

# 市場リスク計測における 保有期間調整について

まえだひさみつ  
前田寿満

## 要 旨

本稿では、金融機関でのリスク計測における問題点の1つである短期間の市場変動から長期間の市場変動への調整方法（保有期間調整）に注目して分析を行う。保有期間調整の代表的な手法としてルート $t$ 倍法やムービング・ウィンドウ法が挙げられるが、どちらの手法も本質的な問題が解決されないまま金融機関のリスク管理実務に利用されている。ルート $t$ 倍法については、先行研究で提案された各手法の修正案を取り上げ、本邦の大手金融機関のエクスポージャーに即して有効性の検証を行う。また、リスクを合算する際の保有期間調整についても取り上げ、相関係数に対する保有期間調整方法を提案し、その有効性を検証する。ムービング・ウィンドウ法については、実際の市場データの特性を考慮した場合の影響について分析する。本稿の分析を通じて、保有期間調整において各手法がもつモデル・リスクの大きさを明らかにする。

キーワード： リスク管理、市場リスク、リスク合算、保有期間調整、ルート $t$ 倍法、ムービング・ウィンドウ法

.....  
本稿の作成に当たり、中川秀敏准教授（一橋大学）、室町幸雄教授（首都大学東京）をはじめ、日本ファイナンス学会の参加者および日本銀行金融研究所スタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

前田寿満 日本銀行金融研究所  
(現三井住友銀行、E-mail: Maeda\_Hisamitsu@dn.smbc.co.jp)

## 1. はじめに

金融機関でのリスク管理実務では、市場リスクを計測する際に、金融資産の市場レート変動が独立な多変量正規分布に従うことを暗黙に仮定していることが多い。こうした仮定はリスク量計測を簡便化するための前提であるが、実際の市場変動はこの前提を満たしていないことが問題となっている。具体的には、(1) 現実の金融資産の市場レート変動は正規分布よりもファットテイルである（裾が厚い）という問題、(2) 市場リスク計測に用いるリスク・ファクターとなる複数資産の収益率の相関は多変量正規分布で想定される相関よりも裾での依存性が強いという問題、(3) リスク量の計測対象期間である保有期間が長期である場合に、短期間のデータから計測されたリスク量をどのように調整すべきかという問題、の3つが挙げられる。これらの3つの問題のうち、前者の2つについては、正規分布を仮定せずに過去の変動をそのまま利用するヒストリカル法をはじめとして多様な手法や考え方が提案され、実務で利用されている。一方、3つ目の保有期間調整の問題については、市場変動が独立な正規分布に従うとの前提を置いたルート $t$ 倍法やデータの独立性を確保できないムービング・ウィンドウ法での対応が実務的に利用されており、本質的な問題解決はなされていない。

市場リスクを計測するリスク指標としては、1990年代からバリュエーション・アット・リスク (Value at Risk : VaR) が一般的に用いられている。Basel Committee on Banking Supervision [1996] では、規制上の所要自己資本の算定方法として、トレーディング勘定の市場リスクについては内部モデルによる VaR の利用が認められ、保有期間については10日間としていた。これは、トレーディング勘定のリスク・ポジションは10日以内にポジションを解消またはヘッジできるとの前提があったためと考えられる。しかしながら、リーマンショックにおいて、市場流動性が突然低下すると、市場価格に重大な影響を与えずに流動性の低いポジションを速やかに解消やヘッジすることが困難になることが明らかになった。そのため、バーゼル銀行監督委員会が2013年に公表した Basel Committee on Banking Supervision [2013] (「トレーディング勘定の抜本的見直し：マーケット・リスク枠組みの改定」) では、流動性ホライズン<sup>1</sup>の導入が提案されている。この提案では個々のリスク・ファクターに対して10日、1ヶ月(20日)、3ヶ月(60日)、6ヶ月(120日)、1年(250日)という5つのホライズンが設定されており、保有期間調整にはムービング・ウィンドウ法による調整が提案されている。このような保有期間の長期化に伴い、リスク

.....  
1 流動性ホライズンは「ストレスのかかった市場環境の中で、ヘッジ商品の価格を変動させることなく、リスク・ファクターに対するエクスポージャーを解消するために行う取引執行に必要な時間」と定義されている。VaR 算出における保有期間に相当する。

量の保有期間の調整による影響への注目度が近年高まっている。

本稿では、こうした市場リスク量の保有期間の調整について、その代表的な手法であるルート  $t$  倍法とムービング・ウィンドウ法を取り上げ、その前提と問題点などを整理する。その上で、本邦の金融機関のポートフォリオを踏まえて、市場の実態に即した修正方法として提案されている方法の検証を行う。なお、Basel Committee on Banking Supervision [2013] では VaR に代わる新たなリスク指標として期待ショートフォール (Expected Shortfall : ES) が提案されているが、本稿ではこれまで利用されてきた VaR に注目し、ES との比較には踏み込まない。

本稿の構成は以下のとおりである。2 節では、従来の保有期間調整方法としてルート  $t$  倍法とムービング・ウィンドウ法を説明する。3 節では、計測対象のポートフォリオのリスク・ファクターとなる市場データの基本統計量を確認する。4 節では、1 変量のルート  $t$  倍法の調整方法として、Wang, Yeh, and Cheng [2011] と Kinateder and Wagner [2014] の調整方法を紹介する。また、5 節では、リスクの合算における保有期間調整についての考察を行い、保有期間が揃っている場合の保有期間調整方法と保有期間が異なっている場合に分け、実務への応用を考慮した調整方法を提案する。6 節では、ムービング・ウィンドウ法の調整方法として、Sun *et al.* [2009] を取り上げ、この調整方法の有効性を検討した上で、多変量への拡張を行う。7 節では、今後の課題を交えながら本稿で得られた結果をまとめる。

## 2. 保有期間調整の手法

従来の保有期間調整方法には、保有期間 1 日で求めたリスク量 VaR、ES を多期間に延ばすルート  $t$  倍法と、保有期間  $n$  日間の収益率についてデータを重複させながら計測するムービング・ウィンドウ法がある。本節では、これらの手法の前提とその問題点について整理する。

### (1) ルート $t$ 倍法

ルート  $t$  倍法は保有期間 1 日の VaR、ES を多期間の VaR、ES に調整する、または日次収益率のデータを多期間の収益率のデータに調整する際に使用される手法である。ルート  $t$  倍法による調整は金融機関のリスク管理の実務において、幅広く使用されており、バーゼル規制上のリスク・アセット算出でも、使用が認められた手法である (Basel Committee on Banking Supervision [1996])。これは日次の収益率が独立同一分布かつ平均 0 の正規分布に従っていれば、保有期間  $n$  日間の VaR、ES お

よび収益率の標準偏差は  $\sqrt{n}$  倍になるという性質を使った調整方法である。しかしながら、実際の市場データは、上記の前提に従っていないことが、数多くの先行研究で示されており、その前提から乖離した状況でルート  $t$  倍法を使用すると、誤ったリスク評価になる可能性がある。

## (2) ムービング・ウィンドウ法

ムービング・ウィンドウ法は  $n$  日間収益率の計算において、重複を許して  $n$  日分の日次収益率を使用する方法<sup>2</sup>であり、「トレーディング勘定の抜本的見直し：マーケット・リスク枠組みの改定」においても保有期間調整方法として提案されている。具体的には、過去  $T$  日間の日次収益率のデータ  $r_t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ) が得られているときに、 $n$  日間収益率  $R_t^n$  ( $t = 1, 2, \dots$ ) を

$$R_1^n = r_1 + r_2 + \dots + r_n, R_2^n = r_2 + r_3 + \dots + r_{n+1}, \dots,$$

と定義するものである。この手法のメリットは、長期の収益率を生成する場合でも、日次収益率のデータ数とほぼ同等のデータ数を得ることができることである。一方、重複を許しているため、各長期収益率に強い系列相関があることが問題とされている。

## 3. 市場レート変動の統計的な性質

本節では、実際の市場における金融資産の例として主要 4 カ国（日本、米国、英国、ドイツ）の株式、債券（5 年国債）を取り上げ、そのレート変動の性質を統計的に把握する。これにより、2 節（1）で示したルート  $t$  倍法による保有期間調整の手法の前提が成立しているか否かを検討する。

使用するデータは以下のとおりであり、各データに対する基本統計量は表 1 のとおりである。

- 株価：東証株価指数（TOPIX）、ニューヨーク・ダウ（Dow）、FTSE100 種総合株

.....  
2 一方、重複なしで  $n$  日間収益率を計算する方法を、ボックス=カー法と呼ぶ。この方法では、過去  $T$  日間の日次収益率データが与えられていても、リスク量算出に用いることができるデータ数（サンプルサイズ）は  $(T-1)/n$  となる。そのため、例えば、 $T=2,500$  日（10 年）と長期データを利用して、 $n=60$  日（3 ヶ月）間の収益率を対象とした場合には、データ数が 41 個となり、99% VaR を安定的に求めることはできなくなる。

表 1 主要国の株価収益率・国債金利変化幅の基本統計量

株式 データ期間 (2004/10/1~2014/9/30)					債券 データ期間 (2004/10/1~2014/9/30)				
対数 変化率(%)	TOPIX	Dow	FTSE100	DAX	変化幅(%)	日本国債 5年	米国債 5年	英国債 5年	独国債 5年
サンプル数	2,453	2,517	2,526	2,547	サンプル数	2,453	2,517	2,526	2,547
平均	0.0075	0.0209	0.0147	0.0349	平均	-0.0002	-0.0006	-0.0012	-0.0012
標準誤差	0.0291	0.0234	0.0240	0.0273	標準誤差	0.0005	0.0013	0.0010	0.0010
標準偏差	1.444	1.175	1.208	1.378	標準偏差	0.023	0.064	0.051	0.049
最大値	12.86	10.51	9.38	10.80	最大値	0.17	0.41	0.41	0.30
最小値	-10.01	-8.20	-9.27	-7.43	最小値	-0.12	-0.42	-0.29	-0.22
歪度	-0.425	-0.085	-0.149	0.032	歪度	0.316	-0.121	0.395	0.092
標準誤差	0.049	0.049	0.049	0.049	標準誤差	0.049	0.049	0.049	0.049
尖度	10.585	14.210	11.789	10.176	尖度	7.465	6.806	7.410	5.246
標準誤差	0.099	0.098	0.097	0.097	標準誤差	0.099	0.098	0.097	0.097
JB *1	5,954	13,183	8,139	5,465	JB *1	2,078	1,525	2,113	539
LB(10) R *2	2.67	15.41	12.20	6.57	LB(10) R *2	8.48	24.78	17.83	6.12
LB(10) R^2 *2	81.06	131.58	99.57	109.44	LB(10) R^2 *2	235.44	130.67	96.92	152.36

備考：\*1 ジャック=ベラ検定 臨界値 4.61 (10%)、5.99 (5%)、9.21 (1%)。

\*2 Diebold [1988] の方法を用い、不均一分散性を調整。リュング=ボックス検定 臨界値 15.99 (10%)、18.31 (5%)、23.21 (1%)。

株価指数 (FTSE100)、ドイツ株価指数 (DAX) の対数収益率 (%)

各営業日の終値の対数階差を 100 倍して算出

- 債券：日本国債、米国債、英国債、独国債の 5 年債金利 (%)

Bloomberg で算出される各営業日のジェネリック金利の階差で算出

- データ期間：2004 年 10 月 1 日～2014 年 9 月 30 日 (10 年間)

いずれの株式、債券 (金利) も変動の平均の 0 からの乖離が標準誤差の 2 倍 (約 5% 有意水準) 内に収まっており、非ゼロの有意性はないので、平均 0 の仮定は満たしている。一方、歪度、尖度については、正規分布<sup>3</sup> から有意に乖離しており、ジャック=ベラ検定でも正規性を有意に棄却していることが分かる。LB(10) はリュング=ボックス統計量であり、10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定している。また、リュング=ボックス統計量は、分散不均一性がある場合にそのまま使うと帰無仮説を過剰に棄却してしまうため、Diebold [1988] の方法により分散不均一性を調整している<sup>4</sup>。この統計量によると、株式の日次収益率では有意水準 10% でも帰無仮説は受容されるため、自己相関はないとみなすことができる。一方、債券の日次収益率において、リュング=ボックス統計量が有意水準 10% で棄却されるものについては自己相関の影響を検討する必要がある。

また、日次収益率の 2 乗ではすべて、有意水準 1% でも帰無仮説は棄却されてい

.....  
3 正規分布の歪度は 0、尖度は 3 である。

4 渡部 [2000] 1.5.1 節を参照。

る。収益率の2乗はボラティリティの代理変数と考えられるので、このことはボラティリティに有意な自己相関があることを示唆している。実際のマーケットにおいて、収益率のボラティリティは一旦上昇（低下）すると、その後しばらくの間ボラティリティの高い（低い）日が続くこと<sup>5</sup>が知られており、これは上記の結果と整合的である。

この分析の結果、実際の市場データの変動はルート t 倍法の仮定である独立同一分布かつ正規分布という仮定を満たしていないことが分かる。そのため、収益率データの性質を考慮しないまま、ルート t 倍法を使用するとリスク量を正確に計測できない可能性がある。このことを踏まえ、4 節では先行研究を整理し、本節で使用した市場データを用いて検証を行う。

#### 4. ルート t 倍法の問題点および先行研究における修正案

##### (1) 市場データの特徴を考慮した場合のルート t 倍法のバイアス

3 節で示したとおり、実際の市場データの変動はルート t 倍法の仮定を満たしていない。Wang, Yeh, and Cheng [2011] は、ルート t 倍法の仮定（独立同一分布かつ平均 0 の正規分布）が満たされない場合に、ルート t 倍法を使用した際のバイアスについて考察している。分析では、まず、市場データの変動を (1) 式のように ARMA(1,1)-GARCH(1,1)-Jump<sup>6</sup> モデルで表現している。

$$\begin{aligned}
 r_t &= \mu + \phi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + J_t, \\
 \varepsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2, \\
 z_t &\sim i.i.d. N(0, 1).
 \end{aligned}$$

(1)

そして、(1) 式のモデルの各パラメータがルート t 倍法に与える影響について、シミュレーションで分析し、その結果を表 2 のように与えている。ここでは、エクスポージャーは 1 単位、ベンチマークとなる VaR(10) については、(1) 式をシミュレートした値で保有期間 10 日間の VaR を算出している。

表 2 のとおり、市場データの特徴によって、ルート t 倍法（ $\sqrt{10}\text{VaR}(1)$ ）は過小

5 この現象はボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる。

6  $J_t$  は複合ポアソン過程で、ジャンプ強度  $\lambda$ 、ジャンプ幅  $N(0, \sigma_j^2)$  に従う。

表2 Wang, Yeh, and Cheng [2011] の分析結果

平均がある場合 ( $\mu$ の変動)

99%VaR	-0.08	-0.04	-0.02	0.02	0.04	0.08
$\sqrt{10}\text{VaR}(1)\text{①}$	0.374	0.369	0.369	0.365	0.365	0.363
VaR(10)②	0.384	0.376	0.372	0.363	0.359	0.351
(①/②-1)%	-2.66%	-1.63%	-0.55%	0.56%	1.70%	3.49%

備考：その他パラメータ： $\phi_1 = \theta_1 = \lambda = \sigma_j = 0, \sigma_t = 0.05$ 。

自己相関がある場合 ( $\phi$ の変動)

99%VaR	-0.7	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.7
$\sqrt{10}\text{VaR}(1)\text{①}$	0.514	0.425	0.376	0.376	0.425	0.514
VaR(10)②	0.243	0.261	0.312	0.449	0.684	1.047
(①/②-1)%	111.76%	62.50%	20.26%	-16.36%	-37.91%	-50.88%

備考：その他パラメータ： $\mu = \theta_1 = \lambda = \sigma_j = 0, \sigma_t = 0.05$ 。

自己相関がある場合 ( $\theta$ の変動)

99%VaR	-0.7	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.7
$\sqrt{10}\text{VaR}(1)\text{①}$	0.449	0.410	0.376	0.376	0.412	0.449
VaR(10)②	0.176	0.218	0.304	0.435	0.539	0.608
(①/②-1)%	155.81%	87.85%	23.49%	-13.62%	-23.48%	-26.17%

備考：その他パラメータ： $\mu = \phi_1 = \lambda = \sigma_j = 0, \sigma_t = 0.05$ 。

ボラティリティ・クラスタリングがある場合 ( $(\alpha, \beta)$ の変動)

99%VaR	(0.13, 0.82)	(0.15, 0.80)	(0.13, 0.84)	(0.15, 0.82)
$\sqrt{10}\text{VaR}(1)\text{①}$	0.394	0.398	0.404	0.410
VaR(10)②	0.404	0.410	0.414	0.423
(①/②-1)%	-2.53%	-2.99%	-2.46%	-2.90%

備考：その他パラメータ： $\mu = \phi_1 = \theta_1 = \lambda = \sigma_j = 0$ 。

ファットテイル性がある場合 ( $z$ の分布に  $t$ 分布を適用)

99%VaR	自由度3	自由度5	自由度7	自由度9
$\sqrt{10}\text{VaR}(1)\text{①}$	0.719	0.531	0.476	0.447
VaR(10)②	0.676	0.490	0.443	0.420
(①/②-1)%	6.34%	8.33%	7.37%	6.31%

備考：その他パラメータ： $\mu = \phi_1 = \theta_1 = \lambda = \sigma_j = 0, \sigma_t = 0.05$ 。

収益率にジャンプがある場合 ( $(\lambda, \sigma_j)$ の変動)

99%VaR	(0.058, 0.02)	(0.058, 0.03)	(0.082, 0.02)	(0.082, 0.03)
$\sqrt{10}\text{VaR}(1)\text{①}$	0.378	0.390	0.382	0.400
VaR(10)②	0.376	0.386	0.378	0.394
(①/②-1)%	0.54%	1.06%	1.08%	1.55%

備考：その他パラメータ： $\mu = \phi_1 = \theta_1 = 0, \sigma_t = 0.05$ 。

評価にも過大評価にもなりうる。実際に市場リスクを計測する場合、このバイアスが発生していることに注意する必要がある。以下では、①自己相関がある場合、②ボラティリティ・クラスタリングがある場合、③ファットテイル性がある場合の先行研究について整理する。

## (2) 自己相関がある場合のルート $t$ 倍法の修正

Wang, Yeh, and Cheng [2011] は、収益率に自己相関がある場合に対して、1 期間の分散と  $n$  期間の分散の比を使った修正ルート  $t$  倍法を提案した。まず、(2) 式のように、 $n$  期間の分散と 1 期間の分散の  $n$  倍の比を表現する。

$$\begin{aligned}
 \text{VR}(n) &= \frac{\text{var}[R_t^n]}{n \cdot \text{var}[r_t]} = \frac{1}{n \cdot \text{var}[r_t]} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{cov}(r_{t-i}, r_{t-j}) \right\} \\
 &= \frac{1}{n \cdot \text{var}[r_t]} \left\{ n \cdot \text{var}[r_t] + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \text{cov}(r_t, r_{t-k}) \right\} \\
 &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left( 1 - \frac{k}{n} \right) \rho_k.
 \end{aligned} \tag{2}$$

ここで  $\rho_k$  は  $k$  次の自己相関を表す。ルート  $t$  倍法の仮定である独立性が満たされている場合は、自己相関は 0 のため、 $VR(n)$  は 1 となる。Wang, Yeh, and Cheng [2011] は、(2) 式の  $VR(n)$  を使用して、 $n$  期間の VaR 算出において (3) 式のような修正ルート  $t$  倍法による VaR (MVaR( $n$ )) を提案した。

$$MVaR(n) = \sqrt{n \times VR(n)} \times VaR(1). \quad (3)$$

(3) 式を使用することにより、自己相関を考慮したルート  $t$  倍法による保有期間調整が可能となる<sup>7</sup>。

### (3) ボラティリティ・クラスタリングがある場合のルート $t$ 倍法の修正

Kinateder and Wagner [2014] は、株価収益率そのものの自己相関よりも収益率の絶対値に強い自己相関があること (ボラティリティ・クラスタリング) を勘案してルート  $t$  倍法の修正方法を提案した。具体的には、収益率の絶対値の自己相関と時系列データの長期記憶性を表すハースト指数  $H(0 < H < 1)$  を使用して、1 期間のボラティリティの長期間のボラティリティへの換算式を提案した。ハースト指数  $H$  は 0.5 を境に、これより高い場合には長期記憶性、低い場合には短期記憶性、0.5 の場合にはランダム・ウォークになることが知られている。

なお、補論 2 で示しているように、各収益率の絶対値の自己相関の緩やかな減衰が観察されており、時系列データの自己相関の長期記憶性が認められる。そこで、まずは、長期記憶性の厳密な検証のため、補論 2 の図 A-1、図 A-2 の各市場レートの収益率の絶対値に関して、ハースト指数を算出する。表 3 では、収益率の絶対値のハースト指数に加え、比較のために各市場レート変動およびその 2 乗についても

表 3 市場レート変動とその 2 乗および絶対値のハースト指数

株式 観測期間 (2004/10/1~2014/9/30 10年間)					債券 観測期間 (2004/10/1~2014/9/30 10年間)				
対数変化率 (%)	TOPIX	Dow	FTSE100	DAX	変化幅 (%)	日本国債 5年	米国債 5年	英国債 5年	独国債 5年
R	0.527	0.474	0.431	0.524	R	0.491	0.506	0.550	0.568
R <sup>2</sup>	0.785	0.881	0.872	0.869	R <sup>2</sup>	0.851	0.873	0.782	0.917
R	0.865	0.930	0.917	0.912	R	0.917	0.918	0.843	0.962

備考：ハースト指数 0.5 に対する 5% 有意水準：(0.398, 0.597)。

.....  
7 3 節の市場データに対して修正ルート  $t$  倍法を適用した結果については、補論 1 を参照。

ハースト指数を算出した<sup>8</sup>。表3から、収益率の絶対値や2乗のハースト指数は、0.5から有意に乖離しており、長期記憶性があることが分かる。これは、3節のリユング=ボックス検定の結果とも整合的である。

Kinateder and Wagner [2014] は、ボラティリティ・クラスタリングを表現するために、(4)式のGARCH(1,1)モデルを使用した。一方で、株価収益率そのものには自己相関がないものと仮定した。

$$\begin{aligned} r_t &= \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim i.i.d. N(0, 1), \\ \sigma_t^2 &= \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

このGARCH(1,1)モデルを使用すると、時点 $t$ における $n$ 期間のボラティリティの条件付期待値は時点 $t$ のボラティリティ $\sigma_t$ と無条件期待値 $\sigma(\sigma^2 = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = \omega/(1-\beta-\alpha))$ を使って、(5)式のように表現できる。

$$\begin{aligned} \sigma_{t+\tau-1}^2 &= \mathbb{E}[\sigma_{t+\tau-1}^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[\omega + \beta\sigma_{t+\tau-2}^2 + \alpha\varepsilon_{t+\tau-2}^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}[\omega + \beta\sigma_{t+\tau-2}^2 + \alpha\sigma_{t+\tau-2}^2 z_{t+\tau-2}^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}[(1-\beta-\alpha)\sigma^2 + (\alpha+\beta)\sigma_{t+\tau-2}^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}[\sigma^2 + (\alpha+\beta)(\sigma_{t+\tau-2}^2 - \sigma^2) | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \sigma^2 + (\sigma_t^2 - \sigma^2)(\alpha+\beta)^{\tau-1}, \\ \sigma_{t,n}^2 &= \sum_{\tau=1}^n \sigma_{t+\tau-1}^2 = n\sigma^2 + \sum_{\tau=1}^n (\sigma_t^2 - \sigma^2)(\alpha+\beta)^{\tau-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式より、GARCH(1,1)モデルの場合、時点 $t+\tau-1$ のボラティリティは、 $(\alpha+\beta)^{\tau-1}$ のオーダーで減衰していくことが分かる。Kinateder and Wagner [2014]では、 $(\alpha+\beta)^{\tau-1}$ の減衰のスピードが速く、長期記憶性を適切に表現できないため、ハースト指数と収益率の絶対値の自己相関に対して、 $0 < \rho(\tau) < H, \forall \tau > 0$ を仮定し、(6)式の関数を定め、 $(\alpha+\beta)^{\tau-1}$ の代わりに用いた。

$$g[\rho(\tau), H] = \rho(\tau)^{(H-\rho(\tau))}. \quad (6)$$

上記の仮定の下では、 $0 < g[\cdot] < 1$ が成り立ち、 $g[\cdot]$ は $H$ に対して単調減少、 $\rho$ に対して単調増加な関数となる。また、この関数 $g[\cdot]$ は、サンプルデータから直接算出

<sup>8</sup> 本稿のハースト指数の算出には、Weron [2002]の方法を用いた。

できることもメリットの1つである。Kinateder and Wagner [2014] は  $(\alpha + \beta)^{\tau-1}$  の代わりに  $g[\cdot]$  を用いて、1 期間のボラティリティを  $n$  期間のボラティリティに (7) 式のように換算した。

$$\begin{aligned}\sigma_{t+\tau-1}^2 &= \sigma^2 + (\sigma_t^2 - \sigma^2)g[\rho(\tau-1), H], \\ \sigma_{t,n}^2 &= \sum_{\tau=1}^n \sigma_{t+\tau-1}^2 = n\sigma^2 + \sum_{\tau=1}^n (\sigma_t^2 - \sigma^2)g[\rho(\tau-1), H].\end{aligned}\tag{7}$$

また、(7) 式は収益率が独立同一分布に従っている場合、つまり  $H = 1/2$ 、 $\rho(\tau) = 0$  のとき、 $g[\cdot] = 0$  となり、一般のルート  $t$  倍法を表現できる。この調整方法を用いることで、ボラティリティの長期記憶性を勘案でき、Wang, Yeh, and Cheng [2011] でも示されていた収益率にボラティリティ・クラスタリングがある場合のルート  $t$  倍法の過小評価を抑えることができる<sup>9</sup>。

#### (4) ファットテイル性がある場合

Spadafora, Dubrovich, and Terraneo [2014] は、収益率の分布としてファットテイルな分布 ( $t$  分布、バリエーション=ガンマ分布) を想定した場合に、ルート  $t$  倍法がパーセントタイル点に与えるバイアスを理論的に分析した。Spadafora, Dubrovich, and Terraneo [2014] では、収益率がバリエーション=ガンマ分布に従う場合には、ルート  $t$  倍法による誤差は大きな問題とはならないが、 $t$  分布に従うと考えられる場合には、ルート  $t$  倍法の利用は、自由度の大きい場合に限定すべきとしている。

### 5. リスクの合算における保有期間調整

4 節までは、1 変量の保有期間調整の先行研究について説明してきたが、金融実務でのリスク管理では、ポートフォリオ全体のリスク量を把握するために、多変量のリスクの合算が行われている。そこで、本節では、リスクの合算における保有期間調整について分析を行う。ポートフォリオは、株式と債券のポートフォリオとし、保有期間が揃っている場合と保有期間が異なる場合に分けて考察する。

.....  
9 3 節の市場データに対して Kinateder and Wagner [2014] の手法を適用した結果については、補論 1 を参照。

## (1) 保有期間の揃っているリスクの合算

株の持ち高を  $AS$ 、債券の持ち高を  $AB$  とし、3 節と同様、株式は価格の対数階差 ( $\Delta S$ )、債券は金利の階差 ( $\Delta r$ ) をリスク・ファクターとする。ポートフォリオの損益変動 ( $\Delta PV$ ) は、 $T$  を債券の満期として (8) 式のように近似できる。

$$\Delta PV = AS \frac{S e^{\Delta S}}{S} + AB \frac{e^{-(r+\Delta r)T}}{e^{-rT}} - (AS + AB). \quad (8)$$

保有期間が揃っている場合には、(8) 式から各リスク・ファクターを合算したリスクはポートフォリオの損益として 1 変量に帰着でき、 $n$  期間の VaR 算出に 4 節で示した先行研究のルート  $t$  倍法の調整を施すことができる。ここでは、ポートフォリオとして、大手金融機関のポートフォリオを参考に株式エクスポージャーを 38,000 億円、債券エクスポージャーを 242,000 億円、債券満期は 5 年とする。このポートフォリオに対して、Wang, Yeh, and Cheng [2011] および、Kinatader and Wagner [2014] の手法を使用して保有期間 10 日の VaR を比較した結果は表 4 のとおりである。ここで、Kinatader and Wagner [2014] の手法では、GARCH モデルを使用するため、 $n$  期間のボラティリティは、時点  $t$  のボラティリティに依存する。そのため、1 時点毎に  $n$  期間のボラティリティをシミュレートし、その平均値を使用する。具体的には、まず、時点  $t$  において、過去 5 年のデータを使用して GARCH(1,1) モデルのパラメータを推定し、 $n$  期間のボラティリティを算出する。次に、時点  $t+1$  における過去 5 年間のデータを使用して GARCH(1,1) モデルのパラメータを推定し、10 日間のボラティリティを算出する。これを繰り返し、その平均値で比較分析を行う。信頼水準は 99% とし、各修正方法の有効性の検証のために、ベンチマークとして、ボックス=カー法を使用した保有期間 10 日の VaR (VaR(10)) を用いる。

表 4 より、保有期間が揃っているポートフォリオの VaR 算出において、Wang, Yeh, and Cheng [2011] および Kinatader and Wagner [2014] の手法によって、ベンチマークの VaR(10) からの乖離が縮小するため、これらの手法が有効であることが分かる。この結果から、保有期間が揃っている場合のリスクの合算については、ポートフォリオの損益として 1 変量に帰着させ、その性質 (自己相関、ボラティリティ・クラスタリング) に基づいた調整を行うことができると考えられる。

## (2) 保有期間の異なるリスクの合算

保有期間が異なる場合のリスクの合算については、保有期間が揃っている場合と異なり、ポートフォリオの損益として 1 変量に帰着させ、Wang, Yeh, and

表4 修正ルート t 倍法による VaR の精度

ポートフォリオ (観測期間: 10年 <2004/10/1~2014/9/30>)

99%VaR (億円)	日本	米国	英国	ドイツ
$\sqrt{10}\text{VaR}(1)\textcircled{1} * 1$	4,559.5	6,273.4	5,410.9	4,596.9
$\text{MVaR}(10)\textcircled{2} * 2$	4,182.3	5,800.3	5,744.5	4,702.8
$\text{VR}(10)$	0.841	0.855	1.127	1.047
$\rho(1)$	0.011	-0.052	0.065	0.063
$\text{VaR}(10)\textcircled{3} * 3$	4,029.8	5,359.1	6,133.5	5,028.1
$(\textcircled{1}/\textcircled{3})-1\%$	13.1%	17.1%	-11.8%	-8.6%
$(\textcircled{2}/\textcircled{3})-1\%$	3.8%	8.2%	-6.3%	-6.5%

ポートフォリオ (観測期間: 5年 シミュレーション期間: 5年)

99%VaR (億円)	日本	米国	英国	ドイツ
$\sqrt{10}\text{VaR}(1)\textcircled{1} * 1$	3,567.3	4,617.8	4,684.0	4,440.7
$\text{HVaR}(10)\textcircled{2} * 4$	3,905.1	5,904.5	5,227.9	4,807.3
H	0.874	0.889	0.819	0.846
$ \rho(1) $	0.289	0.182	0.153	0.133
$\text{VaR}(10)\textcircled{3} * 3$	4,266.7	5,657.2	6,331.2	5,333.4
$(\textcircled{1}/\textcircled{3})-1\%$	-16.4%	-18.4%	-26.0%	-16.7%
$(\textcircled{2}/\textcircled{3})-1\%$	-8.5%	4.4%	-17.4%	-9.9%

備考: \*1 ルート t 倍法を使用して 1 日の VaR を 10 日に調整。

\*2 Wang, Yeh, and Cheng [2011] の修正ルート t 倍法を使用した 10 日の VaR。

\*3 ベンチマークとしてボックス=カー法で算出した 10 日の VaR。

\*4 Kinatader and Wagner [2014] の修正方法を使用した 10 日の VaR。

Cheng [2011] や Kinatader and Wagner [2014] の修正を施すことはできない。そこで、市場データの性質に即してどのようにリスク合算を行うべきかを考察する。

リスク管理実務では、異なる 2 つのリスクを統合する場合に、リスク間の相関  $\hat{\rho}$  を何らかの形で推定し、統合したリスク量をその相関  $\hat{\rho}$  に基づいて算出する分散共分散法およびコピュラ法が一般的に利用されている (Klaassen and Eeghen [2009] や Rosenberg and Schuermann [2006] を参照)。ここでは、分散共分散法を援用して、株式 (リスク・ファクター  $S$ 、保有期間  $m$ )、債券 (リスク・ファクター  $B$ 、保有期間  $n$ ) とした場合 (ただし、 $n < m$  とする) の、ポートフォリオの保有期間  $m$  の VaR の算出に (9) 式を使用する。

$$\text{VaR}(S + B, m) = \sqrt{\text{VaR}(S, m)^2 + \text{VaR}(B, n)^2 + 2\hat{\rho}\text{VaR}(S, m)\text{VaR}(B, n)}. \quad (9)$$

ここでは、(9) 式の合算手法は所与として、相関  $\hat{\rho}$  をリスク管理実務で実装可能なようにどのように求めるべきかを考察する。

株式 ( $S$ ) と債券 ( $B$ ) の日次損益の相関係数を  $\rho$  とし、日次損益が独立に同一の正規分布に従うという仮定 (ルート t 倍法) を置くと

$$\hat{\rho} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\rho, \quad (10)$$

となる (詳細は、補論 3 を参照)。ここでは、この仮定の妥当性と市場データの性質に即した修正方法を検討する。

(9) 式の左辺について、ベンチマークとして市場データの性質に即したモデルとして、相関係数を定数とした CCC (Constant Conditional Correlation) -GARCH(1,1) モデ

表5 ルートt倍法を用いた相関係数と CCC-GARCH(1,1) モデルを使用した VaR からインプライされる相関係数の比較

日本 (観測期間: 10年<2004/10/1~2014/9/30>)				米国 (観測期間: 10年<2004/10/1~2014/9/30>)			
99%VaR(億円)	初期値:σ0	σ0+1s	σ0-1s	99%VaR(億円)	初期値:σ0	σ0+1s	σ0-1s
VaR(S,250)*1	22,728.2	25,844.1	20,727.7	VaR(S,250)*1	14,636.3	17,357.9	13,042.2
VaR(B,60)*1	6,455.9	9,013.1	3,944.3	VaR(B,60)*1	14,581.6	19,566.7	9,772.9
VaR(S+B,250)①*1	22,496.6	25,456.5	20,499.8	VaR(S+B,250)①*1	18,601.4	23,007.9	15,079.0
VaR_VC(S+B,250)②*2	22,479.9	25,792.9	20,386.9	VaR_VC(S+B,250)②*2	18,877.0	23,930.6	14,950.2
②/①-1	-0.07%	1.32%	-0.55%	②/①-1	1.48%	4.01%	-0.85%
ρ(日次)④	-0.37	-0.37	-0.37	ρ(日次)④	-0.34	-0.33	-0.34
ρ(④×√60/250)*3	-0.18	-0.18	-0.18	ρ(④×√60/250)*3	-0.17	-0.16	-0.17
ρ(インプライド)*4	-0.18	-0.22	-0.15	ρ(インプライド)*4	-0.19	-0.23	-0.15

備考: \*1 CCC-GARCH(1,1) モデルを使用して算出される各 VaR。

\*2 (9) 式と (10) 式を使用して算出される VaR。

\*3 日次の相関係数に、(10) 式の調整を施した相関係数。

\*4 \*1 の VaR と (11) 式から算出される相関係数。

ルを用いて、シミュレーションにより VaR(S+B,250) を算出する。CCC-GARCH(1,1) モデルはパラメータ推定やモデル選択の問題からリスク管理実務上は利用しにくいモデルであるため、これを直接実務で利用するのではなく、(10) 式で求めた相関  $\hat{\rho}$  のずれを評価し、修正していくことを考える。CCC-GARCH(1,1) モデルを用いて (9) 式の左辺の VaR(S+B,250) を算出すると、(9) 式からインプライされる相関係数は、(11) 式のように逆算される。

$$\hat{\rho}(\text{インプライド}) = \frac{VaR(S+B,250)^2 - VaR(S,250)^2 - VaR(B,60)^2}{2VaR(S,250)VaR(B,60)} \quad (11)$$

実際の日本と米国の市場データを用いて各 VaR を算出し、ルート t 倍法を用いた (10) 式の相関係数  $\hat{\rho}$  と (11) 式のインプライド相関係数を比較した結果は表 5 のとおりである。ここでは、株価の対数日次階差と金利の日次階差の 2 変量データ (観測期間: 2004 年 10 月 1 日~2014 年 9 月 30 日) に対し、CCC-GARCH(1,1) を当てはめて、VaR を算出した。シミュレーション回数は 100,000 回、ボラティリティの初期値は無条件期待値 ( $\sigma_0$ ) とし、日次の相関係数  $\rho$  については、ボラティリティの変動を除去した残差の相関係数を使用する。また、GARCH モデルはボラティリティの初期値に依存するため、初期値が無条件期待値からボラティリティの標準偏差 ( $s$ ) だけ変動させた場合の分析も行う。ポートフォリオの構成は表 4 と同様とし、保有期間は株式 250 日、債券 60 日、信頼水準は 99% とする。表 5 では、シミュレーションによる VaR(S+B,250) との区別のため、(9)、(10) 式から算出した VaR を VaR\_VC(S+B,250) とする。

表 5 から、初期値が無条件期待値から大きく (小さく) なった場合、各金融資産

の変動が大きく（小さく）なり、分散効果も強く（弱く）なることが分かる。その結果、インプライド相関係数はルート  $t$  倍法を使用した相関係数より大きく（小さく）なるため、ルート  $t$  倍法を用いた場合、リスクの過大（過小）評価が発生している可能性がある。

ボラティリティの初期値に伴う相関係数のバイアスの要因を分析するため、単純なケースである (4) 式の GARCH(1,1) モデルを用いて、保有期間の異なる場合の相関係数を導出する。一般に日次の収益率  $r_t$  に GARCH(1,1) モデルを使用した場合、条件を与えなければ、 $(t+1)$  時点以降のボラティリティは不確定であるため、 $n$  期間の収益率  $R_{t,n} = \sum_{\tau=1}^n r_{t+\tau-1}$  が従う確率分布を解析的に表現できない。そこで、(12) 式のように、 $(t+1)$  時点以降のボラティリティ項を  $(t-1)$  時点の情報  $\mathcal{F}_{t-1}$  における GARCH(1,1) モデルの条件付期待値に置き換えると、 $R_{t,n}$  の分布は解析的に評価できる。

$$\begin{aligned}\sigma_{t+\tau-1}^2 &= \mathbb{E} \left[ \sigma_{t+\tau-1}^2 | \mathcal{F}_{t-1} \right] = \mathbb{E} \left[ \omega + \beta \sigma_{t+\tau-2}^2 + \alpha \varepsilon_{t+\tau-2}^2 | \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= \sigma^2 + (\sigma_t^2 - \sigma^2) (\alpha + \beta)^{\tau-1}.\end{aligned}\tag{12}$$

このとき、 $n$  期間の収益率  $R_{t,n}$  は、

$$R_{t,n} = \sum_{\tau=1}^n r_{t+\tau-1} = \sum_{\tau=1}^n \sigma_{t+\tau-1} z_{t+\tau-1},$$

となる。 $z_{t+\tau-1}$  は正規分布に従うため、 $R_{t,n}$  も (13) 式のように正規分布に従う。

$$R_{t,n} \sim N \left( 0, \sum_{\tau=1}^n \sigma_{t+\tau-1}^2 \right).\tag{13}$$

このとき、各金融資産の保有期間を  $m, n$  期間 ( $n < m$ ) とすると、 $\rho$  を 2 つのリスク・ファクターの日次収益率  $(r_t^{(1)}, r_t^{(2)})$  の相関係数として、 $m, n$  期間の分散と共分散が (14) 式で与えられる。

$$\begin{aligned}\text{var}(R_{t,m}^{(1)}) &= \sum_{\tau=1}^m (\sigma_{t+\tau-1}^{(1)})^2, & \text{var}(R_{t,n}^{(2)}) &= \sum_{\tau=1}^n (\sigma_{t+\tau-1}^{(2)})^2, \\ \text{cov}(R_{t,m}^{(1)}, R_{t,n}^{(2)}) &= \rho \sum_{\tau=1}^n \sigma_{t+\tau-1}^{(1)} \sigma_{t+\tau-1}^{(2)}.\end{aligned}\tag{14}$$

表 6 ルート t 倍法を用いた相関係数と GARCH モデルを使用した相関係数およびインプライド相関係数の比較

相関係数				パラメータ				
日本	初期値 : $\sigma_0$	$\sigma_0+1s$	$\sigma_0-1s$		$\omega$	$\beta$	$\alpha$	$\alpha+\beta$
$\rho$ (ルート t 倍)	-0.18	-0.18	-0.18	TOPIX	0.500	0.869	0.116	0.985
$\rho$ (GARCH)*1	-0.18	-0.21	-0.15	国債5Y	0.011	0.921	0.078	0.999
$\rho$ (インプライド)	-0.18	-0.22	-0.15	Dow	0.231	0.890	0.094	0.984
				米国債5Y	0.190	0.952	0.045	0.997
米国	初期値 : $\sigma_0$	$\sigma_0+1s$	$\sigma_0-1s$					
$\rho$ (ルート t 倍)	-0.17	-0.16	-0.17					
$\rho$ (GARCH)*1	-0.17	-0.20	-0.12					
$\rho$ (インプライド)	-0.19	-0.23	-0.15					

備考 : \*1 (15) 式から算出した相関係数。

(14) 式より、保有期間が  $m$ 、 $n$  期間 ( $n < m$ ) である金融資産間の相関係数は、(15) 式のようになる。

$$\rho^{(m,n)} = \frac{\rho \sum_{\tau=1}^n \sigma_{t+\tau-1}^{(1)} \sigma_{t+\tau-1}^{(2)}}{\sqrt{\sum_{\tau=1}^m (\sigma_{t+\tau-1}^{(1)})^2} \sqrt{\sum_{\tau=1}^n (\sigma_{t+\tau-1}^{(2)})^2}}$$

$$= \rho \frac{\sum_{\tau=1}^n \sqrt{\sigma_1^2 + (\sigma_{1,t}^2 - \sigma_1^2) (\alpha_1 + \beta_1)^{\tau-1}} \sqrt{\sigma_2^2 + (\sigma_{2,t}^2 - \sigma_2^2) (\alpha_2 + \beta_2)^{\tau-1}}}{\sqrt{m\sigma_1^2 + (\sigma_{1,t}^2 - \sigma_1^2) \frac{1-(\alpha_1+\beta_1)^m}{1-(\alpha_1+\beta_1)}} \sqrt{n\sigma_2^2 + (\sigma_{2,t}^2 - \sigma_2^2) \frac{1-(\alpha_2+\beta_2)^n}{1-(\alpha_2+\beta_2)}}}. \quad (15)$$

ここで、 $(\sigma_{1,t}, \sigma_{2,t})$  は 2 つのリスク・ファクターの足許のボラティリティであり、 $(\sigma_1, \sigma_2)$  はそれらの無条件期待値である。 $(\alpha_k, \beta_k)$  はリスク・ファクター  $k = 1, 2$  に対する GARCH(1,1) のパラメータである。(15) 式から、足許のボラティリティ  $(\sigma_{1,t}, \sigma_{2,t})$  を無条件期待値  $(\sigma_1, \sigma_2)$  と一致させると、保有期間の異なる場合の相関係数はルート t 倍法を使用した相関係数と等しくなることが分かる。一方で、足許のボラティリティ水準とパラメータ  $(\alpha_k, \beta_k)$  によって、相関係数は変動することが分かる。また、表 5 のインプライド相関係数と (15) 式を使用して算出した相関係数を比較した結果は表 6 のとおりである。この分析により、表 5 のインプライド相関係数とルート t 倍法を用いた相関係数の乖離をある程度説明できる。

### (3) 実務への応用例

(15) 式を使用した相関係数を使用することにより、足許のボラティリティ水準に合わせた相関係数の調整は可能となるが、GARCH(1,1) モデルは、パラメータ推定

の不安定性やモデル選択の問題があるため、直接実務に応用することは難しい。そこでまず、(15)式に含まれる足許のボラティリティ ( $\sigma_{1,t}, \sigma_{2,t}$ ) には、(17)式のとおり、直近20日間(1ヶ月)の日次のヒストリカル・ボラティリティを使用し、無条件期待値 ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) には、観測期間全体のボラティリティを使用する。

$$\sigma_{k,t} = \sqrt{\frac{1}{20-1} \sum_{\tau=1}^{20} \Delta PV_k^2}, \quad k = 1, 2. \quad (16)$$

また、(15)式に含まれる GARCH(1,1) モデルのパラメータ ( $\alpha_k + \beta_k$ ) は、損益変動の2乗の自己相関 ( $\rho_{k,i}^{(2)}$ ) の減衰率に相当することから、 $k = 1, 2$  に対し、1を上限に、線形回帰式で求めた  $\log(\rho_{k,1}^{(2)}), \dots, \log(\rho_{k,20}^{(2)})$  の傾きを  $\theta_k$  とする。この  $\theta_k$  を ( $\alpha_k + \beta_k$ ) の代わりに用いる。すなわち、(15)式は、

$$\rho^{(m,n)} = \rho \frac{\sum_{\tau=1}^n \sqrt{\sigma_1^2 + (\sigma_{1,t}^2 - \sigma_1^2) \theta_1^{\tau-1}} \sqrt{\sigma_2^2 + (\sigma_{2,t}^2 - \sigma_2^2) \theta_2^{\tau-1}}}{\sqrt{m\sigma_1^2 + (\sigma_{1,t}^2 - \sigma_1^2) g(\theta_1, m)} \sqrt{n\sigma_2^2 + (\sigma_{2,t}^2 - \sigma_2^2) g(\theta_2, n)}}, \quad (17)$$

となる。ただし、

$$g(\theta, l) = \begin{cases} \frac{1-\theta^l}{1-\theta}, & \theta < 1, \\ l, & \theta = 1, \end{cases}$$

である。

(17)式の相関係数の有効性をシミュレーションにより確認する。まず、シミュレーションのベンチマークとして、ここでは、実際の市場データに即したモデルを選択する。使用するモデルは GARCH(1,1) モデル、AR(1)-GARCH(1,1) モデル、ARMA(1,1)-GARCH(1,1) モデルに加え、ボラティリティの非対称性を考慮するために、EGARCH(1,1) モデル、AR(1)-EGARCH(1,1) モデル、ARMA(1,1)-EGARCH(1,1) モデルも使用する。イノベーション項に  $t$  分布を適用し、バイズ情報量規準 (Bayesian Information Criterion : BIC) によりモデルの適切性を判断する<sup>10</sup>。各金融資産のモデルの推定結果は表7のとおりである。

表7で選択されたモデルをベンチマークとして、各金融資産およびポートフォリオの VaR を算出し、(17)式の相関係数を用いて合算した結果は表8のとおりである。ここで、観測期間は、10年間(2004年10月1日~2014年9月30日)とし、ヒストリカル・ボラティリティの算出時期は、ボラティリティ水準に応じ、日本(期

<sup>10</sup> イノベーション項に正規分布を適用した場合についても推定を行ったが、全て  $t$  分布を使用した場合の BIC の方が低くなり、正規分布は採用されなかったため、結果は割愛する。

表7 市場データに対するモデルの推定結果

TOPIX 観測期間：2004/10/1～2014/9/30 サンプルサイズ：2453

	AR-GARCH	ARMA-GARCH	GARCH	AR-EGARCH	ARMA-EGARCH	EGARCH
対数尤度	-7,226.3	-7,224.3	-7,226.5	-7,194.6	-7,193.8	<b>-7,196.8</b>
BIC	14,491.7	14,495.4	14,484.3	14,436.0	14,442.2	<b>14,432.5</b>

国債5Y 観測期間：2004/10/1～2014/9/30 サンプルサイズ：2453

	AR-GARCH	ARMA-GARCH	GARCH	AR-EGARCH	ARMA-EGARCH	EGARCH
対数尤度	-5,347.3	-5,345.7	-5,350.2	-5,334.2	-5,329.6	<b>-5,335.7</b>
BIC	10,733.6	10,738.2	10,731.6	10,715.2	10,713.8	<b>10,710.4</b>

Dow 観測期間：2004/10/1～2014/9/30 サンプルサイズ：2517

	AR-GARCH	ARMA-GARCH	GARCH	AR-EGARCH	ARMA-EGARCH	EGARCH
対数尤度	-6,581.8	-6,581.8	-6,584.0	-6,528.6	-6,524.5	<b>-6,530.0</b>
BIC	13,202.7	13,210.5	13,199.3	13,104.3	13,103.7	<b>13,099.2</b>

米国債5Y 観測期間：2004/10/1～2014/9/30 サンプルサイズ：2517

	AR-GARCH	ARMA-GARCH	GARCH	AR-EGARCH	ARMA-EGARCH	EGARCH
対数尤度	<b>-8,330.9</b>	-8,327.9	-8,336.0	-8,330.5	-8,337.8	-8,338.0
BIC	<b>16,700.9</b>	16,702.8	16,703.4	16,708.0	16,730.4	16,715.1

表8 (17) 式の相関係数を使用して合算した VaR との比較結果

ポートフォリオ (日本)

99%VaR(億円)	期間1	期間2	期間3
VaR(S,250)*1	23,266.4	24,866.1	22,293.4
VaR(B,60)*1	4,969.3	9,216.9	1,386.3
VaR(S+B,250)①*1	22,859.8	24,352.2	22,128.8
VaR_VC(S+B,250)②*2	22,837.4	24,801.6	22,068.8
VaR_M(S+B,250)③*3	22,846.7	24,541.0	22,092.4
②/①-1	-0.10%	1.85%	-0.27%
③/①-1	-0.06%	0.78%	-0.16%
$\rho$ (日次)④	-0.39	-0.39	-0.39
$\rho$ (④ $\times\sqrt{60/250}$ )	-0.19	-0.19	-0.19
$\rho$ ((17)式を使用)	-0.19	-0.22	-0.18
$\rho$ (インプライド)	-0.19	-0.24	-0.15

ポートフォリオ (米国)

99%VaR(億円)	期間1	期間2	期間3
VaR(S,250)*1	24,545.8	30,308.2	21,536.6
VaR(B,60)*1	15,377.1	38,827.2	6,561.0
VaR(S+B,250)①*1	25,792.5	42,075.9	21,564.6
VaR_VC(S+B,250)②*2	26,726.0	45,138.1	21,452.3
VaR_M(S+B,250)③*3	26,717.3	43,685.5	21,750.7
②/①-1	3.62%	7.28%	-0.52%
③/①-1	3.59%	3.83%	0.86%
$\rho$ (日次)④	-0.34	-0.34	-0.34
$\rho$ (④ $\times\sqrt{60/250}$ )	-0.17	-0.17	-0.17
$\rho$ ((17)式を使用)	-0.17	-0.22	-0.12
$\rho$ (インプライド)	-0.23	-0.28	-0.15

備考：\*1 推定したモデルを使用して算出した VaR。

\*2 (9) 式と (10) 式を使用して算出した VaR。

\*3 (9) 式と (17) 式を使用して算出した VaR。

間 1 〈無条件期待値と同水準：2007 年 3 月 1 日～2007 年 3 月 31 日〉、期間 2 〈ボラティリティ高：2008 年 9 月 1 日～2008 年 9 月 30 日〉、期間 3 〈ボラティリティ低：2013 年 11 月 1 日～2013 年 11 月 30 日〉)、米国 (期間 1 〈無条件期待値と同水準：2009 年 10 月 1 日～2009 年 10 月 31 日〉、期間 2 〈ボラティリティ高：2008 年 9 月 1 日～2008 年 9 月 30 日〉、期間 3 〈ボラティリティ低：2013 年 3 月 1 日～2013 年 3 月 31 日〉) とした。その他のシミュレーションの条件は 4 節と同条件である。また、(17) 式の相関係数を使用して、(9) 式の方法で合算した  $VaR(S+B,250)$  を  $VaR\_M(S+B,250)$  とした。

表 8 から、(17) 式を用いた相関係数の調整は、ルート  $t$  倍法を利用した相関係数よりもベンチマークのインプライド相関係数に近く、有効であることが分かる。すなわち、足許のボラティリティの水準に応じて、ルート  $t$  倍法を利用した相関係数よりも精緻に相関を調整してリスク合算することが望ましいと考えられる。

## 6. ムービング・ウィンドウ法の問題点

ルート  $t$  倍法に比べ、ムービング・ウィンドウ法に関する先行研究は少ない。ムービング・ウィンドウ法を使用した 1 変量の  $VaR$  が過小評価になることは、Sun *et al.* [2009] で、1 期間収益率が独立同一な正規分布に従う場合のみ、シミュレーションで検証した上で示されているが、実際の市場データが持つ特性（ファットテイル性、自己相関、ボラティリティ・クラスタリング、ジャンプ）を考慮した場合については分析が行われていない。また、多変量の場合の影響については研究が少ないため、本稿では、市場データが持つ特性を考慮した場合の 1 変量の  $VaR$  への影響と 2 変量に拡張した場合の  $VaR$  および相関への影響について考察する。

### (1) 1 変量の場合

Sun *et al.* [2009] は、日次収益率が独立同一分布かつ平均 0 の正規分布に従うと仮定し、保有期間  $n$  日のムービング・ウィンドウ法が与えるリスク量の過小評価度合いを考察しているほか、分散が理論的に過小評価されることを示した上で、シミュレーションによりパーセントタイル点 ( $VaR$ ) の分析を行っている。

日次収益率が独立に平均 0、分散 1 の正規分布に従う ( $x_i \sim i.i.d. N(0,1)$ ) とすると、ムービング・ウィンドウ法を使用した  $n$  期間収益率は  $X_i = \sum_{k=1}^n x_{i+k-1}$  と表現できる。 $S$  個の  $n$  期間収益率を  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_S)^T$  とすると、 $\mathbf{X}$  の共分散行列は

$\Omega_{i,j} = \max(n - |i - j|, 0)$  で与えられる。 $\mathbf{X}$  の平均と標本分散を

$$\bar{X} = \frac{\sum_i X_i}{S},$$

$$\text{var}(\mathbf{X}) = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{S - 1},$$

とすると、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{var}(\mathbf{X})) &= \mathbb{E}\left(\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{S - 1}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_i (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)}{S - 1}\right) \\ &= \frac{nS}{S - 1} - \frac{1}{S(S - 1)} \mathbb{E}\left[\left(\sum_i X_i\right)^2\right], \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\mathbf{J} = (1, 1, \dots, 1)^\top$  とおくと、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\sum_i X_i\right)^2\right] &= \mathbb{E}(\mathbf{J}^\top \mathbf{X} (\mathbf{J}^\top \mathbf{X})^\top) = \mathbf{J}^\top \mathbb{E}(\mathbf{X} \mathbf{X}^\top) \mathbf{J} = \mathbf{J}^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{J} \\ &= nS + n(n - 1)(S - n) + \frac{1}{3}n(n - 1)(2n - 1), \end{aligned}$$

となることから、(18) 式が導出される。

$$\mathbb{E}(\text{var}(\mathbf{X})) = n - \frac{n(n - 1)(3S - n - 1)}{3S(S - 1)}. \quad (18)$$

$n$  期間収益率  $X_i$  に重複がない場合、 $\mathbb{E}(\text{var}(\mathbf{X})) = n$  となるため、重複がある場合は、(18) 式から、サンプルサイズ ( $S$ ) が小さく、保有期間 ( $n$ ) が長いほど、重複がない場合との乖離が大きくなる。

パーセンタイル点 (VaR) への影響は、シミュレーション (100,000 回) により確認する。サンプルサイズは 500、1,000、1,500、2,500 の 4 種類、保有期間は 1 日、10 日、20 日、60 日、120 日、250 日の 6 種類としている。シミュレーションによる乖離の分析結果は表 9 に示されている<sup>11</sup>。

表 9 から、保有期間を長くすればするほど、ムービング・ウィンドウ法の過小評価の程度が大きくなるが、その乖離はサンプルサイズを大きくすることで縮小できることが分かる。また、重複がない場合における 99% VaR の理論値とシミュレーション (ヒストリカル法) による 99% VaR の乖離については、Inui, Kijima, and

.....  
11 重複がない場合は、正規分布に従うため、理論値を付して表示する。

表9 ムービング・ウィンドウ法による正規過程に対する 99%VaR の乖離

重複なし 99%VaR(縦: 保有期間 横: サンプルサイズ)						Moving Window法 99%VaR					
	500	1,000	1,500	2,500	理論値		500	1,000	1,500	2,500	
1	2.28	2.31	2.31	2.32	2.33	1	2.28	2.31	2.31	2.32	2.33
10	7.23	7.29	7.31	7.33	7.36	10	7.09	7.23	7.27	7.30	7.36
20	10.22	10.32	10.34	10.37	10.40	20	9.76	10.12	10.23	10.29	10.40
60	17.70	17.87	17.91	17.96	18.02	60	14.90	16.49	16.99	17.52	18.02
120	25.06	25.26	25.35	25.39	25.48	120	18.33	21.28	22.59	23.80	25.48
250	36.14	36.49	36.53	36.64	36.78	250	21.45	26.25	28.86	31.64	36.78

重複がない場合からの乖離

	500	1,000	1,500	2,500
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
10	-1.9%	-0.9%	-0.5%	-0.3%
20	-4.5%	-2.0%	-1.1%	-0.8%
60	-15.8%	-7.7%	-5.1%	-2.5%
120	-26.9%	-15.8%	-10.9%	-6.3%
250	-40.6%	-28.0%	-21.0%	-13.7%

Kitano [2005] でも指摘されており、サンプルサイズを大きくすることで、このバイアスが縮小することが分かる。

また、重複を許した場合の収益率の分布を分析するために、歪度 (skewness)、尖度 (kurtosis) および正規性の検定<sup>12</sup>を行った結果は表 10 のとおりである。

表 10 から、重複を許した場合の収益率は保有期間を長くすればするほど (特に、保有期間を 10 日間以上の場合)、正規分布に従ってないことが分かる。

ここまでは、日次収益率が独立に同一の正規分布に従うケースを分析してきたが、以下、実際の市場データを持つ特性 (ファットテイル性、自己相関、ボラティリティ・クラスタリング、収益率のジャンプ) を考慮した場合の影響について分析を行う。分散の乖離に関する理論的な分析は割愛し、パーセントタイル点 (VaR) の乖離について、シミュレーションで分析する。シミュレーションの前提は、VaR の算出期間、信頼水準、保有期間、シミュレーション回数については、上記のシミュレーションと同様であり、サンプルサイズは 500 に限定し、保有期間については、1 日、10 日、20 日、60 日、120 日として議論する。また、日次収益率の発生方法は、考察する上記の特性に合わせて設定する。

#### イ. ファットテイル性がある場合

収益率のファットテイル性を表現するため、日次収益率は正規分布に代えて  $t$  分布に従うものとする。 $t$  分布の自由度は 3、5、10、20、50 の 5 パターンについて考

12 ここでは、VaR を対象にしているため、分布の裾の正規性からの逸脱の検出に優れているアンダーソン=ダーリング検定を行う。

表 10 重複を許した場合における歪度、尖度、正規性の検定結果

Moving Window法 左: Skewness 右: Kurtosis (縦: 保有期間 横: サンプルサイズ)

	500	1,000	1,500	2,500
1	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00
20	0.00	0.00	0.00	0.00
60	0.00	0.00	0.00	0.00
120	0.00	0.00	0.00	0.00
250	0.00	0.00	0.01	-0.01

正規分布のSkewnessは0

	500	1,000	1,500	2,500
1	2.99	2.99	3.00	3.00
10	2.93	2.96	2.98	2.98
20	2.85	2.93	2.95	2.97
60	2.64	2.79	2.86	2.92
120	2.45	2.64	2.74	2.82
250	2.33	2.43	2.54	2.69

正規分布のKurtosisは3

Moving Window法 Anderson-Darling検定

	500	1,000	1,500	2,500
1	0.38	0.38	0.38	0.39
10	0.95	0.97	0.97	0.98
20	1.68	1.76	1.77	1.77
60	4.10	4.60	4.81	5.04
120	6.43	8.17	8.88	9.37
250	8.61	12.98	15.64	17.42
*1	0.75	0.75	0.75	0.75

備考: \*1 5%有意水準。

表 11 ムービング・ウィンドウ法による  $t$  過程に対する 99%VaR の乖離

重複なし 99%VaR(縦: 保有期間 横: 自由度) サンプルサイズ: 500

	3	5	10	20	50	正規分布
1	2.55	2.55	2.42	2.35	2.31	2.29
10	7.60	7.43	7.30	7.26	7.24	7.23
20	10.62	10.39	10.26	10.24	10.23	10.22
60	18.09	17.83	17.75	17.72	17.71	17.72
120	25.41	25.15	25.08	25.04	25.05	25.05

Moving Window法 99%VaR

	3	5	10	20	50	正規分布
1	2.55	2.55	2.42	2.35	2.31	2.29
10	7.95	7.37	7.19	7.15	7.11	7.10
20	10.18	9.90	9.80	9.78	9.76	9.77
60	14.71	14.92	14.99	14.95	14.99	14.95
120	17.87	18.38	18.39	18.31	18.36	18.44

重複がない場合からの乖離

	3	5	10	20	50	正規分布
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
10	4.6%	-0.8%	-1.5%	-1.5%	-1.9%	-1.7%
20	-4.2%	-4.7%	-4.5%	-4.6%	-4.7%	-4.4%
60	-18.7%	-16.3%	-15.6%	-15.6%	-15.4%	-15.6%
120	-29.7%	-26.9%	-26.6%	-26.9%	-26.7%	-26.4%

察する<sup>13</sup>。99%VaR の乖離は表 11 のとおりとなる。

表 11 から、ファットテイル性がある場合、正規分布対比、ムービング・ウィンドウ法の影響は大きくなることが分かる。一方、自由度が低い場合、正規分布への

.....  
13 分散は自由度に応じて 1 となるように調整する。

表 12 ムービング・ウィンドウ法による AR 過程に対する 99% VaR の乖離

重複なし 99%VaR(縦: 保有期間 横: AR項) サンプルサイズ: 500							Moving Window法 99%VaR								
	-0.7	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.7	正規分布		-0.7	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.7	正規分布
1	3.19	2.64	2.34	2.33	2.63	3.18	2.29	1	3.19	2.64	2.34	2.33	2.63	3.18	2.29
10	4.79	5.13	6.14	8.84	13.47	20.62	7.23	10	4.72	5.05	6.04	8.70	13.20	20.25	7.10
20	6.41	7.04	8.60	12.65	19.75	31.68	10.22	20	6.19	6.74	8.22	12.04	18.78	29.94	9.77
60	10.65	11.93	14.81	22.07	35.03	57.70	17.72	60	9.14	10.21	12.54	18.54	29.32	47.42	14.95
120	14.91	16.79	20.87	31.24	49.80	82.49	25.05	120	11.10	12.44	15.34	22.97	36.14	58.78	18.44

重複がない場合からの乖離							正規分布
	-0.7	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.7	
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
10	-0.5%	-1.2%	-1.7%	-1.7%	-1.9%	-1.7%	-1.7%
20	-1.8%	-3.4%	-4.1%	-4.6%	-5.1%	-5.0%	-4.4%
60	-9.8%	-13.3%	-15.2%	-15.4%	-16.3%	-15.9%	-15.6%
120	-19.9%	-24.8%	-26.4%	-26.9%	-27.0%	-26.6%	-26.4%

近づき方のスピードの違いにより、ムービング・ウィンドウ法が、過大評価してしまう場合がある（自由度 3、保有期間 10 日のケース）。

#### ロ. 自己相関がある場合

収益率の自己相関を考慮するため、日次収益率は (19) 式の ARMA(1,1) モデルに従うと仮定する。

$$r_t = \phi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1},$$

$$\varepsilon_t = \sigma z_t, \quad z_t \sim i.i.d. N(0, 1).$$

(19)

(19) 式の AR 項による影響については、 $\theta_1 = 0$ ,  $\sigma = 1$  と固定した上で  $\phi_1 = -0.7, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 0.7$  の 6 パターンを想定する。この場合の 99% VaR の乖離は、表 12 のように与えられる。

(19) 式の MA 項による影響については、 $\phi_1 = 0$ ,  $\sigma = 1$  と固定した上で  $\theta_1 = -0.7, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 0.7$  の 6 パターンを想定する。この場合の 99% VaR の乖離は、表 13 のように与えられる。

収益率の自己相関を考慮した場合、正の自己相関がある場合は、正規分布対比乖離が大きくなり、負の自己相関がある場合は、乖離が小さくなるのが分かる。また MA(1) モデルでは長期ラグの自己相関が 0 となるため、VaR 算出においては MA 項が小さい場合、乖離がより小さくなるのが分かる。

#### ハ. ボラティリティ・クラスタリングがある場合

収益率のボラティリティ・クラスタリングを考慮するため、日次収益率は (4) 式の GARCH(1,1) モデルに従うと仮定する。GARCH(1,1) モデルのパラメータは、

表 13 ムービング・ウィンドウ法による MA 過程に対する 99%VaR の乖離

重複なし 99%VaR(縦: 保有期間 横: MA項) サンプルサイズ: 500							Moving Window法 99%VaR								
	-0.7	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.7	正規分布		-0.7	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.7	正規分布
1	2.79	2.56	2.33	2.33	2.55	2.79	2.29	1	2.79	2.56	2.33	2.33	2.55	2.79	2.29
10	3.47	4.28	5.96	8.55	10.60	11.99	7.23	10	3.45	4.23	5.86	8.41	10.40	11.78	7.10
20	4.09	5.60	8.30	12.17	15.17	17.19	10.22	20	4.02	5.41	7.96	11.60	14.39	16.32	9.77
60	5.96	9.14	14.26	21.20	26.47	29.94	17.72	60	5.38	7.93	12.09	17.95	22.16	25.18	14.95
120	7.99	12.72	20.09	30.05	37.51	42.46	25.05	120	6.40	9.56	14.80	21.96	27.40	31.15	18.44

重複がない場合からの乖離							正規分布
	-0.7	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.7	
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
10	-0.5%	-1.2%	-1.7%	-1.7%	-1.9%	-1.7%	-1.7%
20	-1.8%	-3.4%	-4.1%	-4.6%	-5.1%	-5.0%	-4.4%
60	-9.8%	-13.3%	-15.2%	-15.4%	-16.3%	-15.9%	-15.6%
120	-19.9%	-24.8%	-26.4%	-26.9%	-27.0%	-26.6%	-26.4%

表 14 ムービング・ウィンドウ法による GARCH 過程に対する 99%VaR の乖離

重複なし 99%VaR(縦: 保有期間 横: パラメータ $(\beta, \alpha)$ )					Moving Window法 99%VaR						
	(0.92,0.07)	(0.88,0.11)	(0.88,0.07)	(0.84,0.11)	正規分布		(0.92,0.07)	(0.88,0.11)	(0.88,0.07)	(0.84,0.11)	正規分布
1	2.36	2.41	2.38	2.33	2.29	1	2.36	2.41	2.38	2.33	2.29
10	7.97	8.30	7.78	7.55	7.23	10	7.46	7.65	7.61	7.41	7.10
20	11.26	11.66	10.92	10.64	10.22	20	10.21	10.24	10.31	10.06	9.77
60	19.32	19.91	18.59	18.19	17.72	60	14.96	14.66	15.10	15.05	14.95
120	27.11	27.75	25.84	25.48	25.05	120	18.06	17.47	18.13	18.30	18.44

重複がない場合からの乖離					正規分布
	(0.92,0.07)	(0.88,0.11)	(0.88,0.07)	(0.84,0.11)	
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
10	-6.3%	-7.8%	-2.2%	-1.8%	-1.7%
20	-9.3%	-12.2%	-5.6%	-5.4%	-4.4%
60	-22.6%	-26.4%	-18.8%	-17.3%	-15.6%
120	-33.4%	-37.1%	-29.8%	-28.2%	-26.4%

$(\beta, \alpha) = (0.92, 0.07), (0.88, 0.11), (0.88, 0.07), (0.84, 0.11)$  の 4 パターンを想定する<sup>14</sup>。この場合の 99% VaR の乖離は、表 14 のように与えられる。

収益率にボラティリティ・クラスタリングがある場合、正規分布対比、ムービング・ウィンドウ法による過小評価の影響は大きくなるのが分かる。また、その過小評価の影響はボラティリティの長期記憶性  $(\alpha + \beta)$  が大きいほど、大きくなる傾向にある。

## 二. 収益率にジャンプがある場合

収益率のジャンプを表現するため、(20) 式のジャンプ拡散過程のモデルを用いる。ここで、 $J_t$  はジャンプの要素であり、その強度  $\lambda$  は一定とし、ジャンプのサイ

14 実際の市場データを元に  $\alpha + \beta = 0.99, 0.95$  となるように設定した。 $\alpha + \beta$  の水準はボラティリティの長期記憶性を表す。また、(4) 式より、ボラティリティの無条件期待値を 1 に基準化するように  $\omega = 1 - (\alpha + \beta)$  と設定した。

表 15 ムービング・ウィンドウ法によるジャンプ過程に対する 99%VaR の乖離

重複なし 99%VaR(縦: 保有期間 横: パラメータ $(\lambda, \sigma_j)$ )						Moving Window法 99%VaR					
	(0.06,0.03)	(0.06,0.05)	(0.12,0.03)	(0.12,0.05)	正規分布		(0.06,0.03)	(0.06,0.05)	(0.12,0.03)	(0.12,0.05)	正規分布
1	2.29	2.29	2.29	2.29	2.29	1	2.29	2.29	2.29	2.29	2.29
10	7.23	7.23	7.22	7.23	7.23	10	7.10	7.10	7.10	7.10	7.10
20	10.22	10.23	10.22	10.23	10.22	20	9.76	9.74	9.74	9.75	9.77
60	17.72	17.71	17.70	17.73	17.72	60	14.95	14.98	14.90	14.89	14.95
120	25.04	25.03	25.04	25.06	25.05	120	18.40	18.20	18.22	18.27	18.44

重複がない場合からの乖離					
	(0.06,0.03)	(0.06,0.05)	(0.12,0.03)	(0.12,0.05)	正規分布
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
10	-1.8%	-1.8%	-1.8%	-1.8%	-1.7%
20	-4.5%	-4.8%	-4.7%	-4.6%	-4.4%
60	-15.7%	-15.4%	-15.8%	-16.0%	-15.6%
120	-26.5%	-27.3%	-27.2%	-27.1%	-26.4%

ズは正規分布  $N(0, \sigma_j^2)$  に従うとする。

$$r_t = \varepsilon_t + J_t,$$

$$\varepsilon_t = \sigma z_t, z_t \sim i.i.d. N(0, 1).$$

(20)

(20) 式のパラメータについては、 $\sigma = 1$  と固定した上で、ジャンプの強度  $\lambda$  とサイズの標準偏差  $\sigma_j$  について、 $(\lambda, \sigma_j) = (0.06, 0.03), (0.06, 0.05), (0.12, 0.03), (0.12, 0.05)$  の 4 パターンを想定する<sup>15</sup>。この場合の 99% VaR の乖離は、表 15 のようになる。

収益率にジャンプを含む場合、ムービング・ウィンドウ法による過小評価の影響は大きくなる事が分かる。

#### ホ. 市場データを用いた分析

3 節で使用した日本と米国の市場データに対し、ムービング・ウィンドウ法を使用して VaR を試算する。ここでは、表 7 で選択されたモデルを用いて、シミュレーションを行う。シミュレーションの前提はこれまでと同様であり、各エクスポージャーについては、5 節と同様にする。結果は表 16 のとおりである。

実際の市場データはモデル選択の結果、自己相関、ファットテイル性、ボラティリティ・クラスタリングの性質があるため、ムービング・ウィンドウ法を用いる場合、正規分布対比過小評価の影響が大きくなる事が分かる。

これまで本節では、1 変数のリスク量算出の際にムービング・ウィンドウ法が与える影響について、分析を行った。次小節では 2 変数のリスクの合算におけるムービング・ウィンドウ法が与える影響について分析を行う。

.....  
15 パラメータの値は、実際の市場データを基に設定した。

表 16 3 節の市場データに対するムービング・ウィンドウ法による 99%VaR の乖離

TOPIX 99%VaR (億円) (縦: 保有期間)

	重複なし①	Moving Window法②	②/①-1	正規分布
1	1,327.1	1,327.1	0.0%	0.0%
10	4,674.7	4,549.6	-2.7%	-1.7%
20	6,768.3	6,127.9	-9.5%	-4.4%
60	11,847.6	8,776.5	-25.9%	-15.6%
120	16,373.8	10,148.5	-38.0%	-26.4%

国債5Y 99%VaR (億円)

	重複なし①	Moving Window法②	②/①-1	正規分布
1	727.8	727.8	0.0%	0.0%
10	2,614.0	2,305.7	-11.8%	-1.7%
20	3,782.5	3,106.1	-17.9%	-4.4%
60	6,826.3	4,568.1	-33.1%	-15.6%
120	9,896.6	5,369.2	-45.7%	-26.4%

Dow 99%VaR (億円)

	重複なし①	Moving Window法②	②/①-1	正規分布
1	1,069.5	1,069.5	0.0%	0.0%
10	3,555.7	3,284.7	-7.6%	-1.7%
20	4,995.5	4,399.0	-11.9%	-4.4%
60	8,524.5	6,362.4	-25.4%	-15.6%
120	11,900.0	7,489.5	-37.1%	-26.4%

米国債5Y 99%VaR (億円)

	重複なし①	Moving Window法②	②/①-1	正規分布
1	1,869.5	1,869.5	0.0%	0.0%
10	6,183.8	5,344.2	-13.6%	-1.7%
20	8,942.3	7,275.1	-18.6%	-4.4%
60	15,612.1	10,676.8	-31.6%	-15.6%
120	21,911.9	12,946.8	-40.9%	-26.4%

## (2) 2 変数の場合

### イ. 保有期間が揃っている場合

2 変数の保有期間が揃っている場合におけるムービング・ウィンドウ法が与える分散、パーセントタイル点 (VaR) への影響を分析する。ここでは、各金融資産の保有期間は  $n$  期間とする。まず、ムービング・ウィンドウ法が相関係数に与える影響について示す。1 変数の場合と同様に日次の各収益率は、独立に正規分布に従うとする ( $x_i \sim i.i.d. N(0, 1)$ ,  $y_i \sim i.i.d. N(0, 1)$ ) と、 $n$  期間収益率は、 $X_i = \sum_{k=1}^n x_{i+k-1}$ ,  $Y_i = \sum_{k=1}^n y_{i+k-1}$  で表現でき、 $x_i$  と  $y_i$  に一定の相関  $\rho$  を与えると、 $X$  と  $Y$  の共分散行列は  $\Sigma_{i,j} = \rho * \max(n - |i - j|, 0)$  となる。このとき  $S$  個の  $n$  期間収益率 ( $X = (X_1, X_2, \dots, X_S)^T$ ,  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_S)^T$ ) に対して、

$$\bar{X} = \frac{\sum_i X_i}{S}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum_i Y_i}{S},$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{S - 1},$$

とすると、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{cov}(X, Y)) &= \mathbb{E}\left(\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{S - 1}\right) \\ &= \frac{nS}{S - 1}\rho - \frac{1}{S(S - 1)}\mathbb{E}\left[\left(\sum_i X_i\right)\left(\sum_i Y_i\right)\right], \end{aligned}$$

となり、1変量のとときと同様に計算すると、

$$\mathbb{E}(\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \rho \left( n - \frac{n(n-1)(3S-n-1)}{3S(S-1)} \right), \quad (21)$$

となる。したがって、(18)式を用いると、相関係数の期待値は、

$$\mathbb{E}(\text{corr}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \mathbb{E} \left( \frac{\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\sqrt{\text{var}(\mathbf{X})} \sqrt{\text{var}(\mathbf{Y})}} \right) = \rho, \quad (22)$$

となり、重複の影響を受けないことが分かる。また、 $X_i$  と  $Y_i$  の和の分散については、(18)式、(21)式の結果を用いて、(23)式のように表現できる。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{var}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})) &= \mathbb{E}(\text{var}(\mathbf{X}) + \text{var}(\mathbf{Y}) + 2\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \\ &= 2(1 + \rho) \left( n - \frac{n(n-1)(3S-n-1)}{3S(S-1)} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

重複がない場合は、 $\mathbb{E}(\text{var}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})) = 2n(1 + \rho)$  となるため、重複による影響は、(18)式の1変量の場合と同水準で、保有期間とサンプルサイズの影響を受けることが分かる。

#### ロ. 保有期間が異なる場合

次に保有期間が異なっている場合におけるムービング・ウィンドウ法が相関係数に与える影響について分析する。各金融資産の収益率の前提は5節と同様とし、各金融資産の保有期間を  $m, n$  ( $n < m$ ) とすると、 $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{Y}$  の共分散行列は  $\Sigma_{i,j} = \rho * \max(n - |i - j|, 0)$  となる。このとき、 $S$  個の  $m$  期間、 $n$  期間収益率 ( $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_S)^\top, \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_S)^\top$ ) に対して、

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum_i X_i}{S}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum_i Y_i}{S}, \\ \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{S - 1}, \end{aligned}$$

となり、5節と同様の計算により、 $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{Y}$  の共分散は、(21)式で与えられる。したがって相関係数は、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{corr}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) &= \mathbb{E} \left( \frac{\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\sqrt{\text{var}(\mathbf{X})} \sqrt{\text{var}(\mathbf{Y})}} \right) \\ &= \rho \frac{\left( n - \frac{n(n-1)(3S-n-1)}{3S(S-1)} \right)}{\left( \sqrt{m - \frac{m(m-1)(3S-m-1)}{3S(S-1)}} \sqrt{n - \frac{n(n-1)(3S-n-1)}{3S(S-1)}} \right)} \end{aligned}$$

$$= \rho \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{3S(S-1) - (n-1)(3S-n-1)}{3S(S-1) - (m-1)(3S-m-1)}}, \quad (24)$$

となる。(22)式、(24)式から、保有期間が揃っている場合と異なり、保有期間が異なる場合は、相関係数に対しても重複の影響を受け、その大きさは保有期間の乖離、サンプルサイズに依存することが分かる。また、重複がない場合、保有期間の異なる相関係数は、補論3の(A-4)式のように、ルートt倍法で調整した相関係数に一致するが、重複がある場合、(24)式より、 $\sqrt{\frac{3S(S-1)-(n-1)(3S-n-1)}{3S(S-1)-(m-1)(3S-m-1)}}$ だけ相関係数に影響を与えることが分かる。このバイアスは、1変量の場合と同様にサンプルサイズを大きくすることで、縮小することができる。分散については、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{var}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})) &= \mathbb{E}(\text{var}(\mathbf{X}) + \text{var}(\mathbf{Y}) + 2\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \\ &= \left( m - \frac{m(m-1)(3S-m-1)}{3S(S-1)} \right) \\ &\quad + (1+2\rho) \left( n - \frac{n(n-1)(3S-n-1)}{3S(S-1)} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

となり、保有期間の揃っている場合の(23)式と比べると、保有期間が異なっている場合の(25)式から、各金融資産の保有期間の違いが分散に影響を与えることが分かる。また、重複がない場合は $\mathbb{E}(\text{var}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})) = m + (1+2\rho)n$ となるため、サンプルサイズが小さい場合、バイアスが発生することが分かる。

## 7. おわりに

### (1) 分析のまとめ

本稿では、金融機関でのリスク計測における保有期間調整方法の代表的な手法であるルートt倍法とムービング・ウィンドウ法を取り上げ、その前提や問題点を整理し、各手法が持つモデル・リスクの分析を行った。ルートt倍法では、市場データの特性に合わせて提案されているルートt倍法の修正案について代表的な金融資産ポートフォリオに対してその有効性を検証した。

ルートt倍法は、市場変動が独立同一な正規分布に従うという前提をおいているが、実際の市場データは、その前提から大きく乖離しており、収益率ボラティリティの自己相関のほか、債券（金利）では変化幅の自己相関が観測されるもの

もあった。この乖離に対して、Wang, Yeh, and Cheng [2011] や Kinatender and Wagner [2014] の提案した修正方法を使用し、その有効性を確認した。自己相関が観測された債券（金利）については、Wang, Yeh, and Cheng [2011] の手法が有効であることが分かった。一方、収益率そのものの自己相関が有意にみられなかった株式に対しては、収益率の絶対値の自己相関を使用した Kinatender and Wagner [2014] の手法が有効であることが分かった。

また、ルート  $t$  倍法を用いたリスクの合算では、保有期間が揃っている場合と異なる場合について、分析を行った。保有期間が揃っている場合には、リスク・ファクターの合算はポートフォリオの損益として、1 変量に帰着できるため、Wang, Yeh, and Cheng [2011] や Kinatender and Wagner [2014] の手法を用いて、ルート  $t$  倍法の修正を行った。保有期間が異なっている場合には、1 変量に帰着できないため、本稿では分散共分散法を援用した手法を用いてリスクの合算を行った。分析では、ルート  $t$  倍法を用いて調整した相関係数とシミュレーションから算出したインプライド相関係数の比較を行い、足許のボラティリティ水準に応じてインプライド相関係数変動することが分かった。この変動を考慮するために、足許のボラティリティと収益率の 2 乗自己相関を使った調整方法を提案し、その有効性を確認した。本稿の分析により、ルート  $t$  倍法を用いた合算の際には足許のボラティリティ水準に応じて、依存関係を調整する必要があることが認識された。

ムービング・ウィンドウ法については、実務では幅広く使用されている一方、先行研究が少ない。Sun *et al.* [2009] は、日次収益率が独立同一分布かつ正規分布に従う場合、ムービング・ウィンドウ法は過小評価され、サンプルサイズが小さく、保有期間が長いほど、過小評価の度合いが強まることを示した。また、彼らの結果では取り上げられなかった市場データの特徴（ファットテイル性、自己相関、ボラティリティ・クラスタリング、ジャンプ）を考慮した場合の影響分析を行った。結果を項目別にまとめると以下のとおりである。

#### （ファットテイル性）

ファットテイル性を表現するために、 $t$  分布を使用した場合のムービング・ウィンドウ法の影響は、正規分布対比やや大きいことが分かった。また、自由度が小さい場合、正規分布の場合の結果と大きく異なる結果が得られた。これは、自由度の違いによって、 $t$  分布が正規分布に近づくスピードが異なることが原因と考えられる。

#### （自己相関）

自己相関を表現するために、ARMA(1,1) モデルを使用した場合のムービング・ウィンドウ法の影響は、正の自己相関がある場合、正規分布対比影響は大きな

り、負の自己相関がある場合、正規分布対比影響は小さくなった。

#### (ボラティリティ・クラスタリング)

ボラティリティ・クラスタリングがある場合のムービング・ウィンドウ法の影響は、正規分布対比大きくなった。また、その影響はボラティリティの長期記憶性が大きいほど、大きくなる傾向にある。

#### (ジャンプ)

収益率にジャンプを含む場合、ムービング・ウィンドウ法による過小評価の影響は大きくなった。

また、保有期間の揃っている2変量（資産間に一定の相関を与えた）の場合、各収益率は独立同一分布かつ正規分布に従うならば、ムービング・ウィンドウ法による資産間の相関係数への影響はなく、VaRに対する過小評価のみが影響することが分かった。一方で、保有期間が異なっている場合、保有期間の乖離の大きさやサンプルサイズが、相関係数と VaR 両方に影響することが分かった。

本稿の分析を通じて、ルート  $t$  倍法やムービング・ウィンドウ法といった保有期間調整方法には各々モデル・リスクが存在することが改めて認識された。今後、実務において保有期間調整を行う際には、このモデル・リスクを認識する必要がある。

## (2) 今後の課題と展望

本稿では、ムービング・ウィンドウ法における分散への影響については2変量の場合を含めて、理論的に示すことができたが、パーセントタイル点（VaR）への影響については、明示的に示すことができなかった。収益率の分布が独立同一分布かつ平均0の正規分布に従う場合、分散とパーセントタイル点に与える影響は等しいが、実際の市場データの特性を考慮した場合、影響度はその特性により異なる。今後、パーセントタイル点への影響に対してより深化した分析が望まれる。

2変量の場合では、保有期間の揃っている各収益率が独立同一分布かつ正規分布に従う場合、ムービング・ウィンドウ法による相関係数への影響はなく、VaRへの影響は1変量の場合と同じとなったが、ファットテイル性等の市場データの特性を考慮した際の影響については、まだ調べられていない。

また、本稿では、分散共分散法を援用した手法で保有期間の異なるリスクを合算し、相関係数に対する保有期間調整方法を提案し、この手法が、単純にルート  $t$  倍法を用いた調整方法よりも本手法の方が有効であることを示した。一方で、リスク

の合算方法については、これまで多くの先行研究が行われているが、分散共分散法以外の合算手法に対する保有期間調整方法については、まだ調べられていないため、今後の課題としていきたい。

参考文献

- 渡部敏明、『ボラティリティ変動モデル』、朝倉書店、2000年
- Basel Committee on Banking Supervision, “Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risk,” Bank for International Settlements, January 1996.
- Basel Committee on Banking Supervision, “Consultative Document—Fundamental Review of the Trading Book: A Revised Market Risk Framework,” Bank for International Settlements, October 2013.
- Diebold, Francis X., *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*, Springer-Verlag, 1988.
- Inui, Koji, Masaaki Kijima, and Atsushi Kitano, “VaR is Subject to a Significant Positive Bias,” *Statistics & Probability Letters*, 72, 2005, pp. 299–311.
- Kinateder, Harald, and Niklas Wagner, “Multiple-period Market Risk Prediction Under Long Memory: When VaR is Higher Than Expected,” *Journal of Risk Finance*, 15(1), 2014, pp. 4–32.
- Klaassen, Pieter, and Idzard van Eeghen, *Economic Capital*, Elsevier, 2009（三浦良造・住友信託銀行リスク統括部訳、『考えるリスク管理の実践』、金融財政事情研究会、2011年）。
- Rosenberg, Joshua V., and Til Schuermann, “A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-Tailed Risks,” *Journal of Financial Economics*, 79(3), 2006, pp. 569–614.
- Spadafora, Luca, Marco Dubrovich, and Marcello Terraneo, “Value-at-Risk Time Scaling for Long-term Risk Estimation,” arXiv:1408.2462, 2014.
- Sun, Heng, Izzy Nelken, Guowen Han, and Jiping Guo, “Error of VAR by overlapping intervals,” *Asia Risk*, April 2009, pp. 50–55.
- Wang, Jying-Nan, Jin-Huei Yeh, and Nick Ying-Pin Cheng, “How Accurate is the Square-root-of-time Rule in Scaling Tail Risk: A Global Study,” *Journal of Banking & Finance*, 35(5), 2011, pp. 1158–1169.
- Weron, Rafal, “Estimating Long Range Dependence: Finite Sample Properties and Confidence Intervals,” *Physica A*, 312, 2002, pp. 285–299.

## 補論 1 先行研究におけるルート t 倍法の修正方法の市場データへの適用

3 節の市場データに対して Wang, Yeh, and Cheng [2011] の提案した (3) 式の修正ルート t 倍法の適用した結果は表 A-1 のとおりである。各 VaR 算出における前提は、表 4 と同様である。

表 A-1 より、3 節で、有意な自己相関が観察されなかった株式に対しては、Wang, Yeh, and Cheng [2011] の修正があまり有効ではないものの、有意な自己相関が観察された債券に対しては、(3) 式の修正ルート t 倍法を使用した VaR の方が通常のルート t 倍法よりもベンチマークに近づくことが分かる。

また、3 節の市場データに対して Kinateder and Wagner [2014] の手法を適用した結

表 A-1 修正ルート t 倍法による VaR の精度

株式 (観測期間: 10年 <2004/10/1~2014/9/30>)					債券 (観測期間: 10年 <2004/10/1~2014/9/30>)				
99%VaR (億円)	TOPIX	Dow	FTSE100	DAX	99%VaR (億円)	日本国債 5Y	米国債 5Y	英国債 5Y	独国債 5Y
$\sqrt{10}\text{VaR}(1)\textcircled{1}^*1$	4,615.2	4,140.3	3,929.9	4,683.5	$\sqrt{10}\text{VaR}(1)\textcircled{1}^*1$	2,663.7	6,418.2	5,410.3	4,698.5
MVaR(10) $\textcircled{2}^*2$	4,342.5	3,535.1	3,496.3	4,410.8	MVaR(10) $\textcircled{2}^*2$	2,533.7	5,605.5	5,430.3	4,669.3
VR(10)	0.878	0.716	0.782	0.880	VR(10)	0.904	0.760	1.007	0.987
$\rho(1)$	-0.006	-0.108	-0.047	0.008	$\rho(1)$	-0.022	-0.080	0.059	0.037
VaR(10) $\textcircled{3}^*3$	4,401.2	3,965.3	3,955.3	5,125.9	VaR(10) $\textcircled{3}^*3$	2,224.2	4,998.7	4,831.5	4,116.2
( $\textcircled{1}/\textcircled{3}$ -1)%	4.9%	4.4%	-0.6%	-8.6%	( $\textcircled{1}/\textcircled{3}$ -1)%	19.8%	28.4%	12.0%	14.1%
( $\textcircled{2}/\textcircled{3}$ -1)%	-1.3%	-10.8%	-11.6%	-14.0%	( $\textcircled{2}/\textcircled{3}$ -1)%	13.9%	12.1%	12.4%	13.4%

備考: \*1 ルート t 倍法を使用して 1 日の VaR を 10 日に調整。

\*2 Wang, Yeh, and Cheng [2011] の修正ルート t 倍法を使用した 10 日の VaR。

\*3 ベンチマークとしてボックス=カー法で算出した 10 日の VaR。

表 A-2 収益率絶対値のハースト指数と自己相関係数を用いた VaR の修正

株式 (観測期間: 5年 シミュレーション期間: 5年)					債券 (観測期間: 5年 シミュレーション期間: 5年)				
99%VaR (億円)	TOPIX	Dow	FTSE100	DAX	99%VaR (億円)	日本国債 5Y	米国債 5Y	英国債 5Y	独国債 5Y
$\sqrt{10}\text{VaR}(1)\textcircled{1}^*1$	3,473.2	2,692.7	2,860.4	3,553.7	$\sqrt{10}\text{VaR}(1)\textcircled{1}^*1$	1,360.0	4,806.5	4,680.7	4,538.4
HVaR(10) $\textcircled{2}^*2$	4,032.2	5,075.3	3,798.9	4,302.0	HVaR(10) $\textcircled{2}^*2$	2,135.5	6,678.4	5,937.0	5,494.9
H	0.865	0.930	0.917	0.912	H	0.917	0.918	0.843	0.962
$ \rho(1) $	0.270	0.280	0.277	0.187	$ \rho(1) $	0.278	0.199	0.127	0.155
VaR(10) $\textcircled{3}^*3$	4,577.2	4,090.6	4,199.9	5,406.6	VaR(10) $\textcircled{3}^*3$	2,082.5	5,387.3	4,815.0	4,286.5
( $\textcircled{1}/\textcircled{3}$ -1)%	-24.1%	-34.2%	-31.9%	-34.3%	( $\textcircled{1}/\textcircled{3}$ -1)%	-34.7%	-10.8%	-2.8%	5.9%
( $\textcircled{2}/\textcircled{3}$ -1)%	-11.9%	24.1%	-9.5%	-20.4%	( $\textcircled{2}/\textcircled{3}$ -1)%	2.5%	24.0%	23.3%	28.2%

備考: \*1 ルート t 倍法を使用して 1 日の VaR を 10 日に調整。

\*2 Kinateder and Wagner [2014] の修正方法を使用した 10 日の VaR。

\*3 ベンチマークとしてボックス=カー法で算出した 10 日の VaR。

果は、表 A-2 のとおりである。各 VaR 算出における前提は、表 A-1 と同様である。

表 A-2 から、Kinatader and Wagner [2014] の手法は、ボラティリティ・クラスタリングによる過小評価を修正する方向に働く一方で、過度に修正され、ベンチマーク対比過大評価される場合があった。

## 補論 2 各金融資産収益率の絶対値の自己相関

本稿で使用する各株価収益率、金利階差の絶対値の自己相関をプロットすると、図 A-1、図 A-2 のとおりとなる（サンプル期間は 10 年間、グラフ中の細横線は 5% 有意水準）。図 A-1、図 A-2 から、収益率の絶対値には有意な自己相関がみられ、緩やかに減衰していることが分かる。

図 A-1 各種株価の日次収益率の絶対値に対する自己相関

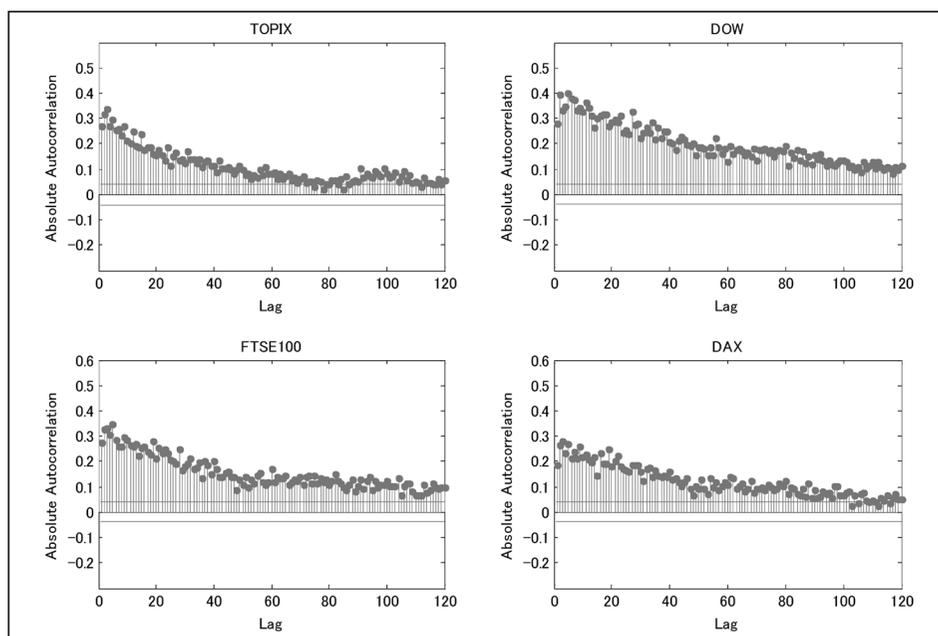
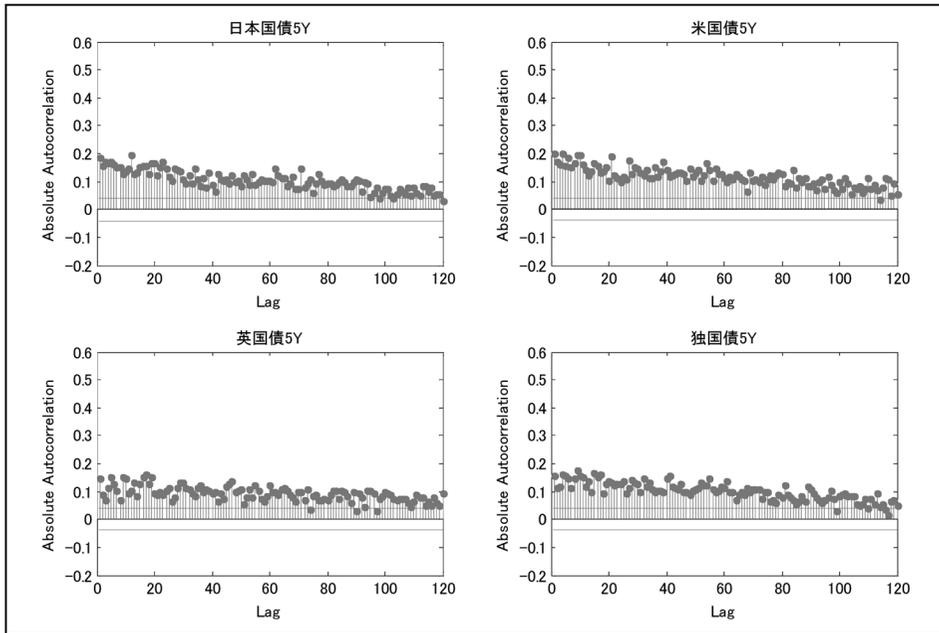


図 A-2 各種債券の金利階差の絶対値に対する自己相関



### 補論3 相関係数のルート t 倍法を用いた調整方法

保有期間が異なる場合におけるルート t 倍法を用いた相関係数の調整方法について説明する。まず日次収益率  $x_t, y_t$  が (A-1) 式のとおり、独立同一分布に従うと仮定する。

$$x_t \sim i.i.d. F_x(\mu_x, \sigma_x^2), \quad y_t \sim i.i.d. F_y(\mu_y, \sigma_y^2). \quad (\text{A-1})$$

このとき、 $m > n$  として、 $x_t$  の期間  $m$  の収益率、 $y_t$  の期間  $n$  の収益率はそれぞれ、

$$X_t^m = \sum_{t=1}^m x_t, \quad Y_t^n = \sum_{t=1}^n y_t, \quad (\text{A-2})$$

となり、 $X_t^m$ 、 $Y_t^n$  の分散は、独立同一分布性より、それぞれ  $m\sigma_x^2$ 、 $n\sigma_y^2$  と表される。また、 $X_t^m$  と  $Y_t^n$  の共分散は、

$$\begin{aligned} \text{cov}[X_t^m, Y_t^n] &= \text{cov}\left[\sum_{t=1}^m x_t, \sum_{s=1}^n y_s\right] \\ &= \sum_{t=1}^m \sum_{s=1}^n \text{cov}[x_t, y_s] = n\rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y, \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

となる。ただし、 $\rho_{x,y}$  は  $x_t, y_t$  の相関係数である。したがって、 $X_t^m, Y_t^n$  の相関係数は、

$$\rho_{x,y}^{(m,n)} = \frac{\text{cov}[X_t^m, Y_t^n]}{\sqrt{\text{var}[X_t^m]}\sqrt{\text{var}[Y_t^n]}} = \rho_{x,y} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}, \quad (\text{A-4})$$

となる。