（日本銀行金融研究所「金融研究」第６巻第３号）

日本における株価変動のメカニズムについて —APT（裁定評価理論）の実証分析—*

櫻　庭　千　尋**

1．はじめに—目的・構成・要旨

本論文の目的は、日本における株価がどういうメカニズムで形成されているかという問題に対し、最近米国で展開されている裁定評価理論（arbitrage pricing theory、以下 APT と略称）を適用した場合、それによってどの程度説明可能であるかを実証的に分析することである。

わが国の株式市場では、ここ１～２年、株価の高騰が続いており、こうした現象に対しては様々な説明が試みられている（例えば、金融緩和原因説、企業の含み資産評価説など)。しかし、株価形成（ひいては金融資産一般の価格形成）については、現実の動きがどういうメカニズムによるものかは未だに十分把握されているとは言い難いのが実情である。従来、株価の形成を説明する理論仮説として最も一般的に用いられてきたのは資産評価モデル（capital asset pricing model、以下 CAPM と略称）であり、この考え方によれば、株式の個別銘柄の期待収益率は株式市場全体の平均的な期待収益率と一定の関係を持つかたちで決定されるとされていた。ところが、これまで日本の株式市場に関する幾つかの実証研究では、いずれもこうした CAPM の説明力が近年著しく減退していることが指摘されている。

そこで、本論文では CAPM に代わる理論仮説として最近有力視されている APT を取り上げることとした。APT の基本的な考え方は、個別株式の期待収益率は、CAPM のように株式市場全体の平均収益率によってではなく、市場において完全に裁定が行われることを前提し

* 本論文の作成過程において、横浜国立大学・青山護助教授、茨城大学・斎藤進教授、東京大学・竹内恵行氏（当研究所客員研究生)、滋賀大学・堀本三郎助教授から有益なご助言を頂いた。また、データ供与の面で日本証券経済研究所・紺谷典子主任研究員に便宜を図って頂いた。
** 日本銀行金融研究所研究第１課

た場合、幾つかの銘柄に共通する複数個の変動要因によって決定されるというものである。こうしたAPTによって果たして現実の株価変動が説明されるのか否かを巡っては、米国において実証的な研究が最近増えつつあるが、その実証方法（比較的なじみの薄い因子分析という手法が通常用いられる）に対する批判も多く、米国の株価形成を説明する理論としての当否の判断は依然として議論が分かれている。また、日本の株式市場においても、これまでAPTについては唯一つの実証例があるにすぎず、その結果によれば、APTの成立は概ね否定的とされてはいるが、それが妥当する可能性も残ると報告されている。

APTの実証分析が以上のような状況にあることを踏まえて、本論文では日本の株式市場について改めてAPTの実証分析を試みたものである。ここでの特色は、①銘柄数208という大標本を対象として共通変動要因を分析したこと（米国および日本の既往分析例ではおよそ30～60銘柄からなる標本の共通変動を分析)、②従来のAPTの実証方法の改善を図ったこと（強い前提を必要とする最尤推定法の使用は回避したこと)、などの点である。本論文は次のように構成されている。まず2.ではAPTの基本定理を紹介し、3.ではAPTの既往実証手法を批判的に検討するとともに、改善された実証分析法を導入する。4.では、日本の株式市場でAPTの基本定理が成立するか否かをそうした手法を適用して検討する。5.では、本論文の実証結果の既往の実証分析例と対比し、最後に6.では、ここでの実証結果が日本における株価決定のメカニズムを解明する上でもつ意義を簡単に論じる。

本分析で得られた実証結果を予め要約すれば、次のとおりである。

(1) ダウ銘柄の殆どを占める208銘柄を対象として、その1963年から1984年までの月次の株式投資収益率の変動に共通する変動要因を求めたところ、7個の共通要因の存在を前提したとき最も良好に変動が説明された。なおこの場合、最良性の基準にはSBC（Schwarz's Bayesian Criterion）を採用し、分散共分散の分解に最小2乗法に基づく因子分析を適用している。

(2) 上記(1)の結果が信頼の置けるものであるかどうかを検証するため、標本期間を上記20年余りの中で前後に変化させ、あるいは標本銘柄をランダムに2分割してテストを行なっても、7要因を想定した場合の説明力が最も良好であり、また、その場合に個々の株式銘柄に対する各要因の影響の度合い（要因にかかる係数）は安定的であることが確認された。

(3) このような7要因は共通変動を説明する要因であるが、それ以外の変動がAPTの基本定理を満たすものとなっているかどうか（各銘柄について残りの変動はすべて銘柄独自の要因によるものであり、かつそうした変動は市場における裁定によって消去可能であるかどうか）を検定したところ、全テスト（792組のテスト）中約6割を占めるテストにおいてATPが支持される、すなわち日本の株式投資収益率はこれら7要因によって記述し尽くされるとの結果が得られた。この実証結果は日本および米国に関するいずれの既往実証例よりもAPTに対して肯定的であり，日本の株価はAPTの考え方に基づいて変動している可能性が窺われる。

(4) 上記の7要因については、その時系列的変動パターンを個々に明らかにすることはできるが、それが何であるかを具体的に特定することはこの分析手法ではできず、別途検討が必要である。

2. 従来の資産評価理論とAPT

(1) 資産評価モデル(CAPM)とその説明力

株式市場の価格メカニズムを解明するためのアプローチとしてまず考えられるのは、不確実性の経済学、とりわけ資産選択の理論や投資のミクロ理論等を駆使することであろう。しかし、その際、情報偏在や市場の不完備性等の複雑な現象(状態選好アプローチ以外に適当な分析方法のない現象)を考慮し過ぎると、分析に必要なモデルが巨大化する余り、実証には全く向かなくなる。こうした理由から、資産評価理論の主流はそうした理論的に厳格なアプローチを避け、むしろ現実描写を優先する形をこれまで採ってきており、市場で成立しているであろうリスクと期待収益の補償関係に着目するアプローチを長年来採用している。[1] こうしたアプローチは一般に modern portfolio theory(現代資産選択理論)と呼ばれており、財務理論の一大分野を形成しているが、中でも Sharpe-Lintner-Mossin 流の capital asset pricing model(資産評価モデル、以下 CAPM と略称)は1970年代以降における米国の財務理論の分野を席巻してきた。後述するように、近年 CAPM の成立に対して不利な材料が理論・実証両面で現れてきているが、本論文が取り上げる arbitrage pricing theory(APT)の登場までは、少なくとも米国では CAPM が最も現実説明力の高い資産評価モデルと考えられてきた。

ここでは、まず CAPM について、その基本となる前提条件およびリスクと期待収益の補償関係という資産評価メカニズムを概説することにより、CAPM と後述する APT との共通点および相違点についての理解の一助とする。

CAPM は平均・分散アプローチによって効率ポートフォリオが達成可能な世界(いわゆる mean-variance efficiency)を記述対象としており、そこでは、次の2つの条件 a)、b) のうち少なくともいずれか一方が成立することを前提としている(Ross (1978))。

a) 投資家の効用関数は、そのリスク許容度(=絶対的危険回避度の逆数)が資産規模の線型関数となる形の関数(例えば2次関数)で示されること。[2]

b) すべての個別銘柄の株式投資収益率の確率分布 $\tilde{r}_i$ が、安全利子率 r_f とある適当な危険資産から構成されるファンドの危険収益率 $\tilde{z}$ の線型結合

$$\tilde{r}_i = (1-\beta_i) r_f + \beta_i \tilde{z} + \tilde{\varepsilon}_i,$$
$$\text{ただし}, \ E(\tilde{\varepsilon}_i | \tilde{z}) = 0 \quad (\forall i)$$

で表現可能であること、つまり、安全利子

---

1) 資産評価および資産市場の均衡に関する各種の理論的アプローチの対比については、Mossin (1977) と小林 (1984) が詳しい。

2) 条件a) を満たす効用関数は、absolute risk aversion (ARA) が双曲線

$$ARA = -\frac{u''(W)}{u'(W)} = \frac{1}{a+bW}$$

となる hyperbolic absolute risk aversion (HARA) 族であり、これに該当する効用関数は資産規模(W)に関して、

$$u(W) = \begin{cases} -e^{-W/a} & (b=0) \\ \log(W+a) & (b=1) \\ \frac{1-b}{b}(a+bW)^{1-1/b} & (b \neq 0, 1) \end{cases}$$

という指数関数、対数関数、またはべき乗関数のいずれかで表現される(この点に関しては、例えば青山 (1984) を参照)。

率と１種類の危険収益率という２つのファンドに分離（2-fund separation）可能であること（この代表的ケースとしては、すべての個別銘柄の株式投資収益率が多変量正規分布に従う世界が挙げられる)。

こうした前提条件が満たされ、しかも、すべての投資家が同質的な（homogeneous）期待を抱くとすれば、すべての個別銘柄の期待株式収益率は資産市場の総収益率 $\tilde{r}_M$ の期待値（＝資産市場の平均的な期待収益）の線型関数

$$E(\tilde{r}_i) = r_f + \beta_i \{E(\tilde{r}_M) - r_f\} \qquad (1)$$

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M)}{\sigma^2(\tilde{r}_M)}$$

で表現されることが示される。この式(1)がCAPMの基本評価式である。[3)]

CAPMの世界では、資産市場全体の平均的な期待収益率が個別株式の期待投資収益率の水準を左右する唯一の要因となっていることが最大の特徴である。ここでは、$\beta_1 = 1$ であるような銘柄 i の期待収益率は市場の平均的な期待収益率に一致し、$\beta_1 \neq 1$ であれば当該銘柄 i の期待収益率は市場の平均的な期待収益率に一致しないというリスクがもたらされることになる。ところで、すべての投資家が市場収益率を越える高い期待収益率の投資ポートフォリオを組むことは不可能であるので、$\beta_1 \neq 1$ のときに収益リスクが発生する。そうした意味で、CAPMの基本評価式における β_1 はリスク指標を表す。

ここで注意を要する点は、CAPMの考え方を採る限り、必ずその基本評価式が成り立つことである。したがって、例えば個別株式投資収益率が多変量正規分布に従うという実証分析でよく用いられる仮定を置くとすれば、上述の前提条件 b）より、直ちにCAPMの世界を想定していることになり、CAPMの基本評価式が成り立つことになる。

さて、CAPMの実証結果を振り返ると、まず米国では Blume-Friend（1973）や Fama-Macbeth（1972）等がリスク（β）と期待収益率の線型的な補償関係を検出している。こうした研究が引き金となって、株式投資収益率のリスク尺度としてこれまで一般的であった収益率の分散に代わってこのβが用いられるようになり、いわゆる「β革命」が1970年代後半の米国証券業界に沸き起こった。しかしながら、同時に上記 Fama-Macbeth（1973）をはじめ Black, Jensen-Scholes（1972）等の緻密な実証分析では、株式投資収益率の変動をβだけでは説明できないという結果も見出されており、CAPMの基本評価式に対する疑問も提起されていた。

また、日本の株式市場を対象とした丸・蠟山（1974)、紺谷（1978)、榊原（1983）等の実証結果でも、米国同様、CAPMの説明力不足が指摘された。しかも、青山（1979)、佐藤（1984）によれば、株式投資収益率に対するβの説明力は一貫して漸減傾向を辿り、榊原（1986：pp. 147-155）では1975年以降βと期待収益の線型関係さえも否定される結果を得ている。

このように、米国および日本のいずれにおいてもCAPMの基本評価式(1)の成立を裏付ける実証結果は少ない。したがって、CAPM成立の前提条件の一つである、２ファンドに分離可能な株式投資収益率の生成過程（前述の前提条

3）CAPMにも様々な定式化があり、式(1)は正確には安全利子率が存在し、そうした安全利子率とβ（という２つのパラメーター)、および資産市場の平均的な期待収益率（１つのファクター）で表現し尽くされるCAPMの基本評価式である。この導出については、例えば Sharpe（1986、第７章）を参照。

件b）は、現実の株式市場を余り説明していないということになる。[4]加えて、CAPMの基本評価式は資産市場の平均的収益率の計測等の面で難点があることから検証不可能であるとした有名な批判がRoll（1977）によって展開されている。このように、CAPMのアプローチは実証面から克服し難い壁に当たっているのが現状といえよう。[5]

(2) APTの考え方—多因子収益生成過程を想定する背景

CAPMが効用関数の形状または株式投資収益率の確率分布にかなり厳しい制約を設けたために実証分析でその成立が棄却される結果となったことへの反省から、そうしたモデル設定上の制約を緩和しようとするアプローチが1970年代後半に登場してきた。新しいアプローチは、2ファンドに分離可能な収益率生成過程を放棄し、代わって複数の変数が組み込まれた資産評価式を想定するところに特徴があり、CAPMの基本評価式(1)の要である資産市場全体の平均的な期待収益率E（r_M）を保持するか無視するかにより、大きく2つの流れに分けることができる。前者はmulti-index CAPMと呼ばれるものであり、Rosenberg-Guy（1976）等がCAPMにおけるβリスクの説明力が残っているとの立場から市場収益率以外のマクロ変数をCAPMの基本評価式に加えた枠組を構築している。multi-index CAPMの実証では変数が増えた分だけモデルの現実妥当性もやや高まっているが、前述したRoll（1977）の批判からは逃れられず、また、肝腎の株式投資収益率生成過程の成立基盤がやや不明確であるとの欠点を抱えていることを指摘できる。[6]

これに対して、後者すなわち市場収益率と無関係に株式投資の収益率生成過程を構築しようとするアプローチがAPTである。一般的には、すべての金融資産について単一の収益率生成過程を想定すれば、CAPM同様、個別株式と市場全体の収益率の関係を規定せざるを得なくなるが、APTでは、以下で詳述するような線型多因子性の収益率生成過程が妥当する銘柄の株式だけを検討対象とし、個別株式と資産市場全体の収益率の関係を断ち切ろうとの発想に立っている。したがって、APTは株式以外の公社債等を含む真の意味で資産市場全体の均衡を、単独で記述するものではない。このように理論的には完成しきれていない難点がない訳ではないが、実証可能な部分から分析に取り掛かれる点が従来の理論モデルにみられない強みといえよう。

以下では、まずAPTの概要を直観的に示し、それがCAPMに代わって実証すべきモデルとなることを指摘しておこう（以下の説明は、Roll-Ross（1980）に基づく）。

APTはmodern portfolio theoryの基礎であるリスクと期待収益率の線型的な補償関係を引き継ぎ、期待株式投資収益率は安全利子率にリスク・プレミアムを積み上げたもので表現されるという資産評価式を提示する。しかし、個別

4) 厳密には、たとえ前提条件b）が満たされても投資家の期待が同質でないためにCAPMが成立しない可能性も残っている。

5) Shanken（1987）は、採用する市場収益率が真の値から乖離することを考慮に入れてもなおかつCAPMの成立が棄却されることを実証している。

6) multi-index CAPMの収益率生成過程がいわゆるインデックス・モデルに由来することについてはElton-Gruber（1981：Chapter 6）が簡潔なサーヴェイを行なっている。

株式と市場全体の収益率の関係には立ち入らないので、その資産評価式を導出するに当たって、CAPM で導かれた β リスクのような市場収益率からの乖離により生じるリスクの存在を先験的に仮定しない。代わって、APT では各銘柄の株式に共通する複数のリスク変数を想定し、これが期待収益率とその実現値との乖離をもたらすとする。勿論、厳密には両者の乖離は、共通のリスク変数のみならず、当該銘柄に特有のリスク要素によっても引き起こされる可能性は十分にある。しかし、裁定機会不在という意味で市場が効率的であれば、投資家の資産評価、すなわち、期待株式投資収益率の形成に当たっては、そうした個別銘柄にのみ固有のリスク要素を無視することができることを示し得る（この厳密な理論については次節で触れる)。つまり、リスク・プレミアムとして価格を補償する必要のあるリスクは、裁定機会が不在である限り、複数の銘柄に共通するリスク変数に限られることを示し得る。

したがって、裁定機会を残さないという程度に投資家の行動が合理的であり、かつどの投資家もリスクと期待収益率の線型的な補償関係に従う資産評価を行っている銘柄の株式に関しては、その期待収益率が安全利子率と共通リスク要素に対するリスク・プレミアムの和で表現されることになる。これが APT の基本的な資産評価式である。

さて、以上の議論は、対象とする銘柄に共通するリスク変数が1つまたは複数存在するとの前提に立っているが、問題は何がそれらのリスク変数に該当するかということであろう。例えば将来の収益環境や利子率等がそうしたリスク変数の候補として挙げられるが、APT では CAPM が先験的仮定に依存し過ぎて現実妥当性を欠いたことに照らして、リスク変数の確定を実証に委ねている。具体的には、APT では、分析対象となる銘柄の株式投資収益率の分散共分散に対する因子分析から、統計的に有意なリスク変数を探し出すという手続きを採用する。こうした APT の実証手法では、各リスク変数の定性的特徴を捉えること、つまりリスク変数に明確な名前を付けることまでは困難であるが、それでも各リスク変数の定量的な動きを抽出し、株式投資収益率の生成過程を把握することは可能である。

また、上述したように、APT は理論モデルとしては全金融資産を分析対象としていないという難点を抱えてはいるが、実証分析に当たって全銘柄の株式を取り扱うことでこの批判をかわすことは可能である。しかも、もしすべての銘柄においてリスクと期待収益率の線型的な補償関係に従う収益率生成過程の成立が主張できれば、株式市場全体に対して APT の基本的な資産評価が妥当することを示し得る。こうした場合には、APT のような緩い前提条件の下でも、主要資産市場の一つとしての株式市場の均衡を議論することができる。[7)]

---

7) APT の理論モデルでは通常の効用最大化に基づく市場均衡の概念を持ち出していないが、APT を適当な均衡概念と結合させることは不可能ではない。例えば CAPM が成立している世界では定義により APT は成立する（例えば Sharpe (1986：pp.198-199) を見よ。ただし、この逆は成立しない)。もっとも、APT の有用な点は、そうした特定の効用関数または特定の均衡概念を持ち込まなくても、資産価格の形成過程についてかなり明確な帰結を得ることができることである。このことはまた、資産価格の分布特性が投資家が認識している収益生成過程が同一であるという APT の根本的発想に主として由来するものであり、投資家の効用関数の形状や均衡の設定の仕方には余り影響されないことを含意している。

以上でみたような実証分析上の汎用性から、1980年に入り、資産評価モデルの実証研究の中心はCAPMからAPTに移りつつある。

(3) APTの基本定理と検証上の前提条件

上述したAPTの考え方は、Ross (1976) により次の2つの仮定とその結果導かれるひとつの定理として凝縮される。

(収益率生成過程の多因子線型性の仮定)

標本Ωに属するn個の個別株式投資収益率の生成過程はk ($<$n) 個の共通因子と1個の独自因子との線型結合で表現される。つまり、銘柄iの株式投資収益率 r_i は、

$$\tilde{r}_i = E(\tilde{r}_i) + \beta_{i1}\tilde{\delta}_1 + \cdots + \beta_{ik}\tilde{\delta}_k + \tilde{\varepsilon}_i \quad (\bigstar)$$

から生成される。[8] ただし、各共通因子 $\tilde{\delta}_j(j=1,\cdots,k)$ と独立因子 $\tilde{\varepsilon}_i(i=1,\cdots,n)$ の期待値はいずれもゼロ、共通因子の分散は1、独自因子の分散は有界、それぞれの共分散はゼロ（すなわち共通因子間、独自因子間、および共通因子・独自因子間は無相関）とする。

そして、すべての投資家の期待はこの生成過程に従って形成されるものとする。[9]

(裁定機会不在の仮定)

標本Ωに属する銘柄の全部または一部の売買を組み合わせても、裁定機会を享受できるような株式投資収益率の水準はどの銘柄についても生成されない。ここで、裁定機会とは、当該取引を通じた売買ポジションが売持ち買持ちにも偏らず、しかも正の期待収益率を分散ゼロの下で達成できる資産運用をいう。

(APTの基本定理)

収益率生成過程の多因子線型性と裁定機会不在の双方の仮定の下では、各銘柄の期待株式投資収益率は漸近的に

$$E(\tilde{r}_i) = \rho + \lambda_1\beta_{i1} + \cdots + \lambda_k\beta_{ik} \quad (\blacktriangle)$$

で与えられる。

基本定理の証明はHuberman (1982) で与えられているので、ここではその論理構成を簡潔に示しておく。まず因子間の直交性から、式(★)におけるパラメータE ($\tilde{r}e_i$) を残りの $\beta_{i1},\cdots,\beta_{ik}$, 1 ($\tilde{\varepsilon}_i$の係数) で線型回帰させることが可能であり、それは

$$E(\tilde{r}_i) = \rho + \lambda_1\beta_{i1} + \cdots + \lambda_k\beta_{ik} + c_i \cdot 1$$

で表現される。ここで、ρ は回帰式の定数項、c_i は回帰誤差項にそれぞれ相当し、$\Sigma c_i = 0$ である。このことは、銘柄iへの投資比率が c_i となるポートフォリオ $c = [c_i]$ の売買ポジションがスクウェアであることを意味し、それゆえに、cは裁定ポートフォリオを表していることになる。そこで、$\Sigma \tilde{r}_i c_i$ は売買ポジションがスクウェアの裁定ポートフォリオの収益率を表すことになる。

いま、Σc_i^2 が無限大に漸近すると仮定すれば、裁定ポートフォリオの期待値は漸近的に無限大となる一方、分散はゼロとなるケースがあるので、[10] 裁定機会不在の仮定に反することになる。したがって、この対偶命題をとって、裁定機会が不在という仮定の下では、Σc_i^2 は有限であり、個々の c_i は漸近的にゼロとなること（つまり式（▲）の成立）が示される。[11]

ところで、APTの基本評価式（▲）の ρ は安全資産の利子率である。なぜならば、定義により、安全資産においては共通因子がいかなる値をとっても、それはリスクとは受け止められ

---

8) 式（★）の右辺第1項を定数とし、この両辺の期待値をとると、$\tilde{\delta}_J$、$\tilde{\varepsilon}_1$ の期待値がゼロであるから、この定数が株式投資収益率の期待値となることがわかる。

9) したがって、E（・）は市場における期待作用素であると同時に、個々の投資家の期待作用素でもある。

ない訳であるから、反応係数は $\beta_1{}^*{}_1=\cdots=\beta_1{}^*{}_k=0$ であり、そのときの期待株式投資収益率 $E_1{}^*$ は ρ で与えられるからである。

したがって、APT の基本定理は、「株式投資収益率生成過程の多因子線型性と裁定機会不在の複合仮説が成り立てば、各銘柄の期待株式投資収益率は共通因子に対する投資家のリスク・プレミアムの総和に安全利子率を加えたものとなる」ことを主張している。

そこで、期待株式投資収益率の表現式（▲）の成否を検証することにより、上記複合仮説の是非を問うことができる。すなわち、式（▲）の成立は双方の仮説が同時に成立していることを示す必要条件であり、反対に式（▲）の不成立は複合仮説の少なくともいずれか一方が成立していない十分条件となる。また、仮にいま株式市場が十分に成熟している米国や日本の主要銘柄を対象にとり、裁定機会の不在が別途示されているとすれば、式（▲）の不成立は株式投資収益率が式（▲）では表現しきれないことを意味することになる。

このように、APT の基本定理は多因子線型の株式投資収益率生成過程を棄却する際には強力な論拠となるが、逆にそれを採用するための十分な論拠を提供しているとはいいきれない（必要条件であるが十分条件ではない）。しかし、多因子線型の株式投資収益率生成過程式（★）は統計的にはかなり一般的な形であり、それ単独では検証する方法がないので、APT の基本定理の検証（式（▲）の検証）という形で必要条件という限定された意味にせよ、多因子線型の株式投資収益率生成過程の妥当性を導くことができれば、資産収益生成過程の解明に向けて大きく前進することになる。

さて、この定理に従うと、APT の基本的な検証手順は、

(1) 株式投資収益率のパネル・データからその相関行列を求め、これにより収益生成過程式（★）の係数 β を推計、

(2) (1)で推計した β で基本評価式（▲）を回帰して求まる係数 λ の有意性を検定（ただし、期待値 E（r_i）の推定を省くために、通常、式（▲）

---

10) 例えば $c=[c_1,\cdots,c_n]'$ を α 倍したポートフォリオ αc を考えると、

$\Sigma \alpha c_i=0$

$E(\alpha c\cdot\tilde{r})=\alpha\Sigma c_i^2$

$var(\alpha c\cdot\tilde{r})=\alpha^2\Sigma c_i^2$

ここで、$\alpha=(\Sigma c_i^2)^{-3/4}$ とおくと、

$E(\alpha c\cdot\tilde{r})=(\Sigma c_i^2)^{1/4}$

$var(\alpha c\cdot\tilde{r})=(\Sigma c_i^2)^{-2/4}$

そこで、もし Σc_i^2 が無限大に漸近すれば、

$E(\alpha c\cdot\tilde{r})\to\infty$

$var(\alpha c\cdot\tilde{r})\to 0$

となり、αc は裁定ポートフォリオである。したがって、Σc_i^2 が無限大に漸近すれば、裁定ポートフォリオが少なくとも1つ存在する。

11) 基本定理はいかなる標本 Ω に対しても Σc_i^2 が有限であることを導いているので、標本 Ω を構成する銘柄数 n が2、3個でも個々の c_i がゼロとなる可能性がある。したがって、銘柄数 n が無限大に漸近することは必ずしも APT の基本定理成立の必要条件ではない。もっとも、銘柄数 n が十分に大きければ、Σc_i^2 の有限性のみから、どの c_i も漸近的にゼロであることを主張できる。

を式（★）に代入してE（r_i）を消去した式に対してGLS回帰を行なう)、

の2段階を経る。ただし、正確には、(1)の段階で推計される式（★）は単に株式投資収益率の分散分解を表しているに過ぎず、(2)の検証手続きを経て初めて収益生成過程であることが示される。

ここで、両段階の推計方法はいずれも単一とは限らないが、APTの本質からすれば、次の4つの前提条件を満たすものでなくてはならない。

＜Ⅰ＞　想定する株式投資収益率生成過程は多因子かつ線型であること、そして、最終的には因子数が確定すること。

＜Ⅱ＞　対象とする標本の選択には強い制約がないものの、標本に組み込まれる株式銘柄数は多いことが望ましいこと（先の脚注11を参照)。

＜Ⅲ＞　株式投資収益率の変動を引き起こす因子に先験的制約を設けないこと。APTが登場してきた背景が変動要素を把握できないことにあった以上、因子の定性的性格や確率分布等の定量的特徴に関して先入観を持ち込むことはAPTの趣旨に反すると考えられるからである。こうした事情から、APTでは既知の説明変数を用いた回帰分析は適用できなくなり、代わって因子分析により因子の定量的特徴を浮かび上がらせる手法が採用される。

＜Ⅳ＞　株式投資収益率の分布を特定化しないこと（とりわけ正規分布を仮定しないこと)。これは仮に正規分布を仮定すると、前述したようにCAPMが成立するはずであるから、APTを採用し、わざわざ因子分析のような複雑な統計分析手法を持ち出す必要性が消滅してしまうからである。

以上で示したように、APTの枠組は比較的簡単であり、恣意的仮定を設けずに実証可能なところに利点があるが、従来の実証分析例を振り返ってみると、上記4つの条件に照らして必ずしも適切な処理が施されていたとはいえない。以下、3.ではこの点を指摘するとともに、APTの実証方法の改善を図ってみよう。

3.　APTの実証方法

(1)　従来のAPT実証方法とその問題点

APTの実証はRoll-Ross（1980）を嚆矢とするが、そこでの実証方法の大きな特徴は次の3点である。

(1)　最尤推定法に基づく株式投資収益率の分散共分散行列の因子分解、

(2)　χ^2検定による最良因子数の決定、

(3)　株式投資収益率の生成過程推定に当たり大標本を用いず、30銘柄ずつに分割処理（いわゆるグルーピング)。

それ以降の実証研究も基本的にはほぼこの3点を踏襲しているが、これらはいずれも以下に示すような問題点を抱えている。

第1に、株式投資収益率の分散共分散行列を因子分解するときに最尤推定法を用いることは、前述したAPT実証の前提条件＜Ⅳ＞に抵触する。なぜならば、Roll-Ross（1980）自体が指摘しているように、[12]株式投資収益率の分布は未知であり、その分散共分散行列の密度関

---

12)　Roll-Ross（1980; p.1087）では次のとおり言及している。
"However, there may be some problems attendant to the M.L.E. method because the likelihood function involved is that of a multivariate gaussian distribution. To the extent that the data have been generated by a non-gaussian probability law, unknown biases and inconsistencies may be introduced."

数、したがって尤度関数を定義できないからである。にもかかわらず、最尤推定法を採用することは、株式投資収益率の漸近正規分布をそもそも前提にしていることを意味する。その場合、仮に式（▲）が不成立であっても、それは収益率の漸近正規性の制約に起因する可能性が大きく、したがって、収益率生成過程の多因子線型性と裁定機会の不在の複合仮説を直ちには棄却することはできない。このように、最尤推定法を採用すると、株式投資収益率の漸近正規性の仮定が余りに強過ぎて、APT を検証したことにはならない。[13)]

第２に、最良因子数の決定 χ^2 検定を適用することには問題がある。株式投資収益率の分布が未知であれば χ^2 統計量が求められず、あるいは、漸近理論に従ってモデル選択するならば、検定方法として特に χ^2 検定が優れているという根拠は何もない。したがって、APT の検証に当たって、χ^2 検定を最良因子数の唯一の決定方法と見做してきた従来の実証方法は必ずしも適切とはいえない。[14)]

第３に、推定に当たりグルーピング処理をすることにも問題点がある。まず、前述の前提条件＜Ⅱ＞に反して、共通因子を抽出する標本の大きさが小さくなり過ぎることである。取引の対象となる銘柄の数が少なくなればなるほど、その中での共通因子の数が少なくなり、個別銘柄に特有の独自因子の株式投資収益率に対する影響力が大きくなる可能性が高い。したがって、対象とする標本には、現実に取引している範囲を越えてまでありとあらゆる銘柄を取り入れる必要はないにせよ、例えば多くの投資家が取引可能な東証１部の貸借銘柄を包括する程度には大きい方が、APT の考え方に照らせば望ましいと考えられる。

加えて、異なる小標本間では、共通因子が定性的に同一である保証がないことも問題である。例えば100銘柄からなる大標本では共通因子が10個で、それを２分割した50銘柄の小標本ではいずれの共通因子も５個であったとして、その５個が共に同一であるとは限らない。したがって、小標本から得られる共通因子の組み合わせは、決して株式市場全体の構造を普遍的に記述するものとはいえない。

以上の理由から、Roll-Ross（1980）以来の実証方法が多く採用している。①最尤推定の因子分析、② χ^2 検定による最良因子数の確定、③小標本の採用の３点はいずれも APT の実証方法としては不適切と考えられる。

(2) 最小２乗推定因子分析による APT 検証の提案

これまでの実証分析が抱える以上のような問題点を改めるべく、本分析では、

(1) 最尤法に代わって、標本相関行列の母相関行列に対する推定誤差を最小にする推定法に基づく因子分析、
(2) 最良因子数確定に複数の基準を適用、
(3) グルーピング処理の不採用、

の３つを柱とする実証方法を試みる。以下では、

---

13) もっとも、最尤法以外に統計上検定可能な望ましい推定法が見当らないのも事実であり、APT の検証を離れて株式投資収益率の分散分解を推定するだけであれば、最尤法は有用な手法である。

14) 因子数確定に考慮を払っている既往分析例は、Kryzanowski-To（1983）と Trzcinka（1986）であり、そこでは χ^2 検定に加えて、固有値のトレース分析（scree test）を展開している。しかし、これを除くと、Roll-Ross (1980)、Brown-Weinstein（1983）、Cho（1984）、Dhrymes, Friend and Gultekin（1984）、Dhrymes, Friend, Gultekin and Gultekin（1985）はいずれも χ^2 検定のみを拠り所に因子数の確定を検討しているにとどまっている。

最初に具体的な実証手順を提示し、その後で実証のポイントとなる部分を説明する。

＜第1段階＞

個別株式投資収益率のパネル・データを用意し､その標本分散共分散行列を求める｡予めデータを標準化処理しておけば、これは標本相関行列Sになる。

＜第2段階＞

共通因子（以下、単に因子と呼ぶ）の数をk＝1にとり、因子分析を行なう（後段で、kの次数を順次引き上げていく)。ここでは、母相関行列Σ_sに対して、標本相関行列Sができるだけ一致するような因子分析を導きたいので、両者の差の適合関数（fit function）を次のように定義し、その最小化を図る。すなわち、

$$L=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{tr}\{(S-\Sigma_S)S^{-1}\}^2 \qquad (2)$$

これが最小となるための1階条件は、標準化処理済みの収益生成過程式（★）の因子負荷係数β_{ij}（$i=1, \cdots, n$, $j=1, \cdots, k$）を成分とする行列B_sと、独自因子の分散行列Ψ_Sに対して、

$$(S-\Sigma_S)\Sigma_S^{-1}\hat{B}_S=O \qquad (3)$$

$$\hat{\Psi}_S=\mathrm{diag}(S-\hat{B}_S\hat{B}_S') \qquad (4)$$

で与えられる。この条件を満たす$\hat{B}_s$、$\hat{\Psi}_S$で、因子分析の基本方程式

$$\Sigma_S=\hat{B}_S\hat{B}_S'+\hat{\Psi}_S \qquad (5)$$

を成り立たせるものを採用する。

計算に当たっては、銘柄nが50を越えるような大標本ではこの連立方程式が容易に解けないので、式(4)の$\hat{\Psi}_S$に初期値を与え、式(5)が近似的に成り立つまで、式(3)と式(4)の間でアルゴリズムを展開する。[15)]

この最小2乗法因子分析により、式（★）が推定できる。

＜第3段階＞

因子数kを順次増やして、それぞれの因子数の下で、因子負荷係数行列の最小2乗推定値$\hat{B}_s$を求める。続いて、この中から最良推定値を選ぶ。個別株式投資収益率の漸近正規性を仮定しない限り、統計的に望ましい基準は決められていないので、一般によく用いられるχ^2統計量を用いた尤度比検定、AIC（Akaike's Information Criterion）基準、SBC（Schwarz's Bayesian Criterion）基準を組み合わせ、この中から最も因子数の少ないものという判定基準に従って、最良の因子モデルを確定する。

＜第4段階＞

標本を時系列、クロス・セッションの両面で変化させた上で、第2段階、第3段階の操作を繰り返し、最良因子数および因子負荷係数に大きな相違がみられるか否かを調べる。

＜第5段階＞

株式投資収益率の因子モデルが標本構成によって大きく左右されないことが明らかとなった場合には、APTの基本評価式（▲）の検証を行なう。式（▲）を式（★）に代入すると、銘柄1からnまでのクロス・セクション・データに対して、

$$\underbrace{r}_{\text{被説明変数}}=\underbrace{\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_k\beta_k}_{\text{k個の説明変数}}+\underbrace{\rho}_{\text{定数項}}+\underbrace{\beta_1\delta_1+\cdots+\beta_k\delta_k+\varepsilon}_{\text{誤差項}} \qquad (■)$$

15）本分析で用いたSAS Statistics ver.5のコンピューター・ソフトでは、Joreskog（1977）のアルゴリズムが採用されている。アルゴリズムの比較等については丘本（1986）を参照。

となる回帰式が得られる。誤差項の分散共分散はrの分散共分散（$B_sB_s' + \Psi_s$）に等しく、この推定値は既に第2段階の因子分析で与えられている。したがって、β_1、…、β_kを説明変数とする一般化最小2乗回帰分析（GLS）により係数λ_1、…、λ_kを求めることができる。

そこで、このGLS推計値λ_1、…、λ_kがいずれもゼロであるか否かをχ_2統計量を算出して検定する。この場合、χ^2検定に代わる適当な検定がないので、その信頼区間を厳格に適用しても余り意味がない。もし$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$の帰無仮説が棄却できれば、APTの基本評価式（▲）が成り立つための必要条件が満たされるので、式（★）が収益率生成過程を表現している可能性を主張できる。

＜第6段階＞

最後に、式（★）が収益率生成過程であれば、δ_1、…、δ_kは株式投資収益率を生起させる共通因子であるから、収益率の各観測値に対応してδ_1、…、δ_kの大きさを推計する。ここでは、最もポピュラーな最小2乗法により推定する。

さて、第2段階で採用した最小2乗法の因子分析について、最尤法と比較する形で言及しておこう。最尤法が標本である株式投資収益率の確率分布についての先験的知識を必要とするのに対して、最小2乗法ではそうした制約がない。したがって、APTには最小2乗法がより適しているといえよう。しかし、最小2乗法でも、母相関行列と標本相関行列との乖離を示す測度に何を採用するかという問題が付随しており、ここでは、誘導される因子分析の基本方程式が漸近正規の尤度関数を想定したときの最尤法の基本方程式と同一になる測度を採用する。このように最尤推定量と一致する最小2乗推計量を求めることができれば、従来の実証分析で最尤推定値として求めていたものが実のところは最小2乗推定値にほかならなかったとの解釈を付与することができる。また、本分析の実証結果と既往実証結果とを同じ土俵で対比させることも可能となる（この点を含めて、因子分析の原理等については補論を参照）。[16]

次に、第4段階で複数の標本に対して式（★）を推定する理由は、仮に日本の株式市場における収益率生成過程が普遍的であれば、その因子負荷係数は時間、空間に亘って安定的な筈であり、標本の変更に対してrobustでなければならないからである。このように、APTの検証において標本の特異性から独立させて普遍的な帰結を得ようとするアプローチにはBrown-Weinstein（1984）があり、本分析でもそこでの標本分割手法を採用してクロス・セクション分析を行なう。[17]

4.　実証結果—多因子線型の株式投資収益率生成過程の推定

(1)　計測対象の概要

本分析で用いる株式投資収益率は、日本証券経済研究所計測室作成の月次データであり、これは月中の配当収入や増資等の株数増減を調整した後の月末株価（東証終値）の前月末比変化率を年率換算したものである。すなわち、当該

16)　上記のように、Roll-Ross（1980）以来、多くの既往分析が推計してきた最尤推定値を最小2乗推定値と読み替える場合には、漸近正規性に従っている諸検定の解釈に変更が求められる。

17)　Brown-Weinstein（1984）では、標本間の因子負荷係数の差異をF検定で識別しているが、3.(1)で述べたように、因子の確率分布に関して先験的仮定を設けることはできないので、本分析ではこの作業を省略した。

銘柄の株式をその１カ月間保有した場合に株主に帰属する１株当たりのキャピタル・ゲインとインカム・ゲインの和を収益とし、前月末の株価を元金（資金コスト）とみなしたときに、その双方の比率（年率換算）がここでの株式投資収益率に相当する。

原データは、東証１部上場の全銘柄について1951年11月ないし上場開始時以降1984年12月までの月次収益率を網羅しているが、[18]観測時点数は最長でも400弱であることを勘案すると、因子分析の実行を妨げない銘柄数はそれ以下に絞る必要がある。そこで、ここでの分析対象を日経ダウ225種指数の算出に用いられている銘柄に限定することとした。分析対象を特にダウ銘柄としなければならない必然的根拠はないが、次のような制約条件を考慮すると、選択基準としてはダウ225種が適当というのがここでの判断である。

(1) 特定の業種に偏ることを避けて銘柄を抽出できること（ただし、株価が硬直的であった金融業を除く)。

(2) 非製造業の中でも比較的ウェイトの大きい建設業各社の東証上場が1961、62年であることから、全体をカバーする観測時点数は280余りに更に短縮され、因子分析可能な銘柄数の上限は230となること。

(3) 一方、1963～84年の観測期間に株式投資収益率のデータが揃っている先は300余りに限定されるが、その中にダウ銘柄はいずれも含まれていること。[19]

(4) 1960年以降ではダウ銘柄の入れ替えも少なく、ダウ採用基準が一貫して安定していること。

こうした制約の下では、仮にランダム・サンプリングを行なうとしても、そこから得られる結果はダウ銘柄そのものとさしたる相違がみられないと考えられるので、ここでは簡便な手続きとして、ダウ銘柄を分析対象の標本とした。その意味では、1984年時点でのダウ225種が分析対象となるが、長期に亘り価格が釘付けされていた金融業15種と、上場廃止となった三光汽船、および標本数を偶数にするために最も標本分散の大きい台糖をそれぞれ除外したので、ここで採用された標本は残るダウ208銘柄から構成されることになる。

(2) 最良因子数の確定

採用した標本に対する実証結果を以下にまとめよう。

まず、最良因子数を確定するために、因子数を順次増加させて、因子負荷係数の大きさ、およびχ^2推計値、AIC 統計値や SBC 統計値を比較した。第１表に示すとおり、各銘柄の因子負荷係数の２乗和である「共通性」の平均値をみると、因子数を11まで増やしても収束する様子がない。すなわち、共通因子をいくら増加しても、追加した共通因子の株式投資収益率変動に対する説明力は無視できない訳である。また、AIC やχ^2統計値も漸減傾向を辿っており、同表には示していないものの、更に30まで因子数を増加してみても、最小値には達しない。

しかし、以上の結果から、因子数が多ければ多いほど株式投資収益率の変動を説明するモデルとして望ましいと判断することは恐らくミス・リーディングであろう。なぜならば、最良

18) 62年５月にデータは1986年12月までに更新された。

19) ダウ銘柄についても、1983～84年までの観測期間に欠測値が散在するが、その場合には、欠測値を除いた標本平均値で欠測値を代用することにより、標本数を保った。

因子数の確定にはχ^2統計値を用いた尤度比検定やAIC基準の他にSBC基準も有効であると考えられるが、そのSBC統計値は第1表の示すとおり因子数7のときに最小値となっているからである。

そこで、この標本に対するSBC基準による判断がどの程度信頼できるものかを検討するため、次の2種類のテストを実行してみた。

第1のテストは、標本をクロス・セクションで変えてみることである。前述のように、この標本期間ではダウ銘柄以外に観測値の完備している銘柄は少ないので、ここでは、標本分割の手法を援用した。すなわち、208銘柄をランダムに2つに分割し、各小標本においてもSBC基準で最良因子数が標本全体と同じく7となるか否かを調べた。第2表に示されているように、東証コード順に小さい番号から選んだ前半104銘柄では因子数6～7のとき、また、後半104銘柄では因子数6～8のとき、SBC統計値は最小となる。この結果は、クロス・セクションの構成を変えても、SBC基準の支持する最良因子数はほぼ変わらないことを示唆しているといえよう。

第2に、時系列上無変化のデータを複数の銘柄に人為的に与えると、架空の共通因子が検出されるとみられることを利用して、これに相当するテストを行なうことにより、SBC基準の識別力を検討した。たまたま建設株10銘柄のデータが1954年から1962年まで長期に亘り欠落しているので、この間の約100時点に1963年以降の標本平均を代入し続け、その他の銘柄には実際の観測値を用いてみたところ、第4表のよ

第1表　最良因子数の検定（その1）

対象変量：ダウ採用208銘柄の株式投資収益率（標準化処理済み）
観測期間：1963年1月末～1984年12月末（観測個数264）

	共通性平均値[1]	χ^2統計値(自由度)[2]	ＡＩＣ統計値	ＳＢＣ統計値
因子数ゼロの場合	—	51154.(21528)	—	—
1因子モデル	0.223	41342.(21320)	57628.	29558.
2因子モデル	0.291	37937.(21113)	53546.	27887.
3因子モデル	0.328	35796.(20907)	51179.	27072.
4因子モデル	0.360	34237.(20702)	49597.	26648.
5因子モデル	0.378	33104.(20498)	48595.	26511.
6因子モデル	0.399	32047.(20295)	47686.	26419.
7因子モデル	0.418	31023.(20093)	46813.	26344.
8因子モデル	0.431	30297.(19892)	46346.	26470.
9因子モデル	0.444	29610.(19692)	45929.	26619.
10因子モデル	0.456	28963.(19493)	45558.	26789.
11因子モデル	0.468	28351.(19295)	45231.	26980.

注：1．共通性平均値は各銘柄の共通性（＝因子負荷係数の2乗和）の平均値。
　　2．χ^2統計値を用いた尤度比検定で当該因子数が十分であるとの帰無仮説はいずれも信頼水準0.0001で棄却される。

第２表　最良因子数の検定（その２）

対象変量：ダウ採用・東証コード順前半104銘柄の株式投資収益率（標準化処理済み）
観測期間：1963年１月末～1984年12月末（観測個数264）

	共通性平均値[1]	χ^2統計値(自由度)[2]	ＡＩＣ統計値	ＳＢＣ統計値
因子数ゼロの場合	−	19724.(5356)	−	−
１因子モデル	0.246	13478.(5252)	16102.	8423.
２因子モデル	0.317	11407.(5149)	13937.	7525.
３因子モデル	0.351	10207.(5047)	12776.	7126.
４因子モデル	0.386	9347.(4946)	12003.	6921.
５因子モデル	0.411	8753.(4846)	11536.	6866.
６因子モデル	0.435	8102.(4747)	10996.	6773.
７因子モデル	0.454	7640.(4649)	10674.	6787.
８因子モデル	0.469	7205.(4552)	10378.	6812.
９因子モデル	0.485	6836.(4456)	10115.	6873.
10因子モデル	0.496	6536.(4361)	10012.	6971.
11因子モデル	0.509	6256.(4267)	9887.	7077.

注：第１表の脚注参照。

第３表　最良因子数の検定（その３）

対象変量：ダウ採用・東証コード順後半104銘柄の株式投資収益率（標準化処理済み）
観測期間：1963年１月末～1984年12月末（観測個数264）

	共通性平均値[1]	χ^2統計値(自由度)[2]	ＡＩＣ統計値	ＳＢＣ統計値
因子数ゼロの場合	−	19459.(5356)	−	−
１因子モデル	0.221	13995.(5252)	16704.	8724.
２因子モデル	0.295	12107.(5149)	14754.	7933.
３因子モデル	0.342	10927.(5047)	13619.	7548.
４因子モデル	0.376	9942.(4946)	12702.	7270.
５因子モデル	0.407	9181.(4846)	12041.	7118.
６因子モデル	0.430	8571.(4747)	11550.	7050.
７因子モデル	0.449	8070.(4649)	11182.	7041.
８因子モデル	0.467	7586.(4552)	10831.	7039.
９因子モデル	0.481	7213.(4456)	10606.	7098.
10因子モデル	0.496	6869.(4361)	10411.	7170.
11因子モデル	0.509	6534.(4267)	10221.	7243.

注：第１表の脚注参照。

うに208銘柄全体の標本でも、また、第5表に示すとおり、建設株をすべて含む前半104銘柄の部分標本でも、SBC 基準の指示する最良因子数（8～9）は1963年以降のオリジナルな標本の推定結果（6～7個）と比較して増加している。しかも、第6表に示すとおり、ここでの人為的な操作の影響を被らない後半104銘柄の標本では、最良因子数（7～8）は増加していない。

したがって、ここで取り上げたダウ銘柄の標本の最良因子数確定に関しては、SBC 基準が安定的な評価を与えているといえよう。このSBC 基準と比較すると χ^2 検定、AIC 基準では、分割後の小標本に関しても30個以内の範囲で最小統計量を検出することができなかったので、これらの基準から安定的な最良因子数を確定することは困難である。

このように検討した結果、本分析の標本では、SBC 基準に従い最良因子数が7個であると判断される。

(3)　7因子モデルの安定性

以上の検討結果から、ここで採用しているダウ銘柄の株式投資収益率の変動を説明する共通因子の数は、最小2乗推定に基づく因子分析によって得られた7個であることが示された。この結果は、ダウ銘柄の株式投資収益率の変動を説明するために、いかなる7系列の変数を用意し、それらを説明変数とする回帰分析を行なっても、この因子分析による説明力を越える説明力を得ることができないことを意味している。

さて、これまでの因子分析により異なる標本において因子数が同一であることが示されたが、ここまでの実証結果からだけでは各因子の

第4表　最良因子数の検定（その4）

対象変量：ダウ採用208銘柄の株式投資収益率（標準化処理済み）、ただし、建設株10銘柄の1962年以前の観測値は1963年以降の標本平均値で置換処理。
観測期間：1954年1月末～1984年12月末（観測個数372）

	共通性平均値[1]	χ^2統計値(自由度)[2]	ＡＩＣ統計値	ＳＢＣ統計値
因子数ゼロの場合	—	62758.(21528)	—	—
1因子モデル	0.237	46363.(21320)	58290.	29960.
2因子モデル	0.297	41868.(21113)	53249.	27845.
3因子モデル	0.330	39235.(20907)	50499.	26874.
4因子モデル	0.355	37384.(20702)	48709.	26831.
5因子モデル	0.373	35909.(20498)	47377.	26115.
6因子モデル	0.389	34584.(20295)	46224.	25936.
7因子モデル	0.407	33339.(20093)	45161.	25800.
8因子モデル	0.422	32212.(19892)	44239.	25733.
9因子モデル	0.435	31275.(19692)	43549.	25780.
10因子モデル	0.446	30469.(19493)	43017.	25903.
11因子モデル	0.467	29663.(19295)	42479.	26022.

注：第1表の脚注参照。

第５表　最良因子数の検定（その５）

対象変量：ダウ採用・東証コード順前半104銘柄の株式投資収益率（標準化処理済み)、ただし、建設株10銘柄の1962年以前の観測値は1963年以降の標本平均値で置換処理。
観測期間：1954年１月末～1984年12月末（観測個数372)

	共通性平均値[1]	χ^2統計値(自由度)[2]	ＡＩＣ統計値	ＳＢＣ統計値
因子数ゼロの場合	―	25577.(5356)	―	―
１因子モデル	0.256	15964.(5252)	18152.	9483.
２因子モデル	0.320	13470.(5149)	15617.	8418.
３因子モデル	0.349	12097.(5047)	14319.	7969.
４因子モデル	0.382	10870.(4946)	13177.	7596.
５因子モデル	0.408	10012.(4846)	12441.	7423.
６因子モデル	0.430	9218.(4747)	11770.	7282.
７因子モデル	0.448	8492.(4649)	11171.	7175.
８因子モデル	0.464	7936.(4552)	10758.	7158.
９因子モデル	0.478	7405.(4456)	10368.	7151.
10因子モデル	0.491	7040.(4361)	10162.	7234.
11因子モデル	0.500	6758.(4267)	10046.	7361.

注：第１表の脚注参照。

第６表　最良因子数の検定（その６）

対象変量：ダウ採用・東証コード順後半104銘柄の株式投資収益率（標準化処理済み）
観測期間：1954年１月末～1984年12月末（観測個数372)

	共通性平均値[1]	χ^2統計値(自由度)[2]	ＡＩＣ統計値	ＳＢＣ統計値
因子数ゼロの場合	―	25272.(5356)	―	―
１因子モデル	0.240	16420.(5252)	18658.	9737.
２因子モデル	0.310	13748.(5149)	15927.	8573.
３因子モデル	0.347	12467.(5047)	14732.	8175.
４因子モデル	0.376	11262.(4946)	13615.	7815.
５因子モデル	0.405	10209.(4846)	12661.	7534.
６因子モデル	0.426	9436.(4747)	12015.	7405.
７因子モデル	0.443	8789.(4649)	11505.	7342.
８因子モデル	0.459	8258.(4552)	11120.	7339.
９因子モデル	0.472	7800.(4456)	10814.	7374.
10因子モデル	0.485	7402.(4361)	10571.	7439.
11因子モデル	0.500	6976.(4267)	10294.	7485.

注：第１表の脚注参照。

定量的性格までもが同一である保証は得られない。そこで、この7因子モデルが株式投資収益率生成過程に該当するか否かを検討する（実証の第5段階）前に、観測期間を変えたとき、あるいは推定に用いる標本の大きさを変えたときに、7因子モデルのパラメーター（因子負荷係数推定値）が安定であるかどうかを検討してみた。ここでは、因子負荷係数推定値の標本間の相違を個別銘柄毎の標準偏差で測り、全銘柄を通したその平均値を調べた（個別銘柄の因子負荷係数推定値は本文末の付表を参照)。

最初に、観測期間を変えた標本間で比較した。まず、208銘柄全体を用いた標本に対して、1963～1984年、1963～1982年、そして1965～1984年までの3つの期間でそれぞれ因子負荷係数推定値を求め、その3つの推定値の間の標準偏差をみると、第7表に示すとおり、第1因子負荷係数推定値の平均は0.020、また、第3因子から第7因子までの負荷係数推定値の平均も0.03以下の値にとどまっているが、第2因子負荷係数推定値の平均だけが0.256とやや大きい。これらの負荷係数がかかる因子の大きさが平均0、分散1に標準化されていることを考慮すれば、この結果からみる限り、モデル全体を描写するパラメーターとしては各因子負荷係数推定値は極めて安定的であることが窺われる。同様に、前半104銘柄だけを用いた標本では、上記3期間に1970～1984年までの期間を加えた4つの期間の間の標準偏差をみることができるが、この場合でも全銘柄を通したその平均値は第6因子負荷係数推定値を除きいずれも0.082以下であり、また、後半104銘柄だけを用いた標本では、上記4期間に更に1955～1969年の期間というオリジナルな標本（1963～1984）とはかなり異なる期間を加えた5つの期間の間で比べたが、いずれの因子負荷係数推定値の標準偏差の平均も0.134以下であった。

したがって、観測期間の全く異なる標本間においては7因子モデルが安定的である保証はないものの、15年を越える観測時点数がある場合には、5年前後標本の観測期間が異なっても各因子負荷係数推定値に有意な差異はみられないことが示された。

次に、推計に用いる標本の大きさを変えて、クロス・セクションで分割した前半・後半104銘柄の標本からの推計値と208銘柄全体の標本からの推計値を比較した（観測期間は1963～1984年に固定)。時系列上の比較と同様に、個

第7表　因子負荷係数推計値の時系列上の安定性

	個別因子負荷係数推計値間の標準偏差の全銘柄を通した平均		
標本の大きさ	208銘柄全体	前半104銘柄	後半104銘柄
比較観測期間数	3	4	5
第1因子負荷係数	0.020	0.030	0.057
第2因子負荷係数	0.256	0.042	0.074
第3因子負荷係数	0.029	0.059	0.127
第4因子負荷係数	0.017	0.033	0.099
第5因子負荷係数	0.019	0.044	0.120
第6因子負荷係数	0.018	0.122	0.134
第7因子負荷係数	0.018	0.082	0.126

別銘柄毎にこの2つの推計値間の標準偏差を求め、各104銘柄を通したその平均値をみると、第8表に示すとおり、いずれの因子負荷係数推定値も概ね0.1前後であり、とりわけ第1因子負荷係数は前半銘柄で0.027、後半銘柄で0.030と小さくなっている。この結果から、標本の銘柄構成を変えても各因子負荷係数推定値に有意な差異をもたらさないことが指摘される。

このように、標本期間、銘柄構成を入れ替えても、7因子モデルの因子負荷係数の推定には殆ど有意な影響を及ぼさない。以上の結論は、ここで取り上げたどの標本を採用しても、APTの基本定理の検証において同じ結果が得られることを保証する。

(4) APT基本定理の検証結果

前節で推計した7因子モデルは、ダウ銘柄の1963年から84年に亘る共通変動を説明するものであるが、残りの変動分がすべて独自因子に帰着し、かつこの独自変動分（独自性）が分散投資（diversification）により消去可能であることを示さない限り、この7因子モデルが株式投資収益率の生成過程を表現しているとはいえない。そこで、実証手順の第5段階に移って、APT基本定理の検証を行なった。ここでは、

a) 1963年から84年までのダウ208銘柄、およびそれを2分割した前半104銘柄と後半104銘柄の3種類の大きさの標本を用意し、

b) それぞれから推計した7因子モデルの因子負荷係数の月次クロス・セクション・データを説明変数として、

c) 同じく1963年から84年までの期間の264時点に生成した株式投資収益率のそれぞれに対してGLS回帰を行ない（回帰式は3.(2)の式（■））、

d) そこで得られた3×264＝792組の回帰係数（λ_j）について、その有意性をχ^2検定した。

その結果、回帰係数λ_j（j＝1、…、7）のいずれもがゼロから有意に乖離して、APTの基本評価式（▲）（検証対象は式（■））の成立が主張できるテスト数は、第9表に示すとおり、5％の有意水準では全体の21％にとどまるものの、有意水準を50％に緩めると全体の55％（計792テスト中、438テスト）に上る。208全銘柄、前半・後半の104銘柄別にみても同様の結果である。

したがって、因子の漸近正規性の仮定という

第8表　因子負荷係数推計値の標本構成上の安定性

	個別因子負荷係数推計値間の標準編差*の104銘柄を通した平均	
比較対象銘柄	前半104銘柄	後半104銘柄
第1因子負荷係数	0.027	0.030
第2因子負荷係数	0.107	0.289
第3因子負荷係数	0.095	0.158
第4因子負荷係数	0.093	0.108
第5因子負荷係数	0.091	0.119
第6因子負荷係数	0.075	0.133
第7因子負荷係数	0.114	0.122

*：208銘柄全体を対象とする標本と前半（または後半）104銘柄だけを対象とする部分標本のそれぞれから求めた2つの推計値の間の標準偏差。

第9表　ＡＰＴ基本評価式の検証

APT 基本評価式（■）の係数 λ_j の有意性検定時の標本：　因子負荷係数推定時と同一の銘柄を対象としたクロス・セクション・データ
テスト数：　それぞれの大きさの標本に対して264（1963～1984年の各月末）、総計792

推計の対象となる標本の大きさ*	$\lambda_1 = \cdots = \lambda_7 = 0$ の帰無仮説が棄却できるテストの数(その比率)			
	有意水準５％	有意水準10％	有意水準25％	有意水準50％
208銘柄全体	43(16％)	49(19％)	75(28％)	118(45％)
前半104銘柄のみ	55(21％)	77(29％)	99(38％)	160(61％)
後半104銘柄のみ	67(25％)	78(30％)	107(41％)	160(61％)
以上３種類の標本を用いたテストの合計	165(21％)	204(26％)	281(35％)	438(55％)

＊：因子負荷係数 β_{ij} 推定時の観測期間は1963～1984年。

留保条件付きながらも、1963年から84年の期間のダウ208銘柄のパネル・データを用いる限り、最小２乗法因子分析で推定した７因子モデルは株式投資収益率の生成過程を表現している可能性のあることが示される。

5.　株式投資収益率生成過程の推定を巡る暫定的な考察

(1)　既往実証結果との比較

4.の実証結果は APT の成立の可能性を示唆するものであるが、統計的有意性に鑑みると、必ずしも普遍的といえるほどの頑強な結果を得た訳ではない。しかし、既往実証例、とりわけ APT に肯定的な結果を導いている Roll-Ross（1980)、Brown-Weinstein（1983）等と本分析とを比較すると、

a)　本分析では標本を構成する銘柄数が208と既往実証例に比べて格段に多いにもかかわらず、因子数をわずか７個にとどめたモデルで APT の基本定理が成立する可能性を示したこと、

b)　標本構成や標本期間を部分的に変えても、因子負荷係数は安定的であり、本分析の APT 検証が特定の標本に依存しないことを示したこと、

という２点で、本分析は従来と比べて強力に APT を支持する結果を導いているといえよう。以下では、こうした本分析の特徴点を既往実証結果と対比させつつ、検討してみよう。ただし、既往分析については、新たに SBC 基準に基づいて最良因子数を再検討する余地もあるので、ここでは既往論文に記述されている範囲に限定して比較するにとどめた。なお、それらの実証対象は、堀本（1986）を除きすべて米国の株式市場である。

最初に、因子数の問題を振り返ってみる。Roll-Ross（1980)、および Cho, Elton and Gruber（1984）はランダムに選んだ30銘柄毎に株式投資収益率生成過程モデルを推計し、最良因

子数を前者は3、後者は5ないし6であるとしている。Brown-Weinstein (1983) では、グルーピングの規模を30銘柄から60銘柄に拡大しても最良因子数は変わらず、APT の有効性から独立であると主張している。また、同様のグルーピング手法を用いて、日本の東証データを分析した堀本 (1986) では、最良因子数は5よりも大きいことを導いている。

このように、小規模標本を用いた既往実証分析の最良因子数と、本分析における208銘柄の大規模標本での最良因子数7という結果を単純に対比するだけでも、(勿論、日米での標本内容や最良性の基準が異なる点には留意すべきであるが)、本分析が APT の成立をより強力に示唆するものであるといえる。

また、Dhrymes, Friend and Gultekin (1984)、Dhrymes, Friend, Gultekin and Gultekin (1985) は銘柄数を90まで増やしたときに、χ^2 基準での最良因子数が13ないし17に達することから、因子数は銘柄数にほぼ比例して増えざるをえないと主張しているが、本分析で示したように SBC 基準に従えば、株式投資収益率の変動を説明するために必要な共通因子数は必ずしも増加しない。したがって、個別銘柄から構成される標本の因子モデルはその標本に特異であり、普遍的な株式投資収益率の生成過程は導出し難いとの彼等の指摘は必ずしも一般性を持たない。このことは、本分析における異なった標本間での因子負荷係数の安定性からも傍証することができる。

次に、APT の基本評価式 (▲) の有意性検定をみると、既往の実証分析では推し並べて APT 不成立の可能性が残されている。式 (■) の GLS 回帰係数が有意にゼロでない、つまり因子分析から推定された因子負荷係数に従って投資家がリスク評価していると解釈できる実証例は、最も良好な Dhrymes, Friend, Gultekin and Gultekin (1985) でさえ高々25% (有意水準10%) である。[20] したがって、全テストの55% (有意水準50%) に関して基本評価式 (▲) が成立していることを示したここでの検証結果は、これまでの実証分析例としては恐らく最も APT の成立を肯定するものといえよう。

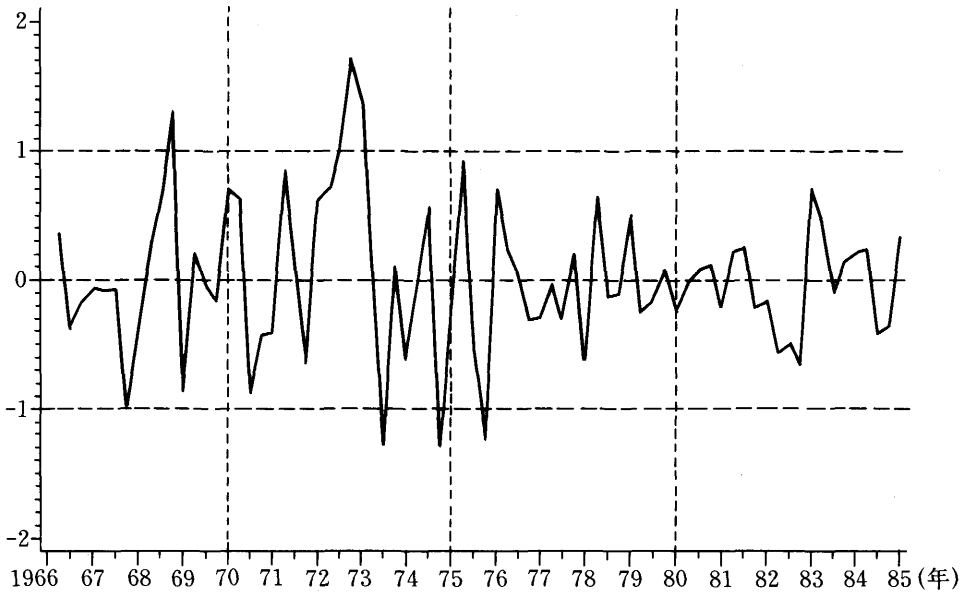
(2) 因子スコアの推定

7因子モデルが株式投資収益率生成過程を表現している可能性があることが判明したので、最後に、これら7因子の変動に関する定量的特徴を明らかにしてみたい。これはいわゆる因子スコアの推定といわれるもので、標本である株式投資収益率の実際のデータと推定済みの因子負荷係数、独自因子を用いて、因子の大きさを推定するものである。仮定により、因子スコアは平均0、分散1に標準化されている。

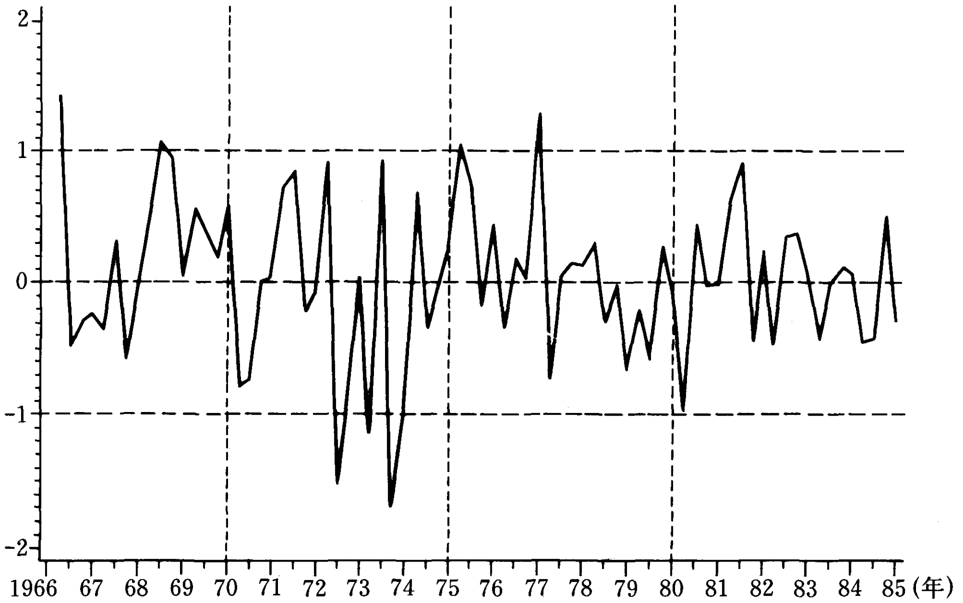
第1〜7図は最小2乗推定値の軌跡を第1因子から順にプロットしたものである。ここで注目すべきことの第1点は、標本を部分的に変えても、因子負荷係数が安定的であることから、これらの因子スコアの軌跡は殆ど変わらないことである。第2には、第1因子および第2因子が高度成長期と低成長期の間で、あるいは2度のオイル・ショック前と後の時期に変動パターンの変化が窺われるのに対して、第3因子以降の因子ではそうしたマクロ経済の変化に対応した動きは観察できないことである。このことは、第3以降の因子の定性的性格が必ずしも経済変量に限るものではないことを示唆しているのかもしれない。もっとも、ミクロの産業活動や地

20) ただし、Dhrymes, Friend, Gultekin and Gultekin (1985) は、一部の標本に限った場合には、90% (有意水準5%) という結果を得ている。

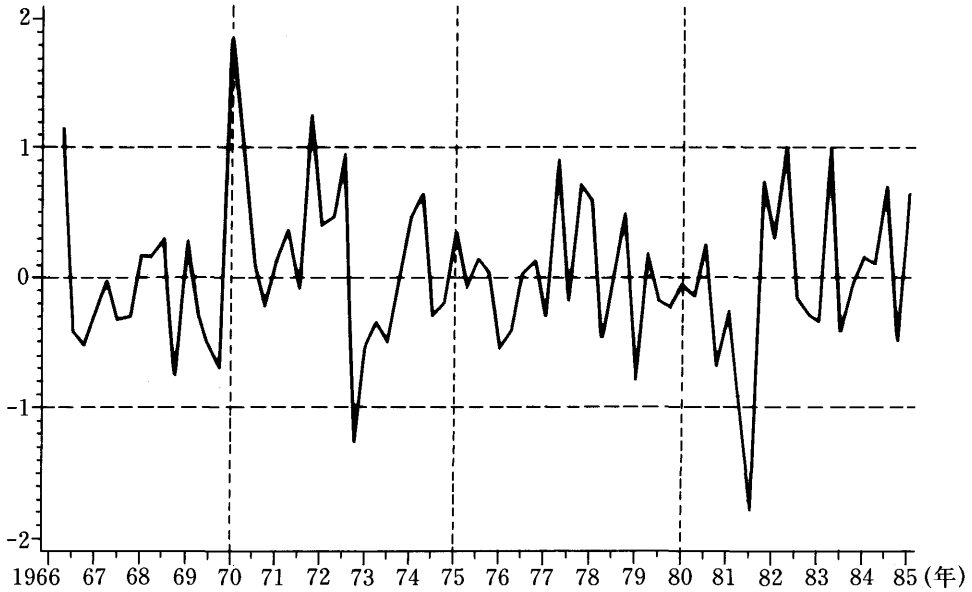
第１図　第１因子スコアの推移



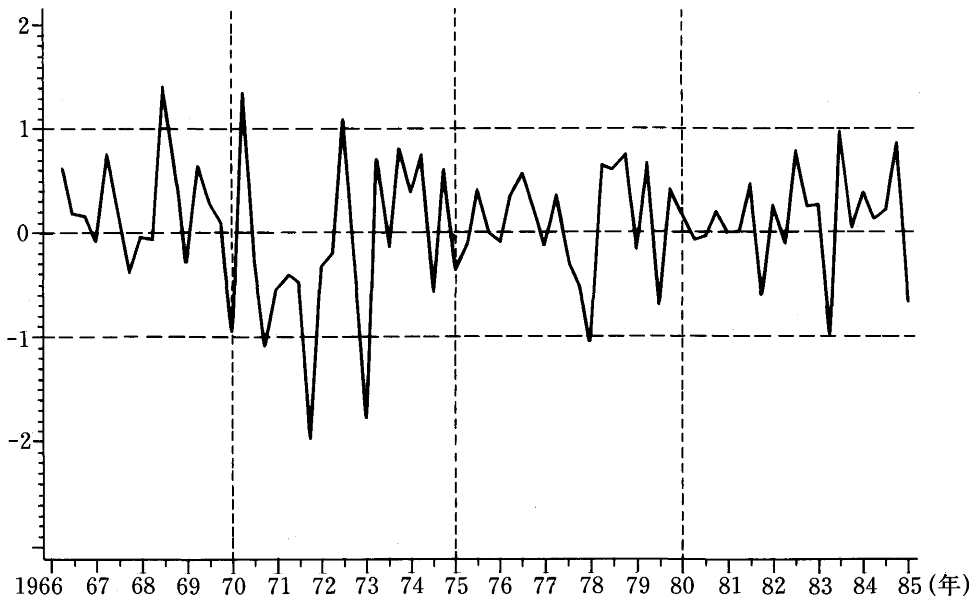
第２図　第２因子スコアの推移



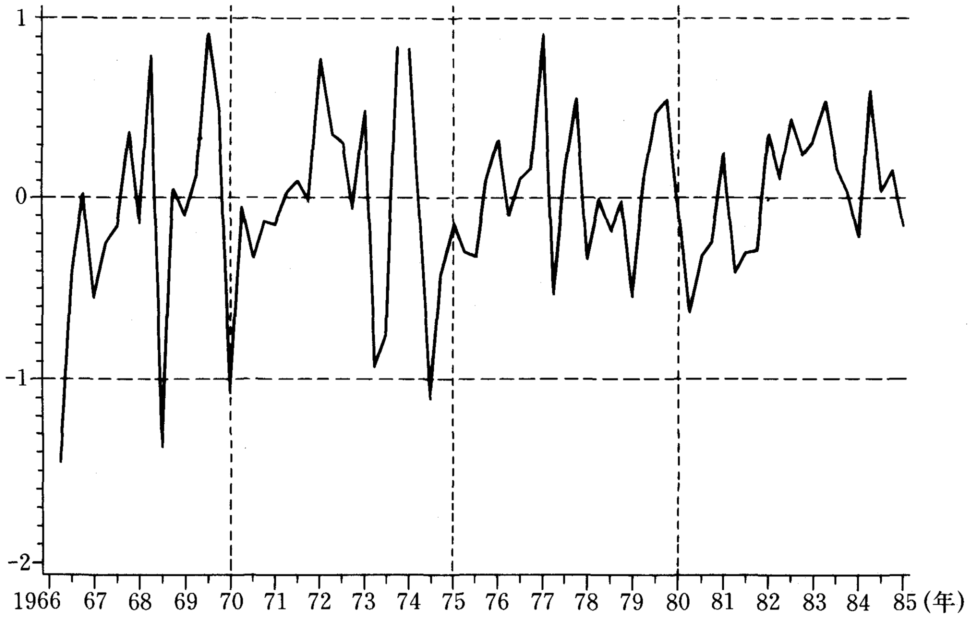
第３図　第３因子スコアの推移



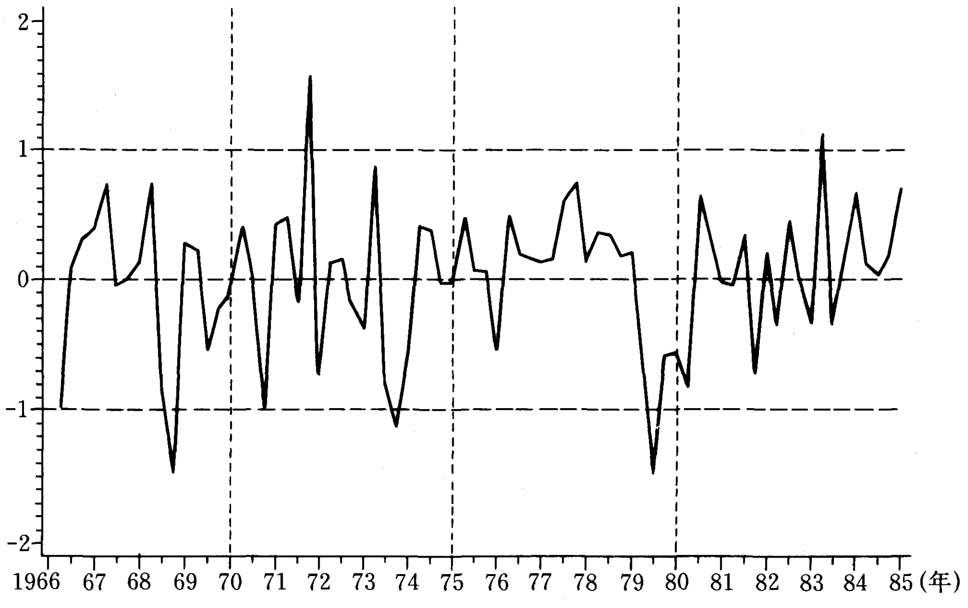
第４図　第４因子スコアの推移



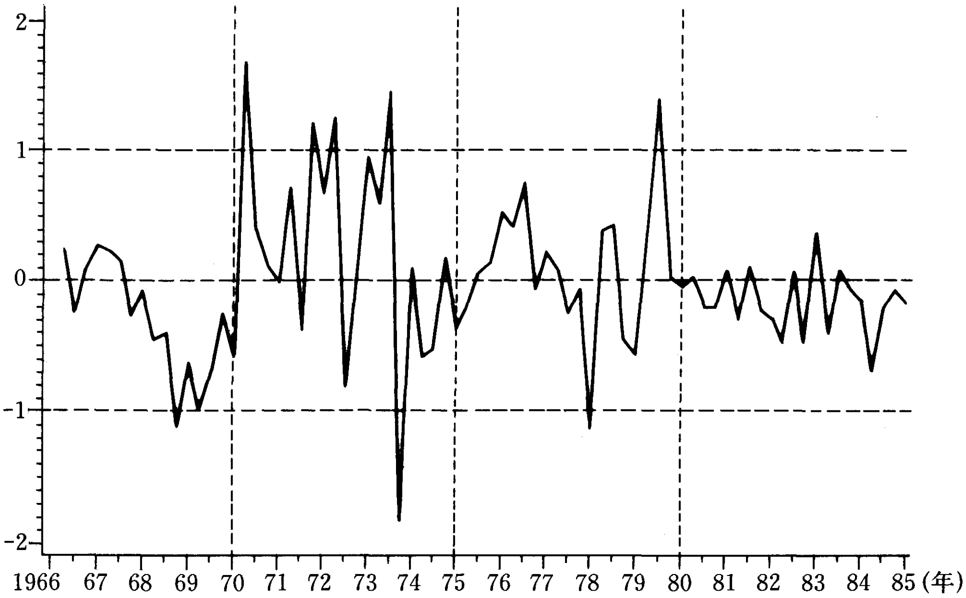
第５図　第５因子スコアの推移



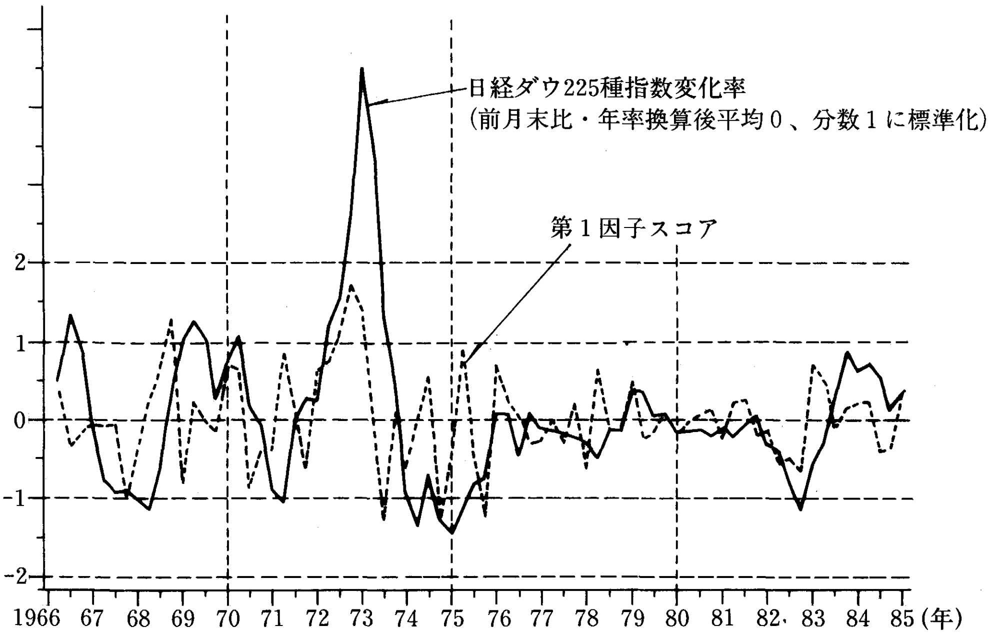
第６図　第６因子スコアの推移



第７図　第７因子スコアの推移



第８図　日経ダウ225種指数変化率と第１因子スコアの比較



域経済活動の中には第3以降の因子スコアの動きと符合するものもないとはいえず、また、経済や社会の活動水準の実現値ではなしに、投資家自身あるいは他の投資家の期待値そのものが収益率を生成する因子に組み込まれている可能性もあり、どの因子がマクロ経済の動向と対応しているかは一概に断定できない。

したがって、この推定結果から最低限いえることは、仮にマクロの経済変量（あるいはその完全予測値）が、他の要素と結合せずに単独で株式投資収益率生成過程の共通因子に該当しているとすれば、それは第1または2因子であり、しかも、各マクロ経済変量の類似性と因子間の無相関性を併せて考慮に入れると、それはいずれか一方の因子に限られるということである。[21)]

このように、因子の定性的性格までをも抽出することは極めて難しく、それゆえに、因子分析を用いた収益生成過程の解明には批判的議論も少なくないが、[22)]逆に、因子分析のような一般的なモデルで検討することにより、株価形成に関する様々な仮説が本当に妥当するか否かを判定することができる。例えば、資産市場の平均的収益率の代理変数として株価指数を取り上げてみると、1970年代までは第1因子とかなり符合しているようであるが、近年はやや乖離している（第8図参照）。したがって、株価指数が個別の株式投資収益率の生成要因であった時期は存在したが、最近では生成因子としての役割を担っていないと解釈できよう。これは株価指数を資産市場の収益率に採用したCAPMの説明力が漸減傾向を辿っていることと合致する。

以上でみたように、因子が何を意味しているかという問いには答えられないが、因子スコアの推定によって収益生成因子のイメージを概ね把握することまでは可能である。

6. 結び

本分析により、少なくとも1963年以降の20年間に亘り、しかも日経ダウ指数に採用されている200強という多くの銘柄に対して、7因子モデルのAPTが成立していた可能性を実証できた。株価の決定（厳密には株式投資収益率の生成）に係わる要因が7つも存在するということはCAPMとは相容れないことを示している。同時に高々7個の因子によって株式投資収益率の生成過程が説明できるということは、株式市場の単純性を示すものであるともいえよう。

それでは、過去同様、今後の株式市場における価格決定や期待形成もこのAPTにより十分に説明できるものであろうか。この問題を検討するためには、2つの側面を考慮しなくてはならない。第1に、株式投資収益率生成過程の核である共通因子は引続き同一の7個の因子であるか否かである。そして、第2に、たとえ7因

21) 株式投資収益率の生成過程の因子に近似する経済変量を探求しようという実証研究はいくつかの例があるが、その中で、Chen, Roll and Ross (1986) は生産水準、金利のリスク・プレミアム、金利の期間構造が因子に該当し得ると指摘している。したがって、そこにおけるいわゆるマクロ経済変量は生産水準ただ1つであり、本分析の帰結と合致する。他方、同様の手法を日本の市場に対して適用したといわれる浜尾 (1986) の試論では、鉱工業生産指数、インフレ率が同時に因子の候補に上ると主張しているが、ここでの帰結に鑑みると、その妥当性は低いように思われる。

22) 例えばShanken (1982) は、因子の直交変換による各因子の定性的性格も変わるので、推定の一意性の面でAPTの検証方法を疑問視している。

子モデルが株式投資収益率生成過程を説明するものとして適当であるとしても、過去の標本から推計した因子にかかる係数が将来の事象に対しても果たして有効か否かである。第1の側面については、前節で触れたように、ここでは7つの共通因子の定性的性格を確定することまではできなかったので、将来のモデル構造を推論できる的確な材料を得るに至っていない。一方、第2の側面に関しては、標本期間を若干延長しても因子の係数に変化はみられないことが本分析で実証的に明らかにされているので、過去の推計値は近未来に対しても有効であろう。過去の標本に基づく実証結果をもとに直ちに将来の株式市場の動向を推し量ることはできないが、少なくとも7因子モデルをもって東証上場銘柄の株式投資収益率生成過程とみなすことは差し支えないであろう。

さて、本論文を締め括るに当たり、現実説明力の高い株式投資収益率生成過程を得ることの意義を考察しておこう。ここでは、投資家の期待形成と株価の関係が把握できるようになることを説明する。

本論文の分析により時系列的に安定した因子係数が推計されていることから、株式投資収益率または各共通因子の値（スコア）のいずれか一方が与えられれば、もう一方を推測することができる。そこで、株価より株式投資収益率を算出し、各因子スコアを推測するとしよう。この因子は投資家が株価の主な変動源とみなしているものであり、いわば株式という金融資産の価格のファンダメンタルズを構成するものである。このことは、資産価格と他の経済変量との関係を辿るという回り道をしなくても、資産価格のファンダメンタルズを直接観察することが可能であることを意味している。いま資産価格のファンダメンタルズが特定化できれば、ファンダメンタルズと株価の関係、ひいては投資家の期待形成のあり方も把握可能となろう。なお、こうした推測に際しては、必要なデータが株価だけであり、それをもとに実際のファンダメンタルズの水準ないし過去からの推移が遅行することなく検出できることも、この分析の利点であろう。

このように、個別株式投資収益率の分散共分散を分解することにより、収益率生成過程という資産価格の決定メカニズムを解明することが可能となる。したがって、投資家の期待形成、そしてそのベースにあるファンダメンタルズという、従来解明が困難であった関係を定量化する切り口が開けた訳である。これらは、民間はもとより政策当局にとっても資産市場の実態を把握するために必要な情報であり、こうした領域にも今後 APT の活用が見込まれる。日本では、これまでのところ株式市場そのものの研究が比較的立ち遅れていたうえ、個別銘柄を取り上げ、そのデータ間の相互関係（相関、共分散等）を解析する例も余りなかったが、今後においては、資産価格分析の有用性が認識されることが望まれる。

補論：因子分析について

この補論では、本論で用いた因子分析の基本と計算方法を説明する。最初に、(1)で因子分析モデルの基本を要約し、(2)では相関行列による表現を紹介する。続く(3)において、最尤推定を用いた解法と非正規性のときの限界を示し、(4)では最小2乗推定による解法を提示する。(5)では因子数の検定問題を取り上げ、最後に(6)で最小2乗法による因子スコアの推定を提示する。

(1) 因子分析の基本—ランダム・モデルでの定義

観測不可能な確率ベクトル

$$\tilde{\delta} \equiv [\tilde{\delta}_1, \cdots, \tilde{\delta}_k]'$$

$$\tilde{\varepsilon} \equiv [\tilde{\varepsilon}_1, \cdots, \tilde{\varepsilon}_n]'$$

が期待作用素Eによって以下（仮定Ⅰ）の定数を与えられるとする。

仮定Ⅰ

$$E(\tilde{\delta}) = O \qquad (A1\text{-}1)$$

$$E(\tilde{\delta}\tilde{\delta}') = I \qquad (A1\text{-}2)$$

（標準化された共通因子の直交性）

$$E(\tilde{\varepsilon}) = O \qquad (A1\text{-}3)$$

$E(\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}') = \Psi$（独自因子間の無相関）(A1-4)

ただし、

$$\Psi \equiv \begin{bmatrix} \phi_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \phi_n \end{bmatrix}$$ （独自因子の分散行列）

$$E(\tilde{\delta}\tilde{\varepsilon}') = E(\tilde{\varepsilon}\tilde{\delta}') = O \qquad (A1\text{-}5)$$

（共通因子と独自因子の間の無相関）

このとき、観測可能な確率ベクトル

$$\tilde{r} \equiv [\tilde{r}_1, \cdots, \tilde{r}_n]'$$

に対する因子分析の一般的なランダム・モデルは次式によって与えられる。

$$\tilde{r} = \alpha + B\tilde{\delta} + \tilde{\varepsilon} \qquad (A1\text{-}6)$$

ただし、

$$\alpha \equiv [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]'$$

$$B \equiv [\beta_{ij}]$$

（＜共通因子の＞負荷行列＜n×k＞）

で定義される。式（A1-6）の期待値をとれば、仮定Ⅰより、

$$E(\tilde{r}) = \alpha \qquad (A1\text{-}7)$$

α は母平均ベクトルであるから、式（A1-6）は

$$\tilde{r} = E(\tilde{r}) + B\tilde{\delta} + \tilde{\varepsilon} \qquad (A1\text{-}8)$$

と同値である。これは、本論で考察する株式投資収益率生成過程式（★）のベクトル表現にほかならない。

確率ベクトル $\tilde{r}$ の母分散共分散行列

$$\Sigma \equiv E[\{\tilde{r} - E(\tilde{r})\}\{\tilde{r} - E(\tilde{r})\}']$$

を式（A1-8）を用いて書き直すと、仮定Ⅰより、

$$\begin{aligned} \Sigma &= E[(B\tilde{\delta} + \tilde{\varepsilon})(B\tilde{\delta} + \tilde{\varepsilon})'] \\ &= E(B\tilde{\delta}\tilde{\delta}'B') + E(\tilde{\varepsilon}\tilde{\delta}'B') + E(B\tilde{\delta}\tilde{\varepsilon}') + E(\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}') \\ &= BIB' + O + O + \Psi \end{aligned}$$

$$\therefore \Sigma = BB' + \Psi \qquad (A1\text{-}9)$$

を得る。これが因子分析の基本方程式である。

すなわち、観測可能なベクトルrからΣを求め、これをBB′とΨに分解できれば、δとεが観測不可能でもその負荷係数BとΨを知ることができる。

(2) 相関行列による因子分析の表現

確率ベクトル $\tilde{r}$ の各成分の標準偏差 σ_r からなる対角行列

$$D \equiv [\mathrm{diag}(\Sigma)]^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sigma_{r1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sigma_{rn} \end{bmatrix}$$

を用いて、$\tilde{r}$ を母平均０、母分散Ⅰへ尺度変換

$$\tilde{r}_s = D^{-1}\{\tilde{r} - E(\tilde{r})\} \qquad (A2\text{-}1)$$

すれば、因子分析モデル式（A1-8）は次式のように表せる。

$$\tilde{r}_s = D^{-1}B\tilde{\delta} + D^{-1}\tilde{\varepsilon} \qquad (A2\text{-}2)$$

ここで、

$$B_s \equiv D^{-1}B$$

$$\tilde{\varepsilon}_s \equiv D^{-1}\tilde{\varepsilon}$$

とおけば、上式は

$$\tilde{r}_s = B_s\tilde{\delta} + \tilde{\varepsilon}_s \qquad \text{(A2-3)}$$

の形で表現される。このとき、仮定Ⅰは式（A1-3）～（A1-5）に変わって、

$$E(\tilde{\varepsilon}_s) = O \qquad \text{(A2-4)}$$

$$E(\tilde{\varepsilon}_s\tilde{\varepsilon}_s') = D^{-2}E(\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}') = D^{-2}\Psi = \Psi_s \qquad \text{(A2-5)}$$

$$E(\tilde{\delta}\tilde{\varepsilon}_s') = E(\tilde{\varepsilon}_s\tilde{\delta}') = O \qquad \text{(A2-6)}$$

の形で設定される。

しかも、標準化された確率ベクトル $\tilde{r}_s$ の分散共分散行列は

$$\begin{aligned}\Sigma_s &\equiv E[\{\tilde{r}_s - E(\tilde{r}_s)\}\{\tilde{r}_s - E(\tilde{r}_s)\}'] \\ &= E[\{D^{-1}(\tilde{r}_s - E(\tilde{r}_s))\}\{D^{-1}(\tilde{r}_s - E(\tilde{r}_s))\}'] \\ &= D^{-1}E[\{\tilde{r} - E(\tilde{r})\}\{\tilde{r} - E(\tilde{r})\}']D^{-1} \\ &= D^{-1}\Sigma D^{-1} \qquad \text{(A2-7)}\end{aligned}$$

となり、$\tilde{r}$ の母相関行列を表す（つまり、diag（Σ_s）＝Ⅰ）。

式 (A2-7) を用いて式 (A1-9) を書き換えると、

$$\Sigma_s = B_sB_s' + \Psi_s \qquad \text{(A2-8)}$$

つまり、標準化された因子分析モデル式 (A2-3) に対する基本方程式を得る。

(3) 最尤推定法の採用可能な環境

当面(5)までは共通因子数 k を既知として、基本方程式の解法を検討する。[23)]

因子分析を実行することは、因子数 k の下で解 $(\hat{B}_s, \hat{\Psi}_s)$. が存在することを前提にしている。このためには逆行列 Σ_s^{-1} が存在すればよいので、

仮定Ⅱ　$\Sigma_s > 0$ 　(A3-1)

を設ける。また、解の一意性を保証するためには

仮定Ⅲ　基本方程式（A2-8）を満す Ψ_s は一意。

が必要である。

以上の設定を満たすランダム・モデル式（A2-3）から独立なT個の標本が観測されたとき、標本相関行列Sの尤度を最大にする推定値 $(\hat{B}_s, \hat{\Psi}_s)$ を求めるのが最尤推定法である。

最尤推定法が採用できるためには、標本 $r_{s,t}$ の尤度関数が定義できなくてはならない。もし共通因子 $\tilde{\delta}$ と独立因子 $\tilde{\varepsilon}$ が多変量正規分布に従えば、標本 $r_{s,t}$ も正規分布から無作為に抽出されたと解釈できるので、問題なく最尤法が適用できる。

ところが、APT の多因子線型の株式投資収益率生成モデルに対して因子分析を行なう際には、一般的に個別銘柄の株式投資収益率の正規性を前提とすることができない。仮に独自因子 $\tilde{\varepsilon}_s$ についてのみ正規分布に従うことを許すとすれば、共通因子の分布に正規性を想定すべきではなく、標本 $r_{s,t}$ の尤度関数を定義することは困難である。

したがって、すべての銘柄の株式投資収益率が正規分布に従うことを仮定しない限り、APT モデルに対して最尤推定に基づく因子分析を実行できない。

なお、共通因子 δ をパラメーターに固定した

---

23)　k は rank (B) と等しいと仮定してよい。k＞rank (B) ならば、δ の次元を rank (B) まで落とせばよい。

母数モデルを対象として、独自因子$\tilde{\varepsilon}_s$の正規性のみから標本$r_{s,t}$の条件付き密度関数を定義することは可能である。この場合にも標本$r_{s,t}$の母集団の分布を漸近正規に制約することになるが、加えて最尤推定量が存在しないという次のような問題に直面する。つまり、このような環境の下では未知母数の数が多過ぎて、その組合せ如何により尤度をいくらでも大きくとることができ、通常十分条件のように用いられている1階条件は単に変曲点を示すだけである（Anderson-Rubin（1956））。[24)]

(4) 最小2乗推定による因子分析の解法

最尤推定法が採用できない環境下では、次善的解法として以下のような最小2乗法が用いられる。

まず、標本相関行列の推定誤差を表す適合関数（fit function）[25)]

$$L(\Sigma_s,\ S)\equiv\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{(S-\Sigma_s)W\}^2 \qquad \text{(A4-1)}$$

を考え、正値定符号のあるウェイト行列Wを与えて、これを最小にする解$\hat{\Sigma}_s$を求める。ウェイト行列の候補としてはI、D_s^{-2}等があるが、

---

24) Anderson-Rubin（1956）が導出した定理と丘本（1986; p.93）の証明は次のとおりである。

【定理】 $\varepsilon_{s,t}$がi.i.d.、$T\geqq k+1$ならば、未知母数の値を適当に定めることにより、データ行列［$r_{s,t}$］の尤数関数Lhは最大値を持たない。したがって、最尤推定量は存在しない。

証明　係数を除いた尤度関数Lhは、

$$Lh=\Pi_{t=1}^{T}\Pi_{i=1}^{p}\frac{1}{\psi_{si}}\exp\left\{-\frac{1}{2\psi_{si}}(r_{si,t}-\Sigma_{j=1}^{k}\beta_{sij}\delta_{j,t})^2\right\}=(\Pi_{i=1}^{p}\psi_{si})^{-T}\exp\left(-\frac{1}{2}\Sigma_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{\psi_{si}}\right) \qquad (\bullet)$$

ただし

$$Q_i=\Pi_{t=1}^{T}(r_{si,t}-\Sigma_{j=1}^{k}\beta_{sij}\delta_{j,t})^2$$

ここで、$\{r_{s1,t}\}$の標本平均、標本分散が母平均、母分散に一致して0、1、したがって、$\beta_{11}=1$であり、その他の未知母数のうち

$$\beta_{1q}=0 \text{ for } q=2,\cdots,k \qquad \delta_{1,t}=r_{s1,t} \text{ for all } t=1,\cdots,T$$

を定めると、j=1について、仮定Ⅰ

$$\Sigma_t\delta_{1,t}=0 \qquad \frac{1}{N}\Sigma_t\delta_{1,t}{}^2=1$$

が成立し、かつ、

$$Q_1=0$$

また、そこでは漸近的に$\psi_1\rightarrow 0$。したがって、

$$(\Pi_{i=1}^{p}\psi_{si})^{-T}\rightarrow\infty$$

となる。

このとき、その他の母数についても仮定1を満たすことができる。つまり、T＞rank（B）であるから、$\beta_{1q}=0$（q=2,…,k）であっても、j=2,…,kの母数$\delta_{j,t}$の標本平均を0、標本分散を1にとることができる。

ところで、i=2,…,nの$\{r_{s1,t}\}$の標本平均が母平均0に一致しないようにとれば、

$$Q_i>0 \text{ for all } i=2,\cdots,n$$

よって、式(•)においてexp関数は1より大であり、尤度Lh→∞。(証明終わり)

25) 標本相関行列の推定誤差を式（B4-1）のように母相関行列との差のトレース（対角要素の和）で表現するのは、次のような行列式の全微分の性質を利用しているからである。すなわち、行列Xの要素をq^{ij}、その小行列式をQ^{ij}とすれば、

$$d(\log|X|)=\Sigma_{i,j}\left(\frac{\partial}{\partial q^{ij}}\cdot\log|X|\right)dq^{ij}=\frac{1}{|X|}\Sigma_{i,j}\left(\frac{\partial|X|}{\partial q^{ij}}\cdot dq^{ij}\right)=\frac{1}{|X|}\Sigma_{i,j}Q^{ij}\cdot dq^{ij}$$

（　余因子展開　$\Sigma^{j}q^{ij}\cdot Q^{ij}=|X|$　の偏微分）

$$d(\log|X|)=\frac{1}{|X|}\Sigma_{i,j}|X|q^{ji}\cdot dq^{ij}=\Sigma_{i,j}q^{ji}\cdot dq^{ij}=\mathrm{tr}(X^{-1}dX)$$

こでは標本相関行列の逆行列

<u>仮定Ⅳ</u>　$W=S^{-1}$ (A4-2)

とするウェイト付き最小2乗法（weighted least-square estimation、WLS）を採用する。WLSを採用する理由は二つある。

第一に、ある一定条件下では、$\tilde{\delta}$ が多変量正規分布のときの最尤推定量がWLS推定量に漸近的に一致することである。この条件とは確率ベクトル $\tilde{r}$ の母相関行列の対角要素（D）と標本相関行列の対角要素（D_s）が一致することである。[26)]

第二に、因子スコアの推定に式（A4-1）と同様の適合関数を用いて推定誤差の最小化を図るので、因子パターン、因子スコアを通じて推定方法が首尾一貫することである。

さて、仮定Ⅰ～Ⅳのもとで適合関数（A4-1）を最小にするWLS推定量 $\hat{\Sigma}_s$, $\hat{B}_s$, $\hat{\Psi}_s$ を求める。適合関数

$$L(\Sigma_s,\ S)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{(S-\Sigma_s)S^{-1}\}^2 \qquad \text{(A4-3)}$$

の全微分をとり、

$$dL=-\mathrm{tr}\{S^{-1}(S-\Sigma_s)S^{-1}d\Sigma_s\} \qquad \text{(A4-4)}$$

したがって、適合関数（A4-3）を最小にする1階条件は、

$$\frac{\partial L}{\partial B_s}=-2S^{-1}(S-\Sigma_s)\Sigma_s{}^{-1}B_s=O \qquad \text{(A4-5)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi_s}=-\mathrm{diag}\{S^{-1}(S-\Sigma_s)S^{-1}\}=O \qquad \text{(A4-6)}$$

---

26)　$\tilde{\delta}$ が多変量正規分布であれば $\tilde{r}_s$ も多変量正規分布であり、自由度Tのウィッシャート分布に従うSの密度関数

$$f(S)=K\cdot|\Sigma_s|^{-\frac{T}{2}}|S|^{\frac{T-n-1}{2}}\exp\left\{-\frac{T}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_s{}^{-1}S)\right\} \qquad K=\left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{nT}{2}}\pi^{-\frac{n(n-1)}{4}}\left\{\Pi_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{T}{2}\right)\right\}^{-1}$$

が与えられ、Sを所与としたときの係数を省いた対数尤度関数

$$L_h\equiv-\frac{T}{2}\{\mathrm{tr}(\Sigma_s{}^{-1}S+\log|\Sigma_s|)\}$$

が定義できる。そこで、最尤推定量 $\hat{\Sigma}_s$ を求める。

Sを介して L_h を　$\hat{B}_s$, $\hat{\Psi}_s$　の関数とみると、その全微分は、

$$dL_h=-\frac{T}{2}\left\{\mathrm{tr}(d\Sigma_s{}^{-1})S\right\}-\frac{T}{2}\log|\Sigma_s|=-\frac{T}{2}\mathrm{tr}(-\Sigma_s{}^{-1}d\Sigma_s\cdot\Sigma_s{}^{-1}S)-\frac{T}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_s{}^{-1}d\Sigma_s)=\frac{T}{2}\mathrm{tr}\{\Sigma_s{}^{-1}(S-\Sigma_s)\Sigma_s{}^{-1}d\Sigma_s\}$$
$$=\frac{T}{2}\mathrm{tr}\{\Sigma_s{}^{-1}(S-\Sigma_s)\Sigma_s{}^{-1}d(B_sB_s'+\Psi_s)\}=\frac{T}{2}\mathrm{tr}\{\Sigma_s{}^{-1}(S-\Sigma_s)\Sigma_s{}^{-1}B_sdB_s'\}+\frac{T}{2}\mathrm{tr}\{\Sigma_s{}^{-1}(S-\Sigma_s)\Sigma_s{}^{-1}d\Psi_s\}$$

これより、$\dfrac{\partial L_h}{\partial B_s}=\dfrac{T}{2}\Sigma_s{}^{-1}(S-\Sigma_s)\Sigma_s{}^{-1}B_s$　　$\dfrac{\partial L_h}{\partial \Psi_s}=\dfrac{T}{2}\mathrm{diag}\{\Sigma_s{}^{-1}(S-\Sigma_s)\Sigma_s{}^{-1}\}$

Lhに最小値を与えるための1階条件は $\dfrac{\partial L_h}{\partial B_s}=0,\ \dfrac{\partial L_h}{\partial \Psi_s}=0$ 。2階条件は満たされているので、Sの尤度に基づく最尤解（$\hat{B}_s$, $\hat{\Psi}_s$）は、

$$(S-\hat{\Sigma}_s)\hat{\Sigma}_s{}^{-1}\hat{B}_s=O \qquad (*) \qquad\qquad \mathrm{diag}\{\hat{\Sigma}_s{}^{-1}(S-\hat{\Sigma}_s)\hat{\Sigma}_s{}^{-1}\}=O \quad (**)$$

ここで、$S>0$ が仮定できれば、S^{-1} が存在して、式（＊）は漸近的に

$$(S-\hat{\Sigma}_s)S^{-1}\hat{B}_s=O$$

と同値。これはWLSにおける $\hat{B}_s$ の決定方程式（A4-8）に一致する。また、$\hat{D}=D_s$、すなわち、

$$\mathrm{diag}(\hat{\Sigma}_s)=\mathrm{diag}(S)$$

であれば、式（＊＊）は、

$$\mathrm{diag}\{S^{-1}(S-\hat{\Sigma}_s)S^{-1}\}=O$$

と同値であり、やはりWLSにおける $\hat{\Sigma}_s$ の決定方程式（A4-9）に一致する。

ここで、仮定Ⅱを強めて、

仮定Ⅱ'　　$S > O$

（標本相関行列の正定性）　(A4-7)

が成り立てば、$\hat{B}_s$ の決定方程式は式（A4-5）より、

$$(S-\Sigma_s)\Sigma_s^{-1}\hat{B}_s = O \qquad \text{(A4-8)}$$

また、$\hat{\Sigma}_s$ の決定方程式は式（A4-6）より、

$$\mathrm{diag}\{S^{-1}(S-\hat{\Sigma}_s)S^{-1}\} = O \qquad \text{(A4-9)}$$

で与えられ、これは $\hat{\Psi}_s$ の決定方程式

$$\hat{\Psi}_s = \mathrm{diag}(S-\hat{B}_s\hat{B}_s{}') \qquad \text{(A4-10)}$$

と同値である。

ところで、最小2乗解の3本の決定方程式（A4-8）～（A4-10）は独立ではないので、$\hat{B}_s$, $\hat{\Psi}_s$ を同時に推定することはできない。そこで、Jöreskog（1967）に従い、まず $\hat{\Psi}_s$ の初期値の下で B_s を求め、その B_s の下で Ψ_s を再計算し、収束するまで繰り返すアルゴリズムを適用する。ここでは、その概略だけを紹介する。

$\Psi_s = \Psi_{s0}$ のとき，

$$S^* = S^{-\frac{1}{2}}(S-\Psi_{s0})S^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(A4-11)}$$

とおき、D^* を S^* の固有値のうち大きい方から数えてk個を取り出して対角成分とする対角行列、V^* をこれに対する正規直交固有ベクトル行列とすれば、

$$B_{s0} = S^{-\frac{1}{2}}V^*D^{*\frac{1}{2}} \qquad \text{(A4-12)}$$

を得る。この B_{s0} を $\hat{\Psi}_s$ の決定方程式（A4-10）に直接代入して順次解く。またこのほか、式（A4-12）を基本方程式（A2-8）に代入する部分 Gauss-Newton 法を利用する解法もある。

(5) 因子数の確定

ここまでは因子数を既知として扱ってきたので、実際に因子分析を行なうときは1からnまでの因子数のそれぞれについて最小2乗推定値 $\hat{B}_s$、$\hat{\Psi}_s$ を求めることになる。次に、この中から統計的に有意な推定値を選択する方法を検討する。

因子モデルの真の構造は未知であるから、漸近正規を仮定しない限り、望ましい検定方法は明らかでない。また、仮に標本が漸近正規に従うとしても、統計的に有意な変動をすべて共通因子として抽出すると、一般に因子数を過大に推定する嫌いがある（Geweke-Singleton (1980)）。

そこで、通常は利用度の高い幾つかの検定基準を試みて、その中で最も因子数の少ない基準が指示するモデルの推定値を最良とみなすことが多い。以下では、仮に標本が漸近正規に従うものとして、χ^2 検定、および情報量検定の方法を説明する。

χ^2 検定は、標本数Tが変量数nよりも50以上大きい場合には、母相関行列 $\hat{\Sigma}$ の最大尤度と標本相関行列Sの最大尤度の比が近似的に χ^2 分布に従う特性に着目する。すなわち、$\hat{\Sigma}_s$ を用いたときのSの最大対数尤度 L_0 は、

$$L_0 = \frac{T-1}{2}\{\log|\hat{\Sigma}_s| + \mathrm{tr}(\hat{\Sigma}_s{}^{-1}S)\} \qquad \text{(A5-1)}$$

また、Sを Σ_s の推定値としたときのSの最大対数尤度 L_1 は、

$$L_1 = \frac{T-1}{2}\{\log|S| + \mathrm{tr}(S^{-1}S)\}$$
$$= \frac{T-1}{2}(\log|S| + n) \qquad \text{(A5-2)}$$

で表される。両者とも対数尤度なので、その差をとった統計値

$$\chi_0^2 \equiv \frac{T-1}{2}\cdot 2(L_0 - L_1)$$
$$= (T-1)\{\log|\hat{\Sigma}| - \log|S| + \mathrm{tr}(\hat{\Sigma}^{-1}S) - n\} \qquad \text{(A5-3)}$$

は、自由度$\frac{1}{2}\{(n-k)^2-(n+k)\}$の$\chi^2$分布に従う。

このとき、信頼水準a％におけるχ^2分布の値χ_a^2に対して、$\chi_o^2>\chi_a^2$であれば、k個の因子で十分という帰無仮説は棄却される。

したがって、$\chi_o^2\leqq\chi_a^2$となる最小のkが尤度比検定の主張する因子数となる。

他方、広い意味で情報量基準と呼ばれる中には、Schwarz (1978) の Bayesian Criterion (SBC) と Akaike's Information Criterion (AIC) がある。それぞれ標本相関行列Sを母相関行列Σ_sの推定値としたときのSの最大対数尤度L_1に対して、

$$SBC\equiv L_1-\frac{k}{2}\cdot\log T \tag{A5-4}$$

$$AIC\equiv L_1-k \tag{A5-5}$$

で与えられる統計量であり、これらを最小にする因子数モデルを選ぶものである。

この3つのモデル選択基準は、いずれも標本相関行列Sの密度関数が定義可能であるときに意味を持つものである点には留意しなくてはならない。

(6) 因子スコアの推定

$\widehat{B}_s$, $\widehat{\Psi}_s$, $\widehat{\Sigma}_s$ が推定できれば、因子スコアを推定することができる。

ここでは、$\hat{\delta}$の推定誤差として平均2乗誤差

$$L(\delta,\hat{\delta})=\frac{1}{n}\cdot E\{(\hat{\delta}-\delta)(\hat{\delta}-\delta)'\} \tag{A6-1}$$

を採用する。これを最小にする回帰推定量$\hat{\delta}$は

$$\hat{\delta}=B'\Sigma_s\cdot r \tag{A6-2}$$

で与えられる（丘本（1986））。

以　上

付表　因子数を7としたときの因子負荷係数推定値

標本の観測期間：1963年1月-1984年12月

	東証コード	第1因子	第2因子	第3因子	第4因子	第5因子	第6因子	第7因子	共通性
極洋	1301	0.394	−0.197	0.262	−0.025	−0.044	0.085	0.175	0.303
日魯漁業	1331	0.428	−0.282	0.297	0.040	0.032	0.063	0.229	0.410
日本水産	1332	0.530	−0.141	0.195	−0.060	0.168	0.036	0.160	0.398
三井鉱山	1501	0.323	−0.212	0.265	0.022	0.096	−0.229	0.111	0.294
住友石炭鉱業	1503	0.236	−0.334	0.215	0.057	0.074	−0.189	−0.017	0.258
帝国石油	1601	0.208	−0.245	0.210	−0.045	0.168	−0.283	0.223	0.308
大成建設	1801	0.539	0.463	0.306	−0.219	−0.178	−0.226	−0.160	0.755
大林組	1802	0.527	0.385	0.335	−0.197	−0.196	−0.223	−0.183	0.699
清水建設	1803	0.539	0.403	0.285	−0.232	−0.198	−0.228	−0.141	0.700
佐藤工業	1804	0.372	0.396	0.386	−0.191	−0.397	−0.123	−0.073	0.659
飛島建設	1805	0.455	0.322	0.462	−0.226	−0.334	−0.061	−0.048	0.693
フジタ工業	1806	0.487	0.442	0.408	−0.143	−0.241	−0.184	−0.118	0.726
鹿島建設	1812	0.513	0.524	0.261	0.108	−0.106	−0.155	−0.186	0.687
鉄建建設	1815	0.396	0.335	0.455	−0.135	−0.317	−0.042	−0.168	0.625
東亜建設工業	1885	0.353	0.313	0.430	−0.184	−0.186	−0.130	−0.145	0.514
大和ハウス工業	1925	0.356	0.403	0.176	0.057	−0.093	−0.022	−0.154	0.356
日本製粉	2001	0.436	−0.010	0.136	0.070	0.119	0.186	0.087	0.270
日清製粉	2002	0.356	0.025	0.194	0.023	0.083	0.205	0.133	0.232
日本柑菜製糖	2108	0.306	−0.201	0.237	0.082	0.042	−0.036	0.128	0.216
森永製菓	2201	0.214	0.095	0.209	0.019	0.002	0.223	−0.009	0.149
明治製菓	2202	0.281	0.291	0.107	0.192	0.070	0.193	−0.022	0.255
明治乳業	2261	0.457	0.043	0.278	0.078	−0.043	0.192	0.116	0.347
サッポロビール	2501	0.439	0.171	0.199	−0.112	−0.016	0.189	0.030	0.311
朝日麦酒	2502	0.498	0.126	0.269	−0.030	0.048	0.182	0.059	0.377
麒麟麦酒	2503	0.560	0.361	0.110	−0.037	0.072	0.144	0.128	0.500
宝酒造	2531	0.467	−0.144	0.424	0.105	0.015	0.123	0.053	0.447
合同酒精	2533	0.224	−0.018	0.173	0.163	0.031	0.016	0.134	0.126
三楽	2536	0.292	0.019	0.279	0.184	−0.005	0.144	0.222	0.267
豊年製油	2601	0.343	−0.108	0.219	0.208	−0.074	0.083	0.117	0.247
日清製油	2602	0.432	0.120	0.202	0.058	−0.012	0.181	0.082	0.284
キッコーマン	2801	0.360	0.182	0.189	0.020	0.071	0.130	0.108	0.232

東証コード		第1因子	第2因子	第3因子	第4因子	第5因子	第6因子	第7因子	共通性
味の素	2802	0.443	0.225	0.039	0.066	0.194	0.172	0.071	0.325
ニチレイ	2871	0.559	0.003	0.209	0.048	0.104	0.136	0.131	0.404
片倉工業	3001	0.350	−0.006	0.175	0.143	0.097	0.089	0.141	0.211
東洋紡績	3101	0.654	−0.302	0.046	0.058	0.091	0.002	−0.105	0.544
鐘紡	3102	0.509	−0.092	0.188	−0.031	0.120	−0.055	0.082	0.328
ユニチカ	3103	0.533	−0.353	0.095	0.057	0.084	−0.067	−0.067	0.437
富士紡績	3104	0.493	−0.345	0.130	0.138	−0.062	0.067	−0.067	0.410
日清紡績	3105	0.584	0.051	0.153	0.002	0.240	0.087	0.050	0.435
日東紡績	3110	0.443	−0.212	0.131	0.294	−0.035	0.078	−0.025	0.353
オーミケンシ	3111	0.377	−0.087	−0.010	−0.037	−0.071	0.015	0.215	0.203
日本毛織	3201	0.372	−0.131	0.137	−0.135	0.175	0.107	0.069	0.240
大東紡績	3202	0.483	−0.199	0.059	0.004	−0.016	0.102	0.096	0.297
帝国繊維	3302	0.280	−0.101	0.118	0.106	0.030	0.168	0.068	0.147
帝人	3401	0.607	−0.215	−0.082	0.020	0.156	−0.200	0.070	0.491
東レ	3402	0.676	−0.054	−0.204	0.133	0.143	−0.141	−0.156	0.584
東邦レーヨン	3403	0.546	−0.203	0.062	0.171	−0.072	0.015	0.093	0.387
三菱レーヨン	3404	0.593	−0.304	−0.156	0.123	0.043	−0.047	−0.104	0.498
クラレ	3405	0.563	−0.137	0.010	0.048	0.124	−0.058	−0.175	0.387
旭化成工業	3407	0.607	−0.064	−0.113	0.084	0.209	−0.040	−0.084	0.445
山陽国策パルプ	3702	0.598	−0.371	0.178	0.052	0.169	0.083	−0.126	0.581
王子製紙	3861	0.576	−0.025	0.212	−0.127	−0.324	0.134	−0.024	0.517
本州製紙	3862	0.547	−0.082	0.195	−0.086	0.129	0.123	−0.097	0.393
十條製紙	3863	0.566	−0.134	0.243	−0.002	0.180	0.156	−0.111	0.466
三菱製紙	3864	0.595	−0.176	0.171	0.146	0.089	0.074	−0.091	0.457
北越製紙	3865	0.463	−0.215	0.238	0.104	0.074	0.042	−0.034	0.336
三井東圧工業	4001	0.475	−0.551	0.010	0.061	0.034	−0.113	−0.285	0.629
昭和電工	4004	0.590	−0.461	−0.029	0.060	−0.002	−0.074	−0.256	0.636
住友化学工業	4005	0.681	−0.339	−0.178	−0.002	0.120	−0.088	−0.150	0.656
三菱化成工業	4010	0.680	−0.328	−0.129	−0.012	0.095	−0.127	−0.119	0.625
日産化学工業	4021	0.467	−0.414	0.141	0.184	0.029	−0.087	−0.130	0.469
ラサ工業	4022	0.435	−0.267	0.195	0.145	0.083	−0.046	0.005	0.329
日本曹達	4041	0.390	−0.228	0.199	0.310	−0.082	−0.036	0.075	0.354

東証コード		第1因子	第2因子	第3因子	第4因子	第5因子	第6因子	第7因子	共通性
東洋曹達工業	4042	0.595	−0.362	0.144	0.138	0.050	−0.069	−0.163	0.551
東亜合成工業	4045	0.515	−0.390	0.142	0.173	0.074	−0.059	−0.181	0.509
電気化学工業	4061	0.526	−0.427	0.157	0.241	0.097	−0.151	−0.085	0.581
信越化学工業	4063	0.519	−0.096	−0.013	0.265	0.067	−0.017	−0.129	0.371
日本カーバイト工業	4064	0.445	−0.442	0.159	0.244	−0.027	−0.018	−0.077	0.485
日本化学工業	4092	0.433	−0.328	0.208	0.178	−0.128	0.088	−0.049	0.397
協和醱酵工業	4151	0.507	0.014	0.155	0.157	0.139	0.121	0.153	0.363
日本合成化学工業	4201	0.360	−0.376	0.077	0.234	0.026	−0.015	−0.156	0.357
宇部興産	4208	0.604	−0.368	−0.030	−0.028	0.000	−0.056	−0.149	0.527
日本化薬	4272	0.477	0.233	−0.008	0.192	0.109	0.001	−0.115	0.345
旭電化工業	4401	0.356	−0.263	0.138	0.234	−0.009	0.113	0.012	0.283
日本油脂	4403	0.586	−0.115	0.269	0.158	−0.083	0.093	0.090	0.477
三共	4501	0.451	0.317	−0.036	0.097	0.251	0.091	−0.082	0.392
武田薬品工業	4502	0.473	0.322	−0.231	0.108	0.180	0.010	−0.150	0.477
大日本製薬	4506	0.249	0.071	0.033	0.161	−0.009	0.029	−0.035	0.096
富士写真フイルム	4901	0.356	0.450	−0.270	0.242	0.179	0.036	−0.035	0.495
小西六写真工業	4902	0.364	0.220	0.038	0.160	0.065	0.139	0.209	0.275
日本石油	5001	0.361	−0.151	0.149	−0.113	0.182	−0.294	0.294	0.394
昭和シェル石油	5002	0.272	−0.111	0.151	−0.238	0.033	−0.288	0.265	0.319
丸善石油	5003	0.272	−0.260	0.259	−0.130	0.137	−0.361	0.207	0.417
三菱石油	5004	0.366	−0.244	0.276	−0.210	0.112	−0.270	0.195	0.437
東亜燃料工業	5005	0.362	0.110	0.049	−0.133	0.175	−0.253	0.321	0.361
横浜ゴム	5101	0.390	0.080	0.192	0.038	0.253	−0.023	0.190	0.298
ブリヂストン	5108	0.435	0.435	0.039	0.122	0.034	0.043	0.306	0.492
旭硝子	5201	0.603	0.215	−0.102	0.043	0.167	0.070	0.015	0.454
日本板硝子	5202	0.585	0.047	0.032	0.078	0.048	0.039	−0.061	0.359
日本セメント	5231	0.569	−0.039	0.137	−0.150	−0.049	0.043	−0.075	0.377
住友セメント	5232	0.583	−0.021	0.187	−0.078	−0.069	0.007	−0.132	0.404
小野田セメント	5233	0.591	−0.182	0.078	−0.092	−0.130	−0.007	−0.157	0.439
三菱鉱業セメント	5238	0.356	−0.139	0.217	−0.128	0.142	−0.234	0.166	0.312
東海カーボン	5301	0.452	−0.071	0.168	0.308	−0.141	0.100	0.065	0.367
日本カーボン	5302	0.449	−0.046	0.183	0.223	−0.351	0.182	0.119	0.457

東証コード		第1因子	第2因子	第3因子	第4因子	第5因子	第6因子	第7因子	共通性
ノリタケ	5331	0.296	0.326	0.082	0.188	0.178	0.074	−0.060	0.277
東陶機器	5332	0.340	0.527	0.039	−0.029	0.173	0.070	−0.215	0.477
日本碍子	5333	0.265	0.388	−0.004	0.183	0.073	0.111	0.065	0.276
品川白煉瓦	5351	0.569	−0.104	0.116	0.160	−0.211	0.079	0.100	0.434
新日本製鉄	5401	0.695	−0.176	−0.443	−0.270	−0.199	0.159	0.066	0.853
川崎製鉄	5403	0.691	−0.249	−0.391	−0.189	−0.254	0.101	0.015	0.802
日本鋼管	5404	0.647	−0.196	−0.436	−0.229	−0.272	0.065	0.124	0.794
住友金属工業	5405	0.636	−0.216	−0.464	−0.222	−0.218	0.103	0.030	0.774
神戸製鋼所	5406	0.619	−0.304	−0.378	−0.148	−0.205	0.054	0.038	0.687
日本ステンレス	5478	0.397	−0.324	0.233	0.235	−0.107	−0.004	0.043	0.385
日本金属工業	5479	0.499	−0.340	0.185	0.261	−0.104	0.011	0.042	0.480
日本冶金工業	5480	0.440	−0.278	0.226	0.213	0.172	−0.098	−0.062	0.411
日本電工	5563	0.478	−0.295	0.200	0.221	−0.189	0.088	−0.053	0.450
日本製鋼所	5631	0.672	−0.183	−0.008	0.093	−0.143	−0.171	0.089	0.552
三菱製鋼	5632	0.506	−0.282	0.016	0.198	−0.196	0.032	−0.036	0.416
日本軽金属	5701	0.420	−0.347	0.119	0.080	0.002	−0.083	0.037	0.326
三井金属工業	5706	0.362	−0.512	0.201	0.162	0.091	−0.064	−0.014	0.473
東邦亜鉛	5707	0.375	−0.434	0.139	0.212	0.126	−0.114	−0.067	0.427
三菱金属	5711	0.421	−0.444	0.125	0.061	0.085	−0.085	−0.034	0.409
日本鉱業	5712	0.479	−0.392	0.126	−0.068	0.231	−0.268	0.050	0.531
住友金属鉱山	5713	0.342	−0.337	0.175	0.002	0.167	−0.038	0.064	0.295
同和鉱業	5714	0.426	−0.332	0.169	0.030	0.165	−0.072	0.081	0.361
古河鉱業	5715	0.444	−0.321	0.260	0.115	0.024	−0.057	0.147	0.406
志村化工	5721	0.395	−0.311	0.223	0.288	−0.098	−0.045	0.094	0.407
古河電気工業	5801	0.578	−0.149	−0.062	0.128	−0.091	0.200	−0.161	0.451
住友電気工業	5802	0.622	−0.023	−0.143	0.091	−0.042	0.024	−0.024	0.419
藤倉電線	5803	0.499	−0.167	0.018	0.079	−0.132	0.216	−0.109	0.360
昭和電線電纜	5805	0.486	−0.173	0.122	0.151	0.164	0.216	−0.077	0.384
東洋製缶	5901	0.452	0.166	0.071	0.105	0.038	0.256	0.156	0.339
東京製鋼	5981	0.483	0.054	0.364	0.110	−0.209	0.029	0.160	0.451
新潟鉄工所	6011	0.463	0.034	0.088	0.061	−0.196	−0.217	0.024	0.313
大隈鉄工所	6103	0.524	0.181	0.090	0.251	−0.263	−0.047	0.094	0.458

	東証コード	第1因子	第2因子	第3因子	第4因子	第5因子	第6因子	第7因子	共通性
小松製作所	6301	0.608	0.328	−0.190	0.064	0.024	−0.100	−0.113	0.540
久保田鉄工	6326	0.566	0.183	−0.126	0.039	0.140	−0.019	0.068	0.396
荏原製作所	6361	0.511	0.365	0.116	0.195	−0.056	0.006	−0.042	0.451
千代田化工建設	6366	0.354	0.305	−0.049	0.240	−0.059	−0.157	−0.016	0.306
日本ピストンリング	6461	0.360	0.071	0.069	0.147	−0.201	0.165	0.260	0.296
日本精工	6471	0.461	0.176	−0.095	0.285	−0.118	0.085	0.208	0.398
NTN 東洋ベアリング	6472	0.500	0.193	−0.041	0.206	−0.269	0.005	0.127	0.419
光洋精工	6473	0.311	0.091	−0.038	0.115	−0.137	−0.024	0.058	0.142
不二越	6474	0.593	0.002	0.072	0.289	−0.297	0.039	0.071	0.536
日立製作所	6501	0.677	0.224	−0.508	0.051	0.101	−0.099	−0.087	0.796
東芝	6502	0.688	0.056	−0.495	0.028	0.066	−0.114	−0.122	0.754
三菱電機	6503	0.707	0.031	−0.435	0.042	0.026	−0.046	−0.103	0.704
富士電機	6504	0.579	−0.018	−0.273	0.128	−0.112	−0.037	−0.170	0.469
明電舎	6508	0.467	−0.151	0.016	0.168	−0.148	0.085	−0.074	0.304
日本電気	6701	0.536	0.395	−0.338	0.126	0.165	−0.110	−0.109	0.625
富士通	6702	0.409	0.469	−0.278	0.240	0.133	−0.111	−0.239	0.609
沖電気工業	6703	0.417	0.246	−0.221	0.309	−0.139	−0.036	−0.149	0.422
松下電器産業	6752	0.462	0.524	−0.318	0.095	0.186	−0.088	0.071	0.645
シャープ	6753	0.416	0.386	−0.130	0.228	0.091	−0.031	0.052	0.402
ソニー	5758	0.298	0.419	−0.135	0.089	0.059	−0.086	0.051	0.304
三洋電機	6764	0.577	0.286	−0.283	0.058	0.008	−0.042	0.085	0.507
横河北辰電機	6841	0.503	0.355	−0.074	0.345	−0.116	−0.036	−0.099	0.529
日本電装	6902	0.270	0.489	0.079	0.270	−0.012	0.030	0.266	0.462
湯浅電池	6933	0.368	0.066	0.124	0.182	−0.182	0.106	0.184	0.267
三井造船	7003	0.520	−0.088	−0.264	−0.189	−0.003	−0.284	0.200	0.505
日立造船	7004	0.533	−0.102	−0.247	−0.248	−0.114	−0.188	0.193	0.502
三菱重工業	7011	0.623	−0.023	−0.392	−0.228	−0.010	−0.020	0.130	0.612
石川島播磨重工業	7013	0.629	0.006	−0.333	−0.154	0.024	−0.244	0.112	0.603
日本車輌製造	7102	0.305	0.005	0.111	0.133	−0.054	0.155	−0.036	0.151
日産自動車	7201	0.438	0.405	−0.165	0.091	0.034	−0.061	0.188	0.431
いすず自動車	7202	0.400	0.131	−0.063	0.061	−0.143	0.037	0.265	0.277
トヨタ自動車	7203	0.379	0.445	−0.234	0.167	0.063	0.030	0.302	0.521

東証コード		第1因子	第2因子	第3因子	第4因子	第5因子	第6因子	第7因子	共通性
日野自動車工業	7205	0.546	0.171	0.010	0.084	−0.089	0.117	0.191	0.392
マツダ	7261	0.419	0.315	−0.037	0.078	−0.031	0.151	0.328	0.414
本田技研工業	7267	0.418	0.351	−0.093	0.128	0.020	−0.021	0.354	0.449
鈴木自動車工業	7269	0.402	0.140	−0.014	0.159	−0.146	0.032	0.298	0.318
日本光学工業	7731	0.386	0.392	−0.141	0.205	0.125	0.038	−0.059	0.385
キャノン	7751	0.373	0.381	−0.175	0.258	0.063	0.067	−0.034	0.391
リコー	7752	0.374	0.434	−0.131	0.339	0.027	−0.059	−0.098	0.474
シチズン時計	7762	0.423	0.274	−0.015	0.193	0.011	0.182	0.121	0.339
凸版印刷	7911	0.467	0.416	0.040	0.172	0.158	0.125	−0.109	0.475
大日本印刷	7912	0.475	0.522	−0.050	0.134	0.142	0.070	−0.153	0.567
日本楽器製造	7951	0.305	0.454	−0.032	0.211	0.076	0.042	0.021	0.352
伊藤忠商事	8001	0.564	0.046	0.078	−0.153	0.146	−0.079	0.194	0.415
丸紅	8002	0.509	0.059	−0.011	−0.190	0.110	−0.117	0.211	0.370
三井物産	8031	0.641	0.177	0.075	−0.164	0.143	−0.123	0.149	0.532
住友商事	8053	0.622	0.213	0.098	−0.164	0.204	−0.121	0.021	0.525
三菱商事	8058	0.626	0.111	−0.042	−0.141	0.171	−0.202	0.114	0.509
岩谷産業	8088	0.408	0.132	0.156	0.129	0.114	0.007	−0.100	0.248
三越	8231	0.459	0.305	0.037	−0.096	0.267	0.075	0.050	0.393
東急百貨店	8232	0.397	0.025	0.160	0.129	0.084	0.260	0.211	0.319
高島屋	8233	0.467	0.123	0.063	0.055	0.074	0.124	0.198	0.300
松坂屋	8235	0.244	−0.032	0.074	−0.034	−0.008	0.156	0.074	0.097
丸善	8236	0.328	0.118	0.217	0.013	0.021	0.099	0.048	0.181
三井不動産	8801	0.482	0.346	0.197	−0.143	0.150	0.227	−0.218	0.532
三菱地所	8802	0.555	0.203	0.155	−0.294	0.323	0.150	−0.110	0.599
平和不動産	8803	0.416	0.196	0.201	−0.249	0.305	0.103	−0.009	0.418
東武鉄道	9001	0.375	−0.023	0.210	−0.434	0.176	0.248	−0.073	0.471
東京急行電鉄	9005	0.434	0.038	0.186	−0.492	0.151	0.327	−0.059	0.599
京浜急行電鉄	9006	0.257	0.036	0.164	−0.425	0.062	0.180	−0.003	0.311
小田急電鉄	9007	0.241	0.061	0.178	−0.374	0.151	0.241	−0.059	0.318
京王帝都電鉄	9008	0.266	0.023	0.209	−0.323	0.013	0.213	−0.056	0.268
京成電鉄	9009	0.265	−0.101	0.223	−0.203	0.161	0.196	−0.079	0.242
日本通運	9062	0.672	−0.172	−0.105	−0.266	0.056	0.198	−0.056	0.608

東証コード		第1因子	第2因子	第3因子	第4因子	第5因子	第6因子	第7因子	共通性
日本郵船	9101	0.473	0.066	0.029	−0.280	0.218	−0.191	0.159	0.416
ジャパンライン	9103	0.249	−0.077	0.150	−0.152	0.163	−0.261	0.226	0.259
大阪商船三井船舶	9104	0.396	−0.010	0.064	−0.172	0.076	−0.274	0.152	0.295
山下新日本汽船	9105	0.322	−0.059	0.101	−0.164	0.063	−0.219	0.227	0.248
川崎汽船	9107	0.418	−0.153	0.139	−0.179	0.137	−0.348	0.204	0.431
昭和海運	9126	0.314	−0.171	0.124	−0.120	0.096	−0.234	0.180	0.254
三菱倉庫	9301	0.453	0.011	0.250	−0.258	0.273	0.293	−0.029	0.495
三井倉庫	9302	0.352	−0.003	0.095	−0.349	0.181	0.257	0.003	0.354
東京電力	9501	0.455	0.000	−0.082	−0.302	−0.091	0.242	−0.111	0.385
関西電力	9503	0.415	−0.057	−0.049	−0.272	−0.102	0.228	−0.115	0.327
東京瓦斯	9531	0.544	−0.208	−0.076	−0.288	0.151	0.120	−0.105	0.476
大阪瓦斯	9532	0.499	−0.121	−0.058	−0.245	−0.004	0.197	−0.116	0.380
松竹	9601	0.284	0.035	0.310	−0.120	0.108	0.116	0.151	0.240
東宝	9602	0.326	0.027	0.112	−0.029	0.099	0.166	−0.010	0.158
東映	9605	0.321	−0.076	0.270	0.007	0.032	0.127	−0.041	0.201
にっかつ	9606	0.162	−0.184	0.168	0.025	−0.014	0.022	−0.091	0.098
後楽園スタジアム	9681	0.353	0.109	0.193	−0.068	0.024	0.170	0.058	0.211

【参考文献】

青山護、「リスクの再評価について―わが国株式市場における実証研究―」、『経済学研究』、東京大学、22、1979年、pp.44-52

―――、「不確実性と選好」、諸井勝之助・若杉敬明編『現代経営財務論』、1984年、pp.21－41

丘本正、『因子分析の基礎』、日科技連出版社、1986年

小林孝雄、「市場の均衡と証券価格」、諸井勝之助・若杉敬明編『現代経営財務論』、1984年、pp.42-69

紺谷典子、「株式市場における投資家行動と市場効率」、『計測室テクニカル・ペーパー』、日本証券経済研究所、No.44、1978年、pp.83-94

榊原茂樹、「CAPMの再検討と企業規模効果」、『国民経済雑誌』、147(5)、1983年、pp.88-112

―――、『現代財務理論』、千倉書房、1986年

佐藤周、「日本におけるβリスクの実証研究」、『経済理論』、和歌山大学、199、1984年、pp.53-88

浜尾泰、「ポートフォリオ理論APT―金融資産運用の尺度に」、『日本経済新聞・経済教室』、1986年8月22日

堀本三郎、「わが国における裁定評価理論（APT）の検証」、『彦根論叢』、滋賀大学、231、1986年、pp.43－54

丸淳子・蠟山昌一、「株式市場における収益と危険」、『計測室テクニカル・ペーパー』、日本証券経済研究所、No.29、1974年、pp.1-43

Anderson, T. W. and Rubin, H., "Statistical Inference in Factor Analysis", *Proceeding of the Third Berkeley Symposium*, 5, 1956, pp.111-150.

Black, F., Jensen, M. and Scholes, M., "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests", in Jensen M., ed., *Studies in the Theory of Capital Market*, New York: Preger Publishers, 1972.

Blume, M. E. and Friend, I., "A New Look at the Capital Asset Pricing Model", *Journal of Finance*, 28-1, 1973, pp.19-33.

Brown, S. J. and Weinstein, M. I., "A New Approach to Testing Asset Pricing Models: The Bilinear Paradigm", *Journal of Finance*, 38-3, 1983, pp.711-743.

Chamberlain, G., "Funds, Factors, and Diversification in Arbitrage Pricing Models", *Econometrica*, 51-5, 1983, pp.1305-1323.

Chen, N. F., Roll, R. and Ross, S. A., "Economic Forces and the Stock Market", *Journal of Business*, 59-3, 1986, pp.383-403.

Cho, D. C., "On Testing the Arbitrage Pricing Theory: Inter-battery Factor Analysis", *Journal of Finance*, 39-5, 1984, pp.1485-1502.

―――, Elton, E. J. and Gruber, M. J., "On the Robustness of the Roll and Ross Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19-1, 1984, pp.1-28.

Dhrymes, P. J., Friend, I. and Gultekin, N. B., "A Critical Re-examination of the Empirical Evidence on the Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Finance*, 39-2, 1984, pp.323-346.

―――, Friend, I., Gultekin, M. N. and Gultekin, N. B., "New Tests of the APT and their Implication", *Journal of Finance*, 40-3, 1985, pp.659-674.

Elton, E. J. and Gruber, M. J., *Modern Portofolio Theory and Investment Analysis*, 2nd edition, New York: John Wiley & Sons, 1981.

Fama, E. F. and Macbeth, J. D., "Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests", *Journal of Political Economy*, 71, 1973, pp.607-636.

Geweke, J. F. and Singleton, K. J., "Interpreting the Likelihood Ratio Statistic in Factor Models when Sample Size is Small", *Journal of the American Statistical Association*, 75, 1980, pp.133-137.

Huberman, G., "A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Economic Theory*, 28, 1982, pp.183-191.

Joreskog, K. G., "Some Contributions to Maximum Likelihood Factor Analysis", *Psychometrika*, 32, 1967, pp.443-482.

―――, "Factor Analysis by Least-squares and Maximum Likelihood Methods", in Enslein K. et al., eds., *Statistical Methods for Digital Computers*, New York: John Wiley & Sons, 1977, pp.125-153.

Kryzanowski, L. and To, M. C., "General Factor Models and the Structure of Security Returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18-1, 1983, pp.31-52.

Lawley, D. N. and Maxwell, A. E., *Factor Analysis as a Statistical Method*, New York: Macmillan, 1971.（丘本正訳『因子分析法』日科技連出版社）

Mossin, Jan, *The Economic Efficiency of Financial Markets*, Toronto: D. C. Heath and Company, 1977.

Roll, R., "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests", *Journal of Financial Economics*, 4, 1977, pp.129-176.

Rosenberg, B. and Guy, J., "Prediction of a Beta from Investment Fundamentals", *Financial Analysts Journal*, I, 1976, pp.3-15.

Ross, S. A., "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, 13, 1976, pp.341-360.

———, "Mutual Fund Separation in Financial Theory, the Separating Distribution", *Journal of Economic Theory*, 15, 1978, pp.254-286.

Schwarz, G., "Estimating the Dimension of a Model", *Annual Statistics*, 6, 1978, pp.461-464.

Shanken, J., "The Arbitrage Pricing Theory: Is it Testable?" *Journal of Finance*, 37-5, 1982, pp.1129-1140.

———, "Multivariate Proxies and Asset Pricing Relations: Living with the Roll Critique", *Journal of Financial Economics*, 18, 1987, pp.91-110.

Sharpe, W., *Investments*, 3rd edition., New York: Prentice Hall, 1986.

Trzcinka, C., "On the Number of Factors in the Arbitrage Pricing Model", *Journal of Finance*, 41-2, 1986, pp.347-368.