

# ヴァイン・コピュラを用いた 統合リスク管理

まえだ ひさみつ  
前田寿満

## 要 旨

本稿では、金融機関の統合リスクの計測手法について分析を行う。市場・信用といったリスク・カテゴリー間のリスク合算手法については、従来から多くの研究が行われているが、標準的な計算手法はまだ確立されていない。統合リスクを把握する上では、ストレス状況を想定するとともに適切な分散効果を考慮することが重要である。具体的な計算手法として、近年では、コピュラを用いたリスクの合算方法の研究が盛んであり、金融機関の実務でも使用されつつある。本稿では、コピュラを用いたリスク合算に焦点を当て、ヴァイン・コピュラと呼ばれるリスク・ファクターのペアごとに依存関係を定める手法と実務で一般に使用されている楕円コピュラ（正規コピュラ、 $t$ コピュラ）を用いた手法から算出されるリスク量の比較分析を行う。実務では、保守的なリスク量を算出するために、裾依存性の強い自由度3の $t$ コピュラを用いていることが多いが、本稿の分析を通じて、自由度3の $t$ コピュラでも、対象のポートフォリオ構成によっては、必ずしも保守的なリスク量を算出するとは限らないことを示す。

キーワード： リスク管理、統合リスク、ヴァイン・コピュラ、VaR、分散効果

.....  
本稿の作成に当たり、中川秀敏准教授（一橋大学）、ハリー・ジョー教授（ブリティッシュ・コロンビア大学）、および日本銀行金融研究所スタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

前田寿満 日本銀行金融研究所  
(現三井住友銀行、E-mail: Maeda\_Hisamitsu@dn.smbc.co.jp)

## 1. はじめに

金融機関では、信用リスク、市場リスク、オペレーショナル・リスクといったさまざまなカテゴリーの金融リスクを管理している。実務におけるリスク管理では、個別カテゴリーのリスク管理に加え、金融機関全体のリスクも管理する必要があり、各金融機関では各カテゴリーのリスクを合算した統合リスクを算出し、モニタリングを行っている。従来から、統合リスクの計算手法については、多くの研究が行われているが、標準的な計算手法はまだ確立されていない。

最も簡便な統合リスクの算出方法として、算出された個々のリスクを単純に足し上げるという手法があるが、この手法は分散効果をまったく考慮しないため、ポートフォリオの分散によって軽減したリスクを評価することができないという欠点がある。分散効果とは、エクスポージャーの数や集中度、各エクスポージャー間の相関の影響により、リスクを減少させる効果のことである。一般的に、リスク・カテゴリー間に負の相関がある場合、一方のリスク・カテゴリーでの損失が、他方のリスク・カテゴリーの収益で相殺されるため、合算した損失は小さくなりリスクを減少させる。限られた資本の中で、効率的にリスク資本を管理するには、この分散効果を適切に把握することが非常に重要である。分散効果を考慮した方法として最も使用されている手法は、分散共分散法である。分散共分散法は、各リスク・カテゴリーの損益分布に正規分布を仮定した上で、リスク・カテゴリー間の組合せに一定の相関行列を想定し、それを用いて計算する方法である。計算方法が単純で実務での使用も容易というメリットがある一方で、実際の各リスク・カテゴリーの損益分布は分散共分散法の前提である正規分布からファットテイル性、歪み等の観点で大きく乖離することが多く、分散共分散法を用いた統合リスクは誤ったリスクを算出する可能性がある。

そこで、近年、コンピュータを用いたリスクの合算方法が研究されている。コンピュータは変量間の依存関係を数値ではなく、関数で表現できるため、柔軟な依存関係を記述できる。また、コンピュータは周辺分布と分布間の依存構造を分離して表現できるため、分散共分散法の欠点であった損益分布の正規性の仮定が不要となる。コンピュータを用いたリスクの合算方法の既存研究をいくつか紹介する。Brockmann and Kalkbrenner [2010] は、実務における金融機関のリスク資本算出のフレームワークを紹介し、市場リスク、信用リスク、オペレーショナル・リスク、ビジネス・リスクといった多変量のリスクの合算に楕円コンピュータ（正規コンピュータ、 $t$ コンピュータ）を用いる方法を提案した。吉羽 [2013] は、ストレス状況でのリスク評価が重要であるとし、ストレス状況時における依存構造を推定し、リスクの合算を行った。このように、リスクの合算では、リスク・カテゴリー間における裾での依存関係の把握が

重要となる。例えば、株式と信用のポートフォリオの場合、株価の下落と企業の業績悪化には、一般に正の相関があり、ストレス時（リーマン・ショック等）には依存関係がより強まるため、依存構造を推定した場合、裾依存の強いコピュラが選択される。一方で、株式と債券のポートフォリオには、通常は負の相関があり、株価の下落時に、債券価格が上昇する分散効果があるが、ストレス時には株価の下落と債券価格の下落が同時に起こるといふ、通常時とは異なる相関がみられるため、ストレス時の依存構造の推定にはこの特徴を取り込む必要がある。

2変量の場合、吉羽 [2013] のように変量間の依存構造に合わせて、2変量コピュラを当てはめ、ストレス状況を適切に把握したリスクの合算が可能となるが、3変量以上になると1つのコピュラでは、ストレス時のような複雑な依存関係を捉えることが難しいと考えられる。例えば、株式と信用のポートフォリオの場合、ストレス時により裾での依存関係が強まるコピュラを選択する必要がある。一方、株式と債券のポートフォリオではストレス時に通常時と符号が異なる相関を捉える必要があるにもかかわらず、裾での依存関係が強いコピュラを選択すると、過度に分散効果を高め、非保守的なリスクを算出してしまふ可能性がある。リスク管理の実務において、正規コピュラと自由度3の $t$ コピュラがよく使われているが、自由度3の $t$ コピュラは、裾での依存性が強いいため、平時に株価と債券価格の変動に負の相関が観察されることを受けて、株式と債券のリスク合算では過度に分散効果を高めてしまふ可能性がある。

そこで、近年、多変量の依存関係の表現方法として研究が進んでいるヴァイン・コピュラの適用を試みる。ヴァイン・コピュラは、各変量のペアごとに依存関係を選択し、多変量のリスク・ファクターの依存関係をモデル化するものであり、これにより各ペアにおけるリスク合算が適切な分散効果を持つように調整されることが期待できる。また、ストレス時の裾での依存関係が異なる場合にも、ペアごとに依存関係をうまく捉えているため、誤ったリスク量を算出する可能性が低いと考えられる。

ヴァイン・コピュラは、3変量以上の依存関係を表現するために用いられる手法で、近年、本邦の金融データを用いた研究が進んでいる。野澤 [2010] は、金融市場混乱期における日本のクレジット債券市場に対し、ヴァイン・コピュラを適用し、変量間の依存構造を明らかにした。また、川口・山中・田代 [2014] は、与信ポートフォリオにヴァイン・コピュラを適用し、分布の裾における業種間の相関構造をより詳細に表現した信用リスク評価のモデルを提案した。この他、日本の株式市場を対象に実証分析を行った岩永 [2015] がある。しかし、野澤 [2010]、川口・山中・田代 [2014]、岩永 [2015] のいずれの状況においても、どの変量間の相関関係も正の場合だけを想定しており、株式と債券、株式と信用のように、ペアによってストレス時の相関関係の符号が異なる場合を想定したリスク合算の研究は少ない。

本稿では、コピュラを用いたリスクの合算に焦点を当てて分析を行う。実務で多変量のリスクの合算に使用されている楕円コピュラ（正規コピュラ、 $t$ コピュラ）とヴァイン・コピュラを用いたリスクの合算を行い、ヴァイン・コピュラを用いたリスクの合算方法の有効性を検証する。

以下、2節では合算対象のリスク・カテゴリーの日本と米国における個別のリスク量を算出し、周辺分布の特徴について整理を行う。3節では、本稿で使用するヴァイン・コピュラの概要およびリスク量算出に必要な乱数の発生方法について説明する。4節では、日本と米国における各変量間の依存構造を推定する。また、推定したコピュラを用いてリスク量を算出し、分析を行う。5節では、得られた結果を整理し、今後の課題を述べる。

## 2. 各リスク・カテゴリーのリスク量

本節では、リスク・カテゴリーの日本と米国における個別のリスク量の算出を行う。合算対象のリスクは、株式リスク、債券（金利）リスク、信用リスクの3カテゴリーとし、保有期間は1週間とする。株式、債券のリスク・ファクターの分布は、吉羽 [2013] を参考に非対称  $t$  分布を採用する。信用リスクは、Brockmann and Kalkbrenner [2010] でも使用されている Vasicek [2002] の損失分布を採用する<sup>1</sup>。各リスク・カテゴリーに対するエクスポージャーは、大手邦銀のポートフォリオ比率を参考に、株式（日本 380 億円、米国 190 億円）、債券（日本 2,420 億円、米国 780 億円〈5年割引債〉）、信用（日本 1,494 億円、米国 603 億円）<sup>2</sup> とし、観測期間は10年間（2005年4月～2015年3月）とする。上記前提のもとで算出した各リスク・カテゴリーの信頼水準99%のバリュー・アット・リスク（Value at Risk：VaR）は図表1のとおりである。

図表1 各リスク・カテゴリーのリスク量

（億円）

VaR(99%)	株式VaR	債券VaR	信用VaR	単純合算
日本	30.71	19.11	34.37	84.19
米国	14.78	12.23	18.45	45.46

.....  
1 各分布のパラメータ、形状については、補論1を参照。

2 ここでは、デフォルト時損失率（Loss Given Default：LGD）を勘案したエクスポージャーとし、VaR算出においては、LGD=100%として計算する。

### 3. ヴァイン・コピュラ

#### (1) 概要

以下では、本稿で取り上げるヴァイン・コピュラについて、ヴァイン・コピュラの構築法を論じた Aas *et al.* [2009] や、ヴァイン・コピュラを本邦株式市場に応用した岩永 [2015] を参考にその概要を述べる。一般に3次元確率ベクトル  $(X_1, X_2, X_3)$  の同時分布関数は、3変量コピュラ  $C_{1,2,3}(\cdot, \cdot, \cdot)$  と周辺分布関数  $F_1(\cdot), F_2(\cdot), F_3(\cdot)$  を使って、

$$F(x_1, x_2, x_3) = C_{1,2,3}(F_1(x_1), F_2(x_2), F_3(x_3)), \quad (1)$$

と表現でき、(1)式から同時密度関数は、

$$f(x_1, x_2, x_3) = c_{1,2,3}(F_1(x_1), F_2(x_2), F_3(x_3))f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3), \quad (2)$$

と書ける。ここで、 $c_{1,2,3}(u_1, u_2, u_3) = \frac{\partial^3 C_{1,2,3}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3}$  はコピュラ密度関数、 $f_1(\cdot), f_2(\cdot), f_3(\cdot)$  は、それぞれ  $F_1(\cdot), F_2(\cdot), F_3(\cdot)$  の密度関数である。一方で、同時密度関数  $f(x_1, x_2, x_3)$  は、条件付確率を使って分解すると、

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_3(x_3)f_{2|3}(x_2|x_3)f_{1|2,3}(x_1|x_2, x_3), \quad (3)$$

と書ける。ここで、(3)式の右辺の  $f_{2|3}(x_2|x_3)$  については、第2変量と第3変量の同時密度関数に対して、(2)式の考え方と、2変量のコピュラ密度  $c_{2,3}(u_2, u_3)$  を使って、

$$f_{2|3}(x_2|x_3) = c_{2,3}(F_2(x_2), F_3(x_3))f_2(x_2),$$

と書ける。一方、 $f_{1|2,3}(x_1|x_2, x_3)$  は、第2変量を所与とした第1変量と第3変量の同時密度関数に対して、(2)式の考え方と、第2変量を所与とした第1変量と第3変量の条件付コピュラ密度  $c_{1,3|2}(u_1, u_3)$  を使って、

$$\begin{aligned} f_{1|2,3}(x_1|x_2, x_3) &= c_{1,3|2}(F_1(x_1|x_2), F_3(x_3|x_2))f_1(x_1|x_2) \\ &= c_{1,3|2}(F_1(x_1|x_2), F_3(x_3|x_2))c_{1,2}(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1), \end{aligned}$$

と書けるので、同時密度関数は、

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= c_{1,3|2}(F_1(x_1|x_2), F_3(x_3|x_2))c_{1,2}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \\ &\quad \times c_{2,3}(F_2(x_2), F_3(x_3))f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3), \end{aligned} \quad (4)$$

となる。(4) 式のように、一般に3次元以上の同時密度関数についても、条件付2次元コピュラ密度関数、2次元コピュラ密度関数、周辺密度関数の積で表現できる。この表現は変数数が多くなると、その表現の数も飛躍的に増えるため、どのペアを使って2次元コピュラを構成するかが非常に重要となる。

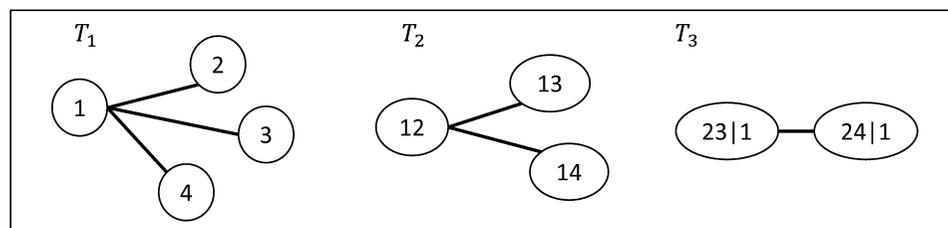
## (2) ヴァイン・コピュラの構成

2次元コピュラ密度関数を使ったヴァイン・コピュラの表現を整理するために、一般によく使われる正則ヴァイン (Regular Vine) について説明する。ヴァイン (vine) は、グラフ理論の概念である。ある集合の要素を頂点で表し、そのうち相異なる2つの頂点が辺で結ばれた図形を考える。これらの辺で結ばれた図形が閉じた路を持たないとき、頂点集合と辺集合を合わせたものを木 (tree) と呼ぶ。 $n$  個の要素  $\{1, 2, \dots, n\}$  上の正則ヴァイン  $V$  とは、木  $T_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  の列  $V = (T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$  で、以下の条件を満たすものである。

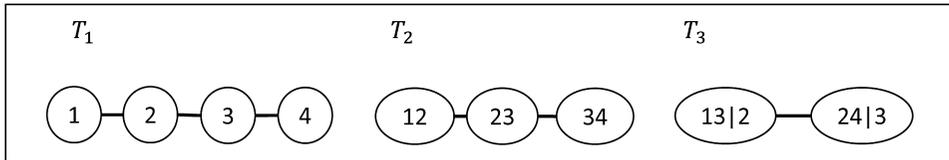
- (i)  $T_1$  は  $N_1 = \{1, 2, \dots, n\}$  を頂点集合、 $N_1 \times N_1$  の部分集合  $E_1$  を辺集合とする木である。
- (ii)  $i = 2, \dots, n-1$  に対して、 $T_i$  は、 $N_i = E_{i-1}$  を頂点集合、 $N_i \times N_i$  の部分集合  $E_i$  を辺集合とする木であり、頂点の数は  $n+1-i$ 、辺の数は  $n-i$  である。
- (iii)  $T_i$  において辺で連結される頂点は、 $T_{i-1}$  において隣接する辺 (1つの頂点のみ共有する辺) でなければならない。

本稿では、この正則ヴァインの特別なケースである C-ヴァイン (Canonical Vine) と D-ヴァイン (Drawable Vine) を使用する。C-ヴァインは、図表2のように特定の変数が各変数間の相互依存関係の中心となる正則ヴァインである。D-ヴァインは、図表3のようにどの木  $T_i (i = 1, 2, 3)$  においてもある頂点が辺で連結している、頂点は高々2つの正則ヴァインである。

図表2 4変数のC-ヴァイン



図表 3 4 変量の D-ヴァイン



3 変量正則ヴァインの表現は、C-ヴァインと D-ヴァインのみで表現でき、かつ C-ヴァインと D-ヴァインは同じ表現となるため、組合せ総数は 3 通りである。4 変量正則ヴァインの場合も、C-ヴァインと D-ヴァインのみで表現でき、組合せの総数は、C-ヴァインと D-ヴァインでそれぞれ 12 通りずつ存在する。5 変量以上の正則ヴァインでは、C-ヴァインと D-ヴァインのみで表現できず、またその組合せの総数は、C-ヴァインと D-ヴァインで 60 通りずつ、その他に 360 通りと変量数に応じ、飛躍的に組合せの数が増えるため、ヴァイン・コピュラのペアの表現に注意する必要がある<sup>3</sup>。

ヴァイン・コピュラの構築では、第一階層のペアとその依存関係の強さが全体のコピュラの構造に大きな影響を与えることから、Dißmann *et al.* [2013] は順位相関係数であるケンドールの  $\tau$  の絶対値の和が大きくなるようにペアを構築することを提案している。本稿でも Dißmann *et al.* [2013] の方法に従って、正則ヴァインに対するリスク・カテゴリーのペアを構築する<sup>4</sup>。ケンドールの  $\tau$  は、確率変数  $(X_1, X_2)$  に対して、(5) 式のように定義される<sup>5</sup>。

$$\tau(X_1, X_2) = E[\text{sign}((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2))]. \tag{5}$$

ここで、 $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  は  $(X_1, X_2)$  の独立な複製である。

また、実際にサンプルデータ  $(x_{i1}, x_{i2})$ ,  $i = 1, \dots, n$  が与えられた場合、ケンドールの  $\tau$  は (6) 式で算出される<sup>6</sup>。

$$\tau = \frac{2}{n(n-1)} \times \sum_{1 \leq i < j \leq n} [I((x_{i1} - x_{j1})(x_{i2} - x_{j2}) > 0) - I((x_{i1} - x_{j1})(x_{i2} - x_{j2}) < 0)]. \tag{6}$$

3 Morales-Nápoles [2010] で、 $n$  変量の場合の正則ヴァインの組合せの総数は  $\frac{n!}{2} \times 2^{\binom{n-1}{2}}$  通りと示されている。また、Aas *et al.* [2009] で、C-ヴァインと D-ヴァインは、 $\frac{n!}{2}$  通りずつであると示されている。

4 本稿では全体のコピュラの赤池情報量規準 (Akaike Information Criterion : AIC) を最小にする推定を試みているが、後述のとおり Dißmann *et al.* [2013] の方法が必ずしも AIC を最小にするとは限らない点は注意が必要である。詳細は補論 5 を参照。

5  $\text{sign } A$  は、 $A > 0$  ならば 1、 $A < 0$  ならば -1 を値とする関数。

6  $I(A)$  は、条件  $A$  が成立している場合に 1、成立していない場合に 0 となる関数。

### (3) ペア・コピュラの推定および乱数の発生方法

本稿におけるヴァイン・コピュラを用いた多次元分布の推定には、先行研究でも使用されているように、ペアごとに各コピュラのパラメータを最尤推定し、AICが最小のコピュラを選択する。また、選択したコピュラに従う乱数の発生には、Aas *et al.* [2009]を参考に、条件付分布関数を用いてヴァイン・コピュラに従う一様乱数を発生させる。乱数発生の基本的なアイデアは逆関数法であり、条件付分布関数を用いて発生させたヴァイン・コピュラに従う一様乱数を各周辺分布の逆関数に代入することにより、各周辺分布に従う乱数を生成する。まず、Aas *et al.* [2009]にならい、(7)式のように条件付分布関数を  $h$  関数として定義する。コピュラ  $C(u, v, \theta)$  に従う一様乱数  $(u, v)$  に対し、 $v$  を所与としたときの、 $u$  の分布関数  $F(u|v)$  は、

$$F(u|v) = \frac{\partial C(u, v, \theta)}{\partial v} =: h(u, v, \theta), \quad (7)$$

と書ける。ヴァイン・コピュラに従う乱数は、この  $h$  関数とその逆関数を用いて発生させる。ここでは、具体例として、3変量のヴァイン・コピュラに従う乱数  $(x_1, x_2, x_3)$  の発生方法を述べる。まず、独立な一様乱数  $(w_1, w_2, w_3)$  に対し、 $x_1 = w_1$  とする。次に、 $x_1$  を所与としたとき、 $F(x_2|x_1) = h(x_2, x_1, \theta_{11})$  なので、 $x_2 = h^{-1}(w_2, x_1, \theta_{11})$  となる。 $\theta_{11}$  はペア  $(x_1, x_2)$  に適用したコピュラのパラメータである。最後に、 $(x_1, x_2)$  を所与としたとき、条件付分布関数は

$$F(x_3|x_1, x_2) = h\{h(x_3, x_1, \theta_{12}), h(x_2, x_1, \theta_{11}), \theta_{21}\},$$

となるため、 $x_3 = h^{-1}[h^{-1}\{w_3, h(x_2, x_1, \theta_{11}), \theta_{21}\}, x_1, \theta_{12}]$  となる。4変量以上の場合、C-ヴァインとD-ヴァインでヴァインの表現が異なるため、乱数発生のアルゴリズムも異なる。また、4変量以上のヴァイン・コピュラの乱数発生方法は、Joe [2014]で詳しく説明されている。

## 4. 統合リスク算出

### (1) コピュラを選択

以下では、統合リスクの算出のために、各リスク・ファクターの依存構造を考察する。ここでは、先行研究でよく使用されている楕円コピュラとヴァイン・コピュラを用いて、依存構造の考察を行う。

図表 4 各リスク・カテゴリーの代理変数

	株式	債券	信用
日本	TOPIX	国債5Y	iTraxx Japan
米国	S&P500	米国債5Y	Markit CDX

コピュラの選択に当たり、多変量の楕円コピュラには、正規コピュラと  $t$ コピュラを用いる。ヴァイン・コピュラに使用するペア・コピュラには、上下対称の依存関係を表現できる 2 変量の楕円コピュラ（正規コピュラ、 $t$ コピュラ）、混合正規コピュラ、混合  $t$  正規コピュラ（自由度 3 および 5）と上下非対称な依存関係を表現できるアルキメディアンコピュラ（クレイトン、ゲンベル、フランク）、BB1 コピュラ、および Patton [2006] で提案された SJC コピュラを使用する<sup>7</sup>。依存構造を推定するために必要な各リスク・カテゴリーの代理変数（リスク・ファクター）は、図表 4 のとおりとし、株価の変動は対数階差、債券金利とクレジット・デフォルト・スワップ（Credit Default Swap：CDS）の変動には階差を使用する。本稿では、コピュラのメリットの 1 つであるリスク・カテゴリーの周辺分布と依存関係を別々に考慮できる点を活かし、周辺分布にはリスク・ファクターの経験分布を当てはめ、最尤法を用いてパラメータの推定を行う。また、コピュラの実選は、3 節の手法に従い、AIC が最小のコピュラを選択する。

イ. 日本（過去 10 年間：2005 年 4 月～2015 年 3 月）

（イ）楕円コピュラを用いた推定

図表 5 は楕円コピュラを用いて日本の相関行列を推定した結果である。相関行列に注目すると、株価と債券金利には正の相関、株価と CDS には負の相関があることが分かる。正規コピュラと  $t$ コピュラを比較した結果、 $t$ コピュラの対数尤度が大きく、AIC は低くなった。しかし、 $t$ コピュラの自由度は 12.64 と高く、リスク・ファクター間の裾の依存性はそれほど高くないと考えられる。

（ロ）ヴァイン・コピュラを用いた推定

ヴァイン・コピュラの表現は、ケンドールの  $\tau$  の大きさに従って、図表 6 のとおり、株価を中心としたリスク・ファクターのペア構造が生成された。このペアに対し、各ペア・コピュラを推定する。

推定の結果、第一階層では、金利—株価、CDS—株価の両方のコピュラに  $t$ コピュラが選択され、第二階層では反転クレイトンコピュラが選択された。各ペアで裾依存係数の異なるコピュラが選択されたことは、ペアごとに裾での依存関係が

7 各コピュラの詳細および  $h$  関数は、それぞれ補論 2、補論 3 を参照。

異なっていると考えられる。また、楕円コピュラとヴァイン・コピュラの対数尤度と AIC を比較すると、ヴァイン・コピュラの尤度が最大となり、AIC も最小となった。選択された第一階層のコピュラとサンプルデータのヒストグラムは図表 A-7

図表 5 楕円コピュラ（日本）

正規コピュラ			$t$ コピュラ		
相関行列			相関行列		
1.000	0.321	-0.613	1.000	0.340	-0.615
0.321	1.000	-0.150	0.340	1.000	-0.166
-0.613	-0.150	1.000	-0.615	-0.166	1.000
対数尤度		152.66	自由度		12.64
AIC		-299.32	対数尤度		157.87
			AIC		-307.74

備考：相関行列は第 1 成分：株価、第 2 成分：金利、第 3 成分：CDS とする（以下同様）。

図表 6 ヴァイン・コピュラ（日本）

ケンドールの $\tau$																											
株価－金利	0.227																										
株価－CDS	-0.425																										
金利－CDS	-0.106																										
・ 第一階層		・ 第二階層																									
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">第一階層</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>金利－株価</td> <td><math>t</math></td> </tr> <tr> <td>相関</td> <td>0.344</td> </tr> <tr> <td>自由度</td> <td>7.15</td> </tr> <tr> <td>CDS－株価</td> <td><math>t</math></td> </tr> <tr> <td>相関</td> <td>-0.620</td> </tr> <tr> <td>自由度</td> <td>17.85</td> </tr> </tbody> </table>		第一階層		金利－株価	$t$	相関	0.344	自由度	7.15	CDS－株価	$t$	相関	-0.620	自由度	17.85	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">第二階層</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>金利－CDS</td> <td>反転クレイトン</td> </tr> <tr> <td>パラメータ</td> <td>0.068</td> </tr> <tr> <td>対数尤度</td> <td>160.48</td> </tr> <tr> <td>AIC</td> <td>-310.97</td> </tr> </tbody> </table>		第二階層		金利－CDS	反転クレイトン	パラメータ	0.068	対数尤度	160.48	AIC	-310.97
第一階層																											
金利－株価	$t$																										
相関	0.344																										
自由度	7.15																										
CDS－株価	$t$																										
相関	-0.620																										
自由度	17.85																										
第二階層																											
金利－CDS	反転クレイトン																										
パラメータ	0.068																										
対数尤度	160.48																										
AIC	-310.97																										

(補論 4)のとおりである。

ロ. 米国 (過去 10 年間：2005 年 4 月～2015 年 3 月)

(イ) 楕円コピュラを用いた推定

図表 7 は楕円コピュラを用いて米国の相関行列を推定した結果である。相関行列に注目すると、米国におけるリスク・ファクター間の相関は日本におけるリスク・ファクター間の相関係数より大きいことが分かる。また、日本における推定結果と異なり、 $t$ コピュラの自由度は 4.31 と低く、リスク・ファクター間の裾での依存性が高いことが分かる。

(ロ) ヴァイン・コピュラを用いた推定

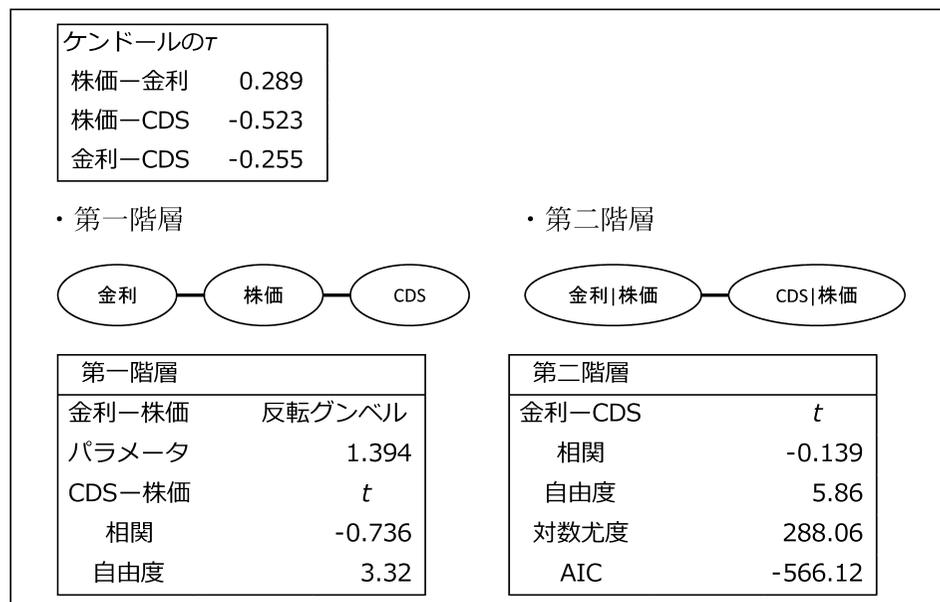
日本と同様にリスク・ファクター間のケンドールの  $\tau$  を基に、構成したペアは図表 8 のとおりである。

リスク・ファクターのペア構成については、日本と同様に株価を中心として、金利—株価と CDS—株価のペアが選択された。第一階層では、金利—株価のペア・コピュラは反転ゲンベルコピュラ、CDS—株価のペア・コピュラは、 $t$ コピュラが選択され、第二階層のペア・コピュラも  $t$ コピュラが選択された。楕円コピュラとヴァイン・コピュラの数尤度と AIC を比較した結果、米国においても、ヴァイン・コピュラの数尤度が最大になり、AIC は最小となった。選択された第一階層のコピュラとサンプルデータのヒストグラムは図表 A-8 (補論 4) のとおりである。

図表 7 楕円コピュラ (米国)

正規コピュラ			$t$ コピュラ		
相関行列			相関行列		
1.000	0.428	-0.723	1.000	0.428	-0.743
0.428	1.000	-0.379	0.428	1.000	-0.406
-0.723	-0.379	1.000	-0.743	-0.406	1.000
対数尤度			自由度		
AIC			対数尤度		
			AIC		
249.18			4.31		
-492.36			286.57		
			-565.15		

図表 8 ヴァイン・コピュラ (米国)



## (2) シミュレーション結果

以下では、4 節 (1) で推定したコピュラを用いてリスクの合算を行う。ここでは、楕円コピュラ (正規コピュラ、 $t$ コピュラ) を用いたリスクの合算とヴァイン・コピュラを用いたリスクの合算を行う。

コピュラを用いて統合 VaR を算出する方法を説明する。本稿では、統合 VaR をモンテカルロ・シミュレーションにより算出する。まず、楕円コピュラ (正規コピュラ、 $t$ コピュラ) については、戸坂・吉羽 [2005] にならい、相関のある正規乱数を使用して、各コピュラの依存構造に従う一様乱数を発生させる。発生させた一様乱数に対し、各リスク・カテゴリーの損益分布の分位点<sup>8</sup> を計算し、各リスク・カテゴリーの損益を合算したものをポートフォリオ全体の損益とし、その 99% 点を統合 VaR とする。本稿では、100,000 個の乱数を発生させて、99% 点の統合 VaR を算出する過程を 100 回繰り返し、その平均を統合 VaR と表記する。また、ヴァイン・コピュラに従う乱数の発生には、3 節 (3) の手法を用いる。一様乱数から統合

.....  
<sup>8</sup> 非対称  $t$  分布の分位点は Yoshida [2014] を参考に分布関数の単調補間を用いて算出した。また、一般に、株式と信用リスクには正の相関があるため、コピュラにおける株価と CDS の負の相関は、損益算出において正の相関になるように調整をした。

図表 9 推定したコピュラを用いて算出した統合 VaR

(億円)			(億円)		
日本	VaR(99%)	分散効果	米国	VaR(99%)	分散効果
単純合算	84.19		単純合算	45.46	
正規	55.37	34.2%	正規	26.59	41.5%
$t$	55.58	34.0%	$t$	27.35	39.8%
ヴァイン	56.55	32.8%	ヴァイン	28.35	37.6%
$t$ (自由度3)	57.34	31.9%	$t$ (自由度3)	27.74	39.0%

VaR を算出するプロセスは、楕円コピュラを用いる場合と同様である。

上記の前提のもと、4 節 (1) で求めた楕円コピュラ、ヴァイン・コピュラに加え、リスク管理実務において、保守的なリスク量が算出されるという理由で使用されている自由度 3 の  $t$  コピュラ<sup>9</sup> を用いて算出した統合 VaR は図表 9 のとおりである。ここで、各リスク・カテゴリーの VaR を単純合算したものと統合 VaR との差を、VaR の単純合算で除したものを分散効果とする<sup>10</sup>。

コピュラを用いた統合 VaR は、リスク・ファクター間の相関関係に従い、分散効果が考慮されている。分散効果の大きさは、日本、米国どちらの場合も、正規コピュラが一番大きくなった。このことは、株価と債券価格の場合には、吉羽 [2013] のように裾での負の相関関係を強める  $t$  コピュラが正規コピュラ対比大きな分散効果を生むが、信用のポートフォリオが加わることにより、株式と信用の正の相関関係に対し  $t$  コピュラの裾依存性の高さが分散効果を弱めていることが要因と考えられる。また、日本では自由度 3 の  $t$  コピュラ、米国ではヴァイン・コピュラを用いた統合 VaR が最大となった。これは、日本の株価と CDS のペア・コピュラである  $t$  コピュラの自由度が 17.85 と高く、自由度 3 の  $t$  コピュラ対比裾での依存性が弱いことが要因と考えられる。一方、米国では、株価と金利のペア・コピュラが、株価と CDS のペア・コピュラ対比裾依存性の弱いコピュラが選択され、分散効果を弱めたことが、リスク量が最大になった要因だと考えられる。図表 9 の結果から、一般に保守的とされる自由度 3 の  $t$  コピュラでも、対象ポートフォリオの構成や依存構造によっては、必ずしも保守的なリスク量を算出するとは限らないことが分かる。

次に、エクスポージャーの違いによる分散効果の影響を考察する。日本、米国に対して、株式、債券、信用のエクスポージャーを別々に 10% 増加させた場合のリス

9 自由度 3 の  $t$  コピュラの相関行列は、正規コピュラの相関行列を使用する。

10 VaR は一般には劣加法性を満たすとは限らないが、Danielsson *et al.* [2013] において、本稿で扱っている分布のように、分布の裾が正則変動する (regularly varying) 場合は劣加法性を満たすことが示されている。そこで、本稿では、単純合算 VaR からの乖離を分散効果として捉える。

図表 10 各エクスポージャーを 10%増加させた場合の統合 VaR

(億円)

日本	株式+10%		債券+10%		信用+10%	
	VaR	分散効果	VaR	分散効果	VaR	分散効果
単純合算	87.26		86.10		87.63	
正規	57.79	33.8%	55.57	35.5%	58.33	33.4%
<i>t</i>	58.08	33.4%	55.83	35.2%	58.73	33.0%
ヴァイン	58.87	32.5%	57.00	33.8%	59.57	32.0%
<i>t</i> (自由度3)	59.86	31.4%	57.51	33.2%	60.32	31.2%

(億円)

米国	株式+10%		債券+10%		信用+10%	
	VaR	分散効果	VaR	分散効果	VaR	分散効果
単純合算	46.94		46.69		47.31	
正規	27.79	40.8%	26.44	43.4%	28.24	40.3%
<i>t</i>	28.56	39.2%	27.29	41.5%	28.93	38.8%
ヴァイン	29.40	37.4%	28.53	38.9%	30.11	36.4%
<i>t</i> (自由度3)	28.90	38.4%	27.70	40.7%	29.29	38.1%

図表 11 エクスポージャーの変動による分散効果への影響

(pt)

日本	株式+10%	債券+10%	信用+10%	米国	株式+10%	債券+10%	信用+10%
正規	▲ 0.46	1.23	▲ 0.79	正規	▲ 0.71	1.85	▲ 1.20
<i>t</i>	▲ 0.55	1.17	▲ 1.01	<i>t</i>	▲ 0.68	1.70	▲ 0.99
ヴァイン	▲ 0.30	0.97	▲ 0.81	ヴァイン	▲ 0.28	1.25	▲ 1.29
<i>t</i> (自由度3)	▲ 0.49	1.31	▲ 0.73	<i>t</i> (自由度3)	▲ 0.55	1.67	▲ 0.91

ク量の変化を分析する。信頼水準は 99%とし、統合 VaR を算出する。シミュレーションの前提は、図表 9 の統合 VaR 算出と同様である。結果は図表 10 のとおりである。

また、図表 9、図表 10 からエクスポージャーを変動させた場合に、各コピュラから算出される分散効果を比較した結果は図表 11 のとおりである。

図表 10 から、各コピュラから算出されるリスク量の大小関係は、図表 9 と同様になった。一方で、図表 11 より、エクスポージャーの変動による分散効果の変動は、選択したコピュラによって異なることが分かる。特に分散効果に影響の大きい株式と債券のエクスポージャーを増加させた場合の分散効果の変動はヴァイン・コ

図表 12 信頼水準を 99.9%に変更した場合の各 VaR および統合 VaR

(億円)

VaR(99.9%)	株式VaR	債券VaR	信用VaR	単純合算
日本	51.58	45.68	67.73	164.98
米国	32.53	19.82	34.26	86.61

(億円)			(億円)		
日本	VaR(99.9%)	分散効果	米国	VaR(99.9%)	分散効果
単純合算	164.98		単純合算	86.61	
正規	99.70	39.6%	正規	52.21	39.7%
<i>t</i>	101.87	38.3%	<i>t</i>	55.54	35.9%
ヴァイン	103.46	37.3%	ヴァイン	61.62	28.8%
<i>t</i> (自由度3)	109.84	33.4%	<i>t</i> (自由度3)	56.72	34.5%

ピュラを使用した場合の変動が低くなっている。これは、ヴァイン・コピュラがペアごとに適切な依存関係を捉えているため、エクスポージャーの変動による影響を受けにくくなっていることによると考えられる。

最後に信頼水準を 99%から 99.9%に変更した場合の影響を分析する。信頼水準を 99.9%に変更した場合の各 VaR および統合 VaR は図表 12 のとおりである。統合 VaR の算出における前提については、図表 9 と同様である。

図表 12 から、信頼水準を 99.9%に変更した場合も、各コピュラから算出されるリスク量の大小関係は図表 9 と同様になった。また、各コピュラ間の分散効果の差異は、信頼水準が 99%の場合に比べ大きくなっており、信頼水準が高くなるほど、裾での依存性が、より重要であることが分かる。

## 5. 分析のまとめと今後の課題

本稿では、金融機関での統合リスク計測手法として、ヴァイン・コピュラを取り上げ、リスク管理実務で一般に使用されている楕円コピュラとの比較を株式、債券、信用のポートフォリオに対して統合 VaR を算出し、その有効性を検証した。

楕円コピュラのメリットの 1つとして、実装が容易であることが挙げられる。しかし、リスク・ファクター間の依存構造が上下対称であること、*t*コピュラの裾での依存度合いを表すパラメータが 1つであることがデメリットとして考えられる。具体的には、株価と債券価格には一般に負の相関関係があるものの、リスク量が大き

くなるのは、株価と債券価格が同時に下落する場合であり、裾での依存関係が弱いコピュラを選択することが望まれる。一方、株式と信用のように、裾での依存関係が強い場合にリスク量が増加するペアの場合は、裾での依存関係がより強いコピュラを選択することが望まれる。4節の分析においても、楕円コピュラは、パラメータ数の問題から裾での依存関係の強弱のどちらか一方しか捉えられておらず、高い分散効果が計算されているのに対し、ヴァイン・コピュラではこの両方を捉えて、分散効果の高まりを抑えている。その結果、保守的なリスク量を算出するために、実務でよく使用される自由度3の $t$ コピュラを使用した統合 VaR との比較においても、ヴァイン・コピュラを使用した統合 VaR が最大になる場合があり、リスク・ファクターのペアごとに依存関係を捉えることが重要であることが確認された。

また、各エクスポージャーを別々に増加させた場合に各コピュラから算出される統合 VaR を分析した結果、エクスポージャーの変動により、各コピュラから算出される分散効果も変動することが分かる。特に、分散効果を強める株式と債券のリスク・カテゴリーのエクスポージャーを増加させた場合に、多変量の楕円コピュラでは分散効果が大きくなる可能性がある。一方で、ヴァイン・コピュラを使用した場合、株式と債券のエクスポージャーの増加による分散効果の変動はそれほど大きくならなかった。これは、ヴァイン・コピュラがペアごとに適切に依存関係を捉えていることが要因と考えられる。

本稿の結果から、統合リスクの算出においては、単純に多変量の楕円コピュラを適用するだけでなく、各金融機関のポートフォリオに合わせて、リスク・カテゴリーごとに依存関係を捉える必要があることが示唆される。また、多次元のリスク・ファクターの依存関係を2次元のペアごとに分解できるため、ペアごとの依存関係を視覚的に理解できることもヴァイン・コピュラのメリットの1つである。

今後の課題としては、以下の3点が挙げられる。第1に、ヴァイン・コピュラは変量数が増加した場合に、ペア・コピュラの構造がより複雑になり、モデル・リスクが増加する可能性がある。Dißmann *et al.* [2013] のように、ヴァイン・コピュラの構造の決定方法を提案している研究はあるが、Dißmann *et al.* [2013] においても、その手法が最適な選択方法であるとは限らないとされている<sup>11</sup>。加えて、ペア・コピュラの数が増えることで、推定するパラメータが増加し、計算負荷やパラメータの推定誤差が大きくなる可能性がある<sup>12</sup>。また、ヴァイン・コピュラ推定の簡略化のために、条件付コピュラに対し、強い仮定をおいている点も、理論上の課題として挙げられている。このように、ヴァイン・コピュラを実務に使用する際には、柔

11 4節で選択したヴァイン・コピュラの構造以外のペア・コピュラおよび統合 VaR の分析結果については、補論5を参照。

12 Brechmann, Czado, and Aas [2010] や Brechmann and Joe [2015] では、変量数が増加した場合において、変量間の依存関係の強さに応じ、ヴァインの木構造を分断することで、計算負荷を減らしながら依存関係をうまく捉える方法を提案している。

軟な依存関係を捉えることができるメリットだけでなく、前述のようなデメリットについても十分に認識しておく必要がある。

第2に、各リスク・カテゴリーの代理変数の選択に関連する問題がある。実際の金融機関のポートフォリオでは、株式、債券、信用のリスク・カテゴリーだけでなく、オペレーショナル・リスクやビジネス・リスクを含め、数多くのリスク・ファクターが設定されている。本稿では、簡易的に株式、債券、信用の代理変数を1つのリスク・ファクターで表現したが、実務で使用する場合は、この代理変数の数やそのリスク・ファクターを各金融機関で設定する必要がある。また、その選択したリスク・ファクターにより、ペアの表現やリスク量も異なる可能性がある。今後、リスク・カテゴリー数を増やし、さまざまなリスク・ファクターを使用した実証分析が増えていくことが望まれる。

最後に、本稿では、各リスク・カテゴリーの依存構造の把握に焦点を当てており、各依存関係から算出されたリスク量に対し、バックテスト等の妥当性検証までは行っていない。実務におけるリスク資本の観点からは、保守的なリスク量が嗜好されることが多いが、算出されたリスク量の妥当性については検証していく必要がある。しかしながら、各リスク・カテゴリーにおいて、損益の認識方法に違いがあるなど、適切な妥当性の検証方法は確立されていない。本稿の分析結果を受け、今後、リスク資本管理の更なる深化が望まれる。

## 参考文献

- 岩永育子、「ヴァイン・コピュラを用いた CAPM の非正規・非線形への拡張：日本株式市場における実証分析」、『ジャフィー・ジャーナル：ファイナンスとデータ分析』、日本金融・証券計量・工学学会、2015 年、69～113 頁
- 川口宗紀・山中卓・田代雄介、「コピュラの実務への適用例—与信集中リスク評価への応用—」、『証券アナリストジャーナル』第 52 巻第 3 号、2014 年、43～51 頁
- 戸坂凡展・吉羽要直、「コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説」、『金融研究』第 24 巻別冊第 2 号、2005 年、115～162 頁
- 野澤勇樹、「金融市場混乱期における日本のクレジット・スプレッドの変動と依存構造—多変量コピュラによる推定とその応用—」、『JAFEE2010 夏季大会予稿集』、日本金融・証券計量・工学学会、2010 年、323～334 頁
- 吉羽要直、「ストレス状況を勘案した関連構造とリスク合算」、日本銀行ワーキングペーパー No. 13-J-4、2013 年
- Aas, Kjersti, Claudia Czado, Arnoldo Frigessi, and Henrik Bakken, “Pair-copula Constructions of Multiple Dependence,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 44, 2009, pp. 182–198.
- Azzalini, Adelchi, and Antonella Capitanio, “Distributions Generated by Perturbation of Symmetry with Emphasis on a Multivariate Skew  $t$ -distribution,” *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 65(2), 2003, pp. 367–389.
- Brechmann, Eike C., Claudia Czado, and Kjersti Aas, “Truncated Regular Vines in High Dimensions with Application to Financial Data,” *Canadian Journal of Statistics*, 40(1), 2012, pp. 68–85.
- , and Harry Joe, “Truncation of Vine Copulas Using Fit Indices,” *Journal of Multivariate Analysis*, 138, 2015, pp. 19–33.
- Brockmann, Michael, and Michael Kalkbrener, “On the Aggregation of Risk,” *Journal of Risk*, 12(3), 2010, pp. 45–68.
- Daniëlsson, Jón, Bjørn N. Jørgensen, Gennady Samorodnitsky, Mandire Sarma, and Casper G. de Vries, “Fat Tails, VaR and Subadditivity,” *Journal of Econometrics*, 172, 2013, pp. 283–291.
- Dißmann, Jeffery, Eike Christian Brechmann, Claudia Czado, and Dorota Kurowicka, “Selecting and Estimating Regular Vine Copulae and Application to Financial Returns,” *Computational Statistics and Data Analysis*, 59, 2013, pp. 52–69.
- Joe, Harry, *Dependence Modeling with Copulas*, Chapman & Hall/CRC, 2014.
- McNeil, Alexander J., Rüdiger Frey, and Paul Embrechts, *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton University Press, 2005（塚原英敦ほか訳『定量的リスク管理—基礎概念と数理技法—』、共立出版、2008 年）。

- Morales-Nápoles, Oswaldo, “Counting Vines,” in Dorota Kurowicka and Harry Joe, eds. *Dependence Modeling: Vine Copula Handbook*, Chapter 9, World Scientific Publishing, 2010, pp. 189–218.
- Patton, Andrew J., “Modeling Asymmetric Exchange Rate Dependence,” *International Economic Review*, 47(2), 2006, pp. 527–556.
- Vasicek, Oldrich, “Loan Portfolio Value,” *Risk*, 15(12), 2002, pp. 160–162.
- Yoshida, Toshinao, “Maximum Likelihood Estimation of Skew  $t$ -copula,” ISM Research Memorandum, No. 1183, 2014.

## 補論 1. リスク・カテゴリーの周辺分布

本稿では、株式と債券のリスク・カテゴリーの周辺分布に、Azzalini and Capitanio [2003] の非対称  $t$  分布を採用する。この分布は、位置パラメータ  $\mu$ 、尺度パラメータ  $\sigma$ 、自由度パラメータ  $\nu$ 、歪みパラメータ  $\lambda$  を持つ分布で密度関数は (A-1) 式のように書ける。ただし、 $t_\nu(\cdot)$  は自由度  $\nu$  の  $t$  分布の密度関数、 $T_{\nu+1}(\cdot)$  は自由度  $\nu+1$  の  $t$  分布の分布関数である。

$$f(x) = \frac{2}{\sigma} t_\nu\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) T_{\nu+1}\left(\lambda \frac{x-\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{\nu+1}{(x-\mu)^2/\sigma^2 + \nu}}\right). \quad (\text{A-1})$$

非対称  $t$  分布のパラメータ推定については、過去 10 年間の週次リターン（株価は対数階差を 100 倍して算出、金利は階差で算出）に対して、最尤法によりパラメータを推定する。推定されたパラメータは図表 A-1 のとおりである。

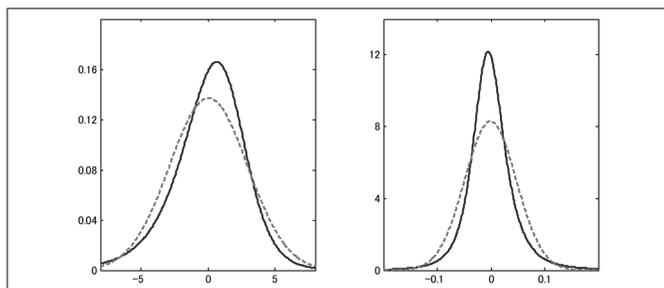
図表 A-1 の推定パラメータを用いた密度関数をプロットすると図表 A-2 のようになる。図表 A-2 の点線は週次リターンを正規分布で推定した場合の形状をプロットしている。

図表 A-2 より、非対称  $t$  分布は、正規分布に比べてファットテイル、かつ歪みのある分布を表現していることが分かる。図表 A-2 と同様に、米国（過去 10 年間のパラメータを推定した結果は図表 A-3 のとおりである。

図表 A-1 推定パラメータ（日本 過去 10 年間：2005 年 4 月～2015 年 3 月）

	位置 ( $\mu$ )	尺度 ( $\sigma$ )	形状 ( $\lambda$ )	自由度 ( $\nu$ )
株価	2.037	2.886	-1.149	6.292
金利	-0.012	0.031	0.374	2.867

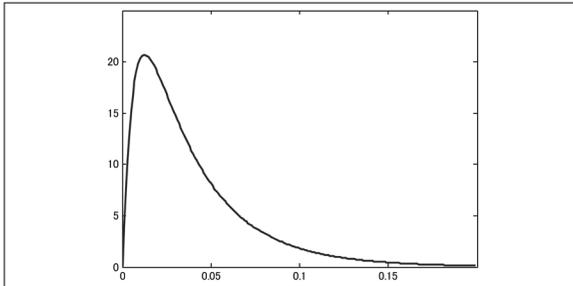
図表 A-2 推定密度の形状（左：株価、右：金利）



図表 A-3 推定パラメータ（米国 過去 10 年間：2005 年 4 月～2015 年 3 月）

	位置 ( $\mu$ )	尺度 ( $\sigma$ )	形状 ( $\lambda$ )	自由度 ( $\nu$ )
株価	0.940	1.711	-0.516	3.092
金利	-0.020	0.105	0.155	6.847

図表 A-4 Vasicek の損失分布の密度関数の形状



図表 A-5 Vasicek の損失分布のパラメータ

	日本	米国
PD	0.003	0.005
相関	0.136	0.126

信用ポートフォリオの損失分布は、Vasicek [2002] で提案されているものを採用する。この損益分布は、デフォルト確率  $p$ 、相関  $\rho$  を持つ分布で、分布関数は (A-2) 式であり、密度関数は図表 A-4 のようになる。

$$F(x, p, \rho) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}}\right). \quad (\text{A-2})$$

この損失分布の分位点  $L_\alpha$  は、(A-3) 式のように計算される。

$$L_\alpha = F(\alpha, 1-p, 1-\rho) = \Phi\left(\frac{\sqrt{\rho}\Phi^{-1}(\alpha) + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\rho}}\right). \quad (\text{A-3})$$

本稿で使用する損失分布のパラメータは、図表 A-5 のとおりである。デフォルト確率（Probability of Default：PD）については、大手邦銀の PD を参考に、本稿の保有期間である週次 PD に調整した。

## 補論 2. 各コピュラの関数形および特徴

以下では、本稿で使用するパラメトリックなコピュラ  $C(\cdot)$  の 2 変量における関数形を明示する。

$$\text{正規コピュラ} : C(u_1, u_2 | \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)).$$

$$t \text{ コピュラ} : C(u_1, u_2 | \rho, \nu) = t_{\nu, \rho}(t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2)).$$

$$\text{クレイトンコピュラ} : C(u_1, u_2 | \alpha) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\text{ガンベルコピュラ} : C(u_1, u_2 | \xi) = \exp\{-[(-\log u_1)^\xi + (-\log u_2)^\xi]^{1/\xi}\}, \quad \xi \geq 1.$$

$$\text{フランクコピュラ} : C(u_1, u_2 | \delta) = -\frac{1}{\delta} \log\left(1 + \frac{(e^{-\delta u_1} - 1)(e^{-\delta u_2} - 1)}{e^{-\delta} - 1}\right), \quad \delta > 0.$$

混合正規コピュラ :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2 | \rho_1, \rho_2, \theta) &= \theta \Phi_{\rho_1}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) \\ &\quad + (1 - \theta) \Phi_{\rho_2}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

混合  $t$  正規コピュラ (本稿では自由度  $\nu$  は定数) :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2 | \rho_1, \rho_2, \theta) &= \theta t_{\nu, \rho_1}(t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2)) \\ &\quad + (1 - \theta) \Phi_{\rho_2}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

BB1 コピュラ :

$$C(u_1, u_2 | \theta, \delta) = \{1 + [(u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta]^{1/\delta}\}^{-1/\theta}, \quad \theta > 0, \quad \delta \geq 1.$$

SJC コピュラ :

$$\begin{aligned} C_{JC}(u_1, u_2 | \kappa, \gamma) \\ = 1 - \left(1 - \{[1 - (1 - u_1)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - u_2)^\kappa]^{-\gamma} - 1\}^{-1/\gamma}\right)^{1/\kappa}, \quad \kappa \geq 1, \quad \gamma > 0. \end{aligned}$$

$$C_{SJC}(u_1, u_2 | \kappa, \gamma) = 0.5(C_{JC}(u_1, u_2 | \kappa, \gamma) + C_{JC}(1 - u_1, 1 - u_2 | \gamma, \kappa) + u_1 + u_2 - 1).$$

回転コピュラ：

$$90^\circ \text{ 回転} : \hat{C}(u_1, u_2) = u_2 - C(1 - u_1, u_2).$$

$$180^\circ \text{ 回転} : \hat{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - u_2).$$

$$270^\circ \text{ 回転} : \hat{C}(u_1, u_2) = u_1 - C(u_1, 1 - u_2).$$

ただし、 $\Phi_\rho(\cdot)$  は相関  $\rho$  の 2 変量標準正規分布関数、 $\Phi^{-1}(\cdot)$  は 1 変量標準正規分布の逆関数、 $t_{\nu, \rho}(\cdot)$  は相関  $\rho$ 、自由度  $\nu$  の 2 変量  $t$  分布関数、 $t_\nu^{-1}(\cdot)$  は、自由度  $\nu$  の 1 変量  $t$  分布関数の逆関数である。

また、分布の裾に注目し、その相互依存関係を示す指標として裾依存係数を定義する。同時分布の裾の位置によって上側裾依存係数  $\lambda_U$  と下側裾依存係数  $\lambda_L$  と呼ばれ、(A-4) 式のように定義される。

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} P[F_2(X_2) > u | F_1(X_1) > u], \\ \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} P[F_2(X_2) < u | F_1(X_1) < u]. \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

各裾依存係数が 0 より大きい場合、漸近従属であるといい、裾での依存性が強くなる。本稿で使用する各コピュラの裾依存係数は図表 A-6 のとおりである<sup>13</sup>。表中の反転コピュラは、上記の 180° 回転コピュラを指す。

図表 A-6 より、正規コピュラ、フランクコピュラ、混合正規コピュラには裾依存性が無く、 $t$  コピュラ、混合  $t$  正規コピュラは上下対称な裾依存性、クレイトンコピュラ、グンベルコピュラ、BB1 コピュラ、SJC コピュラは上下非対称な裾依存性があることが分かる。

.....  
13 裾依存係数の導出の詳細については、戸坂・吉羽 [2005]、McNeil, Frey, and Embrechts [2005] を参照。

図表 A-6 2変量コピュラの裾依存係数

コピュラ	下側裾依存係数	上側裾依存係数
正規	0	0
$t$	$2t_{v+1} \left( -\sqrt{\frac{(1-\rho)(v+1)}{(1+\rho)}} \right)$	$2t_{v+1} \left( -\sqrt{\frac{(1-\rho)(v+1)}{(1+\rho)}} \right)$
クレイトン	$2^{-1/\alpha}$	0
グンベル	0	$2 - 2^{1/\xi}$
フランク	0	0
反転クレイトン	0	$2^{-1/\alpha}$
反転グンベル	$2 - 2^{1/\xi}$	0
混合正規	0	0
混合 $t$ 正規	$2\theta t_{v+1} \left( -\sqrt{\frac{(1-\rho)(v+1)}{(1+\rho)}} \right)$	$2\theta t_{v+1} \left( -\sqrt{\frac{(1-\rho)(v+1)}{(1+\rho)}} \right)$
BB1	$2^{-1/(\delta\theta)}$	$2 - 2^{1/\delta}$
反転BB1	$2 - 2^{1/\delta}$	$2^{-1/(\delta\theta)}$
SJC	$2^{-1/\gamma}$	$2 - 2^{1/\kappa}$

### 補論 3. 各コピュラの条件付分布関数

ここでは、本稿で使用する各コピュラの条件付分布関数である  $h$  関数を明示する。

(1) 正規コピュラ

$$C(u_1, u_2 | \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)),$$

$$h(u_1, u_2, \rho) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_1) - \rho\Phi^{-1}(u_2)}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right),$$

$$h^{-1}(u_1, u_2, \rho) = \Phi(\Phi^{-1}(u_1)\sqrt{1 - \rho^2} + \rho\Phi^{-1}(u_2)).$$

(2)  $t$  コピュラ

$$C(u_1, u_2 | \rho, \nu) = t_{\nu, \rho}(t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2)),$$

$$h(u_1, u_2, \rho, \nu) = t_{\nu+1}\left(\frac{t_\nu^{-1}(u_1) - \rho t_\nu^{-1}(u_2)}{\sqrt{(v + (t_\nu^{-1}(u_2))^2)(1 - \rho^2)/(v + 1)}}\right),$$

$$h^{-1}(u_1, u_2, \rho, \nu) = t_\nu\left(t_{\nu+1}^{-1}(u_1) \sqrt{\frac{(v + (t_\nu^{-1}(u_2))^2)(1 - \rho^2)}{(v + 1)}} + \rho t_\nu^{-1}(u_2)\right).$$

(3) クレイトンコピュラ

$$C(u_1, u_2 | \alpha) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha},$$

$$h(u_1, u_2, \alpha) = u_2^{-\alpha-1}(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1-1/\alpha},$$

$$h^{-1}(u_1, u_2, \alpha) = [(u_1 u_2^{\alpha+1})^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} + 1 - u_2^{-\alpha}]^{-1/\alpha}.$$

(4) グンベルコピュラ

$$C(u_1, u_2 | \xi) = \exp\{-[(-\log u_1)^\xi + (-\log u_2)^\xi]^{1/\xi}\},$$

$$h(u_1, u_2, \xi) = C(u_1, u_2) \frac{1}{u_2} (-\log u_2)^{\xi-1} [(-\log u_1)^\xi + (-\log u_2)^\xi]^{1/\xi-1}.$$

$h^{-1}(u_1, u_2, \xi)$  は、解析的に表現できないため、数値計算で求める。

(5) フランクコピュラ

$$C(u_1, u_2 | \delta) = -\frac{1}{\delta} \log \left( 1 + \frac{(e^{-\delta u_1} - 1)(e^{-\delta u_2} - 1)}{e^{-\delta} - 1} \right),$$

$$h(u_1, u_2, \delta) = \frac{e^{-\delta u_2}(e^{-\delta u_1} - 1)}{(e^{-\delta} - 1) + (e^{-\delta u_1} - 1)(e^{-\delta u_2} - 1)},$$

$$h^{-1}(u_1, u_2, \delta) = -\frac{1}{\delta} \log \left[ \frac{u_1(e^{-\delta + \delta u_2} - 1) + 1}{u_1 e^{\delta u_2} - u_1 + 1} \right].$$

(6) 混合正規コピュラ

$$C(u_1, u_2 | \rho_1, \rho_2, \theta) = \theta \Phi_{\rho_1}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) + (1 - \theta) \Phi_{\rho_2}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)),$$

$$h(u_1, u_2, \rho_1, \rho_2, \theta) = \theta \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(u_1) - \rho_1^2 \Phi^{-1}(u_2)}{\sqrt{1 - \rho_1^2}} \right) \\ + (1 - \theta) \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(u_1) - \rho_2^2 \Phi^{-1}(u_2)}{\sqrt{1 - \rho_2^2}} \right).$$

$h^{-1}(u_1, u_2, \rho_1, \rho_2, \theta)$  は解析的に表現できないため、数値計算で求める。

(7) 混合  $t$  正規コピュラ (本稿では自由度  $\nu$  は定数)

$$C(u_1, u_2 | \rho_1, \rho_2, \theta) = \theta t_{\nu, \rho_1}(t_{\nu}^{-1}(u_1), t_{\nu}^{-1}(u_2)) + (1 - \theta) \Phi_{\rho_2}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)),$$

$$h(u_1, u_2, \rho_1, \rho_2, \theta) = \theta t_{\nu+1} \left( \frac{t_{\nu}^{-1}(u_1) - \rho_1 t_{\nu}^{-1}(u_2)}{\sqrt{(\nu + (t_{\nu}^{-1}(u_2))^2)(1 - \rho_1^2)/(\nu + 1)}} \right) \\ + (1 - \theta) \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(u_1) - \rho_2^2 \Phi^{-1}(u_2)}{\sqrt{1 - \rho_2^2}} \right).$$

$h^{-1}(u_1, u_2, \rho_1, \rho_2, \theta)$  は解析的に表現できないため、数値計算で求める。

(8) BB1 コピュラ

$$C(u_1, u_2 | \theta, \delta) = \{1 + [(u_1^{-\theta} - 1)^{\delta} + (u_2^{-\theta} - 1)^{\delta}]^{1/\delta}\}^{-1/\theta},$$

$U_1 = (u_1^{-\theta} - 1)^{\delta}, U_2 = (u_2^{-\theta} - 1)^{\delta}$  とすると、

$$h(u_1, u_2 | \theta, \delta) = [1 + (U_1 + U_2)^{1/\delta}]^{-1/\theta-1} (U_1 + U_2)^{1/\delta-1} U_1^{1-1/\delta} u_2^{-\theta-1}.$$

$h^{-1}(u_1, u_2, \kappa, \gamma)$  は解析的に表現できないため、数値計算で求める。

(9) SJC コピュラ

$$C_{JC}(u_1, u_2 | \kappa, \gamma) = 1 - (1 - \{[1 - (1 - u_1)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - u_2)^\kappa]^{-\gamma} - 1\}^{-1/\gamma})^{1/\kappa},$$

$$C_{SJC}(u_1, u_2 | \kappa, \gamma) = 0.5[C_{JC}(u_1, u_2 | \kappa, \gamma) + C_{JC}(1 - u_1, 1 - u_2 | \gamma, \kappa) + u_1 + u_2 - 1],$$

$U_1 = [1 - (1 - u_1)^\kappa], U_2 = [1 - (1 - u_2)^\kappa]$  とすると、

$$h_{JC}(u_1, u_2 | \kappa, \gamma) = [1 - (U_1^{-\gamma} + U_2^{-\gamma} - 1)^{-1/\gamma}]^{1/\kappa-1} \\ \times (U_1^{-\gamma} + U_2^{-\gamma} - 1)^{-1/\gamma-1} U_2^{-\gamma-1} (1 - u_2)^{\kappa-1},$$

$$h(u_1, u_2, \kappa, \gamma) = 0.5[h_{JC}(u_1, u_2 | \kappa, \gamma) + h_{JC}(1 - u_1, 1 - u_2 | \gamma, \kappa) + 1].$$

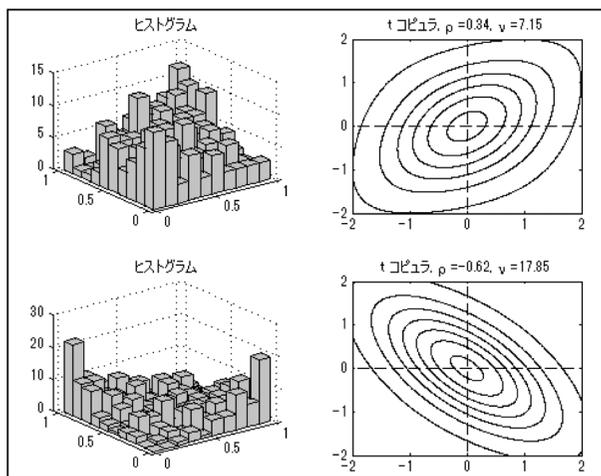
$h^{-1}(u_1, u_2, \kappa, \gamma)$  は解析的に表現できないため、数値計算で求める。

反転コピュラの  $h$  関数およびその逆関数は、各コピュラの  $h$  関数から容易に算出できるため、ここでは省略する。

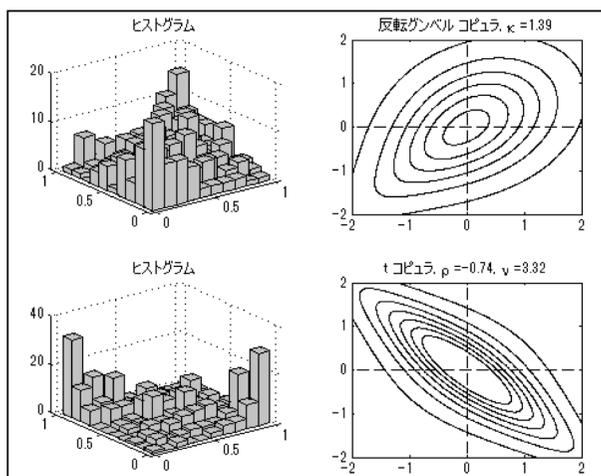
#### 補論 4. 各観測期間におけるヴァイン・コピュラの第一階層

図表 A-7、A-8 では、4 節 (1) で推定された日本、米国の各観測期間における第一階層のコピュラとリスク・ファクターのヒストリカルデータのヒストグラムをプロットする。またコピュラのグラフについては、周辺分布を標準正規分布とし、コピュラを用いて構成される同時分布の密度関数の等高線を描いている。

図表 A-7 日本（上：金利一株価 下：CDS一株価）



図表 A-8 米国（上：金利一株価 下：CDS一株価）



## 補論 5. 4 節のヴァイン・コピュラ以外のヴァイン構造に対する分析結果

4 節では、Dißmann *et al.* [2013] の手法を用いて、ヴァイン・コピュラの構造を推定した。ここでは、その他のヴァイン構造についても同様に推定し、Dißmann *et al.* [2013] の手法の有効性、およびヴァイン・コピュラの構造の違いによる影響を確認する。日本と米国におけるその他のヴァイン構造を推定した結果は図表 A-9 のとおりである。

図表 A-9 の構造をもとに、各ヴァイン・コピュラから推定した統合 VaR は、図

図表 A-9 4 節以外のヴァイン構造に対するコピュラの推定

日本（金利中心）		日本（CDS中心）	
第一階層		第一階層	
株価－金利	$t$	株価－CDS	$t$
相関	0.344	相関	-0.620
自由度	7.15	自由度	17.85
CDS－金利	90°回転 グンベル	金利－CDS	270°回転 グンベル
パラメータ	1.104	パラメータ	1.104
第二階層		第二階層	
株価－CDS	正規	株価－金利	$t$
相関	-0.601	相関	0.305
		自由度	8.61

米国（金利中心）		米国（CDS中心）	
第一階層		第一階層	
株価－金利	反転グンベル	株価－CDS	$t$
パラメータ	1.394	相関	-0.736
CDS－金利	$t$	自由度	3.32
相関	-0.397	金利－CDS	$t$
自由度	4.03	相関	-0.397
		自由度	4.03
第二階層		第二階層	
株価－CDS	$t$	株価－金利	反転グンベル
相関	-0.673	パラメータ	1.166
自由度	5.31		

図表 A-10 各ヴァイン・コピュラから算出した統合 VaR

(億円)

日本	株価中心	金利中心	CDS中心	米国	株価中心	金利中心	CDS中心
VaR(99%)	56.55	53.60	54.88	VaR(99%)	28.35	23.75	27.19
対数尤度	160.48	159.11	158.66	対数尤度	288.06	278.86	289.30
AIC	-310.97	-310.21	-307.31	AIC	-566.12	-547.71	-568.60

表 A-10 のとおりである。統合 VaR 算出の方法は、4 節 (2) と同様である。

図表 A-10 から、ヴァイン構造の違いにより、算出される統合 VaR に変動があることが分かる。また、4 節で推定した株価を中心としたヴァイン・コピュラの統合 VaR が最大となっており、Dißmann *et al.* [2013] の手法がある程度有効であることが分かる。一方で、米国において CDS を中心としたペアの AIC が最小となっているものの、統合 VaR については、株価を中心とした場合が最大となっており、ヴァイン・コピュラの推定において、ペア構造の把握が非常に重要であることが認識される。