R^2 / DW	S.E. / df
1) June '86	5.6474E−07	0.96106	0.019067	0.9424	4.613E−06
Mar. '87	(0.702)	(52.985)	(5.044)	1.687	190
2) Sep. '86	8.2413E−08	0.96341	0.012370	0.9547	3.419E−06
June '87	(1.295)	(64.213)	(4.833)	1.704	210
3) Dec. '86	2.9051E−07	0.98037	0.008945	0.9615	2.621E−06
Sep. '87	(0.507)	(71.771)	(4.320)	2.049	214
4) Mar. '87	1.1796E−06	0.93924	0.017342	0.9293	3.245E−06
Dec. '87	(1.672)	(50.066)	(5.863)	2.000	205

(注) 1. R^2 は決定係数、S.E. は回帰の標準誤差、DW は Durbin-Watson 比、( ) は t 値、df は自由度である。

2. 計測は通常最小2乗法による。

が、限月別の出来高のデータが利用できないため、同一の日の出来高データを含まないように4つのグループに分けた（前の第1～3図の(2)は出来高・取組高をグラフに示したものである)。

(37)式の計測に際して、次の回帰モデルを考えた。理論式は

$$g_t^2 = \sigma_v^2 + \alpha_1^2 g_{t-1}^2 + \alpha_2^2 (\Delta \ln F_t)^2 \quad (61)$$

回帰式は

$$\hat{g}_t^2 = \beta_o + \beta_1 \hat{g}_{t-1}^2 + \beta_2 (\Delta \ln F_t)^2 + \varepsilon_t$$

ただしε_tは攪乱項 (62)

また$\hat{g}_t$、$\hat{g}_{t-1}$のt値が30以下のものと、Tが2未満のものはサンプルからはずした。以上のことから得られた結果が第4表である。これを見ると非常に良好な結果が得られており、(37)式は実際のデータに対して十分に整合的であることがわかる。

さて$\alpha_1 = \sqrt{\beta_1}$であるから、これを用いて(58)式の計測を行うことができる。限月のグループ分けは(62)式の場合と同じものにし、さらに$\hat{g}_t$、$\hat{g}_{t-1}$のt値が30以下のものと、Tが11未満のものをサンプルからはずした。実際の回帰モデルは次の回帰式を考える。

第5表　(58) 式の計測

計測式：$V_t/I_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 \mid \Delta \ln F_t \mid + \beta_2 Q_t + \varepsilon_t$

ただし $Q_t = ((\hat{g}_t/\hat{g}_{t-1})^2 + 1 - 2\hat{\alpha}_1)^{1/2}$

ε_tは攪乱項

group [method]	β_0	β_1	β_2	R^2 S.E.	DW	df
1)	0.29817	15.6778	0.16242	0.3036	1.666	189
[OLSQ]	(18.82)	(7.362)	(2.402)	0.13196		
2)	0.32890	15.0081	0.13782	0.2556	1.572	207
[OLSQ]	(19.97)	(7.436)	(2.080)	0.13722		
3)	0.35568	17.4467	0.15833	0.2578	1.231	212
[OLSQ]	(19.62)	(7.629)	(1.807)	0.16261		
	0.38858	12.0660	0.15475	0.4005	2.144	211
[AR1]	(15.60)	(6.395)	(2.163)	0.14649		
4)	0.30412	19.9082	0.20356	0.3030	1.165	206
[OLSQ]	(15.51)	(7.875)	(2.756)	0.15455		
[AR1]	0.34043	15.7280	0.11997	0.4567	2.209	205
	(14.71)	(7.463)	(1.922)	0.13679		

(注)1.　[method] の [OLSQ] は通常最小2乗法で、その Durbin-Watson 比から5％の有意水準で攪乱項に系列相関が見られたもののみについて [AR1] の計測を行った。ただし [AR1] とは攪乱項の正の系列相関を除去して計測したものである。

2.　R^2は決定係数、S.E. は回帰の標準誤差、DW は Durbin-Watson 比、( ) はt値、df は自由度である。

$$V_t/I_{t-1}=\beta_o+\beta_1|\Delta \ln F_t|+\beta_2 Q_t+\varepsilon_t \qquad (63)$$

ただし$Q_t=((\hat{g}_t/\hat{g}_{t-1})^2+1-2\hat{\alpha}1_1)^{1/2}$、

ε_tは攪乱項

$|\Delta \ln F_t|$は実際の取引の中に含まれる現実の裁定取引や within−day における取引量を説明させるために新たに加えた項である。これらの取引に基づく出来高は価格変動（これを$\Delta \ln F$の絶対値で代表させる）が大きいほど大きく、またそれらは市場規模（I_{t-1}で表わされる）に比例するであろう。他方Q_tは理論模型から導かれる項であるが、gとα_1の推定誤差のため、Q_tの平方根の中が負になることがある。その場合は$Q_t=0$とした。

この計測結果が第5表である。説明力は決して高くはないが、先物の出来高・取組高の限月別のデータが利用できないことを考慮すれば、これは仕方のない処であろう。またグループ3)、グループ4）については、攪乱項に正の系列相関がみられたため、これを除去するため AR1 よる計測も行った。概して$\hat{\beta}_2$は有意に正であり、第5表を見る限り個体間分布模型は現実のデータに対して十分整合的であることがわかるであろう。

9. おわりに

この論文では異質的期待の立場から先物オプションの価格決定に関する個体間分布の模型が構築された。その模型の説明原理は B−S のような裁定による均衡ではなく、異質的期待をもつ投資家が参加する市場の均衡に基づく。導かれたオプション価格式(45)はその特殊ケースとして2つのB−S型の価格式、すなわちB−S模型の価格式と異質的確信模型の価格式、を含む。この模型によりB−S式に従来と全く異なる解釈を与えることができる。その解釈によれば、B−S式で原資産価格の volatility と思われていたものは実は予想の個体間のばらつきを示す標準偏差である。

異質的期待の存在する投機的市場の均衡から決まる価格（市場価値）はリスク・プレミアムと無関係な形で導かれる。これは同質的期待に基づく伝統的な金融理論の見解とは一見かなり相違するものである。しかしそこでは個別投資家のリスク・プレミアムの存在が否定されているわけではない。また、この模型によって、裁定による均衡では説明することが困難な出来高・取組高の説明のためのフレームワークを与えることができる。

この模型の実証分析の結果は次のようにまとめられる。

(1) 7.ではB−S式と個体間分布模型オプション価格式が測定された。その結果、決定係数の大きさでは後者が若干勝るものの、主観的標準偏差の基準値b(ただし$s=b\sqrt{T}$）の推定値の統計的有意性は低かった。個体間分布模型オプション価格式はB−S型の価格式で十分近似できると考えられるので、以下の実証には個体間標準偏差の基準値gの推定値$\hat{g}$としてはB−S型の価格式からえられる推定値を用いた。なお推定値$\hat{b}$は$\hat{g}$のおおよそ1/8~1/19程度の大きさであった。このことは、平均的な投資家の円の対ドル先物レートに関する予想の不確実度は、投資家間の予想期待値のばらつきと比較すれば無視しうるほど小さいことを意味する。

(2) 7.の HSD と ISD($\hat{g}$)の比較では、$\hat{g}$が原先物価格の volatility の推定値ではないことを示唆する結果がえられた。

(3) 8.のgの変動式(37)の推定では、すべての

グループについてどの係数も統計的に有意でありかつ理論的符号条件を満たす結果をえた。

(4) 8.の出来高／取組高の決定式(58)の実証では、すべてグループについてQの係数にほぼ有意な正値がえられた。

以上の実証結果から、個体間分布模型は与えられた観測データを整合的に説明できたと結論できよう。

しかし個体間分布模型オプション価格式の推定には$\hat{b}$の有意性が低い点で未だ難点があるので、今後更に検討する必要がある。また円先物以外のオプションについても実証を進めるとともに、模型のテストの方法を工夫したい。

最後に、この論文では先物の均衡価格が投資家の主観的予想価格期待値の集団平均値と等しく定まるという模型を示したが、その集団平均値自身がどのように定まるかを説明しているわけではないことを指摘しておきたい。前期からの集団平均値のシフトは外生変数である共通情報 x_t により生ずるとしているに過ぎない ((28)式参照)。予想期待値の集団平均値の定まり方の説明には、個別投資家の予想形成の過程についてのより立ち入った分析が必要である。

以　　上

【参考文献】

岩田暁一、「金融先物オプションにおける予想の構造」、『三田商学研究』29巻1号、1986年4月、pp.107-135

岩田暁一、『先物とオプションの理論』、東洋経済新報社、1989年

辻　幸民、「先物アメリカンオプションについて」、『三田商学研究』31巻5号、1988年12月、pp.121-152

Black, Fisher, "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics* 3, January/March 1976, pp.167-179.

——— and Scholes, Myron, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy* 81, May/June 1973, pp.637-659.

Clark, Peter K., "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices", *Econometrica*, Vol.41, No.1, January 1973, pp.135-155.

Cox, John C., "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Diffusions", Unpublished draft, Palo Alto, CA: Stanford University, September 1975.

——— and Ross, Stephen A., "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics* 3, January/March 1976, pp.145-166.

———, ——— and Rubinstein, Mark, "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics* 7, September 1979, pp.229-263.

Fama, Eugene F., "The Behavior of Stock-Market Prices", *Journal of Business* 38, 1965, pp.34-105.

Geske, Robert and Johnson, H. E., "The American Put Option Valued Analytically", *Journal of Finance* 39, December 1984, pp.1511-1524.

Iwata, Gyoichi, "The Anticipation Structure in the Financial Futures Options", *Keio Econimic Observatory Occasional Paper* 6, March 1986, pp.1-32.

Latané, Henry A. and Rendleman, Jr., Richard J., "Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices", *Journal of Finance* 31, May 1976, pp.369-382.

Lintner, John, "The Aggregation of Investors' Diverse Judgements and Preferences in Purely Competitive Security Markets", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 4, December 1969, pp.347-400.

MacBeth, James D. and Merville, Larry J., "An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model", *Journal of Finance*34, December 1979, pp.1173-1186.

Merton, Robert C., "Theory of Rational Option Princing", *Bell Journal of Economics and Management Sciences* 4, Spring 1973, pp.141-183.

———, "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous", *Journal of Financial Economics* 3, January/March 1976, pp.125-144.

Rubinstein, Mark, "Non-Parametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978", *Journal of Finance* 40, June 1985, pp.455-480.

Shastri, Kuldeep and Tandon, Kishore, "Options on Futures Contracts: A Comparison of European and American Pricng Models", *Journal of Futures Markets*, Vol.6, No.4, 1986, pp.593-618.

Scott, Louis O., "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.22, No.4, December 1987, pp.419-438.

Tauchen, George E. and Pitts, Mark, "The Price Variability-Volume Relationship on Speculative Markets", *Econometrica*, Vol.51, No.2, March 1983, pp.485-505.

Telser, Lester, "Futures Trading and the Storage of Cotton and Wheat", *Journal of Political Economy* 66, June 1958, pp.233-255.