

本邦国債価格データを用いたゼロ・クーポン・イールド・カーブ推定手法の比較分析

きくちけんたろう しんたにこうへい
菊池健太郎 / 新谷幸平

要 旨

本稿では、本邦国債のゼロ・クーポン・イールド・カーブ（以下ゼロ・カーブ）を推定する際に、推定手法が満たすべき基準を提示したうえで、先行研究で用いられた各種の手法について比較分析を行う。

先行研究では、利付債の市場価格からゼロ・カーブを推定する多くの手法が提案されてきたが、任意の推定手法を選択して本邦国債のゼロ・カーブを推定すると、その特徴を的確に捉えられないおそれがある。本研究では、ゼロ・カーブの特徴を捉えるには、国債の市場価格への適合性が高く、適切な内挿がなされたゼロ・カーブを推定できることが望ましいと考える。そして、さまざまな推定手法の中から適切な手法を選択する基準として、推定値がゼロを下回らないこと、異常値をとらないこと、市場価格との適合性が高いこと、ゼロ・カーブの凹凸が小さいことに着目する。

分析の結果、本稿で扱った本邦国債の価格データについて、Steeley [1991] による手法が最適であるとの結論となった。実際、当該手法に基づく推定結果をみると、緩和的な金融政策が長らく続いてきた本邦におけるゼロ・カーブの特徴が十分に表現されていることが確認される。このように、ゼロ・カーブを適切に推定することは、日本の国債金利についてさまざまな分析を行ううえでの出発点として、重要性が高いと考えられる。

キーワード：利付国債、ゼロ・クーポン・イールド、区分多項式関数

本稿の作成に当たっては、室町幸雄教授（首都大学東京）、日本金融・証券計量・工学学会（JAFEE）第35回大会参加者、TMU（首都大学東京）ファイナンスセミナー参加者ならびに日本銀行スタッフから有益なコメントを頂いた。また、日経メディアマーケティング株式会社には、同社のサービス「NEEDS」から取得した国債価格データを利用して推定したゼロ・カーブ・データを公表することをご快諾頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

菊池健太郎 日本銀行金融研究所企画役補佐（E-mail: kentarou.kikuchi@boj.or.jp）
新谷幸平 日本銀行金融研究所（現 総務人事局）

1. はじめに

ゼロ・クーポン・イールド（以下、ゼロ・イールド）は、割引債の最終利回りとして定義され、将来のある1時点に発生するキャッシュ・フローの現在価値を求める際に用いられる金利である。満期の異なるゼロ・イールドをつないだ曲線であるゼロ・クーポン・イールド・カーブ（以下、ゼロ・カーブ）は、あらゆる金融商品の現在価値を統一的に扱うことを可能とするだけでなく、異なる満期の金利間の比較等も可能となるため、金利を用いた分析を行う研究者、アナリスト、政策立案者等にとって欠かせない基礎的データといえる。

仮に、任意の満期の債券が市場で取引されていれば、ゼロ・カーブを債券価格から計算することができる。しかし通常は、任意の満期の債券は取引されていないため、ゼロ・カーブを得るためには、債券が取引されている年限のゼロ・イールドを推定しつつ、取引されていない年限のゼロ・イールドを内挿する必要がある。割引債が市場で取引されていれば、取引されている年限のゼロ・イールドは割引債の価格から直接計算することが可能であり、あとは取引されていない年限のゼロ・イールドをどのように内挿するのかが問題となる。しかし、本邦国債市場をみると、割引国債は取引されているものの、1年超の残存期間を有する割引国債の取引銘柄が少ないため、本邦国債のゼロ・カーブを得ることは簡単ではない¹。そこで、このような場合は、国債のゼロ・カーブを割引国債の取引価格から求める代わりに、取引されている年限の比較的多い利付国債の取引価格からゼロ・カーブを推定することが必要となる²。

先行研究では、債券の取引価格からゼロ・カーブを推定するさまざまな手法が提案されてきた。代表的な手法として、①割引関数を区分多項式でモデル化する区分多項式法（McCulloch [1971, 1975]、Steeley [1991] 等）、②割引関数に特定の構造を仮定しないノンパラメトリック法（Tinggaard [1997] 等）、③割引関数を多項式でモデル化する多項式法（Schaefer [1981] 等）、④ゼロ・イールドや瞬間フォワード・レートに特定の関数形を仮定する関数形法（Nelson and Siegel [1987]、Svensson [1995] 等）を挙げることができる。金利を用いた分析を行うための基礎的データとしてゼ

1 日本では、現在、政府により発行されている割引債の満期は1年以下である。ただし、社債等振替法において、2003年1月27日以降に発行された、物価連動国債、個人向け国債を除く全ての固定利付国債に対して、元金部分と利息部分の分離（いわゆる、ストリップス化）が可能となったことから、満期1年超の割引国債をセカンダリー市場で取引することができるようになった。ただし、その市場流動性は、固定利付国債と比べて乏しい現状がある。

2 わが国では、本邦国債の金利データを、各種情報ベンダーのほか、財務省のホームページからも入手可能である。しかし、情報ベンダーが提供するゼロ・カーブは、筆者らの知る限り、推定手法の詳細は公開されていない。また、財務省が公表する金利は、固定利付国債の半年複利ベースの最終利回りであり、ゼロ・イールドではない。このほか、研究者が、研究のために使用したデータ等がホームページ等で公開されていることがある。例えば、ジョナサン・ライト（Jonathan Wright、ジョンズホプキンス大学）は、日本を含めた各国のゼロ・カーブの月次ベースの推定値をホームページ上で公開しているが、本論中で扱う Svensson [1995] による関数形法に則って計算されているとの記載があるものの、データ・ソースについては明らかではない。

ロ・カーブを推定する際、ここに挙げた推定手法のいずれかが用いられる。例えば、Bank for International Settlements [2005] には、各国中央銀行が自国の国債のゼロ・カーブを推定する際に用いる手法がまとめられており、上述の先行研究で提案された手法のいずれかが使われていることがわかる。

本邦国債のゼロ・カーブの推定を行う場合、先行研究で提案されてきた推定手法の中からやみくもに手法を選択し推定を行うと、日本のイールド・カーブの特徴を捉えないカーブを推定してしまう可能性がある。さらに、そのようなゼロ・カーブを用いて分析を行った結果、誤った結論を導いてしまうおそれがある。こうしたことを避けるため、本稿では、先行研究で提案されたさまざまなゼロ・カーブ推定手法を比較し、本邦のイールド・カーブの特徴を的確に捉える推定手法を選択する。

複数のゼロ・カーブ推定手法について比較を行った先行研究には、英国債を対象に行った Ioannides [2003] と豪州国債を対象に行った Kaley [2004] がある。しかし、国ごとに国債市場の価格動向、市場慣行等が異なるため、上記の先行研究でよい推定手法と結論付けられた手法であっても、本邦国債市場で同様の結論が得られるとは限らない。本邦国債のゼロ・カーブの推定に関しては、小峰ほか [1989]、Oda [1996]、乾・室町 [2000]、川崎・安道 [2002] 等の先行研究やサーベイがあるが、このうち複数の推定手法について比較を行っているものは小峰ほか [1989] のみである。当該研究は、1980年代後半の本邦国債の価格データを用いて、5つの推定手法間の比較を行っているが、1980年代と1990年代後半以降の本邦国債市場では、市場環境が大きく異なる点に注意が必要である³。そこで本稿では、1999年から2010年の本邦利付国債の価格データを用いて、先行研究で提案されてきた代表的な推定手法について比較を行い、本邦国債のイールド・カーブの特徴を捉えるゼロ・カーブ推定手法の選択を行う。

本稿の分析対象期間である1999年以降の本邦国債のイールド・カーブの特徴をみるうえで考慮しなければならないのが、ゼロ金利政策や量的緩和政策、そして、2007年夏の金融危機の発生以降から現在までの緩和政策期である。この期間のイールド・カーブの特徴として、短期の年限のカーブがゼロ近傍で平坦な形状をとっている点を挙げることができるが、推定手法によってはこのようなカーブの形状を捉えることができず、推定金利がゼロを下回ってしまうことがある。したがって、本邦国債のゼロ・カーブを推定する際、推定手法の妥当性を検討しておく必要性は高いと考えられる。そこで本稿では、複数の推定手法から適切なものを選択する基準を設定し、それに照らして最適な推定手法を1つ選択した。この点が、先行研究にはない特徴である。具体的にはまず、①ゼロ・イールドの推定値がゼロを下回らないことと、②異常値をとらないことに照らして不適切な推定手法を排除する。次に、残った推定手法の中から、③国債の取引価格との適合性の高さと④ゼロ・カーブの

3 水準やカーブの形状といった金利の期間構造そのものの違いのほか、市場慣行についてみると、1980年代には、指標銘柄と呼ばれる市場で指標的な役割を果たしている銘柄が存在し、当該銘柄に対する集中的な取引があったが、それ以外の銘柄の市場流動性は乏しかった。1990年代半ばから指標銘柄への取引の集中度が低下していくにつれ、1990年代後半には指標銘柄と呼ばれる銘柄はみられなくなった。

凹凸が小さいという点に照らして望ましい推定手法を1つ選択するというプロセスをとる。このように選択を行った結果、Steeley [1991]による手法が選択された。

本稿の構成は以下のとおりである。まず2節で、ゼロ・カーブ推定手法の分類と解説を行う。次に3節で、ゼロ・カーブ推定手法の選択基準を提示し、そのもとで、先行研究で提案された幾つかの代表的な推定手法について比較を行う。4節では、本邦国債市場に適用した場合のSteeley [1991]による手法の特徴について、他の推定手法との比較によって明らかにする。最後に5節で、本稿のまとめを行う。

なお本稿では、読者が推定手法を再現するうえでの参考情報として、補論1では、キャッシュ・フロー発生時点の定義、当該時点までの日数の計算方法や経過利子の計算方法をはじめとする、理論価格の計算に必要となる本邦国債市場の慣行を整理する。また、補論2では、Steeley [1991]による手法の推定アルゴリズムの詳細を解説する。さらに、参考のため、Steeley [1991]の手法によって推定した、1999年1月から2011年12月までの日次ベースのゼロ・カーブのデータを作成した⁴。

2. ゼロ・カーブ推定手法の分類と解説

本節ではまず、ゼロ・イールドやゼロ・カーブの定義等、本稿で必要となる金利に関する基本事項をまとめる。次に、推定手法の妥当性を考える前提として、ゼロ・カーブの推定結果として望ましくないと考えられる性質についてまとめる。そして、ゼロ・カーブ推定手法に関する先行研究のうち、代表的な手法について解説を行う。そのうえで、望ましくないゼロ・カーブを推定せず、債券の取引価格を的確に表現するゼロ・カーブを推定するという観点から、推定手法の性質を「自由度」と「局所性」という2つの概念に基づき整理する。

(1) 金利に関する基本事項

現在時点を t とし、時点 T で1のキャッシュ・フローが確実に支払われる債券（割引債と呼ぶ）の現在価値を $Z(t, T)$ とする。すると、 t から T までのゼロ・イールド $y(t, T)$ は、

$$y(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log(Z(t, T)), \quad (1)$$

と、割引債の最終利回りとして定義される。

本稿では、特定の年限のゼロ・イールドだけではなく、異なる年限のゼロ・イールド間の比較分析等への活用可能性を念頭に置き、任意の年限のゼロ・イールドを

4 同データは、菊池・新谷 [2012] の付録データとして、日本銀行金融研究所ホームページ上 (<http://www.imes.boj.or.jp/research/papers/japanese/12-J-03.txt>) に掲載されている。

推定する。すなわち、満期の異なるゼロ・イールドを連続的につないだ曲線であるゼロ・カーブを推定する。具体的には、 t 時点でのゼロ・カーブは、ゼロ・イールドの満期時点までの時間 x の関数として、

$$y(t, t+x), \quad (2)$$

と記述され、時点 t における x に関する曲線 $y(t, t+x)$ を推定することになる。なお、ゼロ・カーブの推定に関する先行研究では、2節(4)で後述するように、 t 時点での期間 x 年に対応する割引率 $Z(t, t+x)$ を関数形等でモデル化するが、以下では、 $Z(t, t+x)$ を x の関数として割引関数と呼ぶ場合がある。

ゼロ・カーブが得られると、瞬間スポット金利と呼ばれる、時点 t での瞬間の金利を計算することができる。時点 t での瞬間スポット金利 $r(t)$ は、

$$r(t) = \lim_{x \rightarrow 0} y(t, t+x), \quad (3)$$

と定義される。

さらに、ゼロ・カーブが得られると、インプライド・フォワード・レートと呼ばれる金利を計算することができる。インプライド・フォワード・レートとは、現在時点で定義される将来時点からある一定期間の金利である。具体的には、現在時点 t より先の時点 S から時点 T (ただし、 $S < T$) までの、 t 時点でのインプライド・フォワード・レートは、 T 時点における 1 のキャッシュ・フローを時点 S までインプライド・フォワード・レートで割り引き、さらにそれを、時点 t から時点 S までのゼロ・イールドで割り引いた値と、 T 時点における 1 のキャッシュ・フローを時点 t から T までのゼロ・イールドで割り引いた現在価値とが等しい値をとるように定まるものである。すなわち、時点 t における時点 S から時点 T までのインプライド・フォワード・レート $f(t, S, T)$ は、

$$Z(t, T) = \exp(-f(t, S, T)(T - S)) \exp(-y(t, S)(S - t)), \quad (4)$$

が成り立つように定まるものである。したがって、(1)式と(4)式から、インプライド・フォワード・レート $f(t, S, T)$ は、

$$f(t, S, T) = -\frac{1}{T - S} \log\left(\frac{Z(t, T)}{Z(t, S)}\right), \quad (5)$$

と、時点 t での割引債価格を用いて計算される。また、時点 t からみた時点 S での瞬間的なフォワード・レート $f(t, S)$ は、

$$f(t, S) = \lim_{T \rightarrow S} f(t, S, T) = - \lim_{T \rightarrow S} \frac{1}{T - S} \log \left(\frac{Z(t, T)}{Z(t, S)} \right) = - \frac{\partial}{\partial S} \log(Z(t, S)), \quad (6)$$

と定義され、瞬間フォワード・レートと呼ばれる。(6)式と $Z(S, S) = 1$ から、割引関数 $Z(t, t+x)$ と瞬間フォワード・レートには、次の関係が成り立つ。

$$Z(t, t+x) = \exp \left(- \int_0^x f(t, t+s) ds \right). \quad (7)$$

また、(1)式と(7)式から、ゼロ・イールドと瞬間フォワード・レートには、

$$y(t, t+x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t, t+s) ds, \quad (8)$$

との関係が成り立つ。

(2) 望ましくないゼロ・カーブ

ゼロ・カーブの推定には、推定に用いる債券の取引価格を十分に捉える推定手法を用いたい。取引価格をうまく捉えることができない推定手法によりゼロ・カーブを推定してしまうと、ゼロ・カーブは債券価格が内包する情報を十分に反映しないおそれがある。したがって、このようなゼロ・カーブを用いて金利分析を行った場合、誤った結論を導いてしまう可能性がある。一方、取引価格を十分に捉える推定手法という観点だけで手法を選択し、ゼロ・カーブを推定してしまうと、内挿が適切でないといった「望ましくない」ゼロ・カーブを推定してしまう可能性がある。ここでは、推定手法によっては得られる可能性のある「望ましくない」ゼロ・カーブとはどのようなものかを示すことにする。

イ. ゼロ金利制約の抵触

推定されるゼロ・カーブは名目金利であるため、図1のように、一部の年限でゼロを下回るゼロ・カーブが推定されてしまう場合は、望ましい推定結果とはいえない。

ロ. 過剰なゼロ・カーブの凹凸

推定されるゼロ・カーブがゼロを下回らない推定手法であっても、推定手法特有の性質等によって、ゼロ・カーブの凹凸が大きくなる場合がある。

図2は、一部の年限の割引債が市場で取引されているという仮定のもと、割引債

図1 ゼロ金利制約を満たさないゼロ・カーブ（概念図）

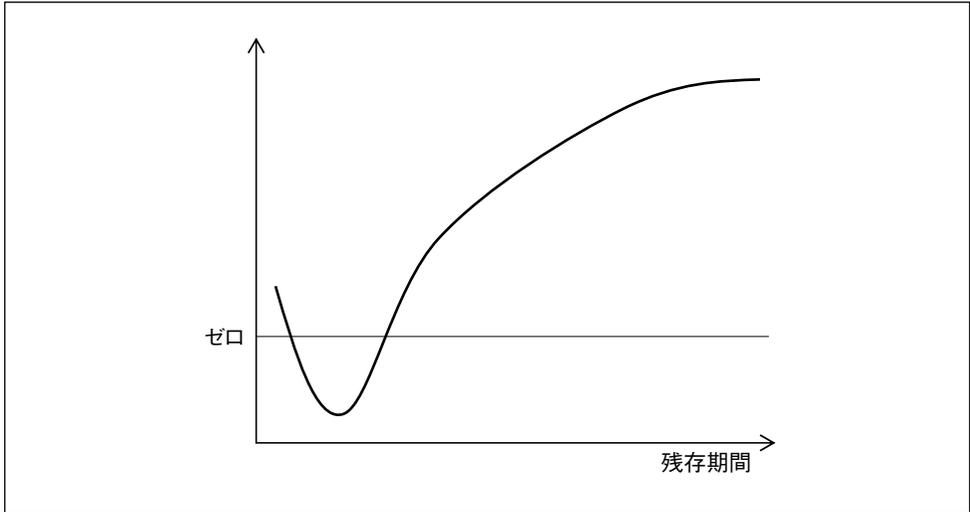
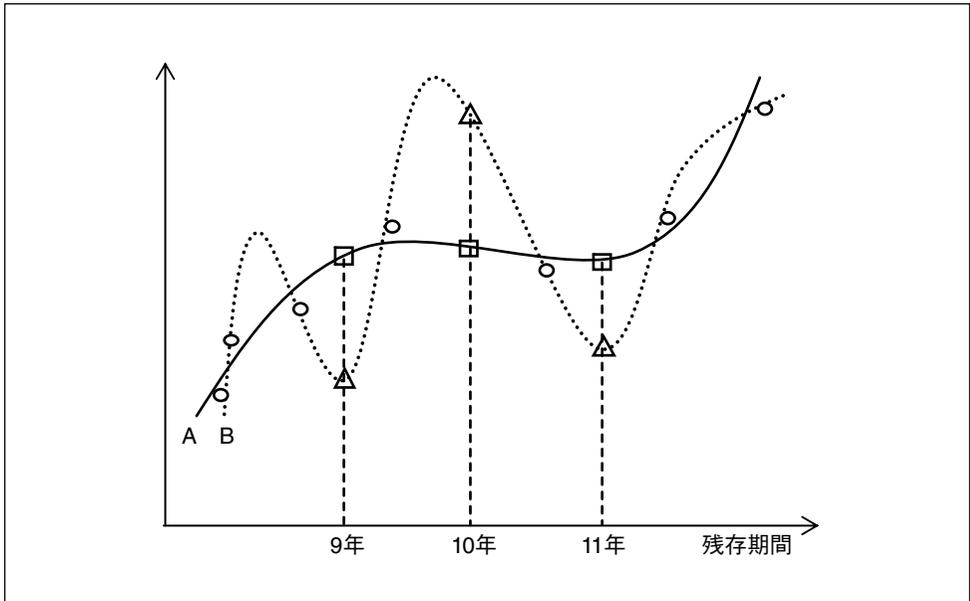


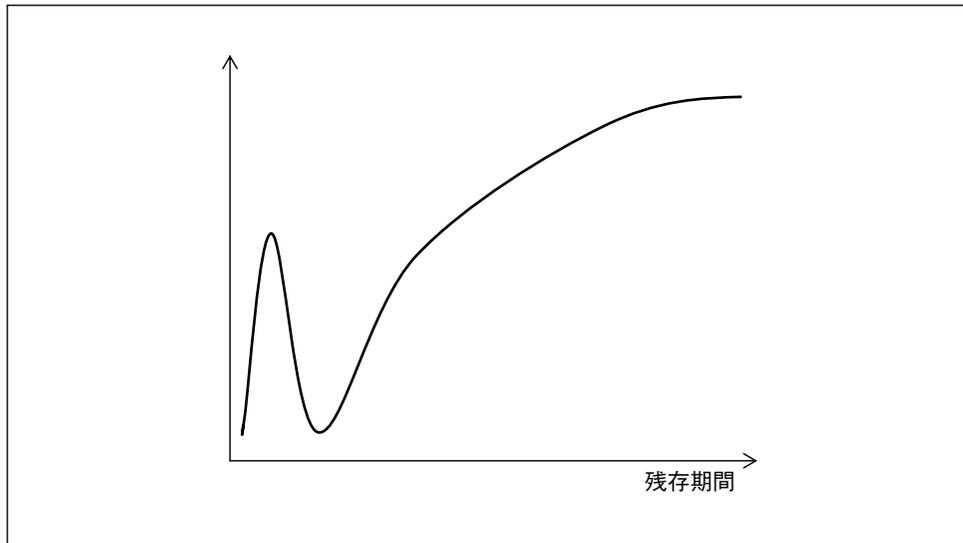
図2 ゼロ・カーブの凹凸（概念図）



備考：○は割引債の取引価格から計算されるゼロ・イールドを表す。また、□は推定手法 A によるゼロ・イールド推定値、△は推定手法 B によるゼロ・イールド推定値を表す。

の取引価格データを用いて、2つの推定手法によってゼロ・カーブを推定し、両手法により得られるゼロ・カーブの凹凸の違いを示した概念図である。図2では、推定手法 A も推定手法 B も、取引価格への適合度は高い。しかし、B のカーブの凹凸は A と比べて大きくなっている。B のカーブは、近接する年限のゼロ・イールドの水準は大きく乖離しないというゼロ・カーブの特徴に照らして不自然である可能

図3 推定ゼロ・カーブの異常値（概念図）



性が高い。このようなゼロ・カーブの過剰な凹凸は、債券価格が内包する情報を反映した結果というより、推定手法特有の性質により生じたものである可能性が考えられる。したがって、推定手法Bのような凹凸の非常に大きなゼロ・カーブを用いて金利の分析等を行うと、誤った結果を導いてしまうおそれがある。このため、ゼロ・カーブの性質として、図2の推定手法Bのように、凹凸の大きいゼロ・カーブを推定してしまう推定手法は望ましいとはいえないだろう。

ハ. 異常値

推定手法によっては、異常値といえる、過大もしくは過小な値をとるゼロ・イールドが推定されてしまうことがある。その原因として、推定手法の表現力が乏しく、債券の取引価格への適合が悪いことによって生じる場合と、取引価格への適合が過剰となる、いわゆる過剰適合によって生じる場合の2つの可能性が考えられる。

図3は、異常値を持つゼロ・カーブの例を示した概念図である。この図のカーブでは、短期の年限の一部で、金利が過大な値として推定されてしまっている。このような問題は推定手法の特性によって生じており、債券価格が内包する情報を反映したものとはいえない。

(3) 本稿で利用する記号等の定義

本節(4)で先行研究の内容を説明する前に、あらかじめ、本稿で利用する記号を準備しておく。

これ以降は簡単のため、推定を行う時点を $t = 0$ とし、各時点を $t = 0$ からの年数で表すこととする。また、割引関数 $Z(0, x)$ 、ゼロ・カーブ $y(0, x)$ 、および瞬間フォワード・レート $f(0, x)$ を、それぞれ、 $Z(x)$ 、 $y(x)$ 、 $f(x)$ と簡略化して表記することとする。

次に、市場で取引されている固定利付債に関する記号を定義する。推定日 ($t = 0$) 以前に発行された全ての銘柄を i ($i \in \{1, \dots, n_{name}\}$) とし、銘柄 i の額面を N^i 、クーポン・レート (年率) を c^i と置く。また、銘柄 i の全てのキャッシュ・フロー発生時点を、 $t = 0$ からの年数として、 $\mathbf{T}^i = \{T_1^i, \dots, T_{n_{cf}^i}^i\}$ と表す。ここで、 n_{cf}^i は、銘柄 i の $t = 0$ 以降に発生するキャッシュ・フローの数を表している。また、 $k < l$ ならば $T_k^i < T_l^i$ としている。さらに、 $t = 0$ 以前に発行された全ての銘柄に関して \mathbf{T}^i の和をとった集合を \mathbf{T} とする。すなわち、

$$\mathbf{T} = \bigcup_{i=1}^{n_{name}} \mathbf{T}^i := \{T_1, \dots, T_{n_{cf}}\}, T_j = \min_{\substack{i \in \{1, \dots, n_{name}\} \\ 1 \leq k \leq n_{cf}^i}} \{T_k^i; T_k^i > T_{j-1}\}, T_1 = \min_{\substack{i \in \{1, \dots, n_{name}\} \\ 1 \leq k \leq n_{cf}^i}} T_k^i,$$

と置く。

続いて、現時点 ($t = 0$) で市場取引が行われている銘柄に関する記号を定義する。まず、現時点において市場取引が行われている銘柄を $\mathbf{I} = \{v_1, \dots, v_{n_I}\}$ とする。さらに、各銘柄の現時点での取引価格 (裸値とする) を $\mathbf{P} = (P^{v_1}, \dots, P^{v_{n_I}})^T$ 、売買時の経過利子を $\mathbf{A} = (A^{v_1}, \dots, A^{v_{n_I}})^T$ とする⁵。また、 $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \mathbf{A}$ と置き、 $\bar{\mathbf{P}} = (\bar{P}^{v_1}, \dots, \bar{P}^{v_{n_I}})^T$ とする。ここで、添え字の \mathbf{T} は転置を表す (以下、断りの無い限り同様の扱いとする)。なお、経過利子の計算方法等の詳細については補論 1 (4) 口. を参照されたい。

次に、ゼロ・カーブ推定時点における、銘柄 v_i の理論価格を表すための記号を準備する。まず、銘柄 v_i のキャッシュ・フローに関するベクトル $\bar{\mathbf{c}}^{v_i}$ を以下のように定義する⁶。

$$\bar{\mathbf{c}}^{v_i} = \left(g(c^{v_i}, N^{v_i}, T_1), \dots, g(c^{v_i}, N^{v_i}, T_j), \dots, g(c^{v_i}, N^{v_i}, T_{n_{cf}}) \right)^T,$$

$$g(c^{v_i}, N^{v_i}, T_j) = \begin{cases} \frac{c^{v_i} N^{v_i}}{2} & \text{if } T_j \in \mathbf{T}^{v_i}, T_j \neq T_{n_{cf}^{v_i}}^{v_i} \\ \frac{c^{v_i} N^{v_i}}{2} + N^{v_i} & \text{if } T_j = T_{n_{cf}^{v_i}}^{v_i} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$\bar{\mathbf{c}}^{v_i}$ は $n_{cf} \times 1$ のベクトルである。 $\bar{\mathbf{c}}^{v_i}$ の第 j 成分を $\bar{c}_j^{v_i}$ と置くと、推定日時点での銘

5 \mathbf{P} および \mathbf{A} は現時点に依存することに注意が必要である。ここでは、簡単のため、現時点 $t = 0$ を省略して記述している。また、後述するモデル・パラメータ α も現時点に依存する変数である。

6 2001 年 3 月以後に発行された固定利付債については、ここで示したようにキャッシュ・フローが定まるが、2001 年 3 月以前に発行された固定利付債については、若干異なる形で定まる。詳細は補論 1 (4) イ. を参照のこと。

柄 v_i の経過利子を考慮した理論価格 Q^{v_i} は、

$$Q^{v_i} = \sum_{j=1}^{n_{ef}} \bar{c}_j^{v_i} Z(T_j), \quad (9)$$

と書ける。

次の2節(4)では、ゼロ・カーブ推定に関する主な先行研究の概要を解説する。ここでは直接的にせよ間接的にせよ、割引関数 $Z(x)$ をパラメータ α の関数としてモデル化する。以下では、この点を強調するために、割引関数 $Z(x)$ を $Z(x; \alpha)$ と書く場合がある。割引関数がパラメータ α に依存して決まるため、(9)式から、各銘柄の理論価格も α に依存して決定される。そこで、銘柄 v_i の理論価格を $Q^{v_i}(\alpha)$ と記述し、 $t = 0$ で取引されている全銘柄の理論価格をまとめてベクトルの形式で、 $\mathbf{Q}(\alpha) = (Q^{v_1}(\alpha), \dots, Q^{v_{n_r}}(\alpha))^T$ と書くことにする。

(4) 先行研究で提案された主な推定手法

債券の取引価格からゼロ・カーブを推定するためには、割引関数 $Z(x)$ をどのようにモデル化するのが論点となる。先行研究で提案された割引関数 $Z(x)$ のモデル化の方法はほとんどの場合、①区分多項式を利用する方法、②割引関数をノンパラメトリックに推定する方法、③多項式関数を利用する方法、④割引関数に多項式以外の特定の関数形を仮定する方法のいずれかに分類される。3節(3)では、妥当なゼロ・カーブ推定手法の選択を行うが、本節では3節(3)で選択対象となる推定手法の概要を説明する。

なお、ゼロ・カーブの推定に際しては、割引関数 $Z(x)$ のモデル化のほか、パラメータを決定するための目的関数を設定する必要がある。先行研究の中には、銘柄ごとにと取引価格とモデルから推定される理論価格の残差の二乗の単純な総和ではなく、残差の二乗に銘柄ごとに何らかの重みをつけて総和をとったものを目的関数としているものがある。例えば、Bank for International Settlements [2005] をみると、カナダ銀行やスペイン銀行等では、デュレーションの逆数の二乗で残差の二乗を重み付けして総和をとったものを目的関数としている。この目的関数は、長期債よりも短期債の価格適合性を重視するものである。ただし、本稿では本邦の固定利付国債(2、5、10、20、30年債)をゼロ・カーブの推定に用いるため、長期債よりも短期債の銘柄数が多くなっており、さらにデュレーションの逆数の二乗で重み付けをした残差二乗和を目的関数とすると、長期債への価格適合が過小となる懸念がある。したがって、本稿では重み付けは行わず、McCulloch [1975] や Steeley [1991] をはじめ多くの先行研究で用いられている、取引価格と理論価格の単純な残差二乗和を目的関数とする。また、乾・室町 [2000] 139 頁で指摘されているように、目的関数を取引価格と理論価格の単純な残差二乗和とすると、銘柄ごとの残差に不均一分散の

傾向があらわれる可能性がある。これへの対応として、銘柄ごとの残差に何らかの重みを付けた関数を目的関数とすることも考えられる。しかし、重みの付け方次第では、不均一分散が解消されない可能性があるだけでなく、銘柄によっては価格適合度が低くなる懸念もある。この点も考慮し、本稿では目的関数を取引価格と理論価格の単純な残差二乗和とする。

また、先行研究の中には、滑らかな瞬間フォワード・レートの期間構造を有するゼロ・カーブを推定することを目的として、取引価格と理論価格の残差二乗和に瞬間フォワード・レートの期間構造の曲率に関する罰則項を課した関数を目的関数としゼロ・カーブの推定を行う、いわゆる平滑化推定を行っているものがある (Fisher, Nychka, and Zervos [1995], Waggoner [1997], Jarrow, Ruppert, and Yu [2004] 等)。このような目的関数に則って推定を行うと、瞬間フォワード・レートの期間構造は滑らかになるが、その分、価格適合性は失われることになる。また平滑化手法は、価格適合性の悪化に加え、滑らかさを定める基準の選択等、恣意性のある余地がある。そこで本稿では、これらの点を踏まえ、3節での分析対象に平滑化推定法は含めず、平滑化をあえて行わなくても、比較的滑らかなゼロ・カーブが得られるモデルを選択する方針をとることとする。

以上を踏まえ、本節においては、平滑化推定法は取り上げず、解説を行う手法の目的関数は取引価格と理論価格の残差二乗和として議論を進める。

Ⅰ. 区分多項式関数を利用する手法 (区分多項式法⁷)

ここでは、割引関数のモデル化に、区分多項式関数を利用することを提案した先行研究について紹介する。先行研究では、割引関数をモデル化する方法として主に、割引関数を直接モデル化する方法、瞬間フォワード・レートをモデル化することで、割引関数を間接的に定める方法等が提案されている。

まず、区分多項式関数を定義する。そのためには、節点と呼ばれる点列を設定しなければならない。節点とは、

$$u_m \leq u_{m+1} \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n,$$

という点列である。ここで、 m, n は整数である。節点が決まると、整数 j に対して、 l 次の区分多項式関数 $B(j, x)$ は、実数 x に関して連続で、隣接する節点の小区間 $[u_h, u_{h+1}]$ ($m \leq h \leq n-1$) や $(-\infty, u_m]$, $[u_n, \infty)$ 上で l 次多項式となる関数を意味する。

⁷ 先行研究では、割引関数がスプライン関数と呼ばれる区分多項式によってモデル化される場合が多いので、スプライン関数法とも呼ばれる。 l 次のスプライン関数とは、 $l-1$ 階までの導関数が連続となる区分多項式である。

割引関数を直接モデル化する手法

(イ) McCulloch [1975] の方法

McCulloch [1975] は、割引関数 $Z(x)$ を区分多項式関数の線形結合としてモデル化した。まず節点を、 $0 = u_{-1} = u_0 = u_1 < u_2 < \dots < u_{n_{knot}}$ となるようにとる。そのうえで、McCulloch [1975] は、区分多項式 $B(k, x)$ ($k = 0, \dots, n_{knot}$) を、以下の (10) 式で示す x に関する 3 次区分多項式と定義した。

$k \neq n_{knot}$ に対して

$$B(k, x) = \begin{cases} 0, & x \leq u_{k-1}, \\ \frac{(x - u_{k-1})^3}{6(u_k - u_{k-1})}, & u_{k-1} < x \leq u_k, \\ \frac{(u_k - u_{k-1})^2}{6} + \frac{(u_k - u_{k-1})(x - u_k)}{2} \\ \quad + \frac{(x - u_k)^2}{2} - \frac{(x - u_k)^3}{6(u_{k+1} - u_k)}, & u_k < x \leq u_{k+1}, \\ (u_{k+1} - u_{k-1}) \left(\frac{2u_{k+1} - u_k - u_{k-1}}{6} + \frac{x - u_{k+1}}{2} \right), & u_{k+1} < x, \end{cases}$$

$$k = n_{knot} \text{ に対して } B(k, x) = x. \quad (10)$$

McCulloch [1975] は、割引関数 $Z(x)$ を、(10) 式で定義された区分多項式の線形結合として次のように表現した。

$$Z(x) = 1 + \sum_{k=0}^{n_{knot}} B(k, x) \alpha_k. \quad (11)$$

ここで、割引関数の本来の性質から、 $Z(0) = 1$ が成り立たなければならないが、(10) 式より $B(k, 0) = 0$ ($k = 0, \dots, n_{knot}$) となるため、(11) 式のように割引関数をモデル化することに非整合な点は生じない。

(11) 式を (9) 式に代入すると、銘柄 v_i の理論価格 Q^{v_i} は、パラメータ $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_{knot}})^T$ の関数として以下のように表現される。

$$Q^{v_i}(\alpha) = \left(\sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_i} \right) + \sum_{k=0}^{n_{knot}} \left(\sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_i} B(k, T_j) \right) \alpha_k = \left(\sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_i} \right) + (\bar{\mathbf{c}}^{v_i})^T \mathbf{B} \alpha. \quad (12)$$

ここで \mathbf{B} は、 (j, k) 成分が $B(k, T_j)$ の $n_{cf} \times (n_{knot} + 1)$ 行列である。また、 $\bar{\mathbf{c}}^{v_i}$ は第

j 成分が $\bar{c}_j^{v_i}$ の $n_{cf} \times 1$ のベクトルである。

本節の冒頭で述べたように、本稿のゼロ・カーブ推定では、目的関数を債券の取引価格と理論価格の残差二乗和とする。この場合のパラメータ α の推定値 $\hat{\alpha}$ は、以下の最適化問題の解として求められる。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \arg \min_{\alpha} \left[(\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{Q}}(\alpha))^T (\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{Q}}(\alpha)) \right], & (13) \\ \tilde{\mathbf{P}} &:= (\bar{P}^{v_1} - \sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_1}, \dots, \bar{P}^{v_{n_I}} - \sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_{n_I}})^T, \\ \tilde{\mathbf{Q}}(\alpha) &:= (Q^{v_1}(\alpha) - \sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_1}, \dots, Q^{v_{n_I}}(\alpha) - \sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_{n_I}})^T. \end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{Q}}(\alpha)$ は α に関する線形関数であるので、(13) 式は、最小二乗最適化問題として捉えることができる。したがって、パラメータ α の最適解 $\hat{\alpha}$ は、

$$\hat{\alpha} = ((\bar{\mathbf{c}}\mathbf{B})^T \bar{\mathbf{c}}\mathbf{B})^{-1} (\bar{\mathbf{c}}\mathbf{B})^T \tilde{\mathbf{P}}, \quad (14)$$

となる。ここで $\bar{\mathbf{c}}$ を $\bar{\mathbf{c}} = (\bar{\mathbf{c}}^{v_1}, \dots, \bar{\mathbf{c}}^{v_{n_I}})^T$ と置いた。 $\bar{\mathbf{c}}$ は $n_I \times n_{cf}$ の大きさの行列である。また、 \mathbf{X}^{-1} は正方行列 \mathbf{X} の逆行列を表す。

以下では、本手法を「割引率をモデル化する McCulloch [1975] の方法」と呼ぶ場合がある。

(口) Steeley [1991] の方法

Steeley [1991] は、McCulloch [1975] と同様、割引関数 $Z(x)$ を区分多項式関数の線形結合として表現した。しかし、割引関数 $Z(x)$ について、以下の (15) 式で表現した点が異なる。

$$Z(x) = \sum_{k=-3}^{n_{knot}-1} B(k, x) \alpha_k. \quad (15)$$

また、Steeley [1991] では、区分多項式関数 $B(k, x)$ として、McCulloch [1975] とは異なる関数形を用いることを提案した。まず、 $B(k, x)$ の定義のために、節点を $u_{-3} < \dots < u_{n_{knot}} < u_{n_{knot}+1} < u_{n_{knot}+2} < u_{n_{knot}+3}$ と置く。そのうえで、 $B(k, x)$ は、以下の (16) 式のように再帰的に定義される。

$D = 1$ のとき

$$B(k, x) = B_D(k, x) := \begin{cases} 1, & u_k \leq x < u_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$D > 1$ のとき

$$\begin{aligned} B(k, x) &= B_D(k, x) \\ &= \frac{u_{D+k} - x}{u_{D+k} - u_{k+1}} B_{D-1}(k+1, x) + \frac{x - u_k}{u_{D+k-1} - u_k} B_{D-1}(k, x). \end{aligned} \quad (16)$$

(16) 式の関数は **B** スプライン関数と呼ばれている。Steeley [1991] では、 $D = 4$ とし、区分多項式関数として 3 次関数を扱うモデルを提案した。ここで、(15) 式と $Z(0) = 1$ より、

$$\sum_{k=-3}^{n_{knot}-1} B(k, 0) \alpha_k = 1, \quad (17)$$

が成り立たなければならないことに注意が必要である。

(15) 式を (9) 式に代入すると、銘柄 v_i の理論価格 Q^{v_i} は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} Q^{v_i}(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_i} \left(\sum_{k=-3}^{n_{knot}-1} B(k, T_j) \alpha_k \right) = \sum_{k=-3}^{n_{knot}-1} \left(\sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_i} B(k, T_j) \right) \alpha_k \\ &= (\bar{\mathbf{c}}^{v_i})^T \mathbf{B} \alpha. \end{aligned} \quad (18)$$

ここで \mathbf{B} は、 (j, k) 成分が $B(k, T_j)$ の $n_{cf} \times (n_{knot} + 3)$ 行列である。

(17) 式と (18) 式から、パラメータ α は次の制約条件付きの最小二乗最適化問題の解として推定される。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \arg \min_{\alpha} [(\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}(\alpha))^T (\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}(\alpha))], \\ s.t. \quad &\sum_{k=-3}^{n_{knot}-1} B(k, 0) \alpha_k = 1. \end{aligned} \quad (19)$$

これを解くと、最適解 $\hat{\alpha}$ は下の (20) 式となる。

$$\hat{\alpha} = \{(\bar{\mathbf{c}}\mathbf{B})^T \bar{\mathbf{c}}\mathbf{B}\}^{-1} (\bar{\mathbf{c}}\mathbf{B})^T \bar{\mathbf{P}} + \frac{1 - \mathbf{B}_0^T \{(\bar{\mathbf{c}}\mathbf{B})^T \bar{\mathbf{c}}\mathbf{B}\}^{-1} (\bar{\mathbf{c}}\mathbf{B})^T \bar{\mathbf{P}}}{\mathbf{B}_0^T \{(\bar{\mathbf{c}}\mathbf{B})^T \bar{\mathbf{c}}\mathbf{B}\}^{-1} \mathbf{B}_0} \{(\bar{\mathbf{c}}\mathbf{B})^T \bar{\mathbf{c}}\mathbf{B}\}^{-1} \mathbf{B}_0. \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{B}_0 = (B(-3, 0), \dots, B(n_{knot} - 1, 0))^T$ と置いている。

以下では、本手法を「割引率をモデル化する Steeley [1991] の方法」と呼ぶ場合がある。なお、本手法の推定アルゴリズムの詳細は補論2でまとめている。

瞬間フォワード・レートをモデル化する手法

(ハ) Fisher, Nychka, and Zervos [1995] の方法

Fisher, Nychka, and Zervos [1995] は、割引関数 $Z(x)$ 、ゼロ・イールド $y(x)$ および瞬間フォワード・レート $f(x)$ を区分多項式関数でそれぞれモデル化する場合のゼロ・カーブの推定方法について一般的な形式で整理した。本稿では、その中で $f(x)$ を直接モデル化する場合について解説する⁸。

Fisher, Nychka, and Zervos [1995] は、瞬間フォワード・レート $f(x)$ を以下のように、区分多項式関数の線形結合としてモデル化した。

$$f(x) = \sum_{k=m}^n B(k, x) \alpha_k. \quad (21)$$

ここで $B(k, x)$ は、ある区分多項式関数とする。

(7) 式と (21) 式を用いると、割引関数は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} Z(x) &= \exp\left(-\int_0^x f(s) ds\right) = \exp\left(-\int_0^x \sum_{k=m}^n B(k, s) \alpha_k ds\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{k=m}^n \left(\int_0^x B(k, s) ds\right) \alpha_k\right) = \exp\left(-\sum_{k=m}^n \bar{B}(k, x) \alpha_k\right), \\ \bar{B}(k, x) &:= \int_0^x B(k, s) ds. \end{aligned} \quad (22)$$

(22) 式を (9) 式に代入すると、理論価格 Q^{v_i} は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} Q^{v_i}(\boldsymbol{\alpha}) &= \sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_i} \exp\left(-\sum_{k=m}^n \bar{B}(k, T_j) \alpha_k\right) = (\bar{\mathbf{c}}^{v_i})^T \exp(-\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\alpha}), \\ \exp(-\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\alpha}) &:= \left(\exp\left(-\sum_{k=m}^n \bar{B}(k, T_1) \alpha_k\right), \dots, \exp\left(-\sum_{k=m}^n \bar{B}(k, T_{n_{cf}}) \alpha_k\right)\right)^T. \end{aligned} \quad (23)$$

⁸ Fisher, Nychka, and Zervos [1995] の主たる目的は、滑らかな瞬間フォワード・レートの期間構造を推定することであり、平滑化推定を行っている。しかし、本節の冒頭でも述べたとおり、3節での分析対象に平滑化推定法は取り上げない。そこで、ここでの Fisher, Nychka, and Zervos [1995] によるモデルの解説は、当該研究の目的関数とは異なるが、理論価格と取引価格の単純な残差二乗和を目的関数として話を進める。

ここで、 $\bar{\mathbf{B}}_{j,k} = \bar{B}(k, T_j)$ である。

$Q^{v_i}(\boldsymbol{\alpha})$ は $\boldsymbol{\alpha}$ に関して非線形関数であるため、 $\boldsymbol{\alpha}$ の最適解を求めるためには、一般的には非線形最適化問題を解くことが必要となる。しかし、Fisher, Nychka, and Zervos [1995] は、(23) 式を任意の点 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^0$ の周りで 1 次テイラー近似を行うことで、最適化問題の簡単化を図った。具体的には、 $Q^{v_i}(\boldsymbol{\alpha})$ を以下のように近似した⁹。

$$\begin{aligned} Q^{v_i}(\boldsymbol{\alpha}) &\approx (\bar{\mathbf{c}}^{v_i})^T \left(\exp(-\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\alpha}^0) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \exp(-\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\alpha}) \Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^0} (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^0) \right) \\ &= Q^{v_i}(\boldsymbol{\alpha}^0) + (\bar{\mathbf{c}}^{v_i})^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \exp(-\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\alpha}) \Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^0} (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^0) \\ &= Q^{v_i}(\boldsymbol{\alpha}^0) - (\bar{\mathbf{c}}^{v_i})^T \left[\bar{\mathbf{B}} * (\exp(-\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\alpha}^0) \mathbf{1}^T) \right] (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^0). \end{aligned} \quad (24)$$

ここで $\mathbf{1}$ は、 $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ の $(n-m+1)$ 次元ベクトルである。また * は同次元のベクトルまたは行列の成分同士の積を計算することを表すとす。ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{v_i}(\boldsymbol{\alpha}^0) &= -(\bar{\mathbf{c}}^{v_i})^T \left[\bar{\mathbf{B}} * (\exp(-\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\alpha}^0) \mathbf{1}^T) \right], \\ \mathbf{Y}^{v_i}(\boldsymbol{\alpha}^0) &= \bar{P}^{v_i} - Q^{v_i}(\boldsymbol{\alpha}^0) + \mathbf{X}^{v_i}(\boldsymbol{\alpha}^0) \boldsymbol{\alpha}^0, \end{aligned} \quad (25)$$

と置くと、(23) 式を任意の点 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^0$ の周りで上述のように近似した時の最適解 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^0)$ は、以下の最適化問題の解となる。

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^0) &= \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}} \left[(\mathbf{Y}(\boldsymbol{\alpha}^0) - \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}^0)\boldsymbol{\alpha})^T (\mathbf{Y}(\boldsymbol{\alpha}^0) - \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}^0)\boldsymbol{\alpha}) \right], \\ \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}^0) &:= (\mathbf{X}^{v_1}(\boldsymbol{\alpha}^0), \dots, \mathbf{X}^{v_{n_f}}(\boldsymbol{\alpha}^0))^T, \\ \mathbf{Y}(\boldsymbol{\alpha}^0) &:= (\mathbf{Y}^{v_1}(\boldsymbol{\alpha}^0), \dots, \mathbf{Y}^{v_{n_f}}(\boldsymbol{\alpha}^0))^T. \end{aligned} \quad (26)$$

なお、(26) 式の最適化問題では割引関数に関する制約条件 $Z(0) = 1$ を考慮する必要がない。なぜなら、(22) 式から、

$$Z(0) = \exp\left(-\sum_{k=m}^n \bar{B}(k, 0) \alpha_k\right) = \exp\left(-\sum_{k=m}^n 0 \times \alpha_k\right) = 1,$$

が成り立つためである。したがって、(26) 式は制約条件の無い最小二乗問題として解くことができ、

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^0) = (\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}^0)^T \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}^0))^{-1} \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}^0)^T \mathbf{Y}(\boldsymbol{\alpha}^0), \quad (27)$$

となる。ただし、この解はテイラー近似を行う点 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^0$ に依存する。そこで、Fisher,

⁹ 原論文では、(24) 式に相当する数式に誤りがみられる。

Nychka, and Zervos [1995] では、(27) 式で得られた $\hat{\alpha}(\alpha^0)$ (この点を α^1 とする) の周りで再び (24) 式のように $Q^{vi}(\alpha)$ のテイラー近似を行い、(27) 式を用いて最適解 $\hat{\alpha}(\alpha^1) \equiv \alpha^2$ を計算し、さらに α^2 に関しても同様の操作を繰り返して、最適解 $\hat{\alpha}(\alpha^i)$ が収束する点をパラメータの最適解とすることを提案している。

以上が、Fisher, Nychka, and Zervos [1995] で提案された推定手法であるが、具体的な推定においては、(21) 式における区分多項式関数 $B(k, x)$ を定めなければならない。3 節(3)で推定手法の選択を行ううえで選択対象とする推定手法としては、① McCulloch [1971] で提案された区分 2 次多項式¹⁰を $B(k, x)$ として用いる手法 (以下、瞬間フォワード・レートをモデル化する McCulloch [1971] モデルと呼ぶ場合がある)、② Steeley [1991] の 2 次 B スプライン関数 ((16) 式で $D = 3$ の場合) を $B(k, x)$ として用いる手法 (以下、瞬間フォワード・レートをモデル化する Steeley [1991] モデルと呼ぶ場合がある) を対象とする。①、②はいずれも、本節(4)イ.(イ)や(ロ)の割引関数を直接モデル化する場合と同様に、割引関数は 3 次関数となる。

ロ. 割引関数をノンパラメトリックに推定する方法(ノンパラメトリック法)

(イ) Tanggaard [1997] の方法

Tanggaard [1997] は、本節(4)イ. でみたような区分多項式関数で割引関数を表すことはせず、個々の期間に対応する割引関数をそれぞれ 1 つのパラメータでモデル化した¹¹。すなわち、理論価格 $Q^{vi}(\alpha)$ を以下のように表現した。

$$Q^{vi} = \sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{vi} \alpha_j = (\bar{\mathbf{c}}^{vi})^T \alpha, \quad \alpha_j = Z(T_j). \quad (28)$$

理論価格 $Q^{vi}(\alpha)$ は α に関して線形関数であるため、最適解 $\hat{\alpha}$ は以下の (29) 式を解くことで得られる。

$$\min_{\alpha} [(\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}(\alpha))^T (\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}(\alpha))]. \quad (29)$$

これを解くと、最適解 $\hat{\alpha}$ は、

$$\hat{\alpha} = (\bar{\mathbf{c}}^T \bar{\mathbf{c}})^{-1} \bar{\mathbf{c}}^T \bar{\mathbf{P}}, \quad (30)$$

となる。ここで $\bar{\mathbf{c}} = (\bar{\mathbf{c}}^{v_1}, \dots, \bar{\mathbf{c}}^{v_{n_t}})^T$ である。

10 (10) 式を x に関して微分した関数 (McCulloch [1971] 参照)。

11 ノンパラメトリック法として、ここで紹介する Tanggaard [1997] 以外にも、Carleton and Cooper [1976] や Houglet [1980] 等がある。

なお、上述の方法によって推定されるのは、債券のキャッシュ・フロー発生時点までの期間の割引関数の値のみである。したがって、ゼロ・カーブを得るためには、キャッシュ・フローが発生しない時点までの期間の割引関数の値を何らかの方法で補間して求める必要がある。

ハ. 多項式を利用する手法（多項式法）

(イ) Schaefer [1981] の方法

Schaefer [1981] は、割引関数 $Z(x)$ をバーンスタイン多項式と呼ばれる多項式の線形結合の形で表現した。まず、 D 次のバーンスタイン多項式 $B_D(k, x)$ とは、以下のように定義される多項式である。

$$B_D(k, x) = \sum_{j=0}^{D-k} (-1)^{j+1} \binom{D-k}{j} \frac{x^{k+j}}{k+j}, \quad k > 0,$$

$$\binom{D-k}{j} := \frac{(D-k)!}{(D-k-j)!j!},$$

$$B_D(0, x) = 1. \tag{31}$$

このバーンスタイン多項式を用いて Schaefer [1981] は、割引関数 $Z(x)$ をバーンスタイン多項式の線形結合で以下のように表現した。

$$Z(x) = \sum_{k=0}^D B_D(k, x) \alpha_k.$$

ここで、 $Z(0) = 1$ と $B_D(k, 0) = 0, k > 0$ から $\alpha_0 = 1$ である。したがって、上式は以下のように表現できる。

$$Z(x) = \sum_{k=0}^D B_D(k, x) \alpha_k = 1 + \sum_{k=1}^D B_D(k, x) \alpha_k. \tag{32}$$

(32)式を(9)式に代入すると、銘柄 v_i の理論価格 Q^{v_i} は、パラメータ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)^T$ の関数として以下のように表現される。

$$Q^{v_i}(\alpha) = \left(\sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_i} \right) + \sum_{k=1}^D \left(\sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_i} B_D(k, T_j) \right) \alpha_k = \left(\sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_i} \right) + (\bar{\mathbf{c}}^{v_i})^T \mathbf{B} \alpha. \tag{33}$$

ここで、 \mathbf{B} は (j, k) 成分が $B_D(k, T_j)$ の $n_{cf} \times D$ 行列である。

(33) 式より、最適なパラメータ $\hat{\alpha}$ は、以下の最小二乗問題を解くことにより得られる。

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \left[\left(\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{Q}}(\alpha) \right)^T \left(\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{Q}}(\alpha) \right) \right], \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbf{P}} := \left(\bar{P}^{v_1} - \sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_1}, \dots, \bar{P}^{v_{n_I}} - \sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_{n_I}} \right)^T,$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\alpha) := \left(Q^{v_1}(\alpha) - \sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_1}, \dots, Q^{v_{n_I}}(\alpha) - \sum_{j=1}^{n_{cf}} \bar{c}_j^{v_{n_I}} \right).$$

したがって、最適解 $\hat{\alpha}$ は、

$$\hat{\alpha} = \left((\bar{\mathbf{c}}\mathbf{B})^T \bar{\mathbf{c}}\mathbf{B} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{c}}\mathbf{B})^T \tilde{\mathbf{P}}, \quad (35)$$

となる。

二. 瞬間フォワード・レートに特定の関数形を仮定する手法（関数形法）

(イ) Nelson and Siegel [1987] の方法

Nelson and Siegel [1987] は、瞬間フォワード・レート $f(x)$ をモデル化するうえで、下の (36) 式のように、パラメトリックな関数を使った。

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \exp\left(-\frac{x}{\alpha_3}\right) + \alpha_2 \frac{x}{\alpha_3} \exp\left(-\frac{x}{\alpha_3}\right). \quad (36)$$

(8) 式と (36) 式から、ゼロ・カーブ $y(x)$ は以下のように計算される。

$$y(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{1 - \exp(-x/\alpha_3)}{x/\alpha_3} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1 - \exp(-x/\alpha_3)}{x/\alpha_3} - \exp\left(-\frac{x}{\alpha_3}\right) \right). \quad (37)$$

ここで、銘柄 v_i の理論価格 Q^{v_i} は (9) 式で表現されるが、Nelson and Siegel [1987] の方法では、割引関数 $Z(x; \alpha)$ は、(37) 式の形からわかるようにパラメータ $\alpha := (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ の非線形関数となるため、最適解 $\hat{\alpha}$ を求めるには、以下の非線形最適化問題を解くことになる。

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \left\{ (\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}(\alpha))^T (\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}(\alpha)) \right\}. \quad (38)$$

(口) Svensson [1995] の方法

Svensson [1995] は、瞬間フォワード・レートのモデル化に際し、Nelson and Siegel [1987] で提案された関数形 ((36) 式参照) に新たな項を追加し、瞬間フォワード・レート $f(x)$ の表現力の向上を図った。具体的には、 $f(x)$ を以下の関数形でモデル化した。

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \exp\left(-\frac{x}{\alpha_3}\right) + \alpha_2 \frac{x}{\alpha_3} \exp\left(-\frac{x}{\alpha_3}\right) + \alpha_4 \frac{x}{\alpha_5} \exp\left(-\frac{x}{\alpha_5}\right). \quad (39)$$

(39) 式から、ゼロ・イールド $y(x)$ は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} y(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds &= \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{1 - \exp(-x/\alpha_3)}{x/\alpha_3} \right) \\ &+ \alpha_2 \left(\frac{1 - \exp(-x/\alpha_3)}{x/\alpha_3} - \exp\left(-\frac{x}{\alpha_3}\right) \right) \\ &+ \alpha_4 \left(\frac{1 - \exp(-x/\alpha_5)}{x/\alpha_5} - \exp\left(-\frac{x}{\alpha_5}\right) \right). \quad (40) \end{aligned}$$

(40) 式から、Nelson and Siegel [1987] の方法と同様に、銘柄 v_i の理論価格 Q^{v_i} はパラメータの非線形関数となるので、パラメータ推定は非線形最適化問題を解くことになる。

(5) 推定手法の自由度と局所性

本節(2)では、一般的に望ましくないと考えられるゼロ・カーブを示したが、ここでは、望ましくないゼロ・カーブを排除し、望ましいゼロ・カーブを推定する方法を選択するうえで有用な観点として、推定手法の「自由度」と「局所性」という2つの概念を導入し、これに基づいて各種のゼロ・カーブ推定手法を整理する。

まず、推定手法の自由度を説明する。本節(4)で紹介したゼロ・カーブ推定手法の先行研究では、割引関数や瞬間フォワード・レート等を関数でモデル化していた。自由度は、その関数のパラメータ数とパラメータに課される制約条件の数の差として定義される。例えば、本節(4)イ.(イ)で説明した割引率をモデル化する McCulloch [1975] による方法の自由度は(節点数+1)となる一方、本節(4)ニ.(イ)で説明した Nelson and Siegel [1987] による方法の自由度は4となる。一般に、自由度の低い推定手法は、債券の取引価格を十分に捉えることができず、自由度の高い手法が取引価格を柔軟に捉えることができる。しかし、自由度が高すぎる推定手法は、本節(2)で示したように、推定されるゼロ・カーブの凹凸が過度に大きくなる可能性や、推定値が過小もしくは過大な異常値を示すなど適切な内挿が行われない可能性がある。このような望ましくないゼロ・カーブを推定することを避けるためには、自由

度が高すぎないゼロ・カーブ推定手法を用いることが必要と考えられる。

次に、推定手法の局所性を説明する。簡単のために、割引債が市場で取引されており、割引債の取引価格を用いてゼロ・カーブの推定を行うと仮定する。局所性とは、割引債の中の1銘柄の価格が変化することに伴い、推定されるゼロ・カーブ全体の形状が変化する度合を表す概念である。すなわち、ある年限の割引債価格が変化することに伴い、他の年限のゼロ・カーブの推定値が大きく変化してしまう場合には、推定手法の局所性は低いといえる。一方、他の年限のゼロ・カーブの推定値が大きく変化しない推定手法は局所性が高いといえる。局所性の高い推定手法の利点は、債券価格に異常値が存在する場合でも、異常値を示す債券の年限以外のゼロ・カーブの推定結果にほとんど影響を及ぼさない点である。また、凹凸の変化する点が複数存在するような複雑な形状のゼロ・カーブを推定する場合、局所性の高い手法を用いることで、複雑な形状を捉えることができる可能性が高まるという利点もある。

以上の局所性の概念の定式化を以下で行う。ここで、割引債の元の価格データを \mathbf{P} 、残存期間 $T_{n_{cf}}^{v_i}$ の銘柄 v_i の価格のみが λP^{v_i} 変化し、他の銘柄の価格には変化が無い場合の価格データを $\mathbf{P} + \lambda P^{v_i}$ とする。そして、 \mathbf{P} から推定手法 X を用いて推定されるゼロ・カーブを $\tilde{y}_X(x; \mathbf{P})$ 、 $\mathbf{P} + \lambda P^{v_i}$ から推定されるゼロ・カーブを $\tilde{y}_X(x; \mathbf{P} + \lambda P^{v_i})$ とする。すると、推定手法 X の年限 $T_{n_{cf}}^{v_i}$ における局所性を測る指標として、以下で定義される指標 $l_X(\lambda, \varepsilon; T_{n_{cf}}^{v_i})$ が考えられる。

$$l_X(\lambda, \varepsilon; T_{n_{cf}}^{v_i}) := \int_0^{T_{n_{cf}}^{v_i} - \varepsilon} |\tilde{y}_X(x; \mathbf{P} + \lambda P^{v_i}) - \tilde{y}_X(x; \mathbf{P})|^2 dx + \int_{T_{n_{cf}}^{v_i} + \varepsilon}^{T_{n_{cf}}} |\tilde{y}_X(x; \mathbf{P} + \lambda P^{v_i}) - \tilde{y}_X(x; \mathbf{P})|^2 dx. \quad (41)$$

ここで、 ε は十分に小さい正の実数、 λ は実数とする。(41) 式の値が他の推定手法と比べて小さな値をとれば、少なくとも、推定手法 X は他の推定手法よりも、銘柄 v_i の残存年数 $T_{n_{cf}}^{v_i}$ の周りで局所性が高いといえる。さらに、全ての銘柄（全ての年限）に関して、(41) 式から計算される値が他の推定手法と比べて小さな値をとれば、その推定手法は、全ての年限で局所性が高いことを意味する。

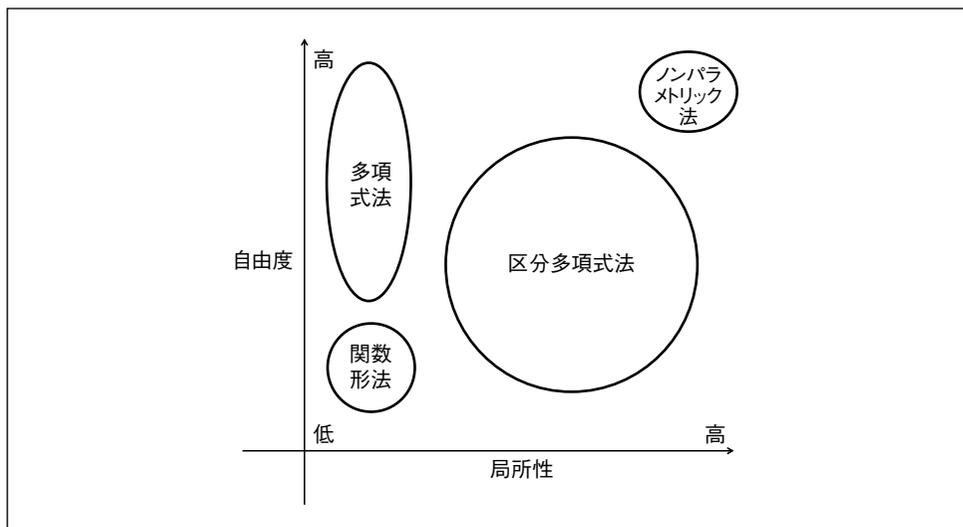
しかし(41) 式は、 ε や λ のとり方に依存するだけでなく、全ての銘柄について計算しないと、全ての年限での局所性の高低を判断することができないため、使い勝手が良い指標とはいえない。そこで推定手法の局所性を、おおまかではあるが比較的簡単に評価できる指標として、局所性を評価したい年限の割引率の決定に寄与するパラメータ数と自由度の比をみるのが考えられる。当該割合が小さいほど、局所性が高いことを意味する。例えば、Nelson and Siegel [1987] の方法でこの比を計算すると、任意の年限で1となる。次に、本節(4)イ.(ロ)で説明した割引率をモデル化す

る Steeley [1991] の方法でこの割合を計算する。仮に、節点を $u_l = l (l = -3, \dots, 33)$ とした場合、自由度は 32 となる。ここで、特定の年限の割引関数の決定に寄与するパラメータ数と自由度の比を計算すると、1 年未満の年限で $4/32 = 0.125$ 、2 年～30 年までの 1 年刻みの年限で $2/32 = 0.0625$ 、その他の年限で $3/32 = 0.09375$ となる。したがって、任意の年限において、割引率をモデル化する Steeley [1991] の方法の方が、Nelson and Siegel [1987] の方法よりも局所性が高いことがわかる。

次に、同じ区分多項式法の中でも局所性が異なることを以下でみる。割引率をモデル化する Steeley [1991] の方法と、割引率をモデル化する McCulloch [1975] の方法では局所性の高さが異なる。割引率をモデル化する McCulloch [1975] の方法では、節点を $u_l = l (l = 0, \dots, 30)$, $u_{-1} = 0$ にとると、自由度は 31 となる。したがって、1 年以下の年限の割引関数の決定に寄与するパラメータ数と自由度の比は $2/31 = 0.0645$ 、1 年超 2 年以下の年限の比は $3/31 = 0.0968$ 、2 年超 3 年以下の年限の比は $4/31 = 0.129$ となり、年限が大きくなるにつれて当該比は大きくなっていく。したがって、残存期間が 1 年以下の年限以外で、Steeley [1991] の方法の方が McCulloch [1975] の方法と比べて当該比が小さな値を示すことがわかる。以上から、Steeley [1991] の方法の方が、局所性が高いことがみてとれる¹²。

本節(4)で示した先行研究について、自由度と局所性の概念から整理すると、図 4 のようになる。ノンパラメトリック法の 1 つである Tanggard [1997] の方法は、債券のキャッシュ・フローが発生する時点全ての割引率をパラメータとして、債券価格から直接推定することになる。したがって、当該手法の自由度は、他の推定手法と比べて非常に高いものとなる。また、当該手法は、特定の関数形を前提として割引

図 4 各手法の特徴（概念図）



12 McCulloch [1971] の方法も、McCulloch [1975] の方法と同様に、Steeley [1991] の方法と比べて局所性が低いことがわかる。

率をモデル化していないため、局所性も非常に高くなる。一方、多項式法や関数形法は、割引関数や瞬間フォワード・レートの期間構造全体を1つの関数形で表現するため、局所性の高さには限界がある。自由度に関しては、多項式法ではモデル化に用いる多項式の次数を変えることによってさまざまな自由度のモデルを考えることができる。一方、関数形法の自由度も同様である。区分多項式法については、自由度は節点数の多寡に依存する。節点数を増やすと、モデルの自由度が高まる一方、ある年限の割引率に寄与するパラメータの数と自由度の比が低下するため、局所性は高まる。したがって、区分多項式法は、多項式法や関数形法と比べると相対的に局所性が高い。

次節では、本節(4)で紹介した8つのゼロ・カーブ推定手法に対して比較分析を行うが、多くの先行研究の中から分析対象を8つの推定手法に絞込んだ理由についてここで触れておきたい。ノンパラメトリック法、関数形法、多項式法については、先行研究がある程度限られており、おのおのから代表的な推定手法を1つないし2つ選択することにした。一方、区分多項式法については、先行研究で幾つかの手法が提案されているが、局所性の面で違いのある McCulloch [1971, 1975] の方法と Steeley [1991] の方法を分析対象に含めることにする。なお、区分多項式を用いたモデル化には、割引率をモデル化する方法(本節(4)イ.(イ)と(ロ))と瞬間フォワード・レートをモデル化する方法(本節(4)イ.(ハ))があるため、McCulloch [1971, 1975] の方法と Steeley [1991] の方法に基づく計4つの推定手法を分析対象とした。区分多項式法にはこれらの他にも、例えば Vasicek and Fong [1982] や McCulloch and Kochin [2000]¹³等が知られている。これらの手法は、McCulloch [1971, 1975] の方法と Steeley [1991] の方法の間に局所性の水準が収まるか、もしくは下回ることになる。そこで、上記の4つの手法以外の区分多項式法については、本稿での分析対象から外すことにした。

3. 手法の選択基準と比較結果

本稿の目的は、2節で紹介したような代表的なゼロ・カーブ推定手法の中から、本邦国債金利の期間構造の特徴を的確に捉える推定手法を選択することである。そのために、3節(1)では、本邦国債金利の期間構造の特徴をまとめる。そして、3節(2)では、2節(2)で示した望ましくないゼロ・カーブを推定する手法を排除し、本邦国債金利の期間構造の特徴を捉えるゼロ・カーブ推定手法を選択するための基準を設定する。3節(3)では、本邦国債の取引価格データを用いた分析により、代表的なゼロ・カーブ推定手法の中から、設定した基準に照らして最も適切な推定手法を選択

13 Vasicek and Fong [1982] は、割引関数 $Z(x)$ について、 $x = 1 - \exp(-\alpha s)$ という変数変換を行ったうえで新たに定義される関数 $\tilde{Z}(s)(= Z(x))$ に対して、区分多項式を用いてモデル化する方法である。なお、Vasicek and Fong [1982] では、 $\tilde{Z}(s)$ のモデル化に用いる区分多項式の具体的な形までは提案していない。McCulloch and Kochin [2000] は、割引関数の対数関数を区分多項式でモデル化する方法である。

する。

(1) 本邦国債金利の期間構造の特徴

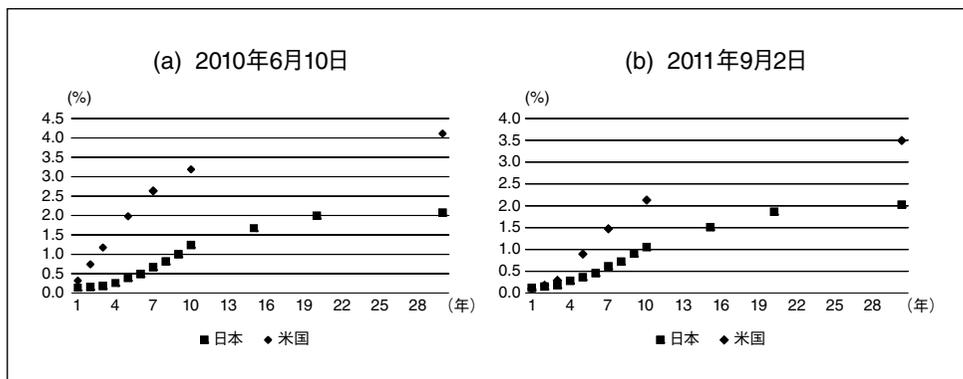
ここでは、1990年代後半から最近までの本邦国債の金利の期間構造にみられる典型的な特徴を2点指摘する。

第1の特徴は、残存期間が3年程度までの期間構造が、ゼロ近傍で平坦な形状を示す点である。特に、2001年から2006年までの量的緩和政策期や2007年夏以降のグローバルな金融危機の時期には、本邦国債の金利の期間構造は概ねそのような形状を示している。図5は、金融危機以降の日米の国債金利の期間構造を比較したものである。この間、両国とも事実上のゼロ金利政策を採用しているが、時点によっては短い年限の期間構造の形状が異なっている。例えば、図5(a)では、米国国債金利の期間構造は、残存期間2年からカーブの傾きが高まるのに対し、日本では、残存期間3年程度までゼロ近傍に留まっているという違いがみられる。

本邦国債のゼロ・カーブを国債の取引価格から推定する際、推定手法を任意に選択してしまうと、上述の特徴を的確に表現できず、例えば短い年限のゼロ・カーブが一部ゼロを下回る形で推定されてしまう可能性などがある。例えば、多項式法や関数形法は2節(4)でみたとおり、ゼロ・カーブ全体を1つの多項式や特定の関数形で表現する手法であるが、そのような局所性の低い推定手法では上述のような本邦国債の期間構造でみられる特徴を十分に表現することが難しい可能性がある。

本邦国債金利の期間構造だけでなく、このところは米欧諸国においても、短期の年限の期間構造がゼロ近傍で平坦となる形状に変化してきている。例えば、図5

図5 日米国債金利の期間構造



備考：日本の n 年金利 ($n = 1, 2, \dots, 10, 15, 20, 30$)。ブルームバーグのティッカー GJGB n Index。
米国の n 年金利 ($n = 1, 2, 3, 5, 7, 10, 30$)。2年以上の金利については、ブルームバーグのティッカー USGG n Index。1年金利については、ブルームバーグのティッカー USGG12M Index。

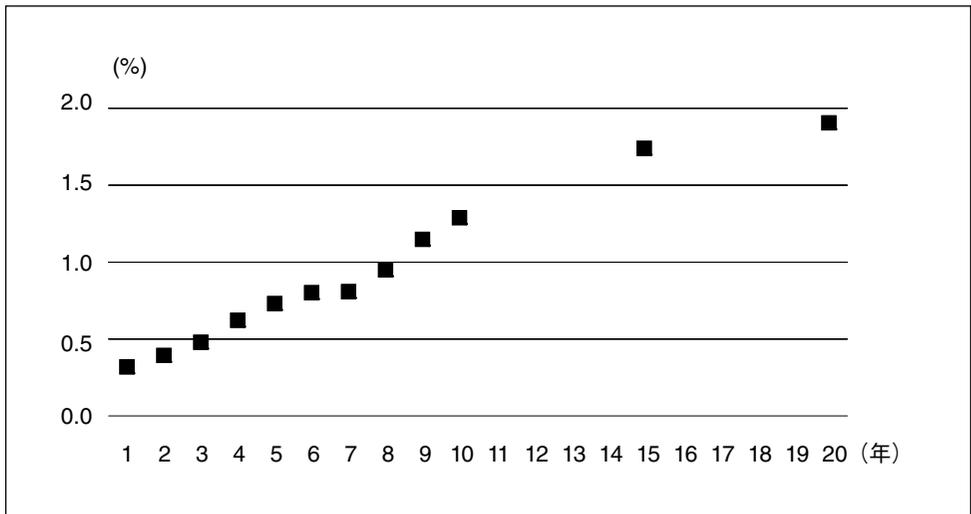
資料：ブルームバーグ

(b)の米国金利の期間構造をみると、図5(a)と比べて、3年程度までの期間構造がゼロ近傍で平坦となってきたことがみてとれる。このため、現状では、米欧諸国のゼロ・カーブを推定する際も、局所性の低い推定手法では表現力が足りない可能性がある¹⁴。

本邦国債金利の期間構造にしばしばみられる第2の特徴は、カーブの凹凸の変化する点が複数存在し複雑な形状をとる点である。例えば図6のように、7年の金利が6年や8年の金利と比べて、相対的に低い水準を示す時期がある¹⁵。

ゼロ・カーブの推定手法の自由度が低いと、このような複雑な形状のカーブを表現することができない。しかし、推定手法の自由度が高すぎると、2節(2)で示したように凹凸の大き過ぎるゼロ・カーブが推定されてしまう可能性がある。したがって、このような本邦国債金利の期間構造の特徴を捉えるゼロ・カーブ推定手法の自由度は、低すぎもせず高すぎもしない相応の水準であることが求められる。また、このような凹凸を捉えるのに、他の年限の推定値に大きく影響を与えてしまうような推定手法は望ましくない。したがって、凹凸の変化する点が複数存在し、複雑な形

図6 本邦国債金利の期間構造 (2009年2月17日)



備考： n 年金利は、ブルームバーグのティッカー GJGB n Index。

資料：ブルームバーグ

14 連邦準備制度理事会 (FRB) は、Svensson [1995] の方法に基づき米国債のゼロ・カーブを推定・公表している (手法の詳細は Gürkaynak, Sack, and Wright [2007] 参照)。FRB のホームページで公表されている、ゼロ・カーブの推定パラメータから、1 ヶ月や 2 ヶ月といった短期の年限のゼロ・イールドを計算すると、2009 年半ば以降の低金利環境下、イールド・カーブがスティーブ化する局面で、推定値がしばしばゼロを下回っていることが確認される。

15 長期国債先物の現物の受け渡し時における、最割安銘柄は残存期間が約 7 年の 10 年債となっている。したがって、残存期間 7 年の国債の価格動向は、長期国債先物の価格動向にしばしば左右されてきた。特に、2008 年下期以降、質への逃避の動き等から長期国債先物の価格が大きく上昇した際には、残存 7 年の国債が残存 6 年や 8 年の国債対比、割高な水準で取引され、金利水準としてみると、7 年金利が他年限対比低水準となった。

状をとる本邦国債金利の特徴を捉えるゼロ・カーブ推定手法は局所性が高いことも必要と考えられる。

(2) 推定手法の選択基準の設定

ここでは、2節(2)で示した望ましくないゼロ・カーブを推定してしまう推定手法を排除し、本節(1)で示した本邦国債金利の期間構造の特徴を的確に捉える推定手法を選択するための基準を設定する。

イ. ゼロ・カーブの推定値がゼロを下回らないこと

本節(1)でも示したように、最近の本邦国債金利の期間構造は、短期の年限において、ゼロ近傍で平坦な形状をとることが多い。推定手法によっては、このような形状を表現できずに、推定結果が一部の年限でゼロを下回る可能性がある。しかし、一部の年限でゼロを下回るゼロ・カーブは、2節(2)で述べたように望ましいカーブとはいえない。そこでわれわれは、推定期間中に残存年限0.5、1、1.5、2年のゼロ・イールド推定値がゼロを下回った回数が相対的に多い推定手法を排除することとする。

なお、ゼロ・カーブの推定値がゼロを下回る可能性をあらかじめ回避するため、イールドの非負性を明示的に制約条件に入れて推定を行うことも原理的には可能である。しかしこれは、制約条件の数が膨大な最適化問題を解くことになるため、最適化の実行は計算量の問題から困難である。

ロ. ゼロ・カーブの推定値に異常値が含まれないこと

2節(2)で示したように、推定手法によっては、ゼロ・イールドが極端に高水準ないし低水準となるような、いわゆる異常値を推定してしまう可能性もある。これは、自由度が低すぎて国債の取引価格をうまく捉えられず過小適合に陥っているか、自由度が極端に高く国債の取引価格への過剰適合に陥っているかのどちらかの可能性が考えられる。そこで、各推定時点で各推定手法における特定の年限（1年から1年刻みで20年まで）でのゼロ・イールドを推定し、年限ごとに各手法による推定値の2標準偏差の範囲に収まらない推定値を異常値とみなすこととする。そして、異常値をとる回数が相対的に多い推定手法を排除することとする。この選択基準によって、自由度が高すぎるか、あるいは低すぎる推定手法が排除されることになる。

ハ. 理論価格が取引価格と適合していること

本節(1)で指摘したとおり、本邦国債金利の期間構造は、凹凸の変化する点が複数個存在するなど、複雑な形状をとることが少なくない。このような形状を的確に捉えているかどうかは、理論価格と取引価格との適合性によって判断する。具体的には、推定時点における各銘柄の取引価格と理論価格の残差二乗和で評価する。この

基準によって、適合性が低い推定手法を排除することができる。一方、取引価格に過剰に適合する推定手法は、当該基準では排除できないが、上述のロ. の基準や以下で示すニ. の基準によって排除が可能である。

ニ. カーブの凹凸が抑制されていること

2節(2)で述べたとおり、ゼロ・カーブ全体の凹凸が大きくなることは望ましいとはいえない。ゼロ・イールドの推定値に異常値が存在すると、ゼロ・カーブの凹凸が大きくなる場合があるが、これは上述のロ. の基準で排除可能である。しかし、ロ. の基準に抵触しなくても、選択する手法によってはゼロ・カーブ全体の凹凸が大きくなる可能性は残る。そこで、各推定手法における特定の年限（0.5年から0.5年刻みで20年まで）のゼロ・イールドの推定値を用いて、(42)式から計算されるカーブの曲率が過大な値を示していないかどうかをチェックする。

$$\sum_{j=2}^{39} (y(0.5(j+1)) - 2y(0.5j) + y(0.5(j-1)))^2. \quad (42)$$

本稿では、複数の推定手法の中から、上述のイ. とロ. の基準に照らして、望ましくないゼロ・カーブを得てしまうことの多い推定手法を選択対象から外すこととする。選択の結果は、本節(3)ハ. で示すこととする。この過程で外れなかった推定手法に関しては、ハ. とニ. の観点からみて最も望ましい推定手法を1つ選択することとする。

(3) 推定手法の比較分析

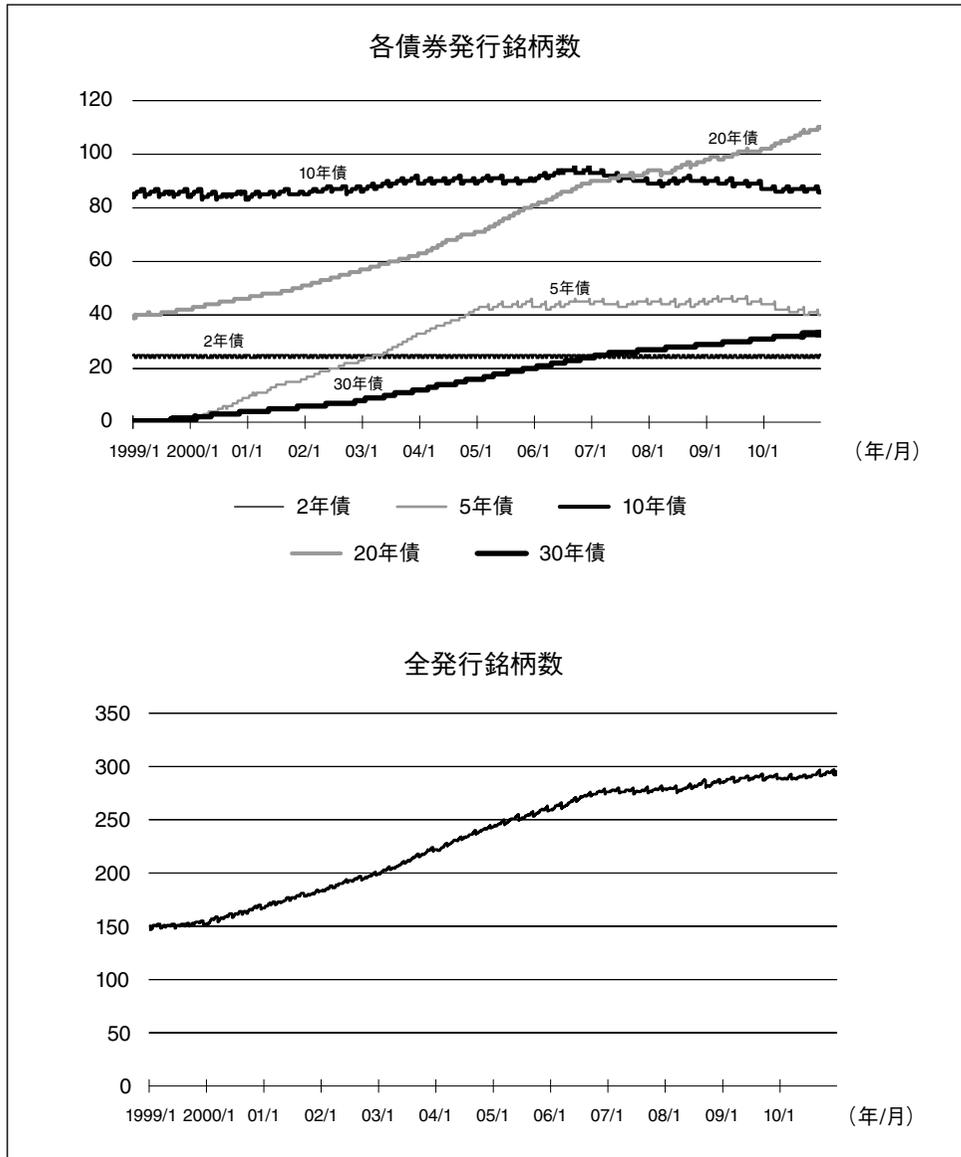
ここでは、2節で解説した代表的なゼロ・カーブ推定手法を本邦国債価格データに適用した場合に、本節(2)で設定した基準に照らして最も適切な推定手法の選択を行う。

イ. 推定に利用する国債価格データの概要

ゼロ・カーブ推定手法の選択に当たっては、推定時点で発行されている日本の固定利付国債（2、5、10、20、30年債）の価格データを用いる。価格データは、株式会社日本経済新聞デジタルメディアが提供するサービス「NEEDS」から取得した日本相互証券公表の価格（引値）を利用する。ゼロ・カーブの推定を行う期間は、1999年1月4日から2010年12月30日までの全営業日とする。

図7は、推定期間における固定利付国債の発行銘柄数の推移を示している。図7からわかるように、1999年1月では発行銘柄総数は150銘柄程度であったが、最近では300銘柄程度に増えてきている。これは、5年債、20年債、30年債の発行銘柄

図7 発行銘柄数の推移



数の増加に起因している。

このように、2000年代に入ってから、本邦国債の発行状況に変化がみられる。本邦国債のゼロ・カーブの推定を行った先行研究やサーベイ（小峰ほか [1989]、Oda [1996]、乾・室町 [2000]、川崎・安道 [2002]）はいずれも、2000年以前の価格データを用いたものであるが、本稿の推定結果は、ここで示したような2000年代に入ってから発行状況の変化も踏まえたものである。

ロ. 分析対象とする推定手法

選択対象とする推定手法は2節(4)で紹介した8つの手法である。ここでは、各推定手法について補足事項を示す。

- ① **McCulloch [1975]** (区分多項式法、2節(4)イ.(イ)の推定手法)
節点は、0年から1年刻みで30年までとする。当推定手法を、以下では「割引率をモデル化するMcCulloch [1975]の方法」と呼ぶ場合がある。
- ② **Steeley [1991]** (区分多項式法、2節(4)イ.(ロ)の推定手法)
節点は、-3年から1年刻みで33年までとする。当推定手法を、以下では「割引率をモデル化するSteeley [1991]の方法」と呼ぶ場合がある。
- ③ **Fisher, Nychka, and Zervos [1995]** (McCulloch [1971]で提案された2次の区分多項式関数の線形結合によって瞬間フォワード・レートを表現するモデル、2節(4)イ.(ハ)①の推定手法)
節点は、0年から1年刻みで30年までとする。また、当該モデルを①と区別するため、以下では、「瞬間フォワード・レートをモデル化するMcCulloch [1971]の方法」と呼ぶ場合がある。
- ④ **Fisher, Nychka, and Zervos [1995]** (Steeley [1991]で提案された2次の区分多項式関数の線形結合によって瞬間フォワード・レートを表現するモデル、2節(4)イ.(ハ)②の推定手法)
節点は、-2年から1年刻みで32年までとする。また、当該モデルを上記②と区別するため、以下では、「瞬間フォワード・レートをモデル化するSteeley [1991]の方法」と呼ぶ場合がある。
- ⑤ **Tanggaard [1997]** (2節(4)ロ.(イ)の推定手法)
キャッシュ・フローが発生しない時点の割引率は当該モデルから直接推定することができない。そこで本稿では、キャッシュ・フローが発生しない時点の年数に関するゼロ・イールドは、線形補間によって推定する。
- ⑥ **Schaefer [1981]** (2節(4)ハ.(イ)の推定手法)
バーンスタイン多項式の次数は5とする。
- ⑦ **Nelson and Siegel [1987]** (2節(4)ニ.(イ)の推定手法)
パラメータの推定は、ネルダー＝ミード法により行う。
- ⑧ **Svensson [1995]** (2節(4)ニ.(ロ))
⑦と同じ。

ハ. 比較結果：望ましくない推定手法の排除

ここでは本節(2)のイ.とロ.で示した基準に照らして、8つの手法を比較した結果をまとめる。

(イ) ゼロ・イールドの推定値がゼロを下回る回数

表1は、各推定手法による残存年限0.5、1、1.5、2年のゼロ・イールド推定値が、推定期間中にゼロを下回った回数をまとめたものである。これをみると、区分多項式法では、推定値が1回もゼロを下回らなかったのに対して、それ以外の手法では推定値がゼロを下回った。特に、多項式法と関数形法の推定値のゼロを下回る回数が、他の推定手法と比べて非常に多い結果となった。

図8は、ゼロ・イールドの推定値がゼロを下回る回数の多い手法について、推定値がゼロを下回った日のゼロ・カーブを例示したものである。多項式法と関数形法では、量的緩和政策期に、図8のように一部の年限のゼロ・イールドがゼロを下回る推定結果が頻発していた。これは、3節(1)で指摘したように、これらの手法の局所性が低いことに起因するものと考えられる。また、ノンパラメトリック法でもゼ

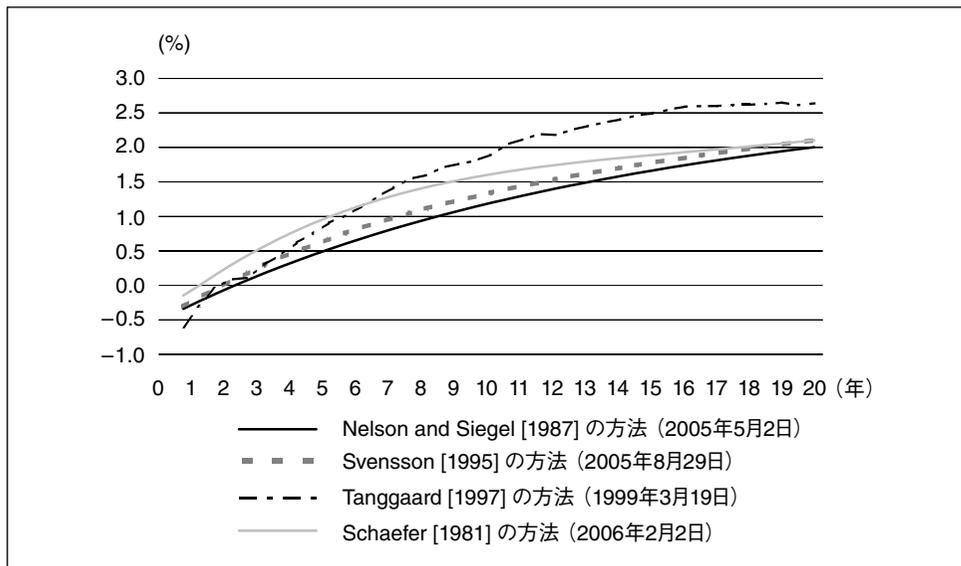
表1 金利推定値がゼロを下回った回数

区分多項式法			
割引率をモデル化		瞬間フォワード・レートモデル化	
McCulloch [1975]	Steeley [1991]	McCulloch [1971]	Steeley [1991]
0	0	0	0

多項式法	ノンパラメトリック法	関数形法	
Schaefer [1981]	Tanggaard [1997]	Nelson and Siegel [1987]	Svensson [1995]
1,084	30	2,162	619

備考：サンプル数は11,788（4サンプル/日×2,947日）。

図8 ゼロ・イールド推定値がゼロを下回る例



ロを下回る推定値が観察された。

以上の結果をみると、多項式法 (Schaefer [1981])、関数形法 (Nelson and Siegel [1987]、Svensson [1995])、ノンパラメトリック法 (Tanggaard [1997]) は、本邦国債金利の期間構造の特徴を表す手法として適当ではないと考えられる。

(ロ) ゼロ・イールドの推定値が異常値をとる回数

表2では、推定期間中に各推定手法の推定値が異常値とされた回数をゼロ・イールドの年限ごとにまとめている。

これをみると、短期の年限では、多項式法 (Schaefer [1981])、関数形法 (Nelson

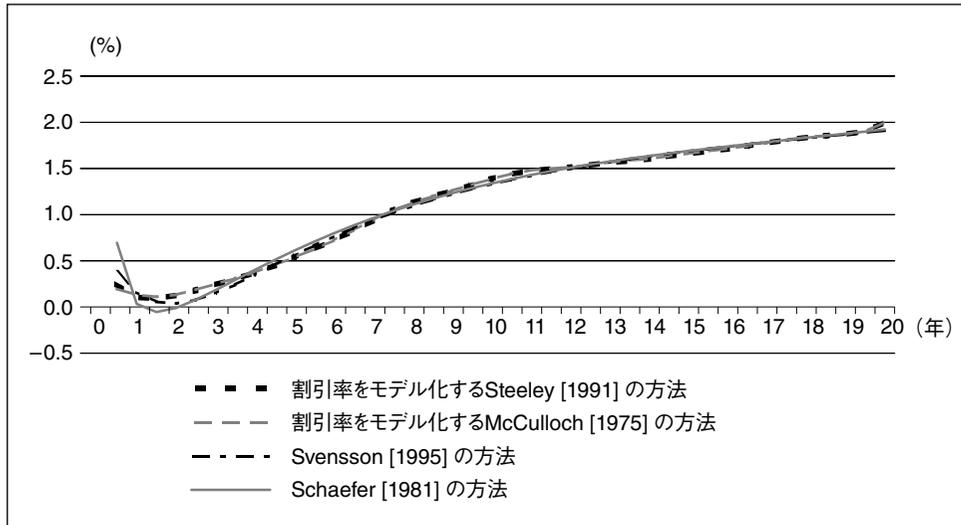
表2 異常値の検出回数

残存期間	区分多項式法				多項式法 Schaefer [1981]	ノンパラメトリック法 Tanggaard [1997]	関数形法	
	割引率をモデル化		瞬間フォワード・レートをモデル化				Nelson and Siegel [1987]	Svensson [1995]
	McCulloch [1975]	Steeley [1991]	McCulloch [1971]	Steeley [1991]				
1年	0	0	2	2	36	11	0	88
2年	0	0	0	0	0	2	5	0
3年	0	0	0	0	0	0	101	0
4年	0	0	0	0	0	0	15	0
5年	0	0	0	0	0	0	0	0
6年	0	0	0	0	0	0	0	0
7年	0	0	0	0	0	0	0	0
8年	0	0	0	0	0	0	0	0
9年	0	0	0	0	0	0	0	0
10年	0	0	0	0	0	0	0	0
11年	0	0	0	0	0	0	0	0
12年	0	0	0	0	0	0	0	0
13年	0	0	0	0	0	0	0	0
14年	0	0	0	0	0	0	0	0
15年	0	0	0	0	0	0	0	0
16年	0	0	0	0	0	0	0	0
17年	0	0	0	0	0	0	0	0
18年	0	0	0	0	0	0	0	0
19年	0	0	0	0	0	0	0	0
20年	0	0	0	0	0	0	0	0

備考：1) 各項目ともサンプル数は2,947 (1999年1月4日～2010年12月30日)。

2) 各推定日において、8つの手法の推定値から平均値と標準偏差を計算し、各推定手法の推定値が平均値 ±2 標準偏差の範囲に入らなかった場合に異常値とした。

図9 ゼロ・イールド推定値が異常値をとる例



and Siegel [1987]、Svensson [1995]) の異常値が、他の推定手法と比べて多いことがわかる。これらの異常値は、短期の年限のゼロ・イールド推定値がゼロを下回ることによって他の手法と乖離する場合と、推定値が他の手法と比べて過大な値をとる場合があった。

図9は、短期の年限の推定値が他の手法と比べて過大となる場合を例示したものである。Schaefer [1981] による推定値は、他の手法による推定値と比べて、0.5年のゼロ・イールド推定値が大きな値をとっている。

多項式法や関数形法による短期の年限のゼロ・イールド推定値が他の推定手法と乖離した異常値をとるのは、これらの手法の局所性の低さのため、量的緩和と政策期等によくみられた本邦国債金利の期間構造の短期の年限が、ゼロ近傍で平坦となる形状を十分表現できないことによるものと考えられる。

以上から、ゼロ・イールド推定値が異常値をとっているか否かという点に照らして、多項式法と関数形法は本邦国債のゼロ・カーブ推定には適当ではないと考えられる。

以上の結果に基づき、割引率をモデル化する McCulloch [1975] の方法と Steeley [1991] の方法、瞬間フォワード・レートモデル化する McCulloch [1971] の方法と Steeley [1991] の方法の4つの手法以外は、基準を満たさないと考え、以下では分析の対象から外すことにする。

二. 比較結果：望ましい推定手法の選択

ここでは、分析対象として残った4つの手法（割引率をモデル化する McCulloch [1975] の方法と Steeley [1991] の方法、瞬間フォワード・レートモデル化する McCulloch [1971] の方法と Steeley [1991] の方法）について、理論価格の取引価格への

表3 適合性（取引価格と理論価格の残差二乗和）に関する比較結果

	区分多項式法			
	割引関数をモデル化		瞬間フォワード・レートモデル化	
	McCulloch [1975]	Steeley [1991]	McCulloch [1975]	Steeley [1991]
最大値	29.178	27.058	29.126	29.116
最小値	0.185	0.144	0.198	0.182
平均	3.414	3.093	3.598	3.807
標準偏差	4.728	4.441	4.714	5.041

備考：1) 「最大値」、「最小値」、「平均」、「標準偏差」は、各推定日の残差二乗和の推定期間中の最大値、最小値、平均値、標準偏差を表している。

2) 単位は円の二乗

表4 曲率の比較

区分多項式関数			
割引関数をモデル化		瞬間フォワード・レートモデル化	
McCulloch [1975]	Steeley [1991]	McCulloch [1971]	Steeley [1991]
1.587×10^{-2}	1.470×10^{-2}	1.930×10^{-2}	1.991×10^{-2}

備考：1) 上記の数値は、各推定日における曲率（(42)式）の推定期間中における平均値。

2) 単位はパーセントの二乗

適合性という点とゼロ・カーブの凹凸が抑制されているかという点から、最も適切な推定手法を1つ選択する。

(イ) 理論価格の取引価格への適合性

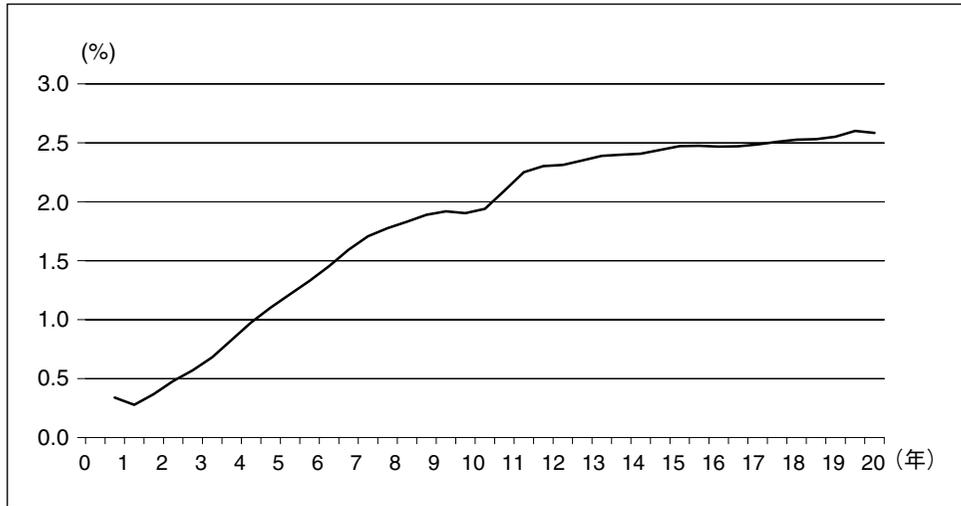
表3は、4つの推定手法について推定期間中の残差二乗和の水準等を比較したものである。これをみると、割引率をモデル化するSteeley [1991]の手法の残差二乗和が、推定期間中の平均値、標準偏差、最大値のいずれにおいても4つの中で最小となった。

このような結果を得たのは、割引率をモデル化するSteeley [1991]の手法の局所性が4つの中で最も高いことに起因すると考えられる。

(ロ) ゼロ・カーブの凹凸

表4は、ゼロ・カーブの凹凸の程度を表す曲率について推定期間中の平均値をまとめたものである。これをみると、その水準に関して手法間に大きな差異はみられなかったが、割引率をモデル化するSteeley [1991]の手法による推定カーブの曲率が最小となった。図10は、割引率をモデル化するSteeley [1991]によるゼロ・カーブ

図 10 割引率をモデル化する Steeley [1991] モデルの凹凸の例



備考：割引率をモデル化する Steeley [1991] モデルの曲率が推定期間中最大値を示した推定日（2000年2月8日）の推定カーブ

の曲率が推定期間中で最大値を示した日（2000年2月8日）の推定結果を参考として示したものである。これをみると、9.5年のゼロ・イールドの水準は、9年および10年のゼロ・イールドより低く、このことが曲率を高めていると考えられる。ただし、この点は、残存期間約9.5年の国債の価格が9年や10年の国債と比べて実際に割高であったという事実を反映しており、内挿は適切に行われていると評価できる。このようなケースを含め、割引率をモデル化する Steeley [1991] によるゼロ・カーブの凹凸の水準は妥当であると考えられる。

以上の結果をまとめると、本邦国債市場のゼロ・カーブを推定するにあたっては、分析対象とした8つの手法の中で、割引率をモデル化する Steeley [1991] の手法が最も適切であると評価できる。次節では、当該推定手法の特徴について、他の推定手法との比較を通じて明らかにする。

4. 割引率をモデル化する Steeley [1991] の推定手法の特徴

3節では、本稿で設定した基準に照らして適切な推定手法として、割引率を直接モデル化する Steeley [1991] モデル（以下、Steeley モデル）が選ばれた。本節ではまず、(1)で Steeley モデルと Nelson and Siegel [1987] モデル（以下、NS モデル）の比較を行うことによって、Steeley モデルの特徴を明らかにする。具体的には、両手法で推定される①カーブの形状、②短期金利、③長期金利について比較する。次に、本節(2)では、3節では扱わなかった瞬間フォワード・レートの期間構造の平滑化推定手法を取り上げ、Steeley モデルによる推定カーブとの比較を行う。

(1) Nelson and Siegel [1987] の手法との比較

イ. ゼロ・カーブの形状に関する比較

図 11 は、Steeley モデルと NS モデルで推定した 2010 年 12 月 30 日のゼロ・カーブを示している。3 節(1)で、本邦国債金利の期間構造の特徴の 1 つとして、短期の年限のカーブがゼロ近傍で平坦となる点を指摘したが、Steeley モデルによる推定カーブはこのような形状をとっている。

また、図 12 は 2008 年 8 月 20 日のゼロ・カーブを比較したものである。この頃、国債市場では、長期国債先物の価格が上昇するなかで、長期国債先物の最割安銘柄である残存約 7 年の国債もこれに連動する形で他年限の国債価格と比べて割高になった。これは、イールド・カーブでみると、7 年金利が 6 年や 8 年金利と比べて低めの水準となることを意味するが、実際、Steeley モデルで推定したゼロ・カーブがそのような推定結果となっている。一方、NS モデルの結果は、6~8 年金利の凹凸を捉えられていない。このような形状を Steeley モデルが表現できるのは、同手法の局所性の高さによるものと考えられる。

ロ. 短期金利の比較

図 13 は、Steeley モデルと NS モデルによる短期金利の推定値の推移を示している。

図をみると、NS モデルによる 6 ヶ月ゼロ・イールド推定値については、ゼロを下回る事象が量的緩和政策期に頻発している。一方、この期間、Steeley モデルによる 6 ヶ月ゼロ・イールド推定値は、ゼロ近傍でゼロを下回ることなく安定的に推移し

図 11 カーブの形状比較① (2010 年 12 月 30 日)

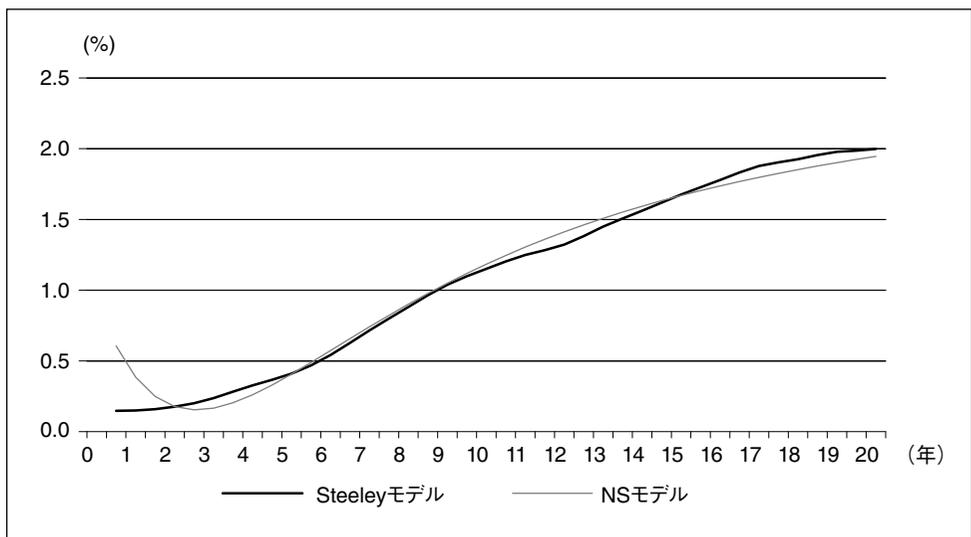


図 12 カーブの形状比較② (2008 年 8 月 20 日)

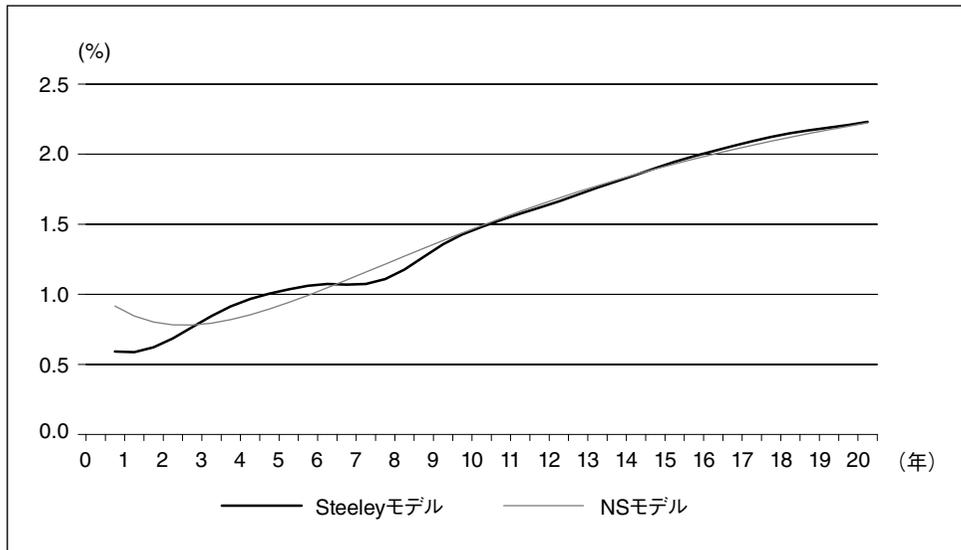
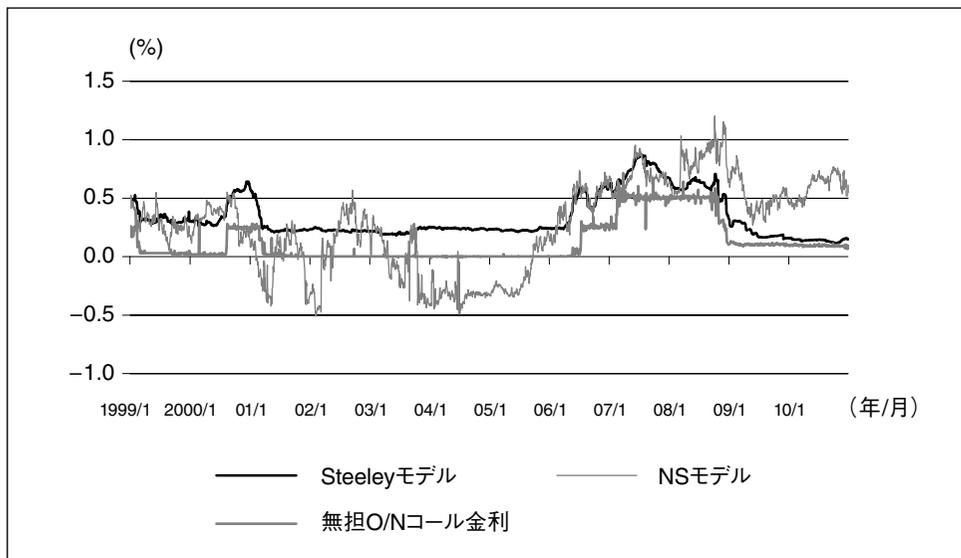


図 13 短期金利 (6 ヶ月ゼロ・イールド) の推移比較



ている¹⁶。

量的緩和政策期間以外の時期についてみると、Steeley モデルによる推定値は、NS

16 この期間の Steeley モデルによる 6 ヶ月ゼロ・イールド推定値は、同期間の割引短期国債の金利と比べると、幾分高めの水準となっている。これは、本稿のゼロ・カーブが JGB のみを用いて推定されており、償還までの期間が 1 年以下の JGB の取引コストが割引短期国債の価格から計算されるイールド対比上乘せられていることに起因していると考えられる。本稿では、割引短期国債の市場が JGB 市場とは取引主体が異なることを踏まえ、割引短期国債をゼロ・カーブ推定には使用しなかった。

モデルと違い、無担保オーバーナイト・コール金利の動きと大きく乖離することなく、安定的に推定されていることも確認できる。

以上から、Steeley モデルは短期金利、特に、日本の緩和政策期の短期金利を安定的に推定できるモデルであると評価できる。

ハ. 長期金利の比較

図 14 は、Steeley モデルと NS モデルによる長期金利（10 年ゼロ・イールドと 20 年ゼロ・イールド）の推定値を示している。

両モデルの推定値を比較すると、10 年ゼロ・イールドについては、最大でも約 10bp の乖離に止まっている。また、20 年ゼロ・イールドについても、同じく約 10bp の乖離に止まっていることがわかる。この結果から、長期金利の推定値については、両モデル間で大差がないことが示唆される。したがって、ゼロ・カーブ全体ではなく、長期金利の一部の年限（例えば 10 年や 20 年）のゼロ・イールドを推定し、それを用いて何らかの分析を行う場合には、Steeley モデルであっても NS モデルであっても問題はないと思われる。しかし、カーブ上の複数の推定値の情報を用いる分析、例えば、長短スプレッドを用いた分析等を行う場合には、本節(1)口. でもみたように短期金利の推定値の水準が異なるため、推定手法の選択が重要となる。

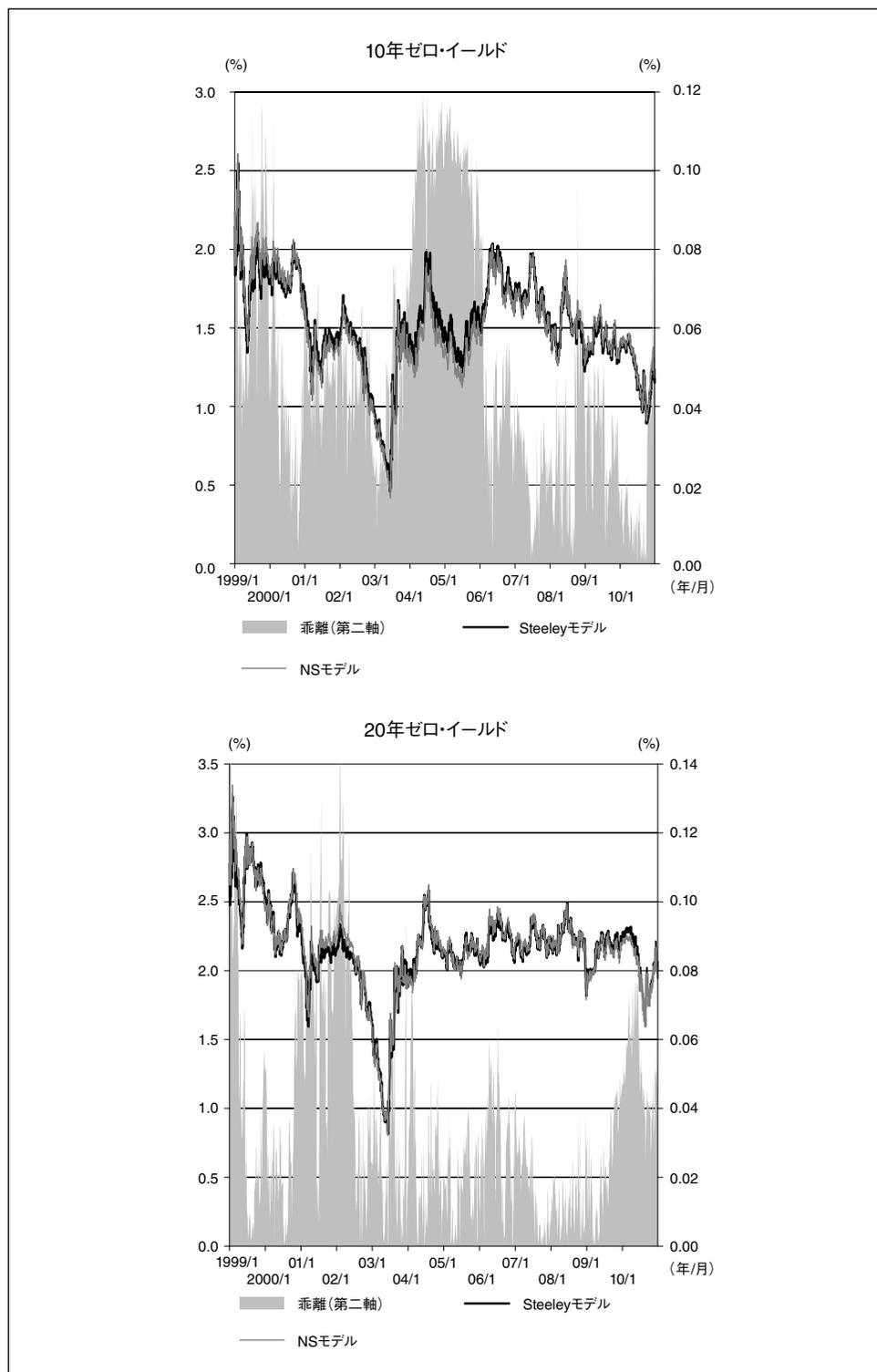
(2) 滑らかな瞬間フォワード・レートを推定可能な平滑化手法との比較

Steeley モデルを含む区分多項式法を利用するうえで、留意しなければならない点は、推定されたゼロ・カーブから導出される瞬間フォワード・レートの期間構造の凹凸が過大となる可能性がある点である。この点を克服するために、瞬間フォワード・レートの期間構造の推定を意識した先行研究では、平滑化スプライン法と呼ばれる方法を援用してカーブの凹凸を抑制する推定手法が研究されてきた (Fisher, Nychka, and Zervos [1995]、Waggoner [1997]、Jarrow, Ruppert, and Yu [2004] 等)。平滑化スプライン法を利用すれば、以下でみるように滑らかな瞬間フォワード・レートの期間構造を得ることができ一方、平滑化を行わない場合と比べて、債券の取引価格との適合性は低下する傾向がある。上述のように、本稿では、本邦国債のイールド・カーブの特徴を的確に捉えるゼロ・カーブを推定することが目的であるため、取引価格との適合性が高いことが前提条件であるという立場から、平滑化スプライン法を 3 節での分析対象に含めなかった。

以下では、平滑化スプライン法の 1 つである Jarrow, Ruppert, and Yu [2004] によって提案された手法（以下、JRY モデルと呼ぶ）と Steeley モデルによって推定されるゼロ・カーブおよび瞬間フォワード・レートの期間構造を比較する。

まず、JRY モデルの概要を解説する。このモデルでは、瞬間フォワード・レートを (21) 式に基づき B スプライン関数を用いてモデル化し、以下の罰則付き最適化問

図 14 長期金利（10年、20年ゼロ・イールド）の推移比較



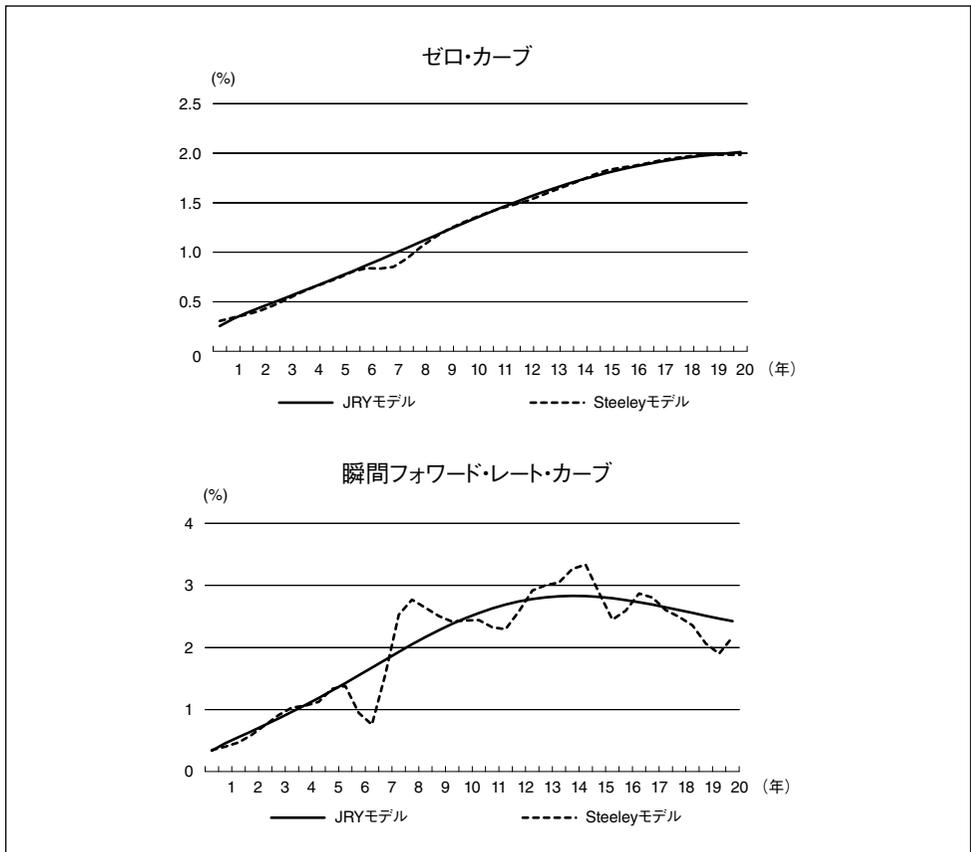
題を解くことで、瞬間フォワード・レートの期間構造を滑らかにしつつ、取引価格に相応に適合するゼロ・カーブの推定を行う。

$$\min_{\alpha} \left\{ \frac{1}{n_I} (\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}(\alpha))^T (\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}(\alpha)) + \lambda \int_0^{T_{ef}} (f(y)'')^2 dy \right\}. \quad (43)$$

(43)式の第二項は、瞬間フォワード・レートの曲率に対する罰則を表している。すなわち、瞬間フォワード・カーブの凹凸の程度が大きいほど、目的関数の値が大きくなる。したがって、(43)式の最適解は、瞬間フォワード・レートの期間構造の凹凸がある程度抑制されたものとなる。また、 λ は平滑化パラメータと呼ばれる、瞬間フォワード・レートの期間構造の凹凸を定めるパラメータであり、Jarrow, Ruppert, and Yu [2004] では、Ruppert [1997] で提案された情報量基準を基にこれを決定している。

図 15 は、Steeley モデルと JRY モデルで推定されたゼロ・カーブおよび瞬間フォワード・レートの期間構造を比較したものである。ゼロ・カーブについては、Steeley

図 15 Steeley モデルと JRY モデルによる推定結果の比較 (2009 年 2 月 17 日)



モデルのゼロ・カーブは7年金利付近に凹凸がみられるが、JRYモデルではその凹凸がみられない。これは、Steeleyモデルの方が、取引価格への適合性が高いことを示しており、本邦イールド・カーブの特徴を捉えているといえる。一方、瞬間フォワード・レート・カーブの期間構造をみると、Steeleyモデルの期間構造は凹凸が大きくなっているのに対し、JRYモデルの期間構造は滑らかである。

図15のような、平滑化をかけなかった場合に生じうる、瞬間フォワード・レート・カーブの際立った凹凸が金融実務上問題となる例として、フォワード金利を原資産とするデリバティブの価格付けを行う場合が挙げられる。フォワード金利を原資産とするデリバティブの価格付けは、評価時点において推定される瞬間フォワード・レート・カーブを初期カーブとして、何らかの金利モデルに基づき、将来時点のフォワード金利を計算することによって行われる。そのため、価格付けは初期カーブに依存する。したがって、凹凸の際立った瞬間フォワード・レート・カーブを初期カーブとしてデリバティブの価格付けを行ってしまうと、現実的ではない価格を導出してしまうおそれがある。

上述のような問題を避けるためには、平滑化スプライン法を用いることが考えられるが、既に指摘したように、平滑化を行う分、取引価格への適合性が失われたゼロ・カーブが推定されることになる。このように、取引価格への適合性と瞬間フォワード・レート・カーブの期間構造の滑らかさを両立させることは難しい。したがって、平滑化を行うか否かは、推定するカーブの利用目的に応じて選択されるべきであると考えられる。

5. おわりに

本稿では、本邦国債のゼロ・カーブの特徴を的確に捉えるには、国債の取引価格への適合性が高く、適切な内挿がなされたゼロ・カーブを推定することが望ましいと考え、先行研究で提案された代表的な推定手法の中から適切な手法を選択する基準を設定した。具体的には、①推定値がゼロを下回らないこと、②推定値が異常値をとらないことの2点を満足しない推定手法を選択対象から除外した後、③取引価格との適合性、④ゼロ・カーブの凹凸の低さの点で最も望ましい推定手法を1つ選択した。その結果、割引率をモデル化するSteeley [1991]の推定手法が選択された。Steeleyモデルが選択されたのは、主として、当該モデルの局所性の高さ起因すると考えられる。

Steeleyモデルによって推定されたゼロ・カーブは、推定期間中に推定値が1回もゼロを下回らなかったほか、短期の年限のゼロ・カーブがゼロ近傍で平坦な形状をとることや中期の年限で凹凸の変化する点を有するという本邦国債のイールド・カーブに頻繁にみられる特徴を捉えていることが確認された。このように、ゼロ・カーブを適切に推定することは、日本の国債金利についてさまざまな分析を行ううえでの出発点として、重要性が高いと考えられる。また、米欧の国債のイールド・カー

ブに目を転じると、2010年以降、短期の年限の金利がゼロ近傍に平坦化してきており、量的緩和政策期や現在の本邦国債のイールド・カーブの特徴に類似してきている。したがって、本稿の結果で最良と評価された Steeley モデルは、米欧国債のゼロ・カーブ推定においても有効である可能性が高い。

今後の研究上の課題としては以下の2点が挙げられる。第1に、本稿の分析結果は、1990年代後半から2010年までの本邦国債価格データに基づくものであり、時代や市場制度の異なるデータを用いて同様の分析を行えば、分析結果は異なりうる。したがって、より広範なデータのもとでのゼロ・カーブ推定手法間の比較分析は、今後の課題の1つである。第2に、本稿の分析では、ゼロ・カーブを規定するパラメータ推定上の目的関数について、取引価格と理論価格の重みを付けない残差二乗和とした。しかし、市場環境やゼロ・カーブの利用目的によっては、本稿とは異なる目的関数を設定して、推定を行う方が適当である可能性もある。したがって、本稿とは異なる目的関数を設定した場合の分析等も今後の課題に挙げられる。

参考文献

- 乾 孝治・室町幸雄、『金融モデルにおける推定と最適化』、朝倉書店、2000年
- 太田智之、『新・債券運用と投資戦略（改訂版）』、金融財政事情研究会、2003年
- 川崎能典・安道知寛、「正則化非線形回帰モデルによるイールド・カーブの推定」、『統計数理』、第50巻第2号、統計数理研究所、2002年、149～164頁
- 小峰みどり・山岸正明・松本和幸・二木高志・司 淳・長尾知幸・砂川和彦・佐野尚史、「わが国債券市場固有の現象と期間構造分析」、『フィナンシャル・レビュー』第14号、大蔵省財政金融研究所、1989年
- 菊池健太郎・新谷幸平、「本邦国債価格データを用いたゼロ・クーポン・イールド・カーブ推定手法の比較分析」、日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー No. 2012-J-3、日本銀行金融研究所、2012年
- Bank for International Settlements, “Zero-coupon Yield Curves: Technical Documentation,” BIS paper No.25, 2005.
- Carleton, Willard T., and Ian A. Cooper, “Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates,” *Journal of Finance*, 31(4), 1976, pp.1067-1083.
- Fisher, Mark, Douglas W. Nychka, and David Zervos, “Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines,” Federal Reserve System Working Paper No. 95-1, Board of Governors of the Federal Reserve System, 1995.
- Gürkaynak, Refet S., Brian Sack, and Jonathan H. Wright, “The U.S. Treasury Yield Curve: 1961 to the Present,” *Journal of Monetary Economics*, 54(8), 2007, pp.2291–2304.
- Houglet, Michel X., “Estimating the Term Structure of Interest Rates for Non-homogeneous Bonds,” Ph.D Dissertation, University of California Berkeley, 1980.
- Ioannides, Michalis, “A Comparison of Yield Curve Estimation Techniques using UK Data,” *Journal of Banking and Finance*, 27(1), 2003, pp.1–26.
- Jarrow, Robert, David Ruppert, and Yan Yu, “Estimating the Interest Rate Term Structure of Corporate Debt with a Semiparametric Penalized Spline Model,” *Journal of the American Statistical Association*, 99(465), 2004, pp.57–66
- Kalev, Petko S., “Estimating and Interpreting Zero Coupon and Forward Rates: Australia, 1992-2001,” Working Paper, Monash University, 2004.
- McCulloch, J. Huston, “Measuring the Term Structure of Interest Rates,” *Journal of Business*, 44(1), 1971, pp.19–31.
- , “The Tax-adjusted Yield Curve,” *Journal of Finance*, 30(3), 1975, pp.811–830.
- , and Levis A. Kochin, “The Inflation Premium Implicit in the US Real and Nominal Term Structures of Interest Rates,” Working Paper #98-12, Ohio State University, 2000.
- Nelson, Charles R., and Andrew F. Siegel, “Parsimonious Modeling of Yield Curves,” *Journal of Business*, 60(4), 1987, pp.473–489.

- Oda, Nobuyuki, "A Note on the Estimation of Japanese Government Bond Yield Curves," IMES Discussion Paper No.96-E-27, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 1996.
- Ruppert, David, "Empirical-bias Bandwidths for Local Polynomial Nonparametric Regression and Density Estimation," *Journal of the American Statistical Association*, 92(439), 1997, pp.1049–1062.
- Schaefer, Stephen M., "Measuring a Tax-specific Term Structure of Interest Rates in the Market for British Government Securities," *Economic Journal*, 91(362), 1981, pp.415–438.
- Steeley, James M., "Estimating the Gilt-edged Term Structure: Basis Splines and Confidence Intervals," *Journal of Business Finance and Accounting*, 18(4), 1991, pp.513–529.
- Svensson, Lars E. O., "Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson and Siegel Method," *Sveriges Riksbank Quarterly Review*, 3(1), 1995, pp.13–26.
- Tanggaard, Carsten, "Nonparametric Smoothing of Yield Curves," *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 9(3), 1997, pp.251–267.
- Vasicek, Oldrich A., and H. Gifford Fong, "Term Structure Modeling Using Exponential Splines," *Journal of Finance*, 37(2), 1982, pp.339–348.
- Waggoner, Daniel F., "Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices," Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 97–10, 1997.

補論 1. 本邦国債の理論価格計算に必要となる市場慣行の整理

理論価格を厳密に計算するためには、キャッシュ・フローの発生時点の定義、キャッシュ・フロー発生時点までの日数の計算方法、経過利子の計算方法をはじめとする本邦国債市場の慣行を理解する必要がある。以下では、このような理論価格を厳密に計算するために必要となる事項を解説する¹⁷。

(1) 用語の定義

ここでは、本邦国債の市場慣行等を解説するうえで必要となる用語を定義しておく。

利払期日

ある銘柄におけるクーポンの支払い時期を利払期日と呼ぶ。通常固定利付債においては、「毎年6月20日および12月20日」のように、半年に1度設定される。本補論(2)で後述するように、利払期日は実際の利払いが発生する時点と異なる場合があることに注意が必要である。なお、利払期日は入札時点で財務省から公表される。5年債、10年債、20年債、30年債の利払期日は、毎年3月20日と9月20日、6月20日と12月20日である¹⁸。2年債については、2007年9月発行分までは、毎月20日が利払期日であったが、2007年10月発行分から利払期日が毎月15日となった。

初回利払期日

ある銘柄の発行日からみて、初回の利払い時期に対応する利払期日を初回利払期日と呼ぶ。なお、初回利払期日と実際の利払い時点は異なることがある。

初回利払額

ある銘柄の発行日からみて、初回の利払いが発生する時点（初回利払期日ではない）におけるキャッシュ・フローの額を初回利払額と呼ぶ。

前期利払期日

初回利払期日の半年前を前期利払期日と呼ぶ。例えば、初回利払期日が2008年6月20日の場合、前期利払期日は2007年12月20日となる。

取引日

市場で売買の約定が発生した日を取引日と呼ぶ。

.....
17 本補論の解説は、太田 [2003] を参考にした。

18 ただし、30年債は一部の銘柄で、利払期日が2月20日と8月20日、5月20日と11月20日のものがある。

受渡日

取引日の翌日から数えて3営業日目にあたる日を受渡日と呼ぶ。キャッシュ・フローの発生や経過利子に関する計算については、取引日ではなく受渡日が計算の基準となる。

(2) キャッシュ・フロー発生時点までの日数計算に関する慣行

ここでは、国債の理論価格を計算するための1つの要素である、受渡日から国債のキャッシュ・フロー発生時点までの日数の計算に関する市場慣行を説明する。

はじめに、利払期日が営業日の場合を説明する。この場合、利払期日が実際のキャッシュ・フローの発生時点となる。受渡日から利払期日までの日数は、1年を365日とし、償還日までの残存期間が1年未満の銘柄については、閏日を含む日数を各利払期日までの日数とする。その一方で、償還日の残存期間が1年以上の銘柄については、受渡日から各利払期日までの日数から、当該期間に含まれる閏日の数を除いた日数とする。なお、日数計算における受渡日と各利払期日の取扱いについては、片端入れ方式を適用する。これは、受渡日当日を日数に含めず、各利払期日当日を含めて日数を計算する方法である。本邦国債市場では、固定利付債を取扱う限りにおいては、日数計算は全て片端入れ方式を用いる¹⁹。

利払期日当日が営業日ではない場合は、本邦国債市場では、修正翌営業日協定が適用される。これは、利払期日が営業日ではない場合、利払期日の直後の営業日が利払期日と同じ月の場合は、当該営業日にキャッシュ・フローが発生するとし、当該営業日が利払期日の翌月となる場合は、キャッシュ・フローの発生時点は利払期日の直前の営業日とするという協定である。具体例を挙げると、2009年6月20日は多くの本邦国債の利払期日であったが、この日は土曜日だったため、修正翌営業日協定が適用され、国債のキャッシュ・フローは2009年6月22日に発生することになった²⁰。なお、受渡日とキャッシュ・フロー発生時点までの日数計算は、利払期日が営業日の場合と同様、片端入れ方式が適用される。

(3) 法制度および市場制度の変化への対応

過去の本邦国債市場をみると、市場制度や法制度が変化したことに伴い、キャッ

19 ただし、2001年3月の即時銘柄統合（リオープン）方式（本補論(3)イ.を参照）の導入前は、経過利子の計算において両端入れ方式が適用されていた。両端入れ方式とは、受渡日当日および利払期日の両日を日数に含む計算方式である。

20 財務省のホームページ（http://www.mof.go.jp/jgbs/auction/past_auction_schedule/result22.xls、最終アクセス2012年5月10日）で過去の利付国債の入札結果を確認できる。これをみると、償還に伴うキャッシュ・フローが発生する時点に対応する利払期日が2009年6月20日だった10年利付国債211回債と212回債の実際の償還日は2009年6月22日であることが確認できる。

シュ・フロー発生時点やキャッシュ・フローの額に変化が生じたことがあった。ここでは、その事例として、①即時銘柄統合方式の導入、②ハッピー・マンデー制度、③決済制度について取り上げる。

イ. 即時銘柄統合（リオープン）方式の導入

2001年3月に導入された即時銘柄統合方式（以下リオープン方式と呼ぶ）とは、既に発行されている銘柄と同一の額面、クーポン・レート、償還日を持つ銘柄が新たに発行された場合、発行と同時に2つの銘柄を同一の銘柄として扱う方式である。この方式の導入前は、発行日以外の条件が同一であっても、発行日が異なれば初回利払額が異なっていたため、初回利払日が到来するまでは両者を別銘柄として扱う必要があった。本方式は、そのような銘柄管理の複雑さを緩和するために導入されたものである。

リオープン方式の導入前後では、国債の初回利払額の計算方法が異なる。また、経過利子の計算方法も異なってくる。具体的な計算方法については後述する。

ロ. ハッピー・マンデー制度

いわゆるハッピー・マンデー制度とは、2001年1月に施行された「国民の祝日に関する法律の一部を改正する法律」で、成人の日（1月15日）および体育の日（10月10日）がそれぞれ同月第2月曜日に、2003年1月に施行された「国民の祝日に関する法律および老人福祉法の一部を改正する法律」で、海の日（7月20日）および敬老の日（9月15日）がそれぞれ同月第3月曜日に変更されたことをいう。

国債の理論価格計算の観点では、特に後者の法改正が影響してくる。具体的には法改正によって、同制度施行前は祝日であった7月20日が平日になりうるため、キャッシュ・フロー発生時点が当初の予定から前倒しされる可能性があるほか、9月20日については、秋分の日および敬老の日がどちらも20日となりうるため、日曜日と祝日の重複に伴う振替休日の発生も考慮すると、国債の実際のキャッシュ・フロー発生時点が前後に大きくずれる可能性がある²¹。

ゼロ・カーブを推定するうえでは、このような制度変更が、どの時点で取引価格に折り込まれたのかを明確にする必要がある。しかし、取引価格からその情報を正確に特定することは極めて難しい。そのため、本稿の分析においては、「国民の祝日に関する法律及び老人福祉法の一部を改正する法律」が官報公示された2001年6月22日以降の取引日における理論価格計算の際に、施行日である2003年1月以降のキャッシュ・フロー発生時点と同制度に基づき決定する扱いとしている。

21 例えば、敬老の日が第3月曜日に移動した結果、2009年9月のキャッシュ・フロー発生日が、従来の21日から24日に変化した。これは、敬老の日（21日）と秋分の日（23日）に挟まれた平日が、「国民の祝日に関する法律」により休日となったことによる。

ハ. 決済制度

本邦国債市場では、大口の業者間取引について、1996年9月19日約定分から $T+7$ 決済（約定日の翌日から数えて7営業日後に受渡し）に移行した後、1997年4月1日受渡し分から $T+3$ 決済（約定日の翌日から数えて3営業日後に受渡し）に移行した。国債の理論価格の計算は、取引日ではなく受渡日を基準として行われるため、取引日から受渡し日までに必要となる日数が変更されると、理論価格の計算値も影響を受ける。なお、本稿の分析では、1999年1月から2010年12月までの取引価格データを用いているため、国債の理論価格計算に上述の決済制度の変更による影響は受けていない。

(4) 初回利払額および経過利子の計算方法

上述のように、初回利払額と経過利子の計算方法は、2001年3月のリオープン方式導入前後で異なる。そこでここでは、同方式導入前後の計算方法について説明することにする。

イ. 初回利払額の計算方法

リオープン方式の導入以前は、銘柄の発行日に伴い、初回利払額は以下で述べるような方法で決定されていた。したがって、発行日が異なるが、同一の額面、クーポン・レート、償還日を有する複数の銘柄の初回利払額は異なっていた。

リオープン方式導入以前の初回利払額 $g(c^{v_i}, N^{v_i}, T_1^{v_i})$ は、以下のように定義される²²。ここで、当該債券の発行日が前期利払期日以前だった場合は、 d を発行日から前期利払期日までの日数（両端入れ方式で計算）とすると、下記のように定まっていた。

$$g(c^{v_i}, N^{v_i}, T_1^{v_i}) = c^{v_i} N^{v_i} \left(\frac{1}{2} + \frac{d}{365} \right).$$

リオープン方式導入以前、当該債券の発行日が前期利払期日以後であった場合は、 d を発行日から初回の利払いが発生する日までの日数（両端入れ方式で計算）とすると、以下のように定まっていた。

$$g(c^{v_i}, N^{v_i}, T_1^{v_i}) = c^{v_i} N^{v_i} \frac{d}{365}.$$

リオープン方式の導入以後に発行された銘柄については、発行時点にかかわらず、

²² 本補論(4)イ.とロ.では、「前期利払期日」と記述した際、当該日が営業日ではなかった場合は、修正翌営業日協定を適用した後の日付を指すこととする。

初回利払額は当該銘柄のクーポン・レートと額面の積の半額となった。すなわち、

$$g(c^{v_i}, N^{v_i}, T_1^{v_i}) = \frac{c^{v_i} N^{v_i}}{2},$$

と定められた。

ロ. 経過利子の計算方法

2つの利払期日の間で、ある銘柄を売買した場合、売り手は前回のキャッシュ・フローが発生した日から受渡日までの日数に対応するキャッシュ・フローを受取る権利を持つ。しかし、当該期間におけるキャッシュ・フローは、次回のキャッシュ・フロー発生時に当該銘柄の保有者（買い手）に全額支払われることになる。そこで、買い手は、売り手が受取るべきキャッシュ・フローを、売買時に取引価格に上乗せして支払う。この上乗せ額を経過利子と呼ぶ。上述のように、本邦国債市場では、リオープン方式の導入前後で経過利子の計算方法が異なる。このため以下では、経過利子の計算方法を、2001年3月のリオープン方式の導入の前後に分けて説明する。

まず、リオープン方式導入以前の経過利子の計算方法を示す。受渡日が初回の利払いが発生する日以前の場合は、 d' を発行日から受渡日までの日数（閏日を含む両端入れ方式で計算）とすると、経過利子 A^{v_i} は以下のように計算される。

$$A^{v_i} = c^{v_i} N^{v_i} \times \frac{d'}{365}.$$

リオープン方式導入以前、受渡日が初回の利払いが発生する日以後の経過利子は、 d' を直前のキャッシュ・フロー発生日から受渡日までの日数（閏日を含む片端入れ方式で計算）とすると、

$$A^{v_i} = \begin{cases} c^{v_i} N^{v_i} \times \frac{d'}{365} & d' < 183 \\ \frac{c^{v_i} N^{v_i}}{2} & d' \geq 183 \end{cases},$$

と計算される。

リオープン方式導入以後の経過利子の計算方法は、①受渡日が初回の利払いが発生する日以前の場合と、②受渡日が初回の利払いが発生する日以後の場合で、計算方法は以下ようになる。①の場合、 d' を前期利払期日から受渡日までの日数（閏日を含む片端入れ方式で計算）とし、②の場合、 d' を直前のキャッシュ・フロー発生日から受渡日までの日数（閏日を含む片端入れ方式で計算）とすると、経過利子は①の場合と②の場合で以下の式で計算される。

$$A^{v_i} = \begin{cases} c^{v_i} N^{v_i} \times \frac{d'}{365} & d' < 183 \\ \frac{c^{v_i} N^{v_i}}{2} & d' \geq 183 \end{cases} .$$

なお、約定日と受渡日の間に、債券の次回のキャッシュ・フローが発生する場合、経過利子は、 d' を債券の次回のキャッシュ・フロー発生日から受渡日までの日数として計算する。

補論 2. Steeley [1991] の方法に関する推定アルゴリズム

補論 1 では、本邦国債の理論価格計算に必要となる、キャッシュ・フローの発生時点の定義、発生時点までの日数計算方法、キャッシュ・フローの額（初回利払額や経過利子）の決め方といった本邦国債市場の慣行について整理した。3 節において選択された Steeley [1991] の方法の理論面での解説は 2 節で行ったとおりだが、本邦国債の価格データから実際に本手法により推定を行う場合には、補論 1 で解説した市場慣行に則って行う必要がある。本補論では、補論 1 で解説した内容を、国債の理論価格計算に正確に反映しつつ、Steeley [1991] による方法で効率的な推定を行うためのアルゴリズムを解説する。

まず、 $t = 0$ で取引されている本邦国債の全銘柄を以下の 4 つのグループに分類する。

- ① 償還までの期間が 1 年未満で利払期日が 20 日の銘柄
- ② 償還までの期間が 1 年未満で利払期日が 15 日の銘柄
- ③ 償還までの期間が 1 年以上で利払期日が 20 日の銘柄
- ④ 償還までの期間が 1 年以上で利払期日が 15 日の銘柄

上の②と④については、補論 1 (1) で示したように、2007 年 10 月以降に発行された 2 年債がどちらかに該当する。①と③については、それ以外の銘柄が該当する。償還までの残存期間が 1 年未満か 1 年以上かで分けている理由は、それによって閏日の調整方法が異なり、キャッシュ・フロー発生時点までの日数計算の方法が異なってくるためである（補論 1 (2) 参照）。

簡単のために、上の③のグループに対する理論価格の計算方法について以下に示していく。まず、 $t = 0$ は西暦 V 年 W 月中のある 1 日だとする。③に属する銘柄のうち償還までの期間が最大の銘柄の償還時点を、西暦 X 年 Y 月中のある 1 日だとする。すると、両時点の間には、両時点を含めて、月数にして $12(X - V) - W + Y + 1$ カ月だけ存在する。この月数を以下では n_{month} と置く。

次に、③に属する銘柄のキャッシュ・フローが発生する可能性のある時点として、 V 年 W 月から X 年 Y 月までの各月において、20 日が営業日の場合には 20 日に、営業日ではない場合には修正翌営業日協定に則って定められる日を固定する。そして、このように固定された日それぞれについて、 $t = 0$ からの年数を補論 1 (2) の日数計算法に基づいて計算されるものを、 $T_1 < T_2 < \dots < T_{n_{month}}$ と置く。

さらに、 $t = 0$ で③に属する銘柄を $v_i (i = 1, \dots, n)$ とすると、 V 年 W 月から X 年 Y 月までの全ての月の 20 日（ただし、20 日が営業日ではない場合には修正翌営業日協定に則って定まる日）に関する銘柄 v_i のキャッシュ・フローの額が、補論 1 (4) 等から定まる。それを $\tilde{c}^{v_i} := (\tilde{c}_1^{v_i}, \dots, \tilde{c}_{n_{month}}^{v_i})^T$ と置く。本邦国債の全ての銘柄はクーポンの支払いは半年おきに発生するので、 \tilde{c}^{v_i} の成分の中にはゼロとなるものがある

ことに注意が必要である。

ここで、全てのキャッシュ・フロー発生時点までの割引関数を計算するために、全時点に対応する \mathbf{B} スプライン関数の値を成分とする行列 \mathbf{B} を用意しておく。ここで \mathbf{B} は、本論 2 節 (4) イ. (ロ) で導入した $B(k, x)$ ((16) 式) を用いて、 (k, j) 成分が $B(j-4, T_k)$ となる行列とする。すなわち、

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B(-3, T_1) & \cdots & B(n_{knot} - 1, T_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(-3, T_{n_{month}}) & \cdots & B(n_{knot} - 1, T_{n_{month}}) \end{pmatrix}, \quad (\text{A-1})$$

とする。ここで、Steeley [1991] の方法によるパラメータを $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{-3}, \dots, \alpha_{n_{knot}-1})^T$ と置くと、 T_j に対応する割引率 $Z(T_j)$ は本論中の (15) 式から、 $\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}$ の第 j 成分となる。

したがって、パラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ が与えられた時の銘柄 v_i の理論価格 $Q^{v_i}(\boldsymbol{\alpha})$ は、

$$Q^{v_i}(\boldsymbol{\alpha}) = (\tilde{\mathbf{c}}^{v_i})^T \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}, \quad (\text{A-2})$$

と計算される。

上述のアルゴリズムの効率化のポイントは、割引関数を計算する際、銘柄ごとに、全てのキャッシュ・フロー発生時点までの日数を計算し、それに対応する割引関数の計算のために \mathbf{B} スプライン関数を計算する必要がない点にある。すなわち、同一のグループ（上述の例では③に属するグループ）で、 \mathbf{B} という行列を (A-1) 式に従って 1 回だけ計算すればよい点にある。

上では、③に属する銘柄の理論価格の計算アルゴリズムを示したが、別のグループ（①、②、④）に関しても、グループごとに (A-1) 式から行列 \mathbf{B} を計算し、(A-2) 式に従って理論価格を計算できる。このように、銘柄ごとに、キャッシュ・フローが発生する時点に対応したスプライン関数を計算することなく、4 種類の行列 \mathbf{B} を計算することによって、効率的な推定が可能となる。

