

# 確率局所ボラティリティ・ モデルのもとでのヘッジ戦略： 最尤経路を利用した バリア・オプションの静的ヘッジ

しんばらゆうき  
新原祐喜

## 要 旨

本稿では、原資産価格とインプライド・ボラティリティの変動に関する各種モデルとヘッジ戦略について先行研究を整理し、オプションのリスク管理において、確率局所ボラティリティ・モデルが有用であることを示す。そのうえで、バリア・オプションを取り上げ、既存のヘッジ戦略における問題点を改善した効率的な静的ヘッジ戦略を提案する。具体的には、原資産価格が確率局所ボラティリティ・モデルに従うと仮定し、ヘッジ誤差の  $n$  次モーメントの近似式を最尤経路を中心とした鞍点近似によって導出する。この結果を用い、ヘッジ誤差の 2 乗平均の近似値を最小化することで、ヘッジ誤差への影響が大きいリスク・シナリオを中心にヘッジする。この手法では、既存の手法に比べて効率的にバリア・オプションをヘッジでき、比較的少数のバニラ・オプションでヘッジした場合でも、ヘッジ誤差を十分に抑制できる。本稿では、SABR モデルとリバース・ノックアウト・オプションを例にとり、この手法が既存の手法よりヘッジ誤差を小さくできることを数値的に検証する。

キーワード：確率局所ボラティリティ・モデル、SABR、ヒートカーネル展開、鞍点近似、バリア・オプション、静的ヘッジ、最尤経路

本稿の作成に当たっては、高橋明彦教授（東京大学）、JAFEE 2010 冬季大会、日本 OR 学会研究部会「ファイナンス理論の展開」、Young Researcher's Workshop on Finance 2011、三菱 UFJ モルガン・スタンレー証券および三菱東京 UFJ 銀行における研究会の参加者ならびに日本銀行のスタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

新原祐喜 日本銀行金融研究所  
(現 三菱東京 UFJ 銀行、E-mail: yuuki\_shinbara@mufg.jp)

## 1. はじめに

バリア・オプションは、原資産価格があらかじめ設定された価格水準（バリア）に到達した際に、権利が発生あるいは消失するオプションである。バリア・オプションは、為替や株式市場をはじめとした金融市場において、単体で、あるいは仕組債に組み込まれるかたちで売買されている。エキゾチック・オプションの中では最も取引量が多く、金融機関のオプション・ポートフォリオに占めるバリア・オプションの割合も比較的大きいとみられる。一方、バリア・オプションは、最も基本的なオプションであるバニラ・オプションと比べると、一般に市場流動性や価格透明性が低い。このため、バリア・オプションを売買する金融機関にとって、その時価評価やリスク管理は重要な課題となっている。

特に、バリア・オプションに内在する複雑なリスクを、他の金融商品を用いてどのように効率的にヘッジするかについては研究途上であり、いくつかの手法が提案されているが、いずれの手法にも問題があることが指摘されている。動的ヘッジ、すなわち、保有するバリア・オプションの感応度を市場環境の変化に応じて逐次再計算し、それに従って原資産を保有する場合には、頻繁なリバランスが必要となり、多大な取引コストが発生することが知られている。また、Derman, Ergener, and Kani [1995]、Carr and Chou [1997]、Carr, Ellis, and Gupta [1998] 等による静的ヘッジ戦略、すなわち、バリア・オプションの取引開始時に構築したバニラ・オプションのポートフォリオでヘッジする場合には、ボラティリティの変動を踏まえたヘッジではないことから、ヘッジ誤差<sup>1</sup>が大きいことが知られている。一方、Fink [2003] により提案され、Nalholm and Poulsen [2006] や、時価評価手法として研究した Shiraya, Takahashi, and Toda [2011] 等により発展してきた、ボラティリティの変動リスクまで考慮した静的ヘッジ戦略では、流動性が低いオプションが多数必要となりヘッジ戦略の実現自体が困難である。

こうした点を踏まえ、本稿では、まず、先行研究で提案されてきたバリア・オプションのヘッジ手法について整理した後、先行研究の問題点を改善した効率的な静的ヘッジ戦略を提案する。この手法は、解析的に導出したヘッジ誤差の2乗平均を最小化することで、ヘッジ誤差への影響が大きい原資産価格やボラティリティのシナリオを中心にヘッジする戦略である。具体的には、まず、原資産価格が確率局所ボラティリティ・モデル (stochastic local volatility model: SLV モデル)<sup>2</sup>に従うと仮定したうえで、状態変数のパスが従う確率密度関数をヒートカーネル展開 (heat kernel expansion) で近似し、最も発生確率が高いパス (最尤経路; the most likely

1 ここでヘッジ誤差とは、ヘッジ取引から生じるキャッシュ・フローと、ヘッジ対象のオプションから生じるキャッシュ・フローとの差を表している。

2 当該モデルの呼称としては、stochastic volatility, local stochastic volatility あるいは local-and-stochastic volatility 等、複数ある。また、確率ボラティリティ・モデル (stochastic volatility model: SV モデル) の一部とみなして inhomogeneous stochastic volatility model と呼ばれることもあるが、本稿では SLV モデルと呼ぶ。

path) を中心とした鞍点近似を利用することで、ヘッジ誤差の  $n$  次モーメントの近似式を導出する<sup>3</sup>。次に、この結果を用い、ヘッジ誤差の 2 乗平均を最小化することで、ヘッジ誤差への影響が大きい原資産価格やボラティリティのシナリオを中心にヘッジする。この手法では、既存の手法に比べて効率的にバリア・オプションをヘッジでき、比較的少数のバニラ・オプションでヘッジした場合でも、ヘッジ誤差を十分に抑制できることが期待される。

本稿は、SLV モデルのもとでのバリア・オプションのヘッジ戦略にヒートカーネル展開と鞍点近似を応用した最初の試みである。ゼロ次のヒートカーネル展開に当たる近似手法を用いた先行研究としては、局所ボラティリティ・モデル (local volatility model: LV モデル) のもとでのバニラ・オプションの時価評価に応用した Hagan and Woodward [1999]、SV あるいは SLV モデルのもとでのバニラ・オプションの時価評価に応用した Hagan *et al.* [2002] がある。また、より高次のヒートカーネル展開を用いた研究としては、SV あるいは SLV モデルのもとでのバニラ・オプションの時価評価に応用した Henry-Labordère [2005]、Paulot [2009] 等がある。本稿は、高次のヒートカーネル展開を、経路依存型オプションであるバリア・オプションのヘッジに応用した試みであり、本稿の手法を用いることでヘッジ誤差のモーメントを解析的に評価できる。

バリア・オプションに代表されるエキゾチック・オプションのリスクは、一般に、原資産とバニラ・オプションを売買することで管理される。このため、リスク管理においてはバニラ・オプションのダイナミクスと統合的なモデルを使うことが重要である。この点について、先行研究で提案されている代表的なモデルを概観すると、SLV モデルが最も有用であると判断できる。SLV モデルは、現在のバニラ・オプションの価格水準と統合的であるうえに、バニラ・オプションのダイナミクスをモデル化するうえで十分な自由度を持つことが知られている。このため、バニラ・オプションとエキゾチック・オプションの時価を同一のモデルで評価できるうえに、リスク管理に必要なさまざまな原資産価格やボラティリティのシナリオを表現できるモデルである。こうした点から、本稿では、ヘッジ戦略の構築において SLV モデルを選択している。

なお、本稿は、読者として、ボラティリティの変動モデルのほか、最尤経路を利用した近似手法の実務への応用に興味がある実務家を想定している。このため、実務上不要と思われる数学の詳細は可能な限り省略しており、詳細については引用した文献を参考にいただきたい。ただし、導出まで含めて実務上重要であると筆者が判断する一部の内容と本稿で提案するバリア・オプションの新しいヘッジ戦略については、数学的な内容も含めて詳細に説明する。

本稿の構成は以下のとおりである。まず 2 節で、エキゾチック・オプションの時価評価と全てのオプションのリスク管理において重要な点を整理し、SLV モデルの有用性を確認する。次に 3 節で、デルタ・ヘッジ、ベガ・ヘッジ等の動的ヘッジ戦略

.....  
3 ヒートカーネル展開と鞍点近似についてはそれぞれ、4 節 (2) と (3) を参照。

と既存の静的ヘッジ戦略の概要と問題点についてまとめる。次に4節で、最尤経路を中心とした鞍点近似によりヘッジ誤差のモーメントを近似的に求める。次に5節で、近似したモーメントを利用したヘッジ戦略について説明し、そのヘッジ効率について数値検証する。最後に6節で、本稿の内容をまとめる。

## 2. 確率局所ボラティリティ・モデルの背景

本節では、原資産価格とボラティリティ・サーフェスの変動に関する各種モデルを整理し、その特徴をみていく。

まず、(1)では、オプションのリスク管理や時価評価を行ううえで、ボラティリティ・サーフェスのダイナミクスがポイントとなることを解説する。次に、(2)では、これまで考えられてきた主要なボラティリティ変動モデル等の特徴を整理し、オプションのリスクを管理するうえでSLVモデルが有用であることを説明する。

### (1) ボラティリティ・サーフェスのダイナミクスの重要性

ボラティリティ・サーフェスとは、バニラ・オプションの現時点の市場価格からブラック＝ショールズ (Black-Scholes: BS) 式を逆算することで得られるBSのインプライド・ボラティリティ (BS implied volatility: BSIV) について、権利行使価格 (以下、行使価格) と満期を軸にとり描いた曲面 (サーフェス) である<sup>4</sup>。図1には、ボラティリティ・サーフェスとそのダイナミクスの関係を示した。通常、ボラティリティ・サーフェスは、時間とともに確率的に変化し、ボラティリティ・サーフェスが従う確率分布は、オプションのリスク管理や時価評価において重要である。以下では、オプションのデルタ・ヘッジとエキゾチック・オプションの静的ヘッジ、時価評価を例に、その重要性をみていく。

### イ. オプションのデルタ・ヘッジ

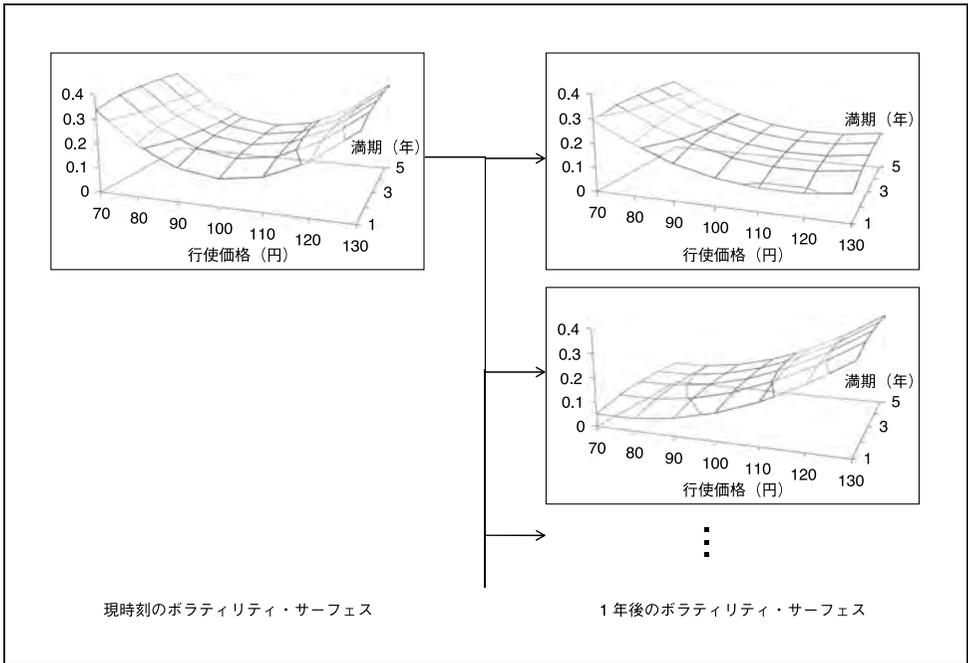
オプション保有に伴うリスクは、通常、オプション価格の原資産価格に対するリスク感応度 (デルタ) に応じて原資産を売買するデルタ・ヘッジによって管理されることが多い。ここでは、バニラ・オプションを例に、ボラティリティ・サーフェスのダイナミクスを踏まえたデルタ・ヘッジについて説明する。

ボラティリティ・サーフェスの確率的な変化幅が大きい場合、ボラティリティの変化も考慮してデルタ・ヘッジする必要がある。その場合のデルタの定義にはいくつかの選択肢があるが、ここでは原資産価格以外の状態変数<sup>5</sup>を固定したうえでの、

4 他方、満期を固定して、行使価格についての関数とみなす場合には、「ボラティリティ・スマイル」と呼ばれる。

5 原資産価格やボラティリティなどのモデルが想定する確率変数を本稿では状態変数と呼んでいる。

図1 ボラティリティ・サーフェスの確率的な変化



オプションの BS 時価評価式<sup>6</sup>の原資産価格による全微分として定義する。すなわち、デルタを

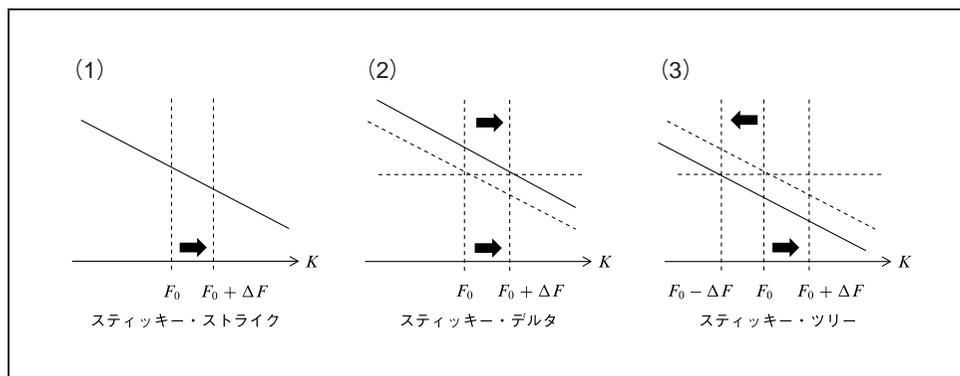
$$\begin{aligned} \Delta_{\text{smile}} &\equiv \frac{dV^{\text{BS}}(t, F, \sigma_{\text{Imp}}(t, F, \vec{a}; K, T))}{dF} \\ &= \Delta_{\text{BS}} + \text{Vega}_{\text{BS}} \times \frac{\partial \sigma_{\text{Imp}}(t, F, \vec{a}; K, T)}{\partial F}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Delta_{\text{BS}} \equiv \frac{\partial V^{\text{BS}}(t, F, \sigma_{\text{Imp}}(t, F, \vec{a}; K, T))}{\partial F}, \\ \text{Vega}_{\text{BS}} \equiv \frac{\partial V^{\text{BS}}(t, F, \sigma_{\text{Imp}}(t, F, \vec{a}; K, T))}{\partial \sigma_{\text{Imp}}(t, F, \vec{a}; K, T)}, \end{cases} \quad (2)$$

と定義する。ここで  $V^{\text{BS}}(t, F, \sigma_{\text{Imp}}(t, F, \vec{a}; K, T))$  はバニラ・オプションの BS 時価評価式、 $t$  は現時刻、 $F$  は原資産価格、 $\sigma_{\text{Imp}}(t, F, \vec{a}; K, T)$  は現時刻における行使価格  $K$ 、満期  $T$  の BSIV を表し、 $\vec{a}$  は原資産価格以外の状態変数を表している。(1) 式は、一般にスマイル調整済みデルタ (smile adjusted delta) と呼ばれ<sup>6</sup>、BS モデルから計算されたデルタ (BS デルタ、 $\Delta_{\text{BS}}$ ) とボラティリティ・サーフェスの変化を考

6 スマイル調整済みデルタは、時系列データからも計算できる簡便な感応度であり、実務でもしばしば利用される。また、LV モデルなどの完備市場モデルでの最適なデルタ・ヘッジ戦略は、スマイル調整済みデルタを利用したデルタ・ヘッジ戦略である。一方、後述するように、ボラティリティも状態変数に含む SV モデルや SLV モデルではさまざまなデルタを定義できる。具体的には、 $\vec{a}$  で表現される状態変数にボラティリ

図2 ボラティリティ・レジーム



備考：原資産価格が  $F_0$  から  $\Delta F$  だけ増大したときの各レジームにおけるスマイルの変化。

慮した項 ( $\text{Vega}_{\text{BS}} \times \partial\sigma_{\text{Imp}}(t, F, \bar{a}; K, T)/\partial F$ ) とに分解される。

(1) 式のスミール調整済みデルタをヘッジした場合の損益は、ボラティリティ・サーフェスのダイナミクスに依存する。(1) 式の各項のうち、 $\Delta_{\text{BS}}$  と  $\text{Vega}_{\text{BS}}$  は現時刻のボラティリティ・サーフェスのみから決まるが、 $\partial\sigma_{\text{Imp}}(t, F, \bar{a}; K, T)/\partial F$  はボラティリティ・サーフェスのダイナミクスに依存する。ここで  $\partial\sigma_{\text{Imp}}(t, F, \bar{a}; K, T)/\partial F$  は、原資産価格の微小変化に対するボラティリティ・サーフェスの感応度を表しており、当該量は微小時間間隔におけるボラティリティ・サーフェスのダイナミクスの情報を含んでいる。したがって、当該量をバニラ・オプションの市場価格の変化と整合的になるよう推計、あるいはモデル化することが、スミール調整済みデルタを用いてヘッジするうえでのポイントとなる。

ボラティリティ・サーフェスのダイナミクスは、Derman [1999a] が提案したボラティリティ・レジームで表現できる。ボラティリティ・レジームとは、原資産価格が  $\Delta F$  だけ増大した場合のアット・ザ・マネー (ATM) 付近のボラティリティ・スマイルの形状変化に応じて分類したものである。ATM 付近のスマイルを直線で近似すると、図2に示した3つに、ボラティリティ・レジームは大別される。ここで、それぞれのレジームは、スティッキー・ストライク、スティッキー・デルタ、スティッキー・ツリーと呼ばれ、それぞれ以下の特徴を持つ。

### (イ) スティッキー・ストライク

スティッキー・ストライクは、原資産価格が変化してもスマイルの位置と形状が変化しないレジームとして定義される (図2 (1))。行使価格を横軸にとりボラティリティ・サーフェスのダイナミクスを描いた際に、原資産価格が変化しても、その

ティ (後掲 (12) 式における  $\alpha_t$ ) が含まれ、原資産価格の変化に応じた  $\alpha_t$  の変化の定義に応じて複数のデルタを定義できる。本稿では、 $\alpha_t$  を固定したうえでの原資産価格による全微分をスマイル調整済みデルタと呼び、原資産価格の変化に応じた  $\alpha_t$  の変化も考慮した感応度をリスク最小化デルタと呼んでいる。リスク最小化デルタについては3節で説明する。

位置や形状が変化しない。スティッキー・ストライクでは  $\partial\sigma_{\text{Imp}}/\partial F = 0$  が成り立ち、この場合のスマイル調整済みデルタは、BS デルタに一致する。

#### (ロ) スティッキー・デルタ (スティッキー・マネネス)

スティッキー・デルタは、原資産価格が変化した際に、同じ方向に同じ量だけ変化するようなボラティリティ・サーフェスのダイナミクスとして定義される (図 2 (2))<sup>7</sup>。スティッキー・デルタでは、 $\partial\sigma_{\text{Imp}}/\partial F > 0$  が成り立つ。このため、スティッキー・デルタのもとでは、コール・オプションのショート・ポジションをヘッジするのに必要なスマイル調整済みデルタは BS デルタより大きい。

#### (ハ) スティッキー・ツリー

スティッキー・ツリーは、原資産価格が変化した際に、原資産価格の変化方向とは逆方向に、同量だけ変化するようなボラティリティ・サーフェスのダイナミクスとして定義される (図 2 (3))<sup>8</sup>。スティッキー・ツリーでは、 $\partial\sigma_{\text{Imp}}/\partial F < 0$  が成り立つ。このため、スティッキー・ツリーのもとでは、コール・オプションのショート・ポジションをヘッジするのに必要なスマイル調整済みデルタは、BS デルタより小さい。

市場で観察されるボラティリティ・サーフェスのダイナミクスを 3 つのレジームで表現した場合、時間とともにレジームが変化し、単一のレジームでは表現できないことが知られている。例えば、Derman [1999b] による米国の S&P 500 株価指数オプションを対象にした分析では、市場環境に応じてレジームが変化していることが報告されている。このため、スマイル調整済みデルタをヘッジする場合には、複数のボラティリティ・レジームを表現できるモデルが必要となる<sup>9</sup>。

### ロ. エキゾチック・オプションの時価評価と静的ヘッジ

エキゾチック・オプションの時価評価とヘッジでも、バニラ・オプションと同様に、ボラティリティ・サーフェスのダイナミクスが重要である。エキゾチック・オプションのリスク管理を議論する際に固有の点としては、以下の 2 つに注意する必要がある。第 1 に、エキゾチック・オプションのリスクは通常、流動性のあるバニラ・オプションを用いて動的にあるいは静的にデルタとベガ<sup>10</sup>をヘッジすることで

7 厳密には、スティッキー・デルタは、オプションのデルタあるいはマネネス (行使価格と ATM オプションの行使価格  $K_A$  の比) を横軸にとりボラティリティ・サーフェスのダイナミクスを描いた際に、その位置や形状が変化しないレジームとして定義される。この場合、行使価格を横軸にとりダイナミクスを描いた際には、原資産価格と同じ方向に同じ量だけ、スマイルが変化する。

8 これは、本節(2)イ. で定義する、局所ボラティリティ関数 (ツリー) が市場と常に整合的であると仮定した場合のボラティリティ・サーフェスのダイナミクスに相当することから、スティッキー・ツリーと呼ばれる。

9 ここでは簡単のために、スマイル調整済みデルタを用いて説明したが、リスク最小化デルタを用いる場合でも実際の市場と整合的なボラティリティ・サーフェスのダイナミクスを記述できるモデルが必要である。

10 ATM ボラティリティや、(11)、(16) 式の  $\alpha_i$  に対する感応度として定義される。

表 1 ダウン・アンド・アウト・コール・オプションの静的ヘッジ・ポートフォリオ

No.	行使価格	満期	ペイオフ	保有数
1	$K$	$T$	コール・オプション	1
$i = 2, \dots, N = m \times n$	$K_i < B$	$T_i < T$	コール・オプション	$\beta_i$

管理される。第2に、エキゾチック・オプション<sup>11</sup>の時価評価にはモデル・リスクが伴う。エキゾチック・オプションのように流動性が低い商品では、市場価格の信頼性が低いため、流動性が高いバニラ・オプション価格から決まる、現時刻のボラティリティ・サーフェスにキャリブレートしたモデルを用いて時価が推定される。具体的には、モデルを用いてヘッジ戦略が組まれた後に、ヘッジ戦略にかかるコストとして時価が決められるが、その値は用いたモデルに依存する。このため、エキゾチック・オプションについてはデルタ・ヘッジ以外の観点からも時価とヘッジ戦略について議論することで、評価の頑健性を高めることが望まれる。ここでは、Baker, Bener, and Zilber [2004] を簡略化した例を用いて、エキゾチック・オプションの時価評価とヘッジを扱ううえでのボラティリティ・サーフェスのダイナミクスの役割を解説する。具体的には、行使価格  $K$ 、満期  $T$ 、バリア水準  $B$  のダウン・アンド・アウト・コール・オプションを、表1のバニラ・オプションのポートフォリオで静的にヘッジする例を考える<sup>12</sup>。

静的ヘッジとは、バリア・オプションの取引開始時に構築したバニラ・オプションからなるポートフォリオ（ヘッジ・ポートフォリオ）によって、バリア・オプションが生み出すキャッシュ・フローを近似的に合成する戦略である。いったんヘッジ・ポートフォリオを構築したら、バリア・オプションの権利が消滅した際にポートフォリオを解消する以外のタイミングで、ポジションの調整が必要ないことから、「静的」ヘッジと呼ばれる。

バリア・オプションのキャッシュ・フローは、バリアに到達せずに満期を迎えた場合のペイオフと、バリアに到達した際のペイオフに分類して考えることができる。表1に示したヘッジ・ポートフォリオの例では、原資産価格がバリアに到達しなかった場合のペイオフが1番目のコール・オプションで常に複製されるため、バリアに到達した際のポートフォリオの価値がゼロとなるように  $\beta_i$  を調節することで、静的にヘッジできる。

バリアに到達した際のヘッジ誤差を打ち消す条件を簡便に考察するために、バリア水準  $B$  に到達する時刻が  $n$  個の離散的な時刻  $t_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) で表現されるとし、到達した際に実現しうるボラティリティ・サーフェスは  $m$  種類の  $\sigma_{\text{Imp}}(t_j, B, \vec{a}^{(k)}; K, T)$  ( $k = 1, \dots, m = N/n$ ) のいずれかで表現されると便宜上

11 ここでのエキゾチック・オプションとは特に、バニラ・オプションによるモデル・フリーな静的ヘッジが不可能なオプション、すなわち、経路依存型オプションのことを指している。モデル・フリーな静的ヘッジが可能な場合には、モデル・リスクの問題は生じない。

12 本節では静的ヘッジの詳細についての知識は必要ないが、詳細については3節(2)を参照。

考える<sup>13</sup>。この場合、原資産価格がバリアに到達した際にヘッジ・ポートフォリオ価値がゼロとなる条件は

$$\sum_{i=1}^N \beta_i V^{\text{BS}}(t_j, B, \sigma_{\text{Imp}}(t_j, B, \bar{a}^{(k)}; K_i, T_i)) + V^{\text{BS}}(t_j, B, \sigma_{\text{Imp}}(t_j, B, \bar{a}^{(k)}; K, T)) = 0, \quad \text{for all } j \text{ and } k, \quad (3)$$

である。ここで  $V^{\text{BS}}(t, F_t, \sigma_{\text{Imp}}(t, F_t, \bar{a}^{(k)}; K, T))$  は、原資産価格  $F_t$ 、インプライド・ボラティリティ  $\sigma_{\text{Imp}}(t, F_t, \bar{a}^{(k)}; K, T)$ 、行使価格  $K$ 、満期  $T$  のバニラ・オプションの時刻  $t$  における BS 時価評価式である。(3) 式は  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) に関する  $N$  元連立方程式となっており、その解に当たる  $\beta_i$  単位だけ行使価格  $K_i$ 、満期  $T_i$  のバニラ・オプションを購入することで静的ヘッジ・ポートフォリオが構築できる。

(3) 式は、現時刻でのバリア・オプションの時価とヘッジ戦略が将来のボラティリティ・サーフェスに依存することを示している。バリア・オプションの現時刻  $t_0$  での時価は、ヘッジ・ポートフォリオの時価に等しく、

$$\sum_{i=1}^N \beta_i V^{\text{BS}}(t_0, F_0, \sigma_{\text{Imp}}(t_0, F_0, \bar{a}_0; K_i, T_i)) + V^{\text{BS}}(t_0, F_0, \sigma_{\text{Imp}}(t_0, F_0, \bar{a}_0; K, T)), \quad (4)$$

で表現される。ここで、ヘッジ戦略の詳細を定義する  $\beta_i$  はオプションの保有数に当たり、(3) 式の解である。このため  $\beta_i$  とバリア・オプションの時価 ((4) 式) は、バリアに到達する場合に実現しうるボラティリティ・サーフェス  $\sigma_{\text{Imp}}(t_j, B, \bar{a}^{(k)}; K, T)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) の関数である<sup>14</sup>。仮に、誤ったボラティリティ・サーフェスのダイナミクスを想定して  $\beta_i$  を推定した場合には (3) 式の左辺がゼロにならず、バリア・オプションの静的ヘッジ戦略で生ずるヘッジ誤差の分散が大きくなる。また、時価についても、適切な水準からの乖離幅が大きくなる。このように、ボラティリティ・サーフェスのダイナミクスはエキゾチック・オプションの時価評価とヘッジにおいても重要である。

以上では、バリア・オプションをヘッジする例のみを考察したが、一般のエキゾチック・オプションでもボラティリティ・サーフェスのダイナミクスが重要である。エキゾチック・オプションのペイオフは、状態変数の経路によって決まるため、時価が状態変数の同時確率分布に依存する。このため、ボラティリティ・サーフェス

13 言い換えると、バリアに到達する条件のもとでのボラティリティ・サーフェスの確率分布を離散近似し、 $m$  種類のボラティリティ・サーフェスのいずれかのみが実現すると仮定している。

14 正確には、原資産価格がバリアに到達する条件のもとで、ボラティリティ・サーフェスが従う確率分布の関数である。

が一致する複数のモデルがあっても、それらの中で同時確率分布が一致しない限り、エキゾチック・オプションの時価は一致しない<sup>15</sup>。ボラティリティ・サーフェスのダイナミクスは同時確率分布に含まれる情報の一部であり、一般のエキゾチック・オプションの時価評価でも、適切なボラティリティ・サーフェスのダイナミクスを表現できるモデルが必要となる。

## (2) ボラティリティ・サーフェスを表現する原資産価格モデル

本節(1)でみたように、オプションの時価評価やリスク管理ではボラティリティ・サーフェスのダイナミクスが重要であるが、歴史的には、現時刻のボラティリティ・サーフェスを再現するモデルが研究の出発点になっている。以下では、

1. 局所ボラティリティ・モデル
2. 確率ボラティリティ・モデル
3. 確率局所ボラティリティ・モデル
4. その他のモデル：ジャンプ拡散過程

の4つの主要なモデルを取り上げ、現時刻のボラティリティ・サーフェスとの整合性と、モデルが表現できるボラティリティ・サーフェスのダイナミクスの特徴を整理する。

### イ. 局所ボラティリティ・モデル

Dupire [1994]、Derman and Kani [1994] により提案された LV モデルは、時刻  $t$  と原資産価格  $F_t$  に依存する関数で瞬間的なボラティリティを表現することで、ボラティリティ・サーフェスを再現するモデルである。また、LV モデルはブラウン運動  $W_t$  を1つだけ含む完備なモデルであり、全ての金融商品をデルタ・ヘッジで複製できることが仮定されている。

LV モデルは、原資産価格がマルチンゲールとなる測度下において<sup>16</sup>

$$\frac{dF_t}{F_t} = \sigma_{LV}(t, F_t) dW_t, \quad (5)$$

の確率微分方程式により定義される<sup>17</sup>。ここで、 $\sigma_{LV}(t, F_t)$  は局所ボラティリティ

15 この事実は、ボラティリティ・サーフェス、すなわち、バニラ・オプションの価格が、原資産価格の従う周辺分布のみで決まることに由来する。ここで、周辺分布とは、状態変数の同時確率分布のうち原資産価格以外の自由度を積分した確率分布を表し、同時確率分布が含む情報のうち、ごく一部の情報に対応している。このため、理論上想定しうる全ての種類のバニラ・オプションの価格は一致するが、エキゾチック・オプションについては価格の異なるモデルが複数存在しうる。

16 本稿では、便宜的に、ローカル・マルチンゲールとマルチンゲールをともにマルチンゲールと表現する。

17 以下では特に断らない限り、為替や株式等の原資産価格と適当な基準財価格の比を原資産価格と定義し直し、再定義した原資産価格がマルチンゲールとなる測度のもとで議論する。このため、原資産価格が従う

(LV) 関数と呼ばれ、LV モデルは LV 関数によってモデルが規定される。LV 関数の定式化には、パラメトリックなものと同パラメトリックなもの2種類がある。前者の代表例としては、

$$\sigma_{LV}(t, F_t) = F_t^{\beta-1}, \quad (6)$$

で定義される CEV モデル (constant elasticity of variance model) (Cox and Ross [1976]) や、

$$\sigma_{LV}(t, F_t) = q \frac{F_0}{F_t} + (1 - q), \quad (7)$$

で定義されるデイスプレースト・ディフュージョン・モデル (displaced diffusion model) (Rubinstein [1983]) が挙げられる。

一方、後者のノン・パラメトリックのケースでは、ボラティリティ・サーフェスと LV 関数の間に成立する、デュピレの公式 (下記 (8) 式) を利用することで、ボラティリティ・サーフェスと整合的な LV 関数を一意に導出できることが知られている (Dupire [1994])。具体的には、ボラティリティ・サーフェスから計算されるバニラ・オプション価格について、行使価格  $K$  と満期  $T$  の両方向に滑らかに補間した関数を  $C(K, T)$  とすると

$$\sigma_{LV}^2(t, K) = 2 \frac{\frac{\partial C(K, T)}{\partial T} \Big|_{T=t}}{K^2 \frac{\partial^2 C(K, T)}{\partial K^2} \Big|_{T=t}}, \quad (8)$$

により、現時刻のボラティリティ・サーフェスと整合的な LV 関数がノンパラメトリックに導出される。(8) 式には、計算の容易なオプション価格の微分形のみが含まれるため、LV モデルでは、どのようなボラティリティ・サーフェスも短時間でキャリブレーションできるというメリットがある。一方、LV モデルで表現できるボラティリティ・サーフェスのダイナミクスが本節(1)で解説したスティッキー・ツリーに限られるというデメリットも知られている。この点を理解するため、まず、Hagan and Woodward [1999] による漸近展開<sup>18</sup>を用いてデュピレの公式を近似的に解くと、現時刻  $t_0$  でのボラティリティ・サーフェスは

$$\sigma_{Imp}(t_0, F; K, T) = \sigma_{LV} \left( t_0, \frac{1}{2}(F + K) \right) \{1 + O((F - K)^2) + O(T - t_0)\}, \quad (9)$$

---

確率微分方程式には金利等のトレンド項は含まれない。また、ポートフォリオも該当する基準財対比で考えるため、無リスクなポートフォリオの期待成長率もゼロとなる。

18 LV 関数が時刻に依存しているため、正確には Henry-Labordère [2008] あるいは Gatheral *et al.* [2010] による漸近展開を利用している。ただし、(9) 式の近似の精度では、Hagan and Woodward [1999] による近似式との違いはない。

と表現される<sup>19</sup>。このため、微小な時間  $\Delta t$  の間に原資産価格が  $\Delta F$  だけ増大した場合のボラティリティ・サーフェスと現時刻のボラティリティ・サーフェスとの間に

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{Imp}}(t_0 + \Delta t, F + \Delta F; K, T) &\simeq \sigma_{\text{LV}}\left(t_0, \frac{1}{2}(F + \Delta F + K)\right) \\ &\simeq \sigma_{\text{Imp}}(t_0, F; K + \Delta F, T),\end{aligned}\quad (10)$$

の関係式が成立する<sup>20</sup>。(10)式は、変化後の行使価格  $K$  のインプライド・ボラティリティが、変化前の行使価格  $K + \Delta F$  のインプライド・ボラティリティに等しいことを示しておりスティッキー・ツリーのレジームに相当している。(10)式は任意のLV関数に対して成り立つことから、どのようなLV関数を選んでもスティッキー・ツリーで想定されるようにボラティリティ・サーフェスが変化することがわかる。

## ロ. 確率ボラティリティ・モデル

SVモデルは、ボラティリティ自身が確率的に変化すると仮定することで、現時刻のボラティリティ・サーフェスと将来のボラティリティ・サーフェスのダイナミクスを表現するモデルである。SVモデルは1つの原資産の値動きを複数のブラウン運動で記述する非完備なモデルであり、金融派生商品をデルタ・ヘッジで複製できるとは限らない。また、複数のブラウン運動で記述されることから一般に計算負荷が高いことも知られている。

SVモデルは、原資産価格がマルチンゲールとなる測度下で

$$\frac{dF_t}{F_t} = \alpha_t dW_t^1, \quad (11)$$

$$d\alpha_t = a(t, F_t, \alpha_t) + \sum_{j=2}^{N+1} b_j(t, F_t, \alpha_t) dW_t^j, \quad (12)$$

の確率微分方程式で定義される。ここで  $W_t^j$  ( $j = 1, \dots, N + 1$ ) は相関関係がある  $N + 1$  個のブラウン運動であり、ボラティリティの変化は  $N$  個のブラウン運動で記述されている。当該モデルは  $N$  ファクターSVモデルと呼ばれる。例えば、1ファクターSVモデルの具体例には、ハル＝ホワイト・モデル (Hull and White [1987])、ヘストン・モデル (Heston [1993]) 等がある<sup>21</sup>。

(11)式の右辺に原資産価格  $F_t$  が含まれないことから、SVモデルには次の2つの特徴がある。第1の特徴はSVモデルの欠点であり、キャリブレーションできないボラ

19 ここで  $O(\cdot)$  はランダウ記号である。関数  $f(x)$  が  $O(g(x))$  の程度であるとは  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)/g(x)| < \infty$  が満たされることであり、関数  $f(x)$  が  $o(g(x))$  の程度であるとは  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)/g(x)| = 0$  が満たされることである。

20 (10)式の第1の近似的な等号では、 $\partial \sigma_{\text{LV}} / \partial t \times \Delta t$  の項を無視している。

21  $N$  ファクターSVモデルあるいは  $N$  ファクターSLVモデルの実務への応用については、Bergomi [2005, 2008] 等の研究がある。

ティリティ・サーフェスが存在する。SV モデルでは、 $a$ 、 $b_j$  とブラウン運動間の相関係数を適切に調節することで、ボラティリティ・サーフェスが再現される。しかし、SV モデルの確率微分方程式に含まれるパラメータとボラティリティ・サーフェスとの間に一般的な関係式は存在せず、SV モデルでは現時点のボラティリティ・サーフェスを再現できる保証はない。例えば、ドル円の通貨オプションのようなボラティリティ・スマイルの傾きが大きいボラティリティ・サーフェスを SV モデルの枠組みで再現しようとする、 $-1$  より小さな相関係数が必要となるといった矛盾が生じる場合がある。

第 2 に、SV モデルを仮定して計算したスマイル調整済みデルタの値が、本節(1)で解説したスティッキー・デルタを仮定して計算したスマイル調整済みデルタの値に一致する。証明の詳細は省略するが<sup>22</sup>、(11) 式の右辺が原資産価格  $F_t$  に依存しないことから、SV モデルでの原資産価格の周辺分布とバニラ・オプション価格は、マネネス  $F_t/K$  の関数であり、

$$V(t, F_t, \alpha_t; K, T) = K \times R\left(t, \frac{F_t}{K}, \alpha_t, T\right), \quad (13)$$

の関係が成り立つ<sup>23</sup>。すなわち、オプション価格を表現する自由度が 1 つ制限される。ここで  $V(t, F_t, \alpha_t; K, T)$  は、時刻  $t$  における原資産価格  $F_t$ 、ボラティリティ  $\alpha_t$ 、行使価格  $K$ 、満期  $T$  のバニラ・オプションに関する SV モデルによる時価であり、 $R$  は SV モデルにより決まる適当な関数である。このため、

$$V^{BS}(t, F_t; \sigma_{\text{Imp}}(t, F_t, \alpha_t; K, T)) = V(t, F_t, \alpha_t; K, T), \quad (14)$$

の解として定義される SV モデルでのボラティリティ・スマイル ( $\sigma_{\text{Imp}}(t, F_t, \alpha_t; K, T)$ ) もマネネスの関数となる。このため、マネネスを変数として描いたスマイルの形状は、ボラティリティを固定して原資産価格を変化させても変わらない。また、スマイル調整済みデルタはスティッキー・デルタを仮定して計算したデルタに一致する<sup>24</sup>。

22 詳細は Fouque, Papanicolaou, and Sircar [2000] の 2.6 節を参照。

23 (13) 式が原資産価格  $F_t$  と行使価格  $K$  の 1 次の同次関数 (homogeneous function) であることから、本稿の SV モデルを同次 SV モデルと呼び、本稿での SLV モデルを非同次 SV モデルと呼ぶこともある。

24 全ての SV モデルでのスマイル調整済みデルタがスティッキー・デルタのデルタに等しいのは、デルタを原資産価格の偏微分として定義した点による。(13) 式が原資産価格  $F_t$  と行使価格  $K$  による 1 次の同次関数であるため、

$$V = F_t \frac{\partial V(t, F_t, \alpha_t; K, T)}{\partial F_t} + K \frac{\partial V(t, F_t, \alpha_t; K, T)}{\partial K},$$

の関係式 (オイラーの定理) が成立する。ここで  $V(t, F_t, \alpha_t; K, T)$  と  $\frac{\partial V(t, F_t, \alpha_t; K, T)}{\partial K}$  は現時点のボラティリティ・サーフェスにより決まる量である。このため、 $\frac{\partial V(t, F_t, \alpha_t; K, T)}{\partial F_t}$  は SV モデルの詳細によらず、スティッキー・デルタを仮定して計算されたスマイル調整済みデルタに一致する。なお、この点から、SV モデルはスティッキー・デルタのダイナミクスしか表現できないとしばしば指摘されるが、本節で後述するとおりこの指摘は誤りである。

SV モデルは、現時刻のボラティリティ・サーフェスの表現力については、上記のように制限されるが、ボラティリティ・サーフェスのダイナミクスについては、単一のレジームでは表現できない複雑なダイナミクスを表現できる。SV モデルのボラティリティ・スマイルはマネネスの関数であり

$$\sigma_{\text{Imp}}(t, F_t, \alpha_t; K, T) = \tilde{R}\left(t, \frac{F_t}{K}, \alpha_t, T\right), \quad (15)$$

で表現される。このため、ボラティリティ  $\alpha_t$  を固定して、原資産価格とボラティリティ・スマイルのダイナミクスを記述した場合には、スティッキー・デルタが想定するとおりにボラティリティ・スマイルが変化する。しかし、SV モデルでは  $\alpha_t$  も確率変数であり、SV モデルが想定する (11)、(12) 式のとおり原資産価格とボラティリティを変化させた場合には、スティッキー・デルタ以外のダイナミクスも実現される。

#### ハ. 確率局所ボラティリティ・モデル

SLV モデルは、SV モデルに LV 関数の自由度を付与したモデルである。SLV モデルも 1 つの原資産価格が複数のブラウン運動で記述される非完備なモデルであり、計算負荷が一般に高く、金融派生商品をデルタ・ヘッジで複製できるとは限らない。

SLV モデルは、原資産価格がマルチンゲールとなる測度下で、

$$\frac{dF_t}{F_t} = \alpha_t \sigma_{\text{LV}}(t, F_t) dW_t^1, \quad (16)$$

$$d\alpha_t = a(t, F_t, \alpha_t) + \sum_{j=2}^{N+1} b_j(t, F_t, \alpha_t) dW_t^j, \quad (17)$$

の確率微分方程式で定義される。代表的で比較的簡便なモデルとして、

$$\begin{cases} \frac{dF_t}{F_t} = \alpha_t F_t^{\beta-1} dW_t^1, \\ d\alpha_t = \nu \alpha_t dW_t^2, \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt, \end{cases} \quad (18)$$

---

SV モデルの詳細に応じて異なる同時確率分布の情報をデルタに反映させるには、ボラティリティが原資産価格と連動して変化することを考慮する必要があり、単純には

$$\frac{\partial C}{\partial F_t} + \frac{\partial C}{\partial \alpha_t} \frac{\partial \alpha_t}{\partial F_t},$$

の第 2 項に当たる補正項が必要である。しかし、偏微分で定義した場合、 $\partial \alpha_t / \partial F_t = 0$  であり、意味をなさない。3 節(1)イ. では、 $\alpha_t$  が確率変数であることを考慮したデルタを定義し、SV モデルでのリスク最小化デルタを導入する。

で定義される SABR モデル (Hagan *et al.* [2002]) があり、通貨オプションをはじめとした多くのオプション市場で利用されている<sup>25</sup>。

SLV モデルは LV モデルと SV モデルを組み合わせたモデルであり、以下のよう  
に、双方のメリットが SLV モデルのメリットとなっている。

第 1 に、LV モデルと同様に任意のボラティリティ・サーフェスへキャリブレーション  
できる。具体的には、瞬間的なバリエーション ( $\sigma_{LV}^2(F_T, T)\alpha_T^2$ ) の条件付き期待値

$$\tilde{\sigma}_{LV}^2(T, K) = E[\sigma_{LV}^2(T, F_T)\alpha_T^2 \mid F_T = K], \quad (19)$$

として定義された  $\tilde{\sigma}_{LV}^2(K, T)$  が、デュピレの公式 ((8) 式) を満たす場合に、SLV  
モデルとボラティリティ・サーフェスが整合的となることが知られている (Gyöngy  
[1986]、Dupire [1994])<sup>26</sup>。

第 2 に、SLV モデルでは多様なボラティリティ・サーフェスのダイナミクスを表現  
できる。具体的には、現時刻のボラティリティ・サーフェスにキャリブレーションしても  
決まらないモデル・パラメータが存在し、その自由度によってボラティリティ・サー  
フェスの複雑な変動をモデル化できる<sup>27</sup>。例として、現時刻の市場と将来の ATM ボ  
ラティリティを SABR モデルで表現する場合を考える。現時刻の市場は、原資産価  
格、ATM ボラティリティ、スマイルの傾き、スマイルの曲率の 4 つで近似的に説明  
できる。一方 SABR モデルは、現時刻を  $t_0$  とすると、 $F_{t_0}$ 、 $\alpha_{t_0}$ 、 $\beta$ 、 $\rho$ 、 $\nu$  の 5 つの  
パラメータがあり、その中の 1 つは将来の ATM ボラティリティのモデル化に利用  
できる。Hagan *et al.* [2002] では、 $\beta$  で将来の ATM ボラティリティを表現し、 $\beta$  以  
外の 4 つのパラメータで現時刻の市場を説明することが提案されている。具体的  
には、以下の近似式が利用される。まず現時刻のスマイルは

25 特にスワップション市場では、ブラック・モデルに代わる標準的なモデルとして利用されている。金利デリ  
バティブ市場へ応用された LMM-SABR (LIBOR market model SABR) については、Rebonato, McKay,  
and White [2010] が詳しい。

26 ボラティリティ・サーフェスへのキャリブレーションでは、(19) 式とデュピレの公式を利用することで、  
 $\sigma_{LV}(t, F_t)$  やボラティリティのダイナミクスを表す係数を決める。その際、(19) 式の条件付き期待値を計  
算する必要があるが、有限差分法やモンテカルロ法では一般に多大な計算時間がかかり、実務への応用上  
の課題となっている。この点について先行研究では、いくつかの効率的な計算手法が提案されている。

第 1 の手法は (19) 式、あるいはコール・オプション価格の解析的近似式を求める手法であり、パラメ  
トリックな SLV モデルで利用できる。具体的には Hagan *et al.* [2002] や、ヒートカーネル展開 (DeWitt  
[1965]) を利用した Henry-Labordère [2005]、Paulot [2009]、マリアバン解析の渡辺=吉田理論 (Watanabe  
[1987]、Yoshida [1992]) を利用した Takahashi [1999]、Kunitomo and Takahashi [2001]、Osajima [2007]、  
Takahashi, Takehara, and Toda [2009] などの計算手法がある。

第 2 の手法はマルコフ射影とも呼ばれるジョンジーの定理 (Gyöngy [1986]) と数値計算を利用した手法  
で、ノンパラメトリックな SLV モデルでも有効である。具体的には、Piterbarg [2007]、Ren, Madan, and  
Qian [2007]、Henry-Labordère [2009]、Andersen and Hutchings [2009] 等の手法が提案されている。

27 前述のように、SV モデルにも将来のボラティリティ・サーフェスをモデル化できる自由度がある。ただ  
し、SV モデルで表現できるボラティリティ・サーフェスの形状には制限があり、SLV モデルと比較する  
と、SV モデルで表現できるボラティリティ・サーフェスの変動の種類は限られている。

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Imp}}(t_0, F_{t_0}, \alpha_{t_0}; K, T) &= \frac{\alpha_{t_0}}{F_{t_0}^{1-\beta}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1-\beta-\rho\lambda) \log \frac{K}{F_{t_0}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12}[(1-\beta)^2 + (2-3\rho^2)\lambda^2] \left[ \log \frac{K}{F_{t_0}} \right]^2 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\lambda = \frac{\nu}{\alpha_{t_0}} F_{t_0}^{1-\beta}, \quad (21)$$

と近似される。一方、将来の ATM ボラティリティと状態変数の関係（バック・ボーン）は

$$\log \sigma_{\text{ATM}} = \log \alpha_t - (1-\beta) \log F_t + \dots, \quad (22)$$

と近似される<sup>28</sup>。ここから、 $\beta$  を変化させることで将来の ATM ボラティリティ水準を表現でき<sup>29</sup>、 $F_{t_0}$ 、 $\alpha_{t_0}$ 、 $\rho$ 、 $\nu$  でそれぞれ、原資産価格、ATM ボラティリティ、スマイルの傾き、スマイルの曲率を表現できることがわかる<sup>30</sup>。

## 二. ジャンプ拡散過程

ジャンプを考慮したモデルは、価格変動が大きい原資産市場に対する説明能力が高いことが知られており、オプション市場への応用も研究されている。例えば、SV モデルでは表現することが難しいボラティリティ・サーフェスでも、ジャンプ拡散過程では表現できるといったメリットが知られている。満期が短いオプションを SV モデルで評価した場合には、スマイルの曲率が一般に小さく、場合によっては市場での取引価格から示唆されるボラティリティ・サーフェスを再現できないことがある。一方、ジャンプ拡散過程では、短い時間間隔で原資産価格が大きく変化する可能性を増大させることができ、曲率の高いスマイルも表現できる<sup>31</sup>。

28 (20)、(22) 式は最低次の近似であり、ATM から離れた行使価格や満期が長いオプションのインプライド・ボラティリティについては、Paulot [2009] 等に示されたより高精度の近似を利用する必要がある。

29  $\beta$  の決め方には大きく次の 3 つの手法がある。第 1 の手法は ATM ボラティリティと原資産価格の関係が定常的であると仮定して時系列データを用いる手法である。(20)、(22) 式と、 $F_t$  と  $\sigma_{\text{ATM}}$  の時系列データから  $\beta$  と現時点のボラティリティ  $\alpha_t$  が推定でき、現時刻のボラティリティ・サーフェスの傾きと曲率から  $\rho$  と  $\nu$  が順に推定される。第 2 の手法はディーラーの相場観で  $\beta$  を固定する手法であり、恣意的ではあるものの将来の情報をモデルに反映させることができる。第 3 の手法は、流動性が比較的高いエキゾチック・オプションから  $\beta$  を推定する手法である。SLV モデル以外の研究ではあるが、Ayache *et al.* [2004] や Carr and Crosby [2010] ではワン・タッチ・オプションやダブル・ノー・タッチ・オプションと呼ばれるバリア・オプションからボラティリティ・サーフェスのダイナミクスの情報を抽出する試みが提案されている。

30 ATM ボラティリティは (20) 式で  $K = F_{t_0}$  とした値であり、原資産価格に  $F_{t_0}$  が固定されることから、 $\alpha_{t_0}$  により ATM ボラティリティを表現できる。またスマイルの傾きと曲率は (20) 式を  $\log(K/F_{t_0})$  で 1 階あるいは 2 階微分し  $K = F_{t_0}$  とした値であり、それぞれ  $\rho$ 、 $\nu$  により表現できる。

31 スマイルの曲率は、確率分布の 4 次モーメントとともに増大する。

一方で、オプションのリスク管理においてはデメリットも知られている。ジャンプ拡散過程は一般にモデルの自由度が高すぎ、異なるパラメータでも極めて類似したボラティリティ・サーフェスが表現される。このため、ボラティリティ・サーフェスにキャリブレートした際に、最適なパラメータ・セットが複数存在することがあり、キャリブレートし直すごとにデルタやエキゾチック・オプションの価格が大きく変化することが知られている。また、ジャンプを考慮して時価評価するうえでは、複雑な数値計算手法が必要となることも知られている<sup>32</sup>。

このように拡散過程にはないメリットがジャンプ拡散過程にはある一方で、オプションのリスク管理に応用するうえでは必ずしも簡便なモデルではない。このため本稿では、ジャンプ拡散過程におけるヘッジ戦略については議論せず、SLV モデルに代表される拡散過程のみを念頭にヘッジ戦略を議論することとする<sup>33</sup>。

### (3) 既存モデルのまとめ

以上、オプションのリスク管理や価格評価におけるボラティリティ・サーフェスの重要性を解説し、それを踏まえて既存の原資産モデルを整理した。上記で紹介した各モデルの特徴は、表2のようにまとめられる。表からわかるように、現時刻のボラティリティ・サーフェスを再現するだけならば、計算負荷の低いLVモデルが最適なモデルである。しかし、ボラティリティ・サーフェスのダイナミクスを踏まえたリスク管理においては、SLVモデルの枠組みが有用であることがわかる。SLVモデルには計算負荷が高いという欠点があるものの、現時刻のボラティリティ・サーフェスとボラティリティ・サーフェスのダイナミクスの双方を再現できる自由度がある。具体的なヘッジ戦略を考えるうえで、SLVモデルは有用な枠組みであり、実務への利用価値が高いモデルであると考えられる。3節から5節でもSLVモデルを中心にヘッジ戦略を考察する。

32 バリア・オプションを例にとると、ウィーナー＝ホップ分解 (Wiener-Hopf factorization)、モンテカルロ・シミュレーション、積分偏微分方程式の数値計算の3つの手法が知られている。このうち、一般のモデルのもとで、短時間に時価を評価するうえでは、積分偏微分方程式を有限差分法で解く手法が有効である。しかし、偏微分方程式の数値計算では生じない、非局所性に伴う困難が積分偏微分方程式の計算では生じる。有限差分法による積分偏微分方程式の解法については Cont and Voltchkova [2006] を参照。

33 キャリブレーションにおける局所解の問題はSVやSLVモデルでも生じうるが、解析近似式や現時刻のボラティリティ・サーフェス以外の情報を利用することで問題を解決できる場合がある。例としてSABRモデルを考えると、当該モデルではバック・ボーンを利用することで、局所解の問題を解決できる。ただし、全てのSLVモデルに有効な解決策は知られておらず、選んだモデルごとに対処法を考える必要がある。

表2 各モデルの長所と短所

	長所	短所
LV モデル	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 現時刻のボラティリティ・サーフェスを必ず再現できる</li> <li>● 計算負荷が比較的低い</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 全てのオプションに対しヘッジ誤差が大きい</li> <li>● エキゾチック・オプションの適切な時価を推定できない</li> </ul>
SV モデル	<ul style="list-style-type: none"> <li>● ボラティリティ・サーフェスのさまざまなダイナミクスを表現できる</li> <li>● ボラティリティ・サーフェスのダイナミクスを考慮した時価評価が可能</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 現時刻のボラティリティ・サーフェスを必ずしも再現できない</li> <li>● スティック・デルタを想定して計算されたデルタにスマイル調整済みデルタが一致する</li> <li>● ヘストン・モデルでバニラ・オプションの時価を計算するなどの例外を除くと、計算負荷が高い</li> <li>● 現時刻のボラティリティ・サーフェスについてのみキャリブレートする場合、複数の局所解が存在しうる</li> </ul>
SLV モデル	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 現時刻のボラティリティ・サーフェスを必ず再現できる</li> <li>● ボラティリティ・サーフェスのさまざまなダイナミクスを表現できる</li> <li>● ボラティリティ・サーフェスのダイナミクスを考慮した時価評価が可能</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● SABR モデルでバニラ・オプションの価格を計算するなどの例外を除くと、計算負荷が高い</li> <li>● 現時刻のボラティリティ・サーフェスについてのみキャリブレートする場合、複数の局所解が存在しうる</li> </ul>
ジャンプ 拡散過程	<ul style="list-style-type: none"> <li>● SV モデルでは表現できないボラティリティ・サーフェスの形状も表現できる</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 一部の例外を除くと、計算負荷が高い</li> <li>● 現時刻のボラティリティ・サーフェスについてのみキャリブレートする場合、複数の局所解が存在しうる</li> </ul>

### 3. 先行研究におけるヘッジ戦略

本節では、既存のヘッジ戦略をまとめる。まず(1)で、SLV モデルでの動的ヘッジと、その問題点についてまとめる。次に(2)で、これまで提案されてきた静的ヘッジ戦略の概要とその問題点についてまとめる。最後に(3)で本節をまとめる。

#### (1) 動的ヘッジ

動的ヘッジとは、保有するオプションの感応度（特にデルタやベガ）を市場環境の変化に応じて逐次再計算し、原資産価格やそのボラティリティが変動することに伴うリスクを、原資産やバニラ・オプションなどからなるヘッジ・ポートフォリオのリバランスによって動的にヘッジする戦略を指す。ここでは、SLV モデルでのデルタ・ヘッジとベガ・ヘッジを取り上げる。

## イ. 確率局所ボラティリティ・モデルでのデルタ・ヘッジ

原資産価格が BS モデルや LV モデルなどの完備なモデルに従う場合には、デルタは一意に定まり、(1) 式で定義されるスマイル調整済みデルタだけ原資産を売却する動的ヘッジにより、オプションを保有するリスクを完全にヘッジできる。一方、原資産価格が SV モデルや SLV モデルなどの非完備なモデルで表現される場合には、取引不可能なボラティリティが状態変数に含まれ<sup>34</sup>、デルタ・ヘッジではオプションを完全にヘッジすることができない。このため、デルタは一意に定まらず、通常、ヘッジ取引から生じる損益に関する何らかの統計量を最適化することによってデルタは決められる<sup>35</sup>。ここでは、SLV モデルを想定した場合のオプションのヘッジ戦略について、Bergomi [2004]、Pogudin [2008]、Rebonato, McKay, and White [2010] 等の手法に従い、ヘッジ・ポートフォリオの損益の分散が最小となるようにデルタを決める手法について解説する。

非完備なモデルのデルタ・ヘッジを議論するため、まず、2 節で定義したリスク中立測度下の SLV モデル ((16)、(17) 式) を、現実測度下で次のとおり再定義する。

$$\frac{dF_t}{F_t} = \mu(t, F_t, \alpha_t) dt + \alpha_t \sigma_{LV}(t, F_t) d\tilde{W}_t^1, \quad (23)$$

$$d\alpha_t = \tilde{a}(t, F_t, \alpha_t) dt + b(t, F_t, \alpha_t) d\tilde{W}_t^2, \quad (24)$$

$$d\tilde{W}_t^1 d\tilde{W}_t^2 = \rho dt. \quad (25)$$

ヘッジ対象となるオプションの時刻  $t$  における価格を  $V(t, F_t, \alpha_t)$  とし、その原資産を  $\Delta$  単位だけショートするヘッジ・ポートフォリオの時刻  $t$  での価値を

$$\Pi_t = V(t, F_t, \alpha_t) - \Delta \cdot F_t, \quad (26)$$

と表現する<sup>36</sup>。このとき、自己資金調達の前題のもとでのポートフォリオ価値の変化は

34 ボラティリティ・スワップに流動性がある場合にはボラティリティが取引可能な資産となり、完備市場を前提としたモデルを構築できる。ただし本稿の執筆時点（2011 年 4 月）においては、全ての原資産に対し、ボラティリティ・スワップの流動性は非常に低い。

35 例えば、Lewis [2000] は、損益と原資産価格との相関をゼロとする戦略を考え、Bergomi [2004]、Pogudin [2008]、Rebonato, McKay, and White [2010] 等の研究では、損益の分散が最小になる戦略を考えている。ただ、どちらの手法でも、導出されるデルタは一致する。またこれらのデルタは、直観的な近似式からも導出でき、Hagan and Lesniewski [2006] では SABR モデルを例に、最適なデルタが導出されている。

36 オプションと原資産以外に割引債等の基準財もポートフォリオに含まれる。ただし、基準財は以下の議論には影響を与えないため、ここではそれを含まない。

$$\begin{aligned}
d\Pi_t &= dV - \Delta dF_t \\
&= \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{D}V - \Delta \mu F_t \right] dt \\
&\quad + \left( \frac{\partial V}{\partial F_t} - \Delta \right) \alpha_t \sigma_{LV} F_t d\tilde{W}_t^1 + b \frac{\partial V}{\partial \alpha} d\tilde{W}_t^2,
\end{aligned} \tag{27}$$

と表現される。ここで  $\tilde{D}$  は、

$$\tilde{D} = \mu F_t \frac{\partial}{\partial F_t} + \tilde{a} \frac{\partial}{\partial \alpha_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial F_t^2} \alpha_t^2 \sigma_{LV}^2 F_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_t \partial F_t} \alpha_t \sigma_{LV} F_t \rho b + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_t^2} b^2, \tag{28}$$

で定義される演算子である。(27)式からポートフォリオ価値変化の分散は、

$$\begin{aligned}
\text{var}_{d\Pi} &\equiv E[d\Pi^2] - E[d\Pi]^2 \\
&= \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial F_t} - \Delta \right) \alpha_t \sigma_{LV} F_t d\tilde{W}_t^1 + b \frac{\partial V}{\partial \alpha} d\tilde{W}_t^2 \right]^2 \\
&= \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial F_t} - \Delta \right)^2 \alpha_t^2 \sigma_{LV}^2 F_t^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\rho \alpha_t \sigma_{LV} F_t b \frac{\partial V}{\partial \alpha_t} \left( \frac{\partial V}{\partial F_t} - \Delta \right) + b^2 \left( \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right)^2 \right] dt,
\end{aligned} \tag{29}$$

となる。(29)式を最小にする  $\Delta$  は、

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \text{var}_{d\Pi} / dt}{\partial \Delta} \\
&= 2 \left( \Delta - \frac{\partial V}{\partial F_t} \right) \alpha_t^2 \sigma_{LV}^2 F_t^2 - 2\rho \alpha_t \sigma_{LV} F_t b \frac{\partial V}{\partial \alpha_t} \\
&= 2\alpha_t^2 \sigma_{LV}^2 F_t^2 \left[ \Delta - \frac{\partial V}{\partial F_t} - \frac{\rho b}{\alpha_t \sigma_{LV} F_t} \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right],
\end{aligned} \tag{30}$$

の解であり、

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial F_t} + \frac{\rho b}{\alpha_t \sigma_{LV} F_t} \frac{\partial V}{\partial \alpha}, \tag{31}$$

のデルタを利用することでヘッジ誤差の分散が最小となる。本稿では、(31)式の  $\Delta$  をリスク最小化デルタと呼ぶ。

リスク最小化デルタは、(1)式で定義したスマイル調整済みデルタ ( $\Delta_{\text{smile}}$ ) にベガに比例した調整項を加えた感応度である。現時刻のボラティリティ・サーフェスにSLVモデルがキャリブレートされている場合には、リスク最小化デルタ((31)式)

の第 1 項は、(1) 式で定義したスマイル調整済みデルタ ( $\Delta_{\text{smile}}$ ) と一致する。簡単のために、バニラ・オプションのデルタ・ヘッジを例にとると、この場合、SLV モデルでのバニラ・オプション価格  $V(t, F_t, \alpha_t)$  と BS 時価評価式  $V^{\text{BS}}(t, F_t; \sigma_{\text{Imp}}(t, F_t, \alpha_t; K, T))$  から計算される時価は一致し

$$V(t, F_t, \alpha_t) = V^{\text{BS}}(t, F_t; \sigma_{\text{Imp}}(t, F_t, \alpha_t; K, T)), \quad (32)$$

の関係が成立する。このため、(32) 式の両辺を原資産価格で微分すると、

$$\frac{\partial V}{\partial F_t} = \frac{dV^{\text{BS}}}{dF_t} = \Delta_{\text{smile}}, \quad (33)$$

の関係が成り立つ。したがって、SLV モデルがボラティリティ・サーフェスに完全にキャリブレートされている場合には、リスク最小化デルタは以下ようになる。

$$\Delta = \Delta_{\text{smile}} + \frac{\rho b}{\alpha_t \sigma_{\text{LV}} F_t} \frac{\partial V}{\partial \alpha_t}. \quad (34)$$

このように、SLV モデルでのデルタ・ヘッジは LV モデル等の完備なモデルでのデルタ・ヘッジとは異なる。具体的には、原資産の偏微分 ( $\Delta_{\text{smile}}$ ) ではなく、ベガ ( $\partial V / \partial \alpha_t$ ) に比例した調整項を加えた感応度をヘッジすることで SLV モデルでのデルタ・ヘッジは実現される<sup>37</sup>。また SLV モデルのデルタ・ヘッジでは、損益の分散

37 ここで調整項に当たる (34) 式の第 2 項は、原資産価格が変化した際に原資産価格とボラティリティの相関関係に従って  $\alpha_t$  が変化する効果を表す項である。Hagan and Lesniewski [2006] を参考に、微小時間  $\delta t$  の間での原資産価格とボラティリティの変化を、 $\delta t$  の最低次のみを考慮して導くと、

$$\begin{aligned} F_{t+\delta t} - F_t &\simeq \alpha_t \sigma_{\text{LV}} F_t dZ_1, \\ \alpha_{t+\delta t} - \alpha_t &\simeq b(\rho dZ_1 + \sqrt{1-\rho^2} dZ_2), \end{aligned}$$

と、互いに独立な標準ブラウン運動  $Z_1, Z_2$  を用いて表現できる。このため原資産価格が  $\delta F$  だけ変化する条件のもとでは

$$\begin{aligned} E[\alpha_{t+\delta t} \mid F_{t+\delta t} = F_t + \delta F] - \alpha_t &\simeq E[b(\rho dZ_1 + \sqrt{1-\rho^2} dZ_2) \mid F_{t+\delta t} = F_t + \delta F] \\ &= E\left[b\left(\rho \frac{\delta F}{\alpha_t \sigma_{\text{LV}} F_t} + \sqrt{1-\rho^2} dZ_2\right)\right] \\ &= \frac{\rho b}{\alpha_t \sigma_{\text{LV}} F_t} \delta F, \end{aligned}$$

が成り立つ。以上から、原資産価格が  $\delta F$  だけ変化した際には

$$\delta \alpha = \frac{\rho b}{\alpha_t \sigma_{\text{LV}} F_t} \delta F,$$

だけ、ボラティリティが近似的かつ平均的に変化し、対応するオプション価格の平均的な変化  $\delta V$  は

$$\delta V = \left[ \frac{\partial V}{\partial F_t} + \frac{\delta \alpha_t}{\delta F_t} \frac{\partial V}{\partial \alpha_t} \right] \delta F = \left[ \frac{\partial V}{\partial F_t} + \frac{\rho b}{\alpha_t \sigma_{\text{LV}} F_t} \frac{\partial V}{\partial \alpha_t} \right] \delta F,$$

と表現される。リスク最小化デルタは、 $\delta V / \delta F$  に一致し、(34) 式の第 2 項は原資産価格が変化した際の

など、何らかの統計量が最適化されることのみが保証される。

## ロ. 確率局所ボラティリティ・モデルでのベガ・ヘッジ

ベガは、オプションのボラティリティに対する感応度であり、ボラティリティが変化する市場では、ベガをヘッジすることも重要である。ボラティリティは取引可能な資産ではないが、実務上は流動性のあるバニラ・オプションを利用することでベガがヘッジされる。特に、ATM オプションがしばしば利用される。ATM オプションは、原資産価格とボラティリティによる混合微分（バンナ）とボラティリティによる2階微分（ボルガ）が、1階微分（ベガ）に比べて極めて小さいオプションであるため、ボラティリティの代替資産として利用できる。また、ATM オプションは流動性が高いことから、動的ヘッジでも取引コストが小さくて済むという利点もある。ベガ・ヘッジは、これまでに解説したデルタ・ヘッジのデルタをベガに、ショートする原資産を ATM オプションに変更することで達成でき、基本的なヘッジ戦略の枠組みは同じであることから、ここでは概要のみ解説する。

まず、デルタとベガを同時にヘッジする場合を考える。このような戦略では、原資産価格とボラティリティに関する偏微分の感応度

$$\begin{cases} \Delta = \Delta_{\text{smile}} = \frac{\partial V}{\partial F_t}, \\ \text{Vega} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_t}, \end{cases} \quad (35)$$

を計算し、それぞれの分量だけ原資産と ATM オプションをショートすることでヘッジできる。

次に、デルタとベガを同時にヘッジしない場合、すなわち、ヘッジ取引のタイミングがずれている場合を考える。この場合は、イ. の議論と同様の議論を適用できる。ベガ・ヘッジから生ずる損益の分散を最小にするベガ（リスク最小化ベガ）を、イ. の議論と同様に計算すると

$$\text{Vega} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_t} + \frac{\rho \alpha_t \sigma_{LV} F_t}{b} \frac{\partial V}{\partial F_t}, \quad (36)$$

となる。このリスク最小化ベガに合わせて ATM オプションをショートすることで、ベガ単独のヘッジにおける損益の分散が最小となる<sup>38</sup>。

---

ボラティリティの平均的な変化を考慮した調整項  $(\frac{\delta \alpha_t}{\delta F_t} \frac{\partial V}{\partial \alpha_t})$  である。また脚注 24 での  $\partial \alpha_t / \partial F_t$  は、ここでの  $\delta \alpha / \delta F$  が該当する。

38 (36) 式は Hagan and Lesniewski [2006] や Pogudin [2008]、Rebonato, McKay, and White [2010] で導き出された SABR モデルでのベガを一般化した感応度であり、一般の SLV モデルでのリスク最小化ベガに相当する。

## ハ. 動的ヘッジの問題点

以上、デルタやベガを動的にヘッジする手法についてみてきた。理想的な市場では、本節で導入したデルタやベガを動的にヘッジすることで損益の分布を理論通りに制御できる。しかし実際の市場では動的ヘッジで仮定されている条件が満たされず、市場環境やヘッジ対象の商品性に応じた問題が生じる。具体的には、以下の3つの仮定が問題となる。

仮定 A 非常に短い時間間隔で原資産やオプションを取引できる。

仮定 B ビッド・オファー・スプレッドやマーケット・インパクトなどの取引コストは無視できる。

仮定 C 取引単位に制限がない。

まず、仮定 A は、ガンマが大きなオプションをヘッジする場合に特に問題となる<sup>39</sup>。ガンマが大きいと、デルタの変化幅が大きく、実際に取引できる頻度ではポジション調節が間に合わない。このため、離散ヘッジに伴うヘッジ誤差（離散ヘッジ誤差）がガンマとともに増大する。この問題は、Derman and Kamal [1999] により定量的に分析され<sup>40</sup>、原資産が BS モデルに従う場合の離散ヘッジ誤差の標準偏差  $\sigma_{P\&L}$  が

$$\sigma_{P\&L} \propto \Gamma \sqrt{\Delta t}, \quad (37)$$

と表現されることが導かれている。ここで  $\Gamma$  はヘッジ対象となるオプションのガンマを表し、 $\Delta t$  は取引可能な時間間隔を表現している。同式から明らかなように、取引可能な時間間隔に比べてガンマが大きい場合には動的ヘッジのヘッジ誤差が大きくなる。

仮定 B も、ガンマ等の高次感応度が大きい場合に問題を生む。ガンマが大きい場合には、(37) 式のヘッジ誤差を小さくするために取引頻度を可能な限り増やす必要がある。しかし、実際の市場では取引頻度の上昇に伴い取引コスト<sup>41</sup>が大きくなり、オプションの売却益のみでヘッジ・コストを負担することが困難となる。

最後に仮定 C は、ペイオフが不連続な商品で問題となる。典型例として、行使価格  $K$  に対し、ペイオフが、

$$f(F_T) = \begin{cases} 1, & F_T \geq K, \\ 0, & F_T < K, \end{cases} \quad (38)$$

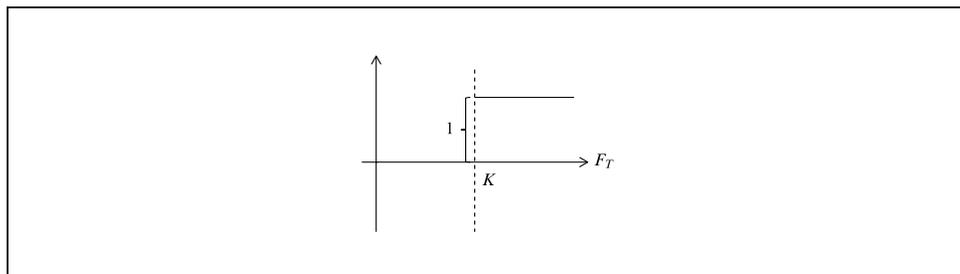
で与えられるデジタル・オプションがある。このペイオフは、図 3 に示すように、 $K$  を境に不連続である。このため、仮に原資産価格と行使価格が満期で一致した場合、

39 ここでガンマとは、原資産価格に対するデルタの感応度である。

40 離散ヘッジでのヘッジ誤差については多くの研究がなされている。先行研究については、Wilmott [2000] の 23 章の引用文献等を参照。

41 ここでの取引コストとは、ビッド・オファー・スプレッドやマーケット・インパクトを指している。

図3 デジタル・オプションのペイオフ



デルタが発散する。しかし、実際の市場では取引単位に制限があるほか、保有できるポジションにも制限があるため、過大となったデルタ分の原資産を売却することは困難である。

## (2) 静的ヘッジ

動的ヘッジにおける仮定 A と仮定 B に伴う問題点は、静的ヘッジによって改善できる。静的ヘッジとは、オプションの取引開始時に構築したバニラ・オプションのポートフォリオで、ヘッジ対象から生じるキャッシュ・フローを複製する戦略である。オプション取引の開始時と終了時以外にはリバランスが必要ないことから静的ヘッジと呼ばれ、仮定 A、B に伴う問題が生じないヘッジ戦略である。ここでは、ヨーロピアン・オプションの静的ヘッジを例として静的ヘッジの概要と利点を説明したうえ、バリア・オプションに対する既存の静的ヘッジ戦略を整理する。

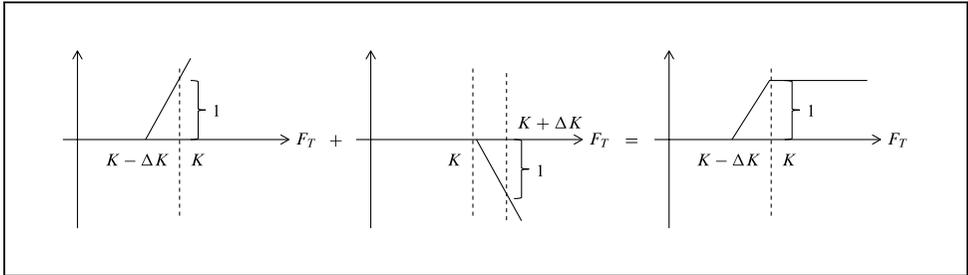
### イ. 静的ヘッジの背景とヨーロピアン・オプションの静的ヘッジ

はじめに、(1)で例として挙げたデジタル・オプションを取り上げる。デジタル・オプションなどのヨーロピアン・オプションから生じるキャッシュ・フローは満期でのペイオフのみであり、デジタル・オプションでのペイオフは図3で表現される。また、図3のペイオフは十分に小さな  $\Delta K$  に対して定義された別のペイオフ (図4) で近似できる。このため、デジタル・オプションのショート・ポジションは、行使価格  $K - \Delta K$  のコール・オプションを  $1/\Delta K$  単位ロングし、行使価格  $K$  のプット・オプションを  $1/\Delta K$  単位ショートしたポートフォリオを構築することで、ポジションの再調整なしにヘッジできる。

デジタル・オプションの静的ヘッジは、任意のヨーロピアン・オプションに拡張できる (Breed and Litzenberger [1978]、Carr and Madan [1998])。満期でのペイオフを  $f(F_T)$  とすると、 $f(F_T)$  は

$$f(F_T) = f(0)B_T + f'(0)F_T + \int_0^\infty f''(K)(F_T - K)^+ dK, \quad (39)$$

図4 デジタル・オプションの静的ヘッジ・ポートフォリオ



のように展開できることが知られている。したがって、任意のヨーロッパ型のペイオフは、満期  $T$  の割引債 ( $B_T$ )、原資産、満期  $T$  のコール・オプションの加重和で表現でき、それぞれの商品をその加重分だけショートすることで、デジタル・オプションと同様に静的にヘッジできる<sup>42</sup>。

ここでの例が示すとおり、静的ヘッジ戦略ではポジション調整が必要なく、仮定 A と B に伴う問題が生じない。このため、巨大な高次グリークスを有するオプションへも有効なヘッジ戦略である。

#### ロ. バリア・オプションの静的ヘッジ

次に、バリア・オプションの既存の静的ヘッジ戦略について説明する。典型的なバリア・オプションの高次グリークスは大きく、動的なヘッジが難しい商品として知られている<sup>43</sup>。また経路依存型の商品であることから、イ. で解説した手法はそのまま適用できず、ヘッジ・ポートフォリオの構築法やその特徴は、仮定したモデルごとに異なる商品である。ここでは、ペイオフが

$$f(F_T) = \begin{cases} \max(F_T - K, 0) & \text{if } \max_{t_0 < u < T} F_u < B, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (40)$$

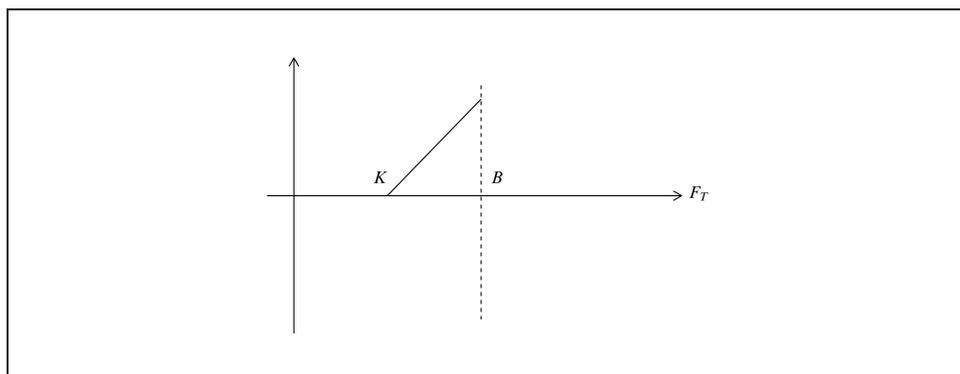
で定義される満期  $T$ 、行使価格  $K$ 、バリア水準  $B$  のリバース・ノックアウト・コール・オプション (reverse knock out call: RKOC) を例に既存の静的ヘッジを説明する (図5)<sup>44</sup>。最も単純なノーマル・ブラック＝ショールズ・モデル (ノーマル・BS モデル) でバリア・オプションの静的ヘッジの概要を説明した後に、LV モデルを想定した場合の静的ヘッジ戦略と SV/SLV モデルでの静的ヘッジ戦略を順に概説する。

42 (39) 式では、 $f(F_T)$  が滑らかであることが仮定されており、2 階微分を定義できないペイオフを持つデリバティブについては、ペイオフ関数を近似する必要がある。

43 ここで、典型的なバリア・オプションとは、ペイオフが不連続なバリア・オプションを指している。ペイオフを不連続にすることで、バリア・オプションの時価を小さくできる。このため、当該バリア・オプションへの取引需要は大きいといわれている。

44 他のノックアウト・オプションも同様の手法でヘッジできる。また、ノックアウト・オプションとバニラ・オプションを組み合わせることでノックイン・オプションも複製できる。

図5 リバース・ノックアウト・コール・オプション (RKOC)



(イ) ノーマル・BS モデルでのバリア・オプションの静的ヘッジ

ノーマル・BS モデルは、原資産価格が正規分布に従うモデルであり、

$$dF_t = \sigma dW_t, \quad (41)$$

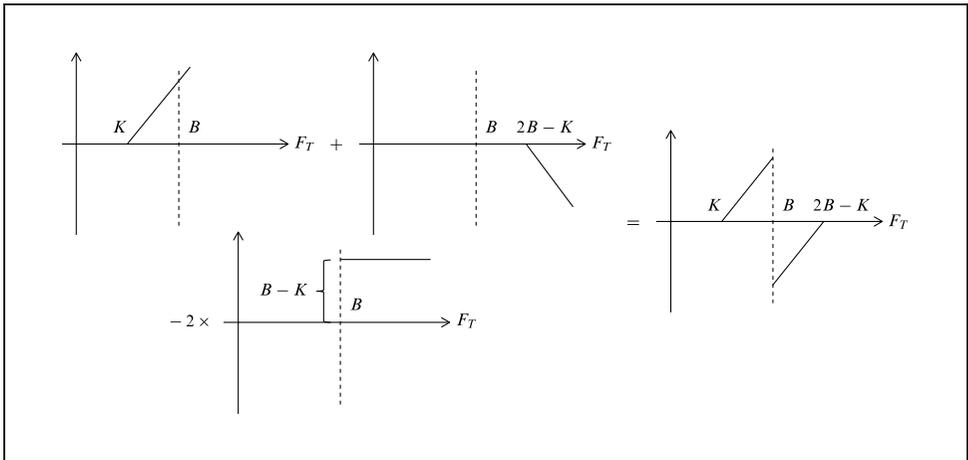
の確率微分方程式で定義される。

原資産価格がノーマル・BS モデル通りに変化する場合には、リフレクティッド・バタフライを利用することでバリア・オプションを静的にヘッジできる。ここでリフレクティッド・バタフライとは、図6に示すように、行使価格  $K$  のコール・オプションを1単位、行使価格  $B$  のデジタル・オプションを  $-2 \times (B - K)$  単位、行使価格  $2B - K$  のコール・オプションを  $-1$  単位含むオプションのポートフォリオである。

バリア・オプションから生じるキャッシュ・フローは、原資産価格がバリアに到達した場合としなかった場合の2種類に分類され、静的ヘッジ戦略は、その双方を再現することで実現される。原資産価格がバリアに到達しなかった場合には、RKOCのペイオフとリフレクティッド・バタフライのペイオフが一致する（この場合、行使価格  $K$  のコール・オプションのペイオフとなる）ため、リフレクティッド・バタフライを保有することでバリア・オプションをヘッジできる。また、バリアに到達した場合にも、リフレクティッド・バタフライを保有し、バリアに到達すると同時にポジションを解消することでヘッジできる。この場合にはRKOCの価値はゼロであり、原資産価格がノーマル・BS モデルに従う場合のリフレクティッド・バタフライの価値もゼロである<sup>45</sup>。このため、原資産価格がバリアに到達した際にリフレクティッド・バタフライのポジションを解消することで、全てのキャッシュ・フローが一致し、RKOCを静的にヘッジできる。

45 図6のペイオフは、バリア水準を中心にみると奇関数である。また、原資産価格がバリアに到達した際の条件付き確率密度は偶関数である。確率密度で重みづけたペイオフの平均がオプションの価値であるため、原資産価格がバリアに到達した瞬間のリフレクティッド・バタフライの価値はゼロとなる。

図6 リフレクティッド・バタフライ



(ロ) LV モデルでのバリア・オプションの静的ヘッジ

LV モデルでの静的ヘッジは、Derman, Ergener, and Kani [1995]、Carr and Chou [1997]、Carr, Ellis, and Gupta [1998] 等により研究されてきた。ここでは、Derman, Ergener, and Kani [1995] で提案された手法の概要を説明する。

原資産価格が LV モデルに従う場合の RKOC のキャッシュ・フローは、以下 2 つのポートフォリオを組み合わせることでヘッジできる。

カレンダー・ポートフォリオ 以下の  $N$  種のオプションからなるポートフォリオ

- $T_0 < T_1 < \dots < T_N < T$  の関係<sup>46</sup>を満たす  $N$  個の時点で満期  $T_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) を迎え、バリア・オプションの存続中、常にアウト・オブ・ザ・マネー (OTM) である  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) 単位のバニラ・オプション  
RKOC をヘッジする例では、行使価格が適当な  $K_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ;  $K_i \geq B$ ) で与えられる、 $N$  種のコール・オプション

マチュリティ・ポートフォリオ 以下の 2 種のオプションからなるポートフォリオ

- 満期  $T$  において、バリア・オプションと同じペイオフとなるバニラ・オプション
- バリア・オプションの存続中、常に OTM であるヨーロピアン・オプション (満期はバリア・オプションと同じ)

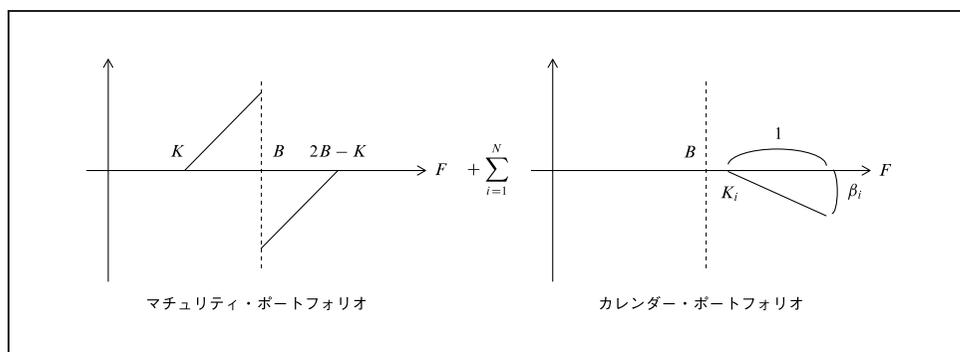
具体例としてリフレクティッド・バタフライをマチュリティ・ポートフォリオに選ぶ場合には、RKOC の静的ヘッジ戦略は表 3、図 7 に示したようなポートフォリオによって実現できる。ここで、No. 1~ $N$  がカレンダー・ポートフォリオに当たり、No.  $N + 1$ ~ $N + 3$  がマチュリティ・ポートフォリオに相当する。

46 ここで  $T_0$  は現時刻である。

表 3 LV モデルでの RKOC のヘッジ・ポートフォリオ

ポートフォリオ名	No.	行使価格	満期	ペイオフ	保有数
カレンダー・ポートフォリオ	1	$K_1 \geq B$	$T_1$	コール・オプション	$\beta_1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$N$	$K_N \geq B$	$T_N$	コール・オプション	$\beta_N$
マチュリティ・ポートフォリオ	$N + 1$	$K$	$T$	コール・オプション	1
	$N + 2$	$B$	$T$	デジタル・コール・オプション	$-2 \times (B - K)$
	$N + 3$	$2B - K$	$T$	コール・オプション	1

図 7 LV モデルでの RKOC のヘッジ・ポートフォリオのペイオフ図



原資産価格がバリアに到達しなかった場合には、バリア・オプションは、同じペイオフを持つマチュリティ・ポートフォリオと OTM で満期を迎えたカレンダー・ポートフォリオによりヘッジされる。一方、バリアに到達した場合には、 $N$  個の時刻 ( $t'_1, \dots, t'_N$ ) でのヘッジ誤差をゼロとするように  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) を調節することで近似的にヘッジされる。簡単のために、現時刻  $T_0$  とカレンダー・ポートフォリオに含まれる  $N$  個のバニラ・オプションの満期  $T_1, \dots, T_{N-1}$  を  $N$  個の時刻 ( $t'_1, \dots, t'_N$ ) に選ぶと、それら  $N$  個の時刻においてヘッジ誤差がゼロとなる条件は

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \beta_N V^{\text{BS}}(T_{N-1}, B, \sigma_{\text{Imp}}(T_{N-1}, B; K_N, T_N)) + \Lambda_T(T_{N-1}, B) = 0, \\
 \sum_{i=N-1}^N \beta_i V^{\text{BS}}(T_{N-2}, B, \sigma_{\text{Imp}}(T_{N-2}, B; K_i, T_i)) + \Lambda_T(T_{N-2}, B) = 0, \\
 \dots \\
 \sum_{i=2}^N \beta_i V^{\text{BS}}(T_1, B, \sigma_{\text{Imp}}(T_1, B; K_i, T_i)) + \Lambda_T(T_1, B) = 0, \\
 \sum_{i=1}^N \beta_i V^{\text{BS}}(T_0, B, \sigma_{\text{Imp}}(T_0, B; K_i, T_i)) + \Lambda_T(T_0, B) = 0,
 \end{array} \right. \quad (42)$$

と表現される。ここで  $V^{BS}(t, B, \sigma_{Imp}(B, t_0; K, T))$  は、原資産価格が  $B$ 、行使価格  $K$ 、満期  $T$  の時刻  $t$  におけるバニラ・オプションの価格であり、 $\Lambda_T(t, B)$  は、時刻  $t$  における原資産価格が  $B$  であるときのマチュリティ・ポートフォリオの価格である。

なお、(42) 式を満たす  $\beta_1, \dots, \beta_N$  は必ず 1 組存在する。時刻  $T_i$  には、満期  $T_1, \dots, T_i$  のオプションは満期を迎えているため、(42) 式を上から順に解く場合には、各式に含まれる変数は 1 つのみである。このため、(42) 式は  $N$  個の 1 次方程式であり、(42) 式を満たす  $\beta_1, \dots, \beta_N$  が必ず存在する。

$N$  が十分に大きく、オプション市場が LV モデルと整合的である場合、(42) 式を解くことでバリア・オプションを静的にヘッジできる。しかし、このように構築された静的ポートフォリオのヘッジ効率は、一般に低いことが知られている。LV モデルでの静的ヘッジの問題は、Tort and Xuan [1998] 等の多くの研究で指摘されており、構築されるポートフォリオでは、ベガ・リスクがヘッジされていないことが知られている。このため、ベガ・ヘッジが必要となる商品と市場環境では、SV モデルや SLV モデルを仮定してポートフォリオを構築する必要がある。次ではそれについてみていく。

#### (ハ) SV/SLV モデルでのバリア・オプションの静的ヘッジ

原資産価格が SV モデルや SLV モデルに従う場合のヘッジ戦略については、Fink [2003]、Nalholm and Poulsen [2006] 等により研究され、Shiraya, Takahashi, and Toda [2011] では時価評価手法に 응용されている。SV モデルや SLV モデルでは、原資産価格に加えてボラティリティも確率的に変化することから、原資産価格がバリアに到達した時刻でのボラティリティの水準によってポートフォリオの価値が変わる。そのため、ポートフォリオの構築においては、到達時刻だけでなく、各到達時刻で実現するボラティリティ水準もいくつか選択する必要がある。

SV モデルや SLV モデルのポートフォリオは、以下の 2 つのポートフォリオで構成される。

カレンダー・ポートフォリオ 以下の  $\sum_{i=1}^N n_i$  種のオプションからなるポートフォリオ

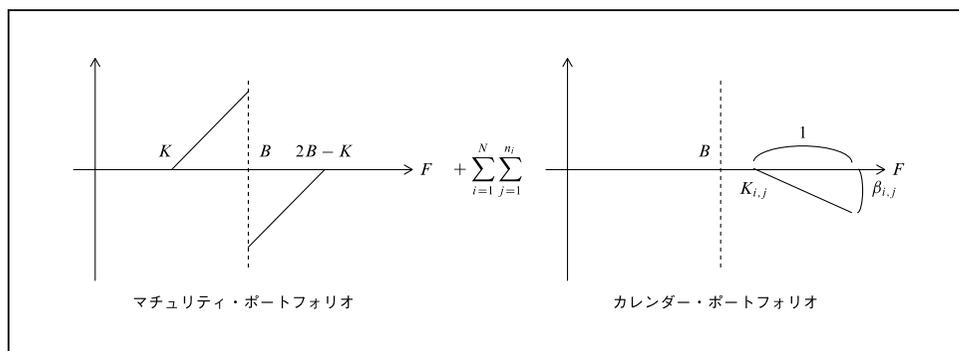
- 満期が  $T_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) で、バリア・オプションの存続中、常に OTM である、 $\beta_{ij}$  ( $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, n_i$ ) 単位のバニラ・オプション  
RKOC をヘッジする例では、行使価格が適当な  $K_{ij}$  ( $j = 1, \dots, n_i, K_{ij} \geq B$ ) で与えられる、 $\sum_{i=1}^N n_i$  種のコール・オプション

マチュリティ・ポートフォリオ LV モデルでのポートフォリオと同一

表 4 SV/SLV モデルでの RKOC のヘッジ・ポートフォリオ

ポートフォリオ名	No.	行使価格	満期	ペイオフ	保有数
カレンダー・ ポートフォリオ	(1, 1)	$K_{1,1} \geq B$	$T_1$	コール・オプション	$\beta_{1,1}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	(1, $n_1$ )	$K_{1,n_1} \geq B$	$T_1$	コール・オプション	$\beta_{1,n_1}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	(2, 1)	$K_{2,1} \geq B$	$T_2$	コール・オプション	$\beta_{2,1}$
	(2, $n_2$ )	$K_{2,n_2} \geq B$	$T_2$	コール・オプション	$\beta_{2,n_2}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
マチュリティ・ ポートフォリオ	( $N, 1$ )	$K_{N,1} \geq B$	$T_N$	コール・オプション	$\beta_{N,1}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	( $N, n_N$ )	$K_{N,n_N} \geq B$	$T_N$	コール・オプション	$\beta_{N,n_N}$
マチュリティ・ ポートフォリオ	$N + 1$	$K$	$T$	コール・オプション	1
	$N + 2$	$B$	$T$	デジタル・コール・ オプション	$-2 \times (B - K)$
	$N + 3$	$2B - K$	$T$	コール・オプション	1

図 8 SV/SLV モデルでの RKOC のヘッジ・ポートフォリオのペイオフ図



具体例として、RKOCのヘッジを想定し、リフレクティッド・バタフライをマチュリティ・ポートフォリオに選んだ場合には、表4、図8に示したようなポートフォリオが構成できる。ここで、No. (1, 1)~( $N, n_N$ ) がカレンダー・ポートフォリオ、No.  $N + 1$ ~ $N + 3$  がマチュリティ・ポートフォリオである。バリアに到達せずに満期を迎えた場合には、LVモデルの静的ヘッジ戦略と同様に、マチュリティ・ポートフォリオによりバリア・オプションは自動的にヘッジされる。一方、バリアに到達した場合には、 $N$  個の時刻に対して  $n_i$  個ずつ選ばれたボラティリティ水準  $\alpha_{i,j}$  ( $j = 1, \dots, n_i$ ) でのヘッジ誤差がゼロとなるように  $\beta_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, n_i$ ) を調節することで、近似的なヘッジ戦略が構築できる。すなわち、

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_N^{(N-1)} \mathcal{B}_N + \Lambda_T^{(N-1)} = 0, \\ \sum_{i=N-1}^N \mathcal{V}_i^{(N-2)} \mathcal{B}_i + \Lambda_T^{(N-2)} = 0, \\ \dots \\ \sum_{i=2}^N \mathcal{V}_i^{(1)} \mathcal{B}_i + \Lambda_T^{(1)} = 0, \\ \sum_{i=1}^N \mathcal{V}_i^{(0)} \mathcal{B}_i + \Lambda_T^{(0)} = 0, \end{array} \right. \quad (43)$$

を  $\mathcal{B}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) について解くことでヘッジ戦略が構築できる。ここで  $\mathcal{V}_i^{(l)}$  は

$$\mathcal{V}_i^{(l)} = \begin{pmatrix} V_{i,1,1}^{(l)} & V_{i,2,1}^{(l)} & \dots & V_{i,n_i-1,1}^{(l)} \\ V_{i,1,2}^{(l)} & V_{i,2,2}^{(l)} & \dots & V_{i,n_i-1,2}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{i,1,n_i-1}^{(l)} & V_{i,2,n_i-1}^{(l)} & \dots & V_{i,n_i-1,n_i-1}^{(l)} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

で定義される  $n_i \times n_i$  行列、 $\mathcal{B}_i$ 、 $\Lambda_T^{(i)}$  は

$$\mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} \beta_{i,1} \\ \beta_{i,2} \\ \vdots \\ \beta_{i,n_i} \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$\Lambda_T^{(i)} = \begin{pmatrix} \Lambda_T(T_i, \mathbf{B}, \alpha_1) \\ \Lambda_T(T_i, \mathbf{B}, \alpha_2) \\ \vdots \\ \Lambda_T(T_i, \mathbf{B}, \alpha_{n_i}) \end{pmatrix}, \quad (46)$$

で定義される  $n_i$  次元のベクトルである。また、 $V_{i,j,k}^{(l)}$  は

$$V_{i,j,k}^{(l)} = V(T_l, \mathbf{B}, \alpha_k; K_{i,j}, T_l), \quad (47)$$

で定義され、時刻  $T_l$  における原資産価格とボラティリティがそれぞれ  $\mathbf{B}$ 、 $\alpha_k$  であるときの、行使価格  $K_{i,j}$ 、満期  $T_l$  のバニラ・オプションの価値である。また、

$\Lambda_T(T_i, B, \alpha_k)$  は、原資産価格とボラティリティがそれぞれ  $B$ 、 $\alpha_k$  であるときの、時刻  $T_i$  でのマチュリティ・ポートフォリオの価値である。

なお、(43) 式を満たす  $\beta_{1,1}, \dots, \beta_{N,n_N}$  は必ず 1 つ存在する。時刻  $T_i$  には、満期  $T_1, \dots, T_i$  のオプションは満期を迎えているため、(43) 式を上から順に解く場合には、各式に含まれる  $N$  個のベクトル変数  $B_i$  のうち 1 つだけが定まっていない。このため、(43) 式は、上から順に解いた場合には、 $N$  個の  $n_i$  元 1 次連立方程式となる。また、 $\mathcal{V}_i$  には逆行列が存在し、(43) 式を満たす  $\beta_{1,1}, \dots, \beta_{N,n_N}$  が必ず存在する。

ただ、 $\mathcal{V}_i$  の行列式は経験的に非常に小さく、(43) 式の解は数値計算に対し不安定であるという問題が知られている。具体的には、数値的に解かれた  $\beta_{i,j}$  は選択した満期  $T_i$  やボラティリティ水準  $\alpha_k$  に大きく依存し、 $\beta_{i,j}$  の絶対値は大きくなりがちである。このため、当該手法を実務で応用するには、 $\beta_{i,j}$  を取引可能な数に抑える必要があり、先行研究ではその手法がいくつか提案されている。Fink [2003] では、 $\mathcal{V}_i$  の行列式が最大になるように、カレンダー・ポートフォリオの行使価格  $K_{i,j}$  とボラティリティ水準  $\alpha_k$  を最適化したうえで、(43) 式を解く手法が提案されている。また、Nalholm and Poulsen [2006] では、打切り特異値分解 (truncated singular value decomposition) 法により、 $\mathcal{V}_i$  を数値的に安定な行列に近似する手法が提案されている<sup>47</sup>。

上述のような SV や SLV モデルを想定した静的ヘッジ戦略では、複数のボラティリティ水準を含むさまざまなリスク・シナリオが想定されており、そのヘッジ効率は高い。実際、上述の方法で構築されたポートフォリオではベガ・リスクもヘッジされている (Fink [2003])。このため、株式や為替のようにボラティリティの変動が大きい市場に対しても適した戦略といえる。

しかし、単純に上記の手法を適用した静的ヘッジ戦略では、カレンダー・ポートフォリオに含まれる大量のバニラ・オプションの流動性が低いことが問題となり、実務への応用は難しい。バリア・オプションの静的ヘッジでは、原資産価格がバリアに到達すると同時にポートフォリオに含まれる全ての取引を解消する必要がある。しかし、表 4 のポートフォリオには、同一の満期で、異なる行使価格を持つオプションが多く含まれ、それらの流動性は一般に低い。このため、取引を解消する際の取引コストは一般に大きく、その大きさを事前に推定することも難しい。

### (3) 先行研究におけるヘッジ戦略のまとめ

本節では、先行研究での具体的なヘッジ戦略を説明した。バリア・オプションを念頭に各ヘッジ戦略をまとめると、それらの特徴は表 5 のようにまとめられる。

オプションを含むあらゆる資産を制約なしに取引できる場合には、いずれのヘッジ戦略も有用な戦略である。ただし、実際の市場に適用した場合には、いずれのヘッジ戦略にも欠点があり、状況に応じて適切なヘッジ戦略を選択し、市場や商品の特

47 特異値分解法と打切り特異値分解法は Press *et al.* [2001] の 2.6 節に詳しい。

表 5 各ヘッジ戦略の長所と短所

	長所	短所
既存の動的ヘッジ	<ul style="list-style-type: none"> <li>ヘッジ資産の流動性に伴う問題が小さい</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>オプション保有中はポジション調整が常に必要であり、ヘッジ・コストを取引開始時に確定できない</li> <li>高次グリークスが大きい場合、離散ヘッジ誤差と取引コストの双方が大きい</li> </ul>
既存の静的ヘッジ	<ul style="list-style-type: none"> <li>バリア到達時以外、ポジション調整が必要ない</li> <li>ポジション調整に伴う離散ヘッジ誤差と取引コストの問題が生じない</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>LV モデルを想定してヘッジする場合、ボラティリティの変動リスクをヘッジできない</li> <li>SLV モデルを想定してヘッジする場合、流動性の低いバニラ・オプションが多数必要である</li> </ul>

徴に応じて補正・改善する必要がある。バリア・オプションを例にとると、動的ヘッジでは過大な取引コストと離散ヘッジ誤差が生じ、静的ヘッジでは流動性が低いバニラ・オプションが多数必要となることを本節では確認した。

こうした点を踏まえると、SLV モデルを用いたバリア・オプションの静的ヘッジ戦略のヘッジ効率は高いが、静的ヘッジ戦略の構築には工夫が必要である。問題点を改善する手法として本稿 4、5 節では、ヘッジ誤差への影響が大きいリスク・シナリオに着目する静的ヘッジ戦略を提案する。既存の静的ヘッジでは、限られた種類のリスク・シナリオが同じ割合でヘッジされるのに対し、本稿で提案する手法ではヘッジ誤差への影響が大ききリスク・シナリオが重点的にヘッジされる。このため、既存の手法より効率的にヘッジすることができ、比較的少数のバニラ・オプションでヘッジした場合でも、ヘッジ誤差を十分に抑制できることが期待される。5 節ではいくつかの具体例を利用し、ヘッジ効率の高さを数値的に検証する。

#### 4. 確率局所ボラティリティ・モデルの最尤経路を利用したヘッジ誤差の漸近展開

本節では、バリア・オプションの一種であるノックアウト・オプション<sup>48</sup>に対し、静的ヘッジを行った際に生じるヘッジ誤差のモーメントを近似的に求める。まず(1)で、本節で議論するヘッジ誤差と、そのモーメントについて説明する。(2)では、漸近展開法の 1 つであるヒートカーネル展開 (DeWitt [1965]) と最尤経路の概念について説明する。次に(3)では、バリアへの到達時刻が  $t_0 + \Delta t$  である場合の、ヘッジ誤差の  $n$  次モーメントの近似式を最尤経路を中心とした鞍点近似<sup>49</sup>によって導く。

48 ノックイン・オプションはノックアウト・オプションとバニラ・オプションで複製できるため、本節ではノックアウト・オプションのみを考える。

49 鞍点近似は期待値の計算にしばしば利用される手法であり、期待値計算においては、鞍点のまわりの確率

## (1) バリア・オプションのヘッジ誤差のモーメント

一般に、バリア・オプションを完全にヘッジすることはできず、ヘッジ誤差は確率的に変化する。ここでは、ヘッジ誤差のモーメントが存在すると仮定し、このモーメントを、バニラ・オプションのポートフォリオの価値を表す関数と推移確率を用いて表現する。

バリア・オプションを静的にヘッジした際のキャッシュ・フローは、原資産価格がバリアに到達する場合のポジションの再調整と、到達せずに満期を迎える際に発生し、ヘッジ誤差はそれらの大きさに等しい。このうち、バリアに到達せずに満期を迎える場合のキャッシュ・フローはバニラ・オプションを保有することで容易に複製できるため、この場合のヘッジ誤差はゼロとみなせる。このため、バリア・オプションのヘッジ誤差を議論する際にはバリアに到達する場合についてのみ考慮すれば十分であり、その場合のヘッジ誤差の  $n$  次モーメントは、現時刻  $t_0$  での情報  $\mathcal{F}_{t_0}$  を条件とした期待値として

$$\int_{t_0}^T E[\Pi^n(t, F_t, \alpha_t) \times \delta(F_t - B) \mid \mathcal{F}_{t_0}] dt, \quad (48)$$

と表現できる。ここで、 $T$  はバリア・オプションの満期である。また  $\Pi(t, F_t, \alpha_t)$  はバニラ・オプションのポートフォリオの価値<sup>50</sup>であり、解析的あるいは数値的に計算する場合でも、短時間に計算できる関数である。また、 $\delta(F_t - B)$  はディラックのデルタ関数であり、 $B$  はバリア水準である<sup>51</sup>。

(48) 式は、被積分関数  $E[\Pi^n(t, F_t, \alpha_t) \times \delta(F_t - B) \mid \mathcal{F}_{t_0}]$  の時刻  $t$  に関する 1 次元の積分である。このため、 $t$  の積分に関する計算負荷は低く、(48) 式を短時間で計算するうえでは、この被積分関数を近似することが重要である。ここで  $t = t_0 + \Delta t$  とすると、被積分関数はバリアへの到達時刻が  $t_0 + \Delta t$  である場合のヘッジ誤差の  $n$  次モーメントであり、

$$\begin{aligned} & E[\Pi^n(t_0 + \Delta t, F_{t_0 + \Delta t}, \alpha_{t_0 + \Delta t}) \delta(F_{t_0 + \Delta t} - B) \mid \mathcal{F}_{t_0}] \\ &= \int \Pi^n(t_0 + \Delta t, B, \alpha_{t_0 + \Delta t}) p(F_{t_0}, \alpha_{t_0}, t_0; B, \alpha_{t_0 + \Delta t}, t_0 + \Delta t) d\alpha_{t_0 + \Delta t}, \end{aligned} \quad (49)$$

---

分布を正規分布とみなして積分する手法である。本稿の場合には、到達時刻を固定した際に最も発生しやすいボラティリティ水準が鞍点に対応している。

50 ヘッジ・ポートフォリオ全体にはバリア・オプションも含まれるが、バリアに到達した場合にはバリア・オプションの価値はゼロであるため、バニラ・オプションの価値の総和についてだけ考えればよい。

51 時刻  $t$  でのヘッジ誤差が、その時点の状態変数のみで決まるのは弱経路依存型オプション (weakly path dependent option) の特徴である。弱経路依存型オプションには、バリア・オプションやアメリカン・オプション等の例があり、本稿と同様のヘッジが可能である。一方、アジアン・オプションやルックバック・オプション等のオプションは強経路依存型オプション (strongly path dependent option) と呼ばれる。強経路依存型オプションでのキャッシュ・フローは状態変数だけでは決まらず、本稿の手法を単純には適用できない。経路依存型オプションの分類については Wilmott [2000] を参照。

の積分で表現される。ここで  $p(F_{t_0}, \alpha_{t_0}, t_0; B, \alpha_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t)$  は、原資産価格とボラティリティが従う同時確率密度であり、ヒートカーネルとも呼ばれる関数である<sup>52</sup>。

以下では、 $p(F_{t_0}, \alpha_{t_0}, t_0; B, \alpha_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t)$  をヒートカーネル展開で解析的に近似することで、(49) 式中の被積分関数を近似した後に、(49) 式中の積分を鞍点近似により近似的に積分することで、ヘッジ誤差のモーメントの解析近似式を導出する。

## (2) ヒートカーネル展開

ここでは、ヒートカーネル展開 (DeWitt [1965]) について説明したうえ、その方法を (49) 式に適用する。数学的な内容を多く含むが、ヒートカーネル展開はファイナンス理論への応用範囲が広く有益であるため、数学的な内容も含めて、整理しておく。

原資産価格  $F_t$ 、ボラティリティ  $\alpha_t$  からなるベクトル  $X_t$  の成分を  $X_t^i$  ( $i = 1, 2$ 、 $X_t^1 = F_t$ 、 $X_t^2 = \alpha_t$ ) で表し、各成分が次の確率微分方程式に従う場合を考える。

$$dX_t^i = \mu^i(X_t) dt + \sigma^{ij}(X_t) dW_j(t), \quad (50)$$

$$X_t^1 = F_t, \quad (51)$$

$$X_t^2 = \alpha_t, \quad (52)$$

$$dW_1 dW_2 = 0. \quad (53)$$

ここで (50) 式は、 $\mu^i$  ( $i = 1, 2$ ) で表現される状態変数のトレンドと、 $\sigma^{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) で表される状態変数の瞬間的なボラティリティ、状態変数間の相関が状態変数  $X_t$  に依存する SLV モデルであり<sup>53</sup>、分散共分散行列は  $\Sigma^{ij} = (\sigma\sigma^T)^{ij}$  で定義される<sup>54</sup>。また、(50) 式では、 $j$  についての和を表現する  $\sum$  記号を省略している。これ

52 同時確率密度  $p(F_{t_0}, \alpha_{t_0}, t_0; B, \alpha_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t)$  は原資産価格がバリアに到達するシナリオの寄与を含んでいるため、バリア・オプションのヘッジ誤差を議論する際には本来、時刻  $t_0 + \Delta t$  に初めてバリアに到達する確率を利用する必要がある。ただし、原資産価格がバリアに初めて到達する確率と  $p(F_{t_0}, \alpha_{t_0}, t_0; B, \alpha_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t)$  は、 $\Delta t$  のゼロ次の精度で一致している。また、同時確率密度は原資産価格がバリアに初めて到達する場合の確率より大きいため、(49) 式は 2 次モーメント等の偶数次のモーメントの上限を与えている。このため、5 節のように、ヘッジ誤差の 2 次モーメントを最小化する場合、(49) 式を用いることで十分である。

53 例として SABR モデル ((18) 式) を (50) 式の形式で表現する場合には

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} F_t^\beta \alpha_t & 0 \\ \rho v \alpha_t & \sqrt{1-\rho^2} v \alpha_t \end{pmatrix}.$$

の  $\mu$  と  $\sigma$  で (18) 式を表現できる。一般の SLV モデルでは、原資産とボラティリティ ( $\alpha_t$ ) のトレンドが  $\mu$  の各成分で表現され、原資産のボラティリティ (変動幅)、原資産とボラティリティ ( $\alpha_t$ ) の相関、ボラティリティ ( $\alpha_t$ ) のボラティリティ (変動幅) が  $\sigma^{ij}$  の各成分で表現される。

54 T は転置を表している。

以降でも、上付き添え字と下付き添え字が同じ文字の場合には和がとられているものとする。例えば、ベクトル  $P$ 、 $Q$  の内積は  $P^i Q_i$  と書くことになる<sup>55</sup>。

ヒートカーネル展開とは、確率過程  $X_t$  のヒートカーネル

$$p(x_{t_0}, t_0; x_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t) = \Pr[X_{t_0+\Delta t} = x_{t_0+\Delta t} | X_{t_0} = x_{t_0}], \quad (54)$$

を  $\Delta t$  のべき級数で近似する近似手法の 1 つであり、当該近似式を用いることで  $\Delta t$  が小さい場合のヒートカーネルの性質を解析的に表現することができる<sup>56</sup>。時間間隔  $\Delta t$  に対するヒートカーネルは、(50) 式が連続なマルコフ過程であることから、時間間隔  $\Delta t$  を

$$t_i = t_0 + \frac{i}{n}\Delta t, \quad i = 0, \dots, n, \quad (55)$$

で定義される  $n$  個の時刻で分割することで、

$$p(x_{t_0}, t_0; x_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t) = \int \prod_{i=0}^{n-1} p(x_{t_i}, t_i; x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) dx_{t_1} \cdots dx_{t_{n-1}}, \quad (56)$$

と微小な時間間隔  $\Delta t/n$  に対するヒートカーネルの積で表現できる<sup>57</sup>。以下では、(56) 式の性質と、数学的には厳密ではないが直観的に理解しやすい手法に基づく、ゼロ次のヒートカーネル展開の導出法を説明する。その後、ヒートカーネル展開の一般形を表現するうえで必要になる最尤経路の概念と、 $N_h$  次のヒートカーネル展開について説明する。

まず、(56) 式に含まれる時間間隔  $\Delta t/n$  でのヒートカーネルを、 $n$  を十分に大きくとることで、多変量正規分布の同時確率分布で近似する<sup>58</sup>。

55  $\sum$  記号の省略にかかる規約はアインシュタイン規約と呼ばれ、物理学や微分幾何学などでしばしば利用される。また、 $X^i$  と  $X_i$  の間には  $X_i = (\Sigma^{-1})_{ij} X^j$  の関係があり、ヒートカーネル展開の高次項を議論するうえでは両者の区別が重要である。添字の上下の意味を含め、ヒートカーネル展開や微分幾何学のファイナンスへの応用については Henry-Labordère [2008] を参照。

56  $\Delta t$  は時間の次元を持つ量であるため、実際には、モデル・パラメータにより無次元化された量による展開となる。(18) 式で定義される SABR モデルの場合には、 $v^2 \Delta t$  が無次元量である。このため、 $v$  が小さい場合には、数年といった比較的長い時間間隔についても、本近似手法を適用できる。

57  $x_{t_i}$  は各時刻  $t_i$  で、 $X_{t_i}$  がとりうる値を表している。

58 脚注 55 のとおり、(57) 式中の上付きの  $k$  や  $l$  は  $k$  乗、 $l$  乗を表すものではなく、ベクトルの成分を表している。

$$\begin{aligned}
 & p(x_{t_i}, t_i; x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \\
 & \simeq n \frac{\sqrt{g(x_{t_i})}}{2\pi \Delta t} \\
 & \quad \times \exp \left[ -\frac{n}{2\Delta t} \left( x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - \mu(x_{t_i}) \frac{\Delta t}{n} \right)^k g(x_{t_i})_{kl} \left( x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - \mu(x_{t_i}) \frac{\Delta t}{n} \right)^l \right] \\
 & \simeq n \frac{\sqrt{g(x_{t_i})}}{2\pi \Delta t} \exp \left[ -\frac{n}{2\Delta t} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^k g(x_{t_i})_{kl} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^l \right]. \quad (57)
 \end{aligned}$$

ここで、 $g(x_{t_i})_{kl}$ 、 $g(x_{t_i})$  はそれぞれ、分散共分散行列  $\Sigma^{ij}$  の逆行列とその行列式、すなわち、

$$g(x_{t_i})_{kl} = (\Sigma^{-1})_{kl}, \quad (58)$$

$$g(x_{t_i}) = \det(g(x_{t_i})_{kl}), \quad (59)$$

である<sup>59</sup>。

次に、(57) 式を (56) 式に代入すると、ヒートカーネルは

$$\begin{aligned}
 & p(x_{t_0}, t_0; x_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t) \\
 & \simeq \int \exp \left[ -\frac{n}{2\Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^k g(x_{t_i})_{kl} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^l \right] \\
 & \quad \times \left( n \frac{\sqrt{g(x_{t_i})}}{2\pi \Delta t} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left( n \frac{\sqrt{g(x_{t_i})}}{2\pi \Delta t} dx_{t_i} \right), \quad (60)
 \end{aligned}$$

と表現される。 $\Delta s = 1/n$  と  $\Delta s$  を定義し、 $n \rightarrow \infty$  の極限をとると、上式の括弧  $[\cdot]$  内 (指数関数内) は

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2\Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^k g(x_{t_i})_{kl} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^l \\
 & = \frac{1}{2\Delta t} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{1/\Delta s - 1} g(x_{t_i})_{kl} \frac{(x_{t_i+\Delta s} - x_{t_i})^k}{\Delta s} \frac{(x_{t_i+\Delta s} - x_{t_i})^l}{\Delta s} \Delta s \\
 & = \frac{1}{2\Delta t} \int_0^1 g_{kl}(x(s)) \frac{dx^k(s)}{ds} \frac{dx^l(s)}{ds} ds, \quad (61)
 \end{aligned}$$

と、状態変数の経路  $x(s)$  に沿った積分で表現される。ここで  $x(s)$  は  $x(s) = x_{t_0+s\Delta t}$  で定義される経路であり、 $x(0) = x_{t_0}$ 、 $x(1) = x_{t_0+\Delta t}$  を満たしている。

.....  
59 (57) 式の第 2 式では、微小量  $\mu(x_{t_i}) \frac{\Delta t}{n}$  をゼロと近似している。

(60) 式における指数関数以外の項の極限を

$$\mathcal{D}x(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \frac{\sqrt{g(x_{t_0})}}{2\pi \Delta t} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left( n \frac{\sqrt{g(x_{t_i})}}{2\pi \Delta t} dx_{t_i} \right), \quad (62)$$

で表現し、(61)、(62) 式を (60) 式に代入すると、ヒートカーネルは

$$\begin{aligned} & p(x_{t_0}, t_0; x_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t) \\ &= \int \exp \left[ -\frac{1}{2\Delta t} \int_0^1 g_{kl}(x(s)) \frac{dx^k(s)}{ds} \frac{dx^l(s)}{ds} ds \right] \mathcal{D}x(s), \end{aligned} \quad (63)$$

と表現される。

(63) 式中の

$$\begin{aligned} & \exp \left[ -\frac{1}{2\Delta t} \int_0^1 g_{kl}(x(s)) \frac{dx^k(s)}{ds} \frac{dx^l(s)}{ds} ds \right] \mathcal{D}x(s) \\ & \text{s.t.} \begin{cases} x(0) = x_{t_0}, \\ x(1) = x_{t_0+\Delta t}, \end{cases} \end{aligned} \quad (64)$$

は、状態変数が経路  $x(s)$  に沿って変化する条件付き確率である。このためヒートカーネルは、固定された始点と終点を結ぶ際に想定しうる全ての経路に対し、経路に沿って変化する確率を推定し、その確率を足し上げたものとして表現される<sup>60</sup>。

ゼロ次のヒートカーネル展開は、(64) 式が最大となる経路についてのみ考慮することで導出される。当該経路は、モデル上実現する可能性が最も高い経路であり、最尤経路と呼ばれる。ここで、最尤経路の「長さ」 $d$  を、

$$\begin{aligned} & d^2(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t}) = \min \int_0^1 g_{kl}(x(s)) \frac{dx^k(s)}{ds} \frac{dx^l(s)}{ds} \\ & \text{s.t.} \begin{cases} x(0) = x_{t_0}, \\ x(1) = x_{t_0+\Delta t}, \end{cases} \end{aligned} \quad (65)$$

によって定義すると<sup>61</sup>、(63) 式は

<sup>60</sup> 経路についての足し上げは汎関数積分で定義でき、(63) 式は関数  $x(s)$  についての汎関数積分である。当該汎関数積分はファイマンの経路積分とも呼ばれ、ファイナンスへの応用については Dash [1988, 2004] 等でまとめられている。

<sup>61</sup>  $d$  は、 $x_{t_0}$  と  $x_{t_0+\Delta t}$  を結びリーマン距離に相当する。最尤経路は、計量  $g_{ij}$  の定義されたリーマン多様体上の測地線に一致し、測地線方程式を解くことで計算できる。一般のモデルでは数値計算が必要になるが、SABR モデルやヘストン・モデルでは（準）解析的に測地線方程式を解くことができ、測地線とリーマン距離を（準）解析的に求めることができる。

$$\begin{aligned}
 & p(x_{t_0}, t_0; x_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t) \\
 &= \int \exp\left[-\frac{1}{2\Delta t} \int_0^1 g_{kl} \frac{dx^k(s)}{ds} \frac{dx^l(s)}{ds} ds\right] \mathcal{D}x(s) \\
 &= \int \exp\left[-\frac{d^2(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t})}{2\Delta t} + \text{higher order}\right] \mathcal{D}x(s) \\
 &= \exp\left[-\frac{d^2(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t})}{2\Delta t}\right] \times \int \exp[\text{higher order}] \mathcal{D}x(s), \tag{66}
 \end{aligned}$$

と表現される。ここで“higher order”は、最尤経路以外の経路からの寄与を表現している<sup>62</sup>。最尤経路のみを考慮した、ゼロ次のヒートカーネル展開は、適当な規格化定数  $\mathcal{N}$  を用いて

$$p(x_{t_0}, t_0; x_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t) \simeq \frac{\mathcal{N}}{2\pi\Delta t} \exp\left[-\frac{d^2(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t})}{2\Delta t}\right], \tag{67}$$

と表現される<sup>63</sup>。

以上がゼロ次のヒートカーネル展開の直観的な導出と最尤経路の定義である。一般の  $N_h$  次のヒートカーネル展開は最尤経路の周辺の寄与を考慮することで導出され、以下の定理により表現される。

**定理 1** (ヒートカーネル展開 (DeWitt [1965])) ヒートカーネル  $p(x_0, t_0; x_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t)$  に対し、滑らかな関数  $a_n(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t})$  ( $n = 0, \dots, N_h$ ) が存在し<sup>64</sup>、

$$\begin{aligned}
 & p(x_0, t_0; x_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t) \\
 & \simeq \frac{\sqrt{g(x_{t_0+\Delta t})}}{2\pi\Delta t} \sqrt{\Delta(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t})} \mathcal{P}(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t}) \\
 & \quad \times \exp\left[-\frac{d^2(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t})}{2\Delta t}\right] \sum_{k=0}^{N_h} a_k(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t}) \times (\Delta t)^k, \tag{68}
 \end{aligned}$$

が成立する。ここで、(68) 式は  $N_h$  次のヒートカーネル展開と呼ばれ<sup>65</sup>、 $\Delta(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t})$  は

<sup>62</sup> “higher order” は最尤経路上での (61) 式の 2 階以上の汎関数微分で表現される。

<sup>63</sup> (67) 式が  $1/\Delta t$  に比例するのは、ヒートカーネル展開による近似式が確率分布である必要条件である。(67) 式を  $x_{t_0+\Delta t}$  について積分した結果が、 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限でも有限であるためには、(67) 式が  $1/\Delta t$  に比例しなければならない。

<sup>64</sup>  $a_k$  はヒートカーネル展開の係数と呼ばれ、 $a_0 = 1$  より逐次的に計算される。 $a_k$  の計算法については多くの研究があり、Avramidi and Schimming [1995] でさまざまな手法がまとめられている。ファイナンスの文脈では Paulot [2009] 等で計算手法が紹介されている。

<sup>65</sup> 本定理は、計量  $g_{ij}$  の定義されたリーマン多様体上のヒートカーネルに対して成立する定理である。本定理の一般的で厳密な表現は本稿では必要ないが、本定理の詳細や誤差項の性質、ヒートカーネル展開のレビュー、ファイナンスへの応用についてはそれぞれ、DeWitt [1965]、Vassilevich [2003]、Henry-Labordère [2008] 等を参照。

$$\Delta(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t}) = \frac{\det\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 d^2(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t})}{\partial x_{t_0}^i \partial x_{t_0+\Delta t}^j}\right)}{\sqrt{g(x_{t_0})g(x_{t_0+\Delta t})}}, \quad (69)$$

で定義される行列式であり、 $\mathcal{P}(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t})$  は最尤経路  $\mathcal{C}$  に沿った積分であり

$$\mathcal{P}(x_{t_0}; x_{t_0+\Delta t}) = \exp\left(-\int_{\mathcal{C}} A_i dx^i\right), \quad (70)$$

と定義される。また  $A_i$  は

$$A_i = g_{ij} \left( -\frac{1}{2} \Gamma_{kl}^j g^{kl} - \mu^j \right), \quad (71)$$

で定義され、 $\Gamma_{kl}^j$  は

$$\Gamma_{kl}^j = \frac{1}{2} g^{ji} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right), \quad (72)$$

で定義される。

定理 1 の (68) 式により、(49) 式の被積分関数を解析的に表現できる。1 次のヒートカーネル展開と同じ精度で近似するために、 $N_h = 1$  とした (68) 式を代入すると被積分関数は

$$\begin{aligned} & \Pi^n(t_0 + \Delta t, B, \alpha_{t_0+\Delta t}) p(F_{t_0}, \alpha_{t_0}, t_0; B, \alpha_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t) \\ &= \frac{1}{2\pi \Delta t} \Pi^n(t_0 + \Delta t, B, \alpha_{t_0+\Delta t}) e^{-\frac{\mathcal{L}}{\Delta t} + o(\Delta t)}, \end{aligned} \quad (73)$$

と  $\Delta t$  のベキ関数で近似できる。ここで、 $\mathcal{L}$  は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \times \Delta t + \mathcal{L}_2 \times (\Delta t)^2, \quad (74)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} d^2(F_{t_0}, \alpha_{t_0}; B, \alpha_{t_0+\Delta t}), \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & -\frac{1}{2} \ln[g(B, \alpha_{t_0+\Delta t}) \times \Delta(F_{t_0}, \alpha_{t_0}; B, \alpha_{t_0+\Delta t})] \\ & - \ln \mathcal{P}(F_{t_0}, \alpha_{t_0}; B, \alpha_{t_0+\Delta t}), \end{aligned} \quad (76)$$

$$\mathcal{L}_2 = -\ln a_1(F_0, \alpha_{t_0}; B, \alpha_{t_0+\Delta t}), \quad (77)$$

で定義される。

### (3) 鞍点近似

(2)では、ヘッジ誤差の  $n$  次モーメントの被積分関数が、(73) 式のように近似できることを示した。ここでは最尤経路を中心とした鞍点近似を用いて、ヘッジ誤差のモーメントを求める。ヘッジ誤差のモーメント ((49) 式) の計算においては、その被積分関数 ((73) 式) のうち、指数関数として表されている確率密度が大きい領域が重要となる。そうした領域の中心、すなわち確率密度が最大となる  $\alpha_{\min}$  を鞍点と呼ぶ。そこで、鞍点となるボラティリティ ( $\alpha_{\min}$ ) は、(73) 式から、 $\mathcal{L}$  を最小にする点であり、

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{\min}} = 0, \quad (78)$$

の解である<sup>66</sup>。ここで  $\alpha_{\min}$  は時刻  $t_0 + \Delta t$  にバリアに到達する最尤経路の終点の第 2 成分に等しく、バリアに到達する際に最も発生しやすいボラティリティ水準と解釈できる。

(78) 式を一般の SLV モデルについて解くことは難しく、仮定するモデルごとに (78) 式の解を求める必要がある。以下では、鞍点が求まったとして鞍点近似を実行する<sup>67</sup>。 $\alpha = \alpha_{\min} + \Delta\alpha$  とし、被積分関数 (73) 式を  $\Delta\alpha$  について展開すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\Delta t} \Pi^n(t_0 + \Delta t, B, \alpha_{\min} + \Delta\alpha) e^{-\frac{c}{\Delta t} + o(\Delta t)} \\ &= \frac{1}{2\pi\Delta t} \left( \Pi + \Pi' \Delta\alpha + \frac{1}{2} \Pi'' \Delta\alpha^2 + \dots \right)^n \\ & \quad \times \exp \left[ -\frac{\mathcal{L} + \frac{1}{2} \mathcal{L}'' \Delta\alpha^2 + \frac{1}{6} \mathcal{L}^{(3)} \Delta\alpha^3 + \frac{1}{24} \mathcal{L}^{(4)} \Delta\alpha^4 + \dots}{\Delta t} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\Delta t} \exp \left[ -\frac{\mathcal{L} + \frac{1}{2} \mathcal{L}'' \Delta\alpha^2}{\Delta t} \right] \\ & \quad \times \left[ \Pi^n \left( 1 - \frac{\mathcal{L}^{(4)} \Delta\alpha^4}{24 \Delta t} + \frac{\mathcal{L}^{(3)^2} \Delta\alpha^6}{72 \Delta t^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{n(n-1)}{2} \Pi^{n-2} \Pi'^2 + \frac{n}{2} \Pi^{n-1} \Pi'' \right) \Delta\alpha^2 \right. \\ & \quad \left. - n \Pi^n \Pi' \frac{\mathcal{L}^{(3)} \Delta\alpha^4}{6 \Delta t} + \text{odd terms} \right] + \dots, \quad (79) \end{aligned}$$

66 最小であるためには  $\mathcal{L}'' > 0$  も必要な条件であるが、当該条件は  $\Delta t$  による漸近展開が有効な範囲であれば自動的に満たされる。 $\Delta t$  が十分に小さい場合、 $\mathcal{L}'' \simeq dd''$  が成り立ち、 $d$  が  $x_{t_0}$  と  $x_{t_0+\Delta t}$  を結ぶ曲線の長さの中で最小であることから、 $d > 0$ 、 $d'' > 0$  が成り立つ。

67 本稿の数値検証で利用する SABR モデルでの鞍点については補論を参照。

となる。ここで、 $\prime$  は  $\alpha$  による微分、上付き添え字の  $(n)$  は  $\alpha$  による  $n$  階微分を表し、第2式以下の  $\Pi$  と  $\mathcal{L}$  は、その微分も含め全て  $\alpha = \alpha_{\min}$  で計算されている（例えば、 $\Pi = \Pi(t + \Delta t, B, \alpha_{\min})$ ）。また(79)式中の“odd terms”は、 $\Delta\alpha$  の奇数次の項を表し、 $\Delta\alpha$  について積分した際にゼロとなる<sup>68</sup>。また、“...”は積分した際に  $\Delta t$  について高次となる項を表している。

(79)式を(49)式に代入し、 $\Delta\alpha$  について積分すると  $n$  次モーメントの解析近似式は

$$\begin{aligned}
 & E[\Pi^n(t_0 + \Delta t, F_{t_0 + \Delta t}, \alpha) \times \delta(F_{t_0 + \Delta t} - B)] \\
 &= \frac{e^{-\frac{c}{\Delta t}}}{\sqrt{2\pi \Delta t \mathcal{L}''}} \\
 & \times \left[ \Pi^n + \frac{\Delta t}{\mathcal{L}''} \left\{ \frac{n(n-1)}{2} \Pi^{n-2} \Pi'^2 + \frac{n}{2} \Pi^{n-1} \Pi'' - \frac{1}{8} \Pi^n \frac{\mathcal{L}^{(4)}}{\mathcal{L}''} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{n}{2} \Pi^{n-1} \Pi' \frac{\mathcal{L}^{(3)}}{\mathcal{L}''} + \frac{5}{24} \Pi^n \left( \frac{\mathcal{L}^{(3)}}{\mathcal{L}''} \right)^2 \right\} + o(\Delta t) \right], \quad (80)
 \end{aligned}$$

と導出される。

## 5. 確率局所ボラティリティ・モデルの最尤経路を利用したバリア・オプションの静的ヘッジ

本節では、前節で導出したヘッジ誤差のモーメントの解析近似式を用いて、原資産価格がSLVモデルに従う場合のバリア・オプションの効率的なヘッジ戦略を構築し、そのヘッジ効率について数値検証する。まず、(1)で、ポートフォリオの構築法について説明する。次に(2)で、構築したポートフォリオの理論上の利点について説明する。最後に、(3)で、提案する戦略が既存のヘッジ戦略と比較して効率的であることを数値例を用いて示す。

### (1) ポートフォリオの構築法

ここでは、(80)式を利用したポートフォリオの構築法について説明する。構築法は、次の3つの特徴がある。

- ヘッジ誤差の2乗平均の解析近似式を最小化する。
- 3節で解説した既存のヘッジ戦略と同様に、マチュリティ・ポートフォリオとカレンダー・ポートフォリオの2つのポートフォリオを組み合わせる。

<sup>68</sup> 鞍点近似では  $\Delta\alpha$  が正規分布に従うと仮定し、 $[-\infty, \infty]$  の積分範囲で積分される。このため、“odd terms”を積分した結果はゼロとなる。

- ヘッジのために保有するバニラ・オプション等の分量について、逐次的に最適化する。

それぞれ、イ.ロ.ハ.で解説していく。

### イ. ヘッジ誤差の2乗平均最小化

3節では、ボラティリティ・サーフェスの変動を踏まえてオプションをヘッジする手法として、ヘッジ損益の分散を最小にするような動的ヘッジ手法をみてきた。バリア・オプションの静的ヘッジ戦略の設定においても類似の考え方が適用できる。本稿では、近似されたヘッジ誤差の2乗平均を最小化する戦略を考える<sup>69</sup>。ヘッジ誤差の2乗平均(2次モーメント)とは、(48)式で $n = 2$ とした量、すなわち、

$$\int_{t_0}^T E[\Pi^2(t, F_t, \alpha_t) \times \delta(F_t - B) \mid \mathcal{F}_{t_0}] dt, \quad (81)$$

である。ここで、上式の被積分関数  $E[\Pi^2(t, F_t, \alpha_t) \times \delta(F_t - B) \mid \mathcal{F}_{t_0}]$  は、4節の(80)式で計算したように、

$$\begin{aligned} & E[\Pi^2(t, F_t, \alpha_t) \times \delta(F_t - B) \mid \mathcal{F}_{t_0}] \\ &= \frac{e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}{\sqrt{2\pi(t-t_0)\mathcal{L}''}} \\ & \times \left[ \Pi^2 + \frac{t-t_0}{\mathcal{L}''} \left\{ \Pi'^2 + \Pi \cdot \Pi'' - \frac{1}{8} \Pi^2 \frac{\mathcal{L}^{(4)}}{\mathcal{L}''} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \Pi \cdot \Pi' \frac{\mathcal{L}^{(3)}}{\mathcal{L}''} + \frac{5}{24} \Pi^2 \left( \frac{\mathcal{L}^{(3)}}{\mathcal{L}''} \right)^2 \right\} + o(t-t_0) \right], \quad (82) \end{aligned}$$

のように近似できる<sup>70</sup>。当該近似式を最小化することで、ヘッジ誤差の2乗平均への寄与が大きい経路<sup>71</sup>が中心にヘッジされ、既存の手法より効率的にバリア・オプションをヘッジできる。

### ロ. ヘッジ・ポートフォリオ

次に、ヘッジ・ポートフォリオの構成商品について考える。(80)式において、原資産価格がバリアに到達するまでの時間  $\Delta t$  が十分に短い場合には、ヘッジ誤差のモーメントは、

69 2乗平均はヘッジ誤差の分散と平均の2乗の和であり、当該最適化は分散と平均の2乗を、同じ重みづけのもとで最小化する手法に相当する。

70 (82)、(83)式中の  $\Pi$ 、 $\Pi'$ 、 $\Pi''$ 、 $\mathcal{L}$ 、 $\mathcal{L}''$ 、 $\mathcal{L}^{(3)}$ 、 $\mathcal{L}^{(4)}$  は、(80)式と同様に、原資産価格がバリアに到達した際の最尤経路上で定義されている。

71 本稿の近似式の精度が高い範囲においては、当該経路は最尤経路に相当する。

$$E[\Pi^n(t_0 + \Delta t, F_{t_0 + \Delta t}, \alpha) \times \delta(F_{t_0 + \Delta t} - B)] = \frac{e^{-\frac{c}{\Delta t}}}{\sqrt{2\pi\Delta t\mathcal{L}''}} \times [\Pi^n + \dots], \quad (83)$$

と表現される。(83)式は、原資産価格がバリアに到達した際にボラティリティ水準がちょうど  $\alpha_{\min}$  となった場合のヘッジ・ポートフォリオ時価の  $n$  乗に比例する。このため、満期がある程度短いバリア・オプションについては、 $\Pi(t_0 + \Delta t, B, \alpha_{\min})$  をゼロにできる商品構成が効果的である。ここで、3節の議論を振り返ると、 $\Pi(t_0 + \Delta t, B, \alpha_{\min})$  はオプションの保有数に対して線形であるため、 $N$ 個のバニラ・オプションをヘッジ・ポートフォリオに含め、その保有数を調節することで  $N$  時点のヘッジ誤差の全てのモーメントをゼロにするポートフォリオを容易に構築できる。

バリア・オプションの満期が長い場合には、(80)式に含まれる  $\Delta t$  に関する高次の項も考慮する必要がある。この場合、ヘッジ誤差の2乗平均は(82)式を用いて近似され、ポートフォリオの時価、ベガ、ボルガが含まれる。(82)式がゼロとなる十分条件は

$$\begin{cases} \Pi(t_0 + \Delta t, B, \alpha_{\min}) \simeq 0, \\ \Pi'(t_0 + \Delta t, B, \alpha_{\min}) \simeq 0, \end{cases} \quad (84)$$

である。このため、原資産価格がバリアに到達するまでの時間  $\Delta t$  が長い場合には、2種類のバニラ・オプションを用いることで各到達時刻におけるヘッジ誤差のモーメントを効果的に削減できる。

以上の議論を踏まえると、原資産価格が比較的短い時間でバリアに到達する場合を1次元のカレンダー・ポートフォリオでヘッジし、比較的長い時間の後にバリアに到達する場合を、満期が長い複数のバニラ・オプションを含むポートフォリオ(マチュリティ・ポートフォリオ)でヘッジするのが効率的であることがわかる。本稿では、カレンダー・ポートフォリオとマチュリティ・ポートフォリオを次のように設定する。

**カレンダー・ポートフォリオ** 以下の  $N-1$  種のオプションからなるポートフォリオ

- $t_0 < T_1 < \dots < T_{N-1} < T$  の関係を満たす満期  $T_i$  と、バリア水準  $B$  に等しい行使価格を持つバニラ・オプションを  $\beta_i$  ずつ保有するポートフォリオ

**マチュリティ・ポートフォリオ** 以下の4種のオプションからなるポートフォリオ

- 満期  $T$  において、バリア・オプションと同じペイオフとなるバニラ・オプション
- バリア水準  $B$  に等しい行使価格、OTM であるペイオフ、満期  $T$  を持つデジタル・オプション

- バリア水準  $B$  に等しい行使価格、OTM であるペイオフ、満期  $T$  を持つ バニラ・オプション
- 行使価格  $B \pm |B - K|$ 、OTM であるペイオフ、満期  $T$  を持つバニラ・オプション<sup>72</sup>

ヘッジ・ポートフォリオの具体例として、ノックアウト・オプション、リバース・ノックアウト (reverse knockout: RKO) オプション<sup>73</sup>をヘッジする場合を表 6、7 に示す。ここで、カレンダー・ポートフォリオは No. 1~ $N - 1$  に当たり、マチュリティ・ポートフォリオは No.  $N \sim N + 3$  に当たる。また、No.  $N + 1$  のペイオフは、原資産価格が満期までバリアに到達しなかった場合のバリア・オプションと同一のペイオフが選ばれ、No.  $N + 1$  以外の商品のペイオフは OTM となるものが選ばれる。

本節のヘッジ・ポートフォリオを、3 節で紹介したヘッジ・ポートフォリオ (表 3、4、図 7、8) と比較すると、ポートフォリオを構成するオプションの数が SV/SLV モデルを想定した先行研究 (表 4) におけるオプションの数より一般的に少なく、LV モデルを想定した先行研究 (表 3) と同程度であることが確認できる。しかし本稿のヘッジ手法では、ヘッジ誤差の 2 乗平均への寄与が大きい経路が中心的にヘッジされるため、表 6、7 のように、少数のバニラ・オプションのみからなるポートフォリオであっても、ベガ・リスクを含むリスクを効率的にヘッジできる。また、バリア水準を行使価格に選ぶことで、バリア到達時のポジション調整の際の取引コストが抑制されると期待できる。原資産価格がバリアに到達した際には、カレンダー・ポートフォリオと、マチュリティ・ポートフォリオに含まれるデジタル・オプションは、全て ATM<sup>74</sup>であり、原資産価格がバリアに到達した際の流動性が高い。また、行使価格をバリア水準に設定することで、バニラ・オプションの保有数 ( $\beta_i$  の絶対値) も他の行使価格を選んだ場合に比べて小さく設定することができる<sup>75</sup>。このため当

72 行使価格の ± の符号は OTM となるものが選ばれる。

73 ダウン・アンド・アウト・コール・オプションのようにペイオフが連続なノックアウト・オプションとアップ・アンド・アウト・コール・オプションのようにペイオフが不連続なノックアウト・オプションを区別するために、後者の不連続なオプションは RKO オプションと呼ばれる。

74 本節 (2) と (3) では、ATM として、株式オプション市場で使われる ATM スポットの定義を用いており、行使価格が現時点の原資産価格に等しいオプションを ATM オプションと呼んでいる。そのため、満期が 10 年以内の通貨オプション市場で使われる ATM-デルタ・ニュートラルにおける行使価格や、満期が 10 年超の通貨オプション市場あるいはスワップション市場等で使われる ATM-フォワードの行使価格とは幾分乖離している。

75  $\beta_i$  の絶対値の小ささは、行使価格が  $K_i$  である場合の最適解 ( $\beta_i$ ) を求めることで理解できる。(82) 式が非負であることから、(81) 式の最小化では (82) 式が小さくなる  $\beta_i$  が選ばれ、 $t - t_0$  の最低次に着目すると、当該条件は  $\Pi$  を最小化することと同値である。このため  $\beta_i$  は

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \beta_i V(t, B, \alpha_{\min}; K_i, T_i) + \Lambda_T(t) \simeq 0 \quad \text{for } t_0 \leq \forall t \leq T,$$

を近似的に満たしている。ここで  $V(t, B, \alpha_{\min}; K_i, T_i)$  は時刻  $t$  に原資産価格が  $B$ 、ボラティリティが  $\alpha_{\min}$  の値をとるときのバニラ・オプションの時価を表現し、 $\Lambda_T$  はマチュリティ・ポートフォリオの時価を表現している。 $\Lambda_T$  はカレンダー・ポートフォリオに含まれるどのオプションよりも満期が長く、イン・ザ・

表6 ノックアウト・オプションのヘッジ・ポートフォリオ

ポートフォリオ名	No.	行使価格	満期	ペイオフ	保有数
カレンダー・ ポートフォリオ	1	$B$	$T_1$	バニラ・オプション	$\beta_1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$N-1$	$B$	$T_{N-1}$	バニラ・オプション	$\beta_{N-1}$
マチュリティ・ ポートフォリオ	$N$	$B$	$T$	バニラ・オプション	$\beta_N$
	$N+1$	$K$	$T$	バニラ・オプション	1
	$N+2$	$B$	$T$	デジタル・オプション	0
	$N+3$	$B \pm  B-K $	$T$	バニラ・オプション	$\beta_{N+1}$

表7 リバース・ノックアウト・オプションのヘッジ・ポートフォリオ

ポートフォリオ名	No.	行使価格	満期	ペイオフ	保有数
カレンダー・ ポートフォリオ	1	$B$	$T_1$	バニラ・オプション	$\beta_1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$N-1$	$B$	$T_{N-1}$	バニラ・オプション	$\beta_{N-1}$
マチュリティ・ ポートフォリオ	$N$	$B$	$T$	バニラ・オプション	$\beta_N$
	$N+1$	$K$	$T$	バニラ・オプション	1
	$N+2$	$B$	$T$	デジタル・オプション	$-2 \times  B-K $
	$N+3$	$B \pm  B-K $	$T$	バニラ・オプション	$\beta_{N+1}$

該ポートフォリオに対応するポジションは、流動性が高い少数のオプションの取引で解消でき、取引コストの削減が期待できる。

## ハ. 逐次最適化

最後に、ヘッジ・ポートフォリオに含まれる各商品の保有数  $\beta_i$  を計算する手法について考える。ヘッジ誤差の2乗平均値 ((81) 式) は、

マネーのオプションも含むため、上式の解の大きさは

$$\beta_i \simeq O\left(\frac{\Lambda_T(t)}{V_i(t, B, \alpha; K_i, T_i)}\right),$$

と近似的に評価できる。ここで  $V_i(t, B, \alpha; K_i, T_i)$  は OTM であるバニラ・オプションの価値であり、 $K_i = B$  で最大値をとる単調関数である。このため  $\beta_i$  の絶対値は  $K_i = B$  と設定した場合に最小となる。

なお、取引コストの観点からは  $\beta_i$  の絶対値が小さいことが望まれるが、バリア・オプションの商品特性や市場環境によっては、市場での取引が困難なほどに小さな  $\beta_i$  が最適化により選ばれる場合もある。このため、実際の取引に応用するうえで、 $\beta_i$  の絶対値に下限を設けたうえで、行使価格まで含めた最適化を試みることも有用である。

$$\begin{aligned}
 & \int_{T_0}^T E[\Pi^2(t, F_t, \alpha_t) \times \delta(F_t - B) \mid \mathcal{F}_{t_0}] dt \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{T_i}^{T_{i+1}} E[\Pi^2(t, F_t, \alpha_t) \times \delta(F_t - B) \mid \mathcal{F}_{t_0}] dt \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} G_i^{i+1}(\beta_{i+1}, \dots, \beta_{N+1}), \tag{85}
 \end{aligned}$$

と分解できる。ここで、 $T_0 = t_0$  であり、 $G_i^j(\beta_{i+1}, \dots, \beta_{N+1})$  は

$$G_i^j(\beta_{i+1}, \dots, \beta_{N+1}) \equiv \int_{T_i}^{T_j} E[\Pi^2(t, F_t, \alpha_t) \times \delta(F_t - B) \mid \mathcal{F}_{t_0}] dt, \tag{86}$$

で定義される関数であり、時刻  $T_i$  時点で満期を迎えていないバニラ・オプションの保有数  $\beta_{i+1}, \dots, \beta_{N+1}$  の関数である。最適な  $\beta_i$  は、 $N$  個の  $G_i^{i+1}$  ( $i = 0, \dots, N-1$ ) の和を最小化することで得られるが、その和は  $\beta_1, \dots, \beta_{N+1}$  に関する非線形関数であることから、最適化の際の計算負荷は高く、数値計算の結果は不安定になりがちである。こうした点を克服する手法として本稿では、 $G_i^j$  ( $i, j = 0, \dots, N-1$ ) を適当な制約条件のもとで、逐次的に最適化する2つの手法（逐次最適化手法 A、B）を提案する。

### (イ) 逐次最適化手法 A

逐次最適化手法 A は、3節(2)で紹介した LV モデルのもとでのヘッジ・ウエイトの導出と類似した手法である。 $\beta_{N+1}$  を適当な定数  $\tilde{\beta}$  として外生的に与え、その制約条件のもとで<sup>76</sup>、次の最適化問題をバックワードに解き、最適解を求める。

$$\begin{cases} \min_{\beta_1, \dots, \beta_N} G_0^1(\beta_1, \dots, \beta_N, \tilde{\beta}), \\ \dots \\ \min_{\beta_N} G_{N-1}^N(\beta_N, \tilde{\beta}). \end{cases} \tag{87}$$

これは、 $N$  個の1次元最適化問題である。すなわち、(87)式を下から順に解くと  $\beta_i$  が逐次求まる。また、これらの目的関数は各  $\beta_i$  について2次の係数が正である2次関数となるため、解の不安定性の問題も生じない。

76  $\tilde{\beta}$  の設定には恣意性が残り、時系列データや相場観により定める必要がある。数値検証では原資産価格が正規分布に従う（ノーマル・BS モデル）場合を想定し  $\tilde{\beta} = -1$  としている。

## (ロ) 逐次最適化手法 B

逐次最適化手法 B は、

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\beta_1, \dots, \beta_N, \beta_{N+1}} G_0^1(\beta_1, \dots, \beta_N, \beta_{N+1}), \\ \dots \\ \min_{\beta_{N-1}, \beta_N, \beta_{N+1}} G_{N-2}^{N-1}(\beta_{N-1}, \beta_N, \beta_{N+1}), \\ \min_{\beta_N, \beta_{N+1}} G_0^N(0, \dots, 0, \beta_N, \beta_{N+1}), \end{array} \right. \quad (88)$$

をバックワードに解くことで、 $\beta_1, \dots, \beta_N$  と  $\beta_{N+1}$  を求める手法である。当該最適化手法は、 $N - 1$  個の 1 次元最適化問題と 1 個の 2 次元最適化問題から構成され、逐次最適化手法 A に 2 次元最適化問題が 1 つ付与されている。ただし、最後の 2 次元の目的関数  $G_0^N(0, \dots, 0, \beta_N, \beta_{N+1})$  は  $\beta_N, \beta_{N+1}$  についての 2 次関数であり、極小点がただ 1 つ存在する。このため、2 次元最適化問題も容易に解くことができ、他の目的関数も極小点を 1 つだけ持つことから、解の不安定性が問題になることはない<sup>77</sup>。

## (2) 本稿で提案するヘッジ戦略の有用性

本節(1)で提案したヘッジ戦略では、原資産価格が SLV モデルに従う場合の、既存のヘッジ戦略における問題点がいくつか改善される。第 1 に、既存の手法より効率的にヘッジでき、比較的少数のバニラ・オプションでヘッジした場合でも、ヘッジ誤差を十分に抑制できることが期待される。本稿の手法では、ヘッジ誤差の 2 乗平均を目的関数として最適化することから、ヘッジ誤差への影響が大きい原資産価格やボラティリティのシナリオが中心的にヘッジされる。このため、SLV モデルにおける既存のヘッジ手法と比べ、比較的少数のオプションでヘッジした場合であっても、ベガ・リスクを含む幅広いリスクをより効率的にヘッジすることができる。このため、流動性が高いバニラ・オプションの種類が限られた市場でも、容易にヘッジ・ポートフォリオを構築できる。

第 2 に、最適なヘッジ・ポートフォリオを短時間に構築できる。既存の手法では、ヘッジするリスク・シナリオを適当に定め、各リスク・シナリオでのヘッジ誤差がゼロとなる条件式 ((43) 式) を解くことで、ヘッジ・ポートフォリオが構築される。このため、提案する手法と同程度のヘッジ効率を実現する場合、バック・テストを

77 逐次最適化手法 B による近似的な最適化の近似精度が高いために、 $\beta_1, \dots, \beta_{N-1}$  の絶対値が十分に小さい必要がある。脚注 75 で説明したように、カレンダー・ポートフォリオの行使価格をバリア水準に設定した場合、 $\beta_1, \dots, \beta_{N-1}$  の絶対値は一般に小さく、逐次最適化手法 B を問題なく利用できる。また、 $\beta_1, \dots, \beta_{N-1}$  の絶対値の小ささは数値的にも確認でき、本節(3)で用いる市場環境と商品特性の場合には  $\beta_1, \dots, \beta_{N-1} = O(10^{-2})$  の程度である。

繰り返すことで、2乗平均などのリスク指標が最小になるリスク・シナリオを特定する必要がある。しかし、それぞれのバック・テストには多大な計算時間がかかり、実務での利用は困難である。一方提案する手法では、2乗平均の解析近似式を利用しており、最適なポートフォリオを極めて短い時間に構築することができる。

また第3に、2乗平均の解析近似式を利用することによる利点ではないが、表6、7のようにポートフォリオの構成商品を選択したことにより、ポジション解消時の取引コストを削減できる。原資産価格がバリアに到達した際のカレンダー・ポートフォリオと、マチュリティ・ポートフォリオに含まれるデジタル・オプションは、全てATMであり、原資産価格がバリアに到達した際の流動性が高い。また、行使価格の多くがバリア水準に設定されたことから、バニラ・オプションの保有数( $\beta_i$ の絶対値)も既存の手法と比べて小さく設定することができる。このため、流動性が高い少数のオプションの取引でポジションを解消でき、取引コストの削減が期待できる。

このように、本稿で提案するヘッジ手法は、先行研究で提案された手法と比べ格段に効率的であり、実用性も高いと考えられる。以下では、提案したヘッジ戦略の効率性について、さらに数値検証によって再確認する。

### (3) 数値検証

ここでは、SLVモデルの例として、前掲(18)式のSABRモデルを取り上げ、原資産価格が当該モデルに従う場合のRKOオプション<sup>78</sup>のヘッジ効率を数値検証する。既存の静的ヘッジ戦略と本稿で提案したヘッジ戦略を比較することで、本稿で提案する手法の効率性の高さを評価する。なお、数値計算で必要となるSABRモデルの鞍点や最尤経路の距離等については、補論を参照。

#### イ. 数値検証の設定

ここでは、表8のとおり設定した4つのRKOオプション(RKO1~RKO4)について、バニラ・オプションのポートフォリオでヘッジした際のヘッジ・コストとヘッジ誤差を比較する<sup>79</sup>。(18)式のSABRモデルでのパラメータについては、表9のように設定する。当該パラメータは、ドル円オプション市場で典型的に観測される満期1年のスマイル(図9)を再現したものである<sup>80</sup>。すなわち、ボラティリティの変動幅が大きいことからベガ・ヘッジの重要度が高く、バリア・オプションの取引量も多い市場を念頭にパラメータを設定している。

78 バイオフが連続なノックアウト・オプションは容易にヘッジできるため、本稿ではRKOオプションについてのみ数値検証する。

79 ポートフォリオ価値の計算では、Paulot [2009] による1次のヒートカーネル展開を用いて、SABRモデルでのインプライド・ボラティリティを計算している。

80 プレミアム調整済ミスロット・デルタについては、Reiswich and Wystup [2009] 等を参照。

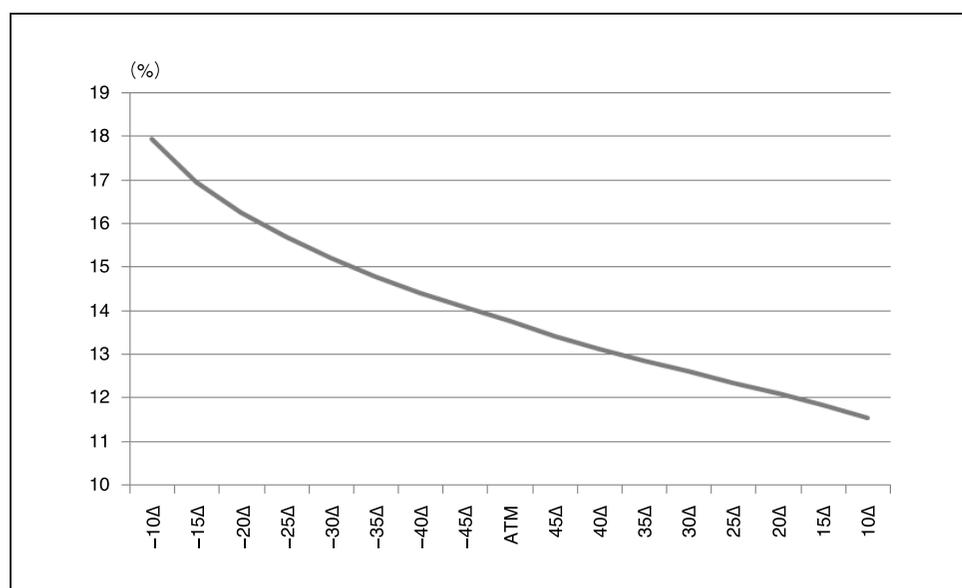
表8 ヘッジ対象

No.	行使価格 (= $K$ )	バリア水準 (= $B$ )	満期 (= $T$ )	ペイオフ
RKO 1	80	90	1Y	コール・オプション
RKO 2	85	90	1Y	コール・オプション
RKO 3	80	70	1Y	プット・オプション
RKO 4	75	70	1Y	プット・オプション

表9 モデル・パラメータ

$F_0$	$\alpha_0$	$\beta$	$\rho$	$\nu$
80	0.5	0.7	-0.65	0.5

図9 スマイル (1Y)



備考：横軸は、対応する行使価格でのコール・オプションあるいはプット・オプションの、パーセント表示されたプレミアム調整済みスポット・デルタ (premium adjusted spot delta) を表し、ATM はコール・オプションとプット・オプションのデルタの絶対値が等しくなる行使価格を表している。例えば、 $-10\Delta$  は、プット・オプションのプレミアム調整済みスポット・デルタが  $-0.1$  である行使価格に対応している。

ヘッジ・ポートフォリオの構築においては、 $T_1, \dots, T_N$  の設定が重要となる。ここでは、ドル円オプション市場での取引量が多い、3 ヶ月ごとの満期 4 つ ( $N = 4$ ) を選択する。すなわち、表 10 に示したようなポートフォリオでヘッジする設定とする。

表 10 ヘッジ・ポートフォリオ

商品名	行使価格	満期	保有数
バニラ・オプション	$B$	3M	$\beta_1$
バニラ・オプション	$B$	6M	$\beta_2$
バニラ・オプション	$B$	9M	$\beta_3$
バニラ・オプション	$B$	1Y	$\beta_4$
バニラ・オプション	$K$	1Y	1
デジタル・オプション	$B$	1Y	$-2 \times  B - K $
バニラ・オプション	$2B - K$	1Y	$\beta_5$

備考：全てのオプションのペイオフはヘッジ対象のバリア・オプションに揃えられており、RKOC の場合にはコール・オプションでヘッジされる。

### ロ. ヘッジ戦略の設定

イ. の設定のもとで、本稿で提案する手法に基づいたヘッジ戦略 A と B を次とおり構築する。

#### (イ) ヘッジ戦略 A

$\beta_5 = -1$  とした逐次最適化手法 A ((87) 式) で  $\beta_1 \sim \beta_4$  を求め、平均 2 乗誤差 ((81) 式) を最小にする戦略。

#### (ロ) ヘッジ戦略 B

逐次最適化手法 B ((88) 式) で  $\beta_1 \sim \beta_5$  を求め、平均 2 乗誤差 ((81) 式) を最小にする戦略。

また、比較対象として、先行研究で提案されてきた手法に基づいて構築された 2 つのベンチマーク A、B を設定する。それぞれのヘッジ戦略は次のように設定される。なお、ベンチマーク A とヘッジ戦略 A、ベンチマーク B とヘッジ戦略 B はそれぞれ、制御変数に対して同一の自由度を有している。

#### (ハ) ベンチマーク A

先行研究で提案されている、LV モデルでの静的ヘッジ戦略に相当する。ボラティリティが初期値から変化しないと仮定して計算された現時刻 ( $= t_0$ )、3 ヶ月 ( $= T_1$ )、6 ヶ月 ( $= T_2$ )、9 ヶ月 ( $= T_3$ ) でのヘッジ誤差それぞれを、Derman, Ergener, and Kani [1995] と同様に、カレンダー・ポートフォリオで打ち消す戦略である。当該ヘッジ戦略は、 $\beta_5 = -1$  の制約条件のもとで

$$\begin{cases} \Pi(t_0, B, \alpha_{t_0}) = 0, \\ \Pi(T_1, B, \alpha_{t_0}) = 0, \\ \Pi(T_2, B, \alpha_{t_0}) = 0, \\ \Pi(T_3, B, \alpha_{t_0}) = 0, \end{cases} \quad (89)$$

を解くことで構築される。

## (二) ベンチマーク B

先行研究で提案されている、SV モデルや SLV モデルでの静的ヘッジ戦略に相当する。現時刻、3 カ月、6 カ月、9 カ月における、ボラティリティの確率的変動を踏まえたヘッジ誤差を打ち消す戦略である。ここでは、Nalholm and Poulsen [2006] と同様に、ボラティリティの理論上の分位点におけるヘッジ誤差を消す戦略として設定する<sup>81</sup>。具体的には、

$$\begin{cases} \Pi(t_0, B, \alpha_{t_0}^{(50)}) = 0, \\ \Pi(T_1, B, \alpha_{T_1}^{(50)}) = 0, \\ \Pi(T_2, B, \alpha_{T_2}^{(50)}) = 0, \\ \Pi(T_3, B, \alpha_{T_3}^{(25)}) = 0, \\ \Pi(T_3, B, \alpha_{T_3}^{(75)}) = 0, \end{cases} \quad (90)$$

を解く戦略である。ここで  $\alpha_t^{(25)}$ 、 $\alpha_t^{(50)}$ 、 $\alpha_t^{(75)}$  はそれぞれ、原資産価格が時刻  $t$  にバリアに到達する条件のもとでの、ボラティリティの 25% 分位点、50% 分位点、75% 分位点を表現している。

## ハ. 検証結果

ヘッジ・コストとヘッジ誤差の統計量を用いて各戦略を比較する。具体的には、モンテカルロ・シミュレーションで計算されたバリア・オプションの理論価格<sup>82</sup>を適切な時価とみなし、静的ヘッジ戦略に必要なコストと理論価格との違いについて数値的に比較する。また、SABR モデルを仮定して作成したサンプル・パスを用いてヘッジ誤差を集計し<sup>83</sup>、各戦略のヘッジ誤差の平均、2~4 次のモーメント、上側 1 パーセンタイル値、下側 1 パーセンタイル値を比較する<sup>84</sup>。

ヘッジ・コストと理論価格の違いは表 11 にまとめられている。本稿で提案したヘッジ戦略が既存のヘッジ戦略より理論価格に近いコストで実現できる点が確認で

81 ただし、本稿では打ち切り特異値分解法は利用していない。Nalholm and Poulsen [2006] で提案された  $\epsilon = 0.2$  の打ち切り特異値分解法を本稿の例に適用した場合にはヘッジ効率が低下する。

82 具体的には、サンプル・パスを 10 万回発生させるモンテカルロ法を用いて推定している。その際の離散近似では Lord, Koekkoek, and Dijk [2010] によるフル・トランケイティッド・オイラー=丸山法を利用し、現時刻から満期までを 8760 (= 365 × 24) 個に分割した。

83 フル・トランケイティッド・オイラー=丸山法による離散近似で推定しており、バリアに到達する回数が 1 万に達するまでパスを発生させている。また、現時刻から満期までは 8760 (= 365 × 24) 個に分割している。

84 ただし、ヘッジ誤差の平均についてはヘッジ・コストと理論価格の差から推定している。サンプル・パスを発生させるモデルと理論価格の推定に用いるモデルが同一であるため、ヘッジ誤差の平均は、理論価格とヘッジ・コストの差に、数値計算の誤差を除いて一致する。

表 11 ヘッジ・コストの比較

ヘッジ対象	RKO 1	RKO 2	RKO 3	RKO 4
理論価格 (MC)	0.8656	0.1297	0.5462	0.0680
ベンチマーク A のヘッジ・コスト	0.8200	0.1165	0.4897	0.0537
ヘッジ戦略 A のヘッジ・コスト	0.8520	0.1257	0.5565	0.0671
ベンチマーク B のヘッジ・コスト	0.8169	0.1272	0.5423	0.0641
ヘッジ戦略 B のヘッジ・コスト	0.8606	0.1290	0.5506	0.0655

きる。具体的には、ベンチマークではヘッジ・コストと理論価格との間に、最大で 0.06 円 (6 銭) 程度の違いがみられる一方、提案する手法では、0.01 円 (1 銭) 以内に両者の違いが収まっている。特に、バリアに到達した際のボラティリティの変動幅が大きい RKO 3 と RKO 4 では、ベンチマークと提案する手法の違いが顕著であり、本稿で提案する手法でのヘッジ・コストが理論価格に近いことを確認できる<sup>85</sup>。このためベンチマークでは、バリア・オプションを売却した際に得られるプレミアム (理論価格) とヘッジ・コストとの差が大きく、場合によっては外部から資金を調達する必要があることがわかる。一方、本稿で提案したヘッジ戦略では、理論価格に近いヘッジ・コストが推定され、外部から調達する必要のある資金量が相対的に小さいことが期待される。

ヘッジ誤差の統計量は、表 12~15 にまとめられている<sup>86</sup>。各表ではバリア・オプションの理論価格の大きさの影響を除去するために、バリア・オプションの理論価格で各統計量を無次元化している。表からは、本稿で提案したヘッジ戦略のヘッジ効率がいずれも高いことが確認できる。まず、同じ自由度を持つ、ベンチマーク A とヘッジ戦略 A を比べると、RKO 1 や RKO 2 では大きな違いはみられないが<sup>87</sup>、RKO 3 と RKO 4 では 2 次モーメントを 5 分の 1 程度に削減できていることを確認できる。また、ベンチマーク B とヘッジ戦略 B の場合には、2 次モーメントを最大で 60 分の 1 程度まで削減できていることが確認できる<sup>88</sup>。また、2 次モーメントの大きさ自体もヘッジ戦略 B では小さく、1% 程度であることが確認できる。

85 ボラティリティの変動幅の増大は、RKO 3 と RKO 4 ではバリアが下側にある点と、原資産価格とボラティリティの相関関係に起因する。原資産価格とボラティリティの間には負の相関関係があるため、バリアに到達するほどに原資産価格が減少した場合にはボラティリティが大きくなり、ボラティリティが対数正規分布に従う SABR モデルのもとでは、ボラティリティの変動幅も大きくなる。

86 各ヘッジ戦略にかかるヘッジ・コストと理論価格との間に差があるため、本来は、その差を無リスク金利で運用する場合を想定して検証する必要がある。ただ、本稿の例でのヘッジ・コストと理論価格の差が十分に小さいため、本稿では無リスク金利による運用の効果は考慮していない。

87 RKO 3 と RKO 4 に比べ、RKO 1 や RKO 2 でのベンチマーク A のヘッジ効率が著しく高いのは以下の理由による。RKO 1、2 はバリアが上側にあり、バリアに近づくにつれボラティリティが小さくなる商品である。このため、原資産価格の分布は対数正規分布より正規分布に近く、リフレクティッド・パタフライにより近似的にヘッジできる。

88 ベンチマーク B を RKO 1 に適用した場合のヘッジ誤差が大きいのは、適用した結果の  $\beta_5$  が大きいことに由来する。このため、ポートフォリオの価値の絶対値は一般に大きく、ヘッジ誤差も増大することとなる。なお、打切り特異値分解法を利用した場合、 $\beta_5$  は小さくなるが、ヘッジ効率は打切り特異値分解法の閾値  $\epsilon$  に依存し、打切り特異値分解法でヘッジ効率を改善できるとは限らない。

表 12 RKO 1 のヘッジ誤差

	ベンチマーク A	ヘッジ戦略 A	ベンチマーク B	ヘッジ戦略 B
平均	-5.27%	-1.57%	-5.63%	-0.59%
2次モーメント	1.76%	1.22%	25.81%	0.42%
3次モーメント	-0.56%	-0.13%	-100.40%	-0.08%
4次モーメント	0.23%	0.13%	770.64%	0.05%
上側 1 パーセンタイル	14.23%	30.6%	69.78%	15.14%
下側 1 パーセンタイル	-46.66%	-38.7%	-227.08%	-27.73%

備考：各統計量は、バリア・オプション価格 0.8656 のべき乗で割ることで無次元化されている。

表 13 RKO 2 のヘッジ誤差

	ベンチマーク A	ヘッジ戦略 A	ベンチマーク B	ヘッジ戦略 B
平均	-10.17%	-3.06%	-1.93%	-0.52%
2次モーメント	6.88%	5.04%	5.87%	1.58%
3次モーメント	-5.23%	-2.23%	-7.40%	-0.69%
4次モーメント	4.92%	3.08%	21.1%	0.66%
上側 1 パーセンタイル	18.86%	53.95%	39.71%	29.96%
下側 1 パーセンタイル	-103.39%	-89.08%	-103.31%	-57.2%

備考：各統計量は、バリア・オプション価格 0.1297 のべき乗で割ることで無次元化されている。

表 14 RKO 3 のヘッジ誤差

	ベンチマーク A	ヘッジ戦略 A	ベンチマーク B	ヘッジ戦略 B
平均	-10.35%	1.88%	-0.71%	0.80%
2次モーメント	5.30%	1.00%	1.68%	0.34%
3次モーメント	-2.85%	0.14%	0.49%	0.03%
4次モーメント	1.76%	0.10%	0.55%	0.02%
上側 1 パーセンタイル	12.14%	36.68%	52.67%	23.22%
下側 1 パーセンタイル	-75.82%	-26.70%	-28.43%	-18.14%

備考：各統計量は、バリア・オプション価格 0.5462 のべき乗で割ることで無次元化されている。

表 15 RKO 4 のヘッジ誤差

	ベンチマーク A	ヘッジ戦略 A	ベンチマーク B	ヘッジ戦略 B
平均	-21.05%	-1.30%	-5.68%	-3.60%
2次モーメント	15.17%	3.88%	1.62%	1.22%
3次モーメント	-12.94%	1.46%	0.11%	0.34%
4次モーメント	14.57%	2.03%	0.42%	0.45%
上側 1 パーセンタイル	45.61%	78.62%	64.12%	69.57%
下側 1 パーセンタイル	-127.08%	-48.04%	-56.00%	-45.91%

備考：各統計量は、バリア・オプション価格 0.0680 のべき乗で割ることで無次元化されている。

ヘッジ誤差の平均と3次、4次モーメントについても同様に、提案する手法のヘッジ効率の高さが確認できる。これは、バリアへの到達時刻が短い場合には、ヘッジ誤差の全てのモーメントが、最尤経路の終端でのポートフォリオの価値に比例するため、2次モーメントを最小にすることで、高次のモーメントも最小となるからである。ただし、ベンチマーク B で RKO 4 をヘッジした場合の3次と4次のモーメントが、提案する戦略での3次と4次のモーメントよりも小さいことから示唆されるように、2次モーメント以外については既存のヘッジ戦略の方が小さいことがある。このため、より高次のモーメントの効果を示す、上側あるいは下側1パーセントイル点も、既存の手法より大きくなりうることに注意する必要がある。

## 6. おわりに

本稿では、SLV モデルの概要をまとめるとともに、原資産価格が SLV モデルに従う場合の最尤経路を利用したバリア・オプションの静的ヘッジ戦略を提案した。はじめに、オプションのリスク管理においては、現時刻のボラティリティ・サーフェスだけでなく、将来のボラティリティ・サーフェスのダイナミクスが重要であることをみてきた。次に、現時刻のボラティリティ・サーフェスと将来のダイナミクスの双方を表現するうえで、SLV モデルが有用であることを確認した。続いて、原資産価格が SLV モデルに従うと仮定した場合のヘッジ戦略について、先行研究で提案されている手法の利点と限界点を整理し、実際の市場では、商品や市場環境に応じて適切なヘッジ戦略を選択し、場合によっては改良する必要があることを確認した。

こうした先行研究の幅広いサーベイを踏まえ、本稿では、原資産価格が SLV モデルに従う場合のバリア・オプションの効率的なヘッジ手法を提案した。具体的には、最尤経路を中心とした鞍点近似によって、ヘッジ誤差の2乗平均の近似式を導出し、それをを用いたヘッジ戦略を提案した。当該ヘッジ戦略は、既存の手法よりヘッジ効率が高く、比較的少数のバニラ・オプションでヘッジした場合にも、ヘッジ誤差を十分に抑制できることを期待できる。SABR モデルと RKO オプションを利用した数値検証でも、本稿で提案するヘッジ戦略が既存の手法と比べ効率性が高いことが確認された。

なお本稿では、ヘッジ・ポートフォリオに含まれるバニラ・オプションの行使価格や満期を固定し、モデル・リスクについても考慮しなかった。これらの点の検証については今後の課題としたい。また、本稿で提案した手法はバリア・オプションに限られたものであり、他のエキゾチック・オプションへの拡張についても今後の課題としたい。

## 参考文献

- Andersen, Leif B., and Nicolas A. Hutchings, "Parameter Averaging of Quadratic SDEs with Stochastic Volatility," Working Paper, SSRN eLibrary, 2009 (<http://ssrn.com/paper=1339971>).
- Avramidi, Ivan G., and Rainer Schimming, "Algorithms for the Calculation of the Heat Kernel Coefficients," Working Paper, Arxiv preprint, 1995 (<http://arxiv.org/abs/hep-th/9510206>).
- Ayache, Elie, Philippe Henrotte, Sonia Nassar, and Xuewen Wang, "Can Anyone Solve the Smile Problem," *Wilmott Magazine*, January, 2004, pp. 78–96.
- Baker, Glyn, Reimer Beneder, and Alex Zilber, "FX Barriers with Smile Dynamics," Working Paper, SSRN eLibrary, 2004 (<http://ssrn.com/paper=964627>).
- Bergomi, Lorenzo, "Smile Dynamics," *Risk*, 17 (9), 2004, pp. 117–123.
- , "Smile Dynamics II," *Risk*, 18 (10), 2005, pp. 67–73.
- , "Smile Dynamics III," *Risk*, 21 (10), 2008, pp. 90–96.
- Breeden, Douglas T., and Robert H. Litzenberger, "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices," *Journal of Business*, 51 (4), 1978, pp. 621–651.
- Carr, Peter, and Andrew Chou, "Breaking Barriers," *Risk*, 10 (9), 1997, pp. 139–145.
- , and Dilip Madan, "Towards a Theory of Volatility Trading," *Option Pricing, Interest Rates, and Risk Management*, 1998, pp. 417–427.
- , Katrina Ellis, and Vishal Gupta, "Static Hedging of Exotic Options," *The Journal of Finance*, 53 (3), 1998, pp. 1165–1190.
- , and John Crosby, "A Class of Lévy Process Models with Almost Exact Calibration to Both Barrier and Vanilla FX Options," *Quantitative Finance*, 10 (10), 2010, pp. 1115–1136.
- Cont, Rama, and Ekaterina Voltchkova, "A Finite Difference Scheme for Option Pricing in Jump Diffusion and Exponential Lévy Models," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43 (4), 2006, pp. 1596–1626.
- Cox, John C., and Stephen A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 3 (1–2), 1976, pp. 145–166.
- Dash, Jan W., "Path Integrals and Options—I," Working Paper, Merrill Lynch Capital Markets preprint (unpublished), 1988 (available at [http://users.physik.fuberlin.de/~kleinert/kleiner\\_reb3/papers/dash1.pdf](http://users.physik.fuberlin.de/~kleinert/kleiner_reb3/papers/dash1.pdf)).
- , *Quantitative Finance and Risk Management: A Physicist's Approach*, 2004.
- Derman, Emanuel, "Regimes of Volatility," *Risk*, 12 (4), 1999a, pp. 55–59.
- , "Regimes of Volatility: Some Observations on the Variation of S&P 500 Implied Volatilities," Working Paper, Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, 1999b.
- , and Michael Kamal, "Correcting Black-Scholes," *Risk*, 12 (1), 1999, pp. 82–85.

- , and Iraj Kani, “Riding on a Smile,” *Risk*, 7 (2), 1994, pp. 32–39.
- , Deniz Ergener, and Iraj Kani, “Static Options Replication,” *Journal of Derivatives*, 2 (4), 1995, pp. 78–95.
- DeWitt, Bryce S., *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, 1965.
- Dupire, Bruno, “Pricing with a Smile,” *Risk*, 7 (1), 1994, pp. 18–20.
- Fink, Jason, “An Examination of the Effectiveness of Static Hedging in the Presence of Stochastic Volatility,” *Journal of Futures Markets*, 23 (9), 2003, pp. 859–890.
- Fouque, Jean-Pierre, George Papanicolaou, and K. Ronnie Sircar, *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, 2000.
- Gatheal, Jim, Elton P. Hsu, Peter M. Laurence, Cheng Ouyang, and Tai-Ho Wang, “Asymptotics of Implied Volatility in Local Volatility Models,” *Mathematical Finance*, forthcoming, 2010.
- Gyöngy, I., “Mimicking the One-Dimensional Marginal Distributions of Processes Having an Itô Differential,” *Probability Theory and Related Fields*, 71 (4), 1986, pp. 501–516.
- Hagan, Patrick S., and Andrew S. Lesniewski, “Hedging under SABR Model,” *Wilmott Magazine*, July, 2006, pp. 2–4.
- , and Diana E. Woodward, “Equivalent Black Volatilities,” *Applied Mathematical Finance*, 6 (3), 1999, pp. 147–157.
- , Deep Kumar, Andrew S. Lesniewski, and Diana E. Woodward, “Managing Smile Risk,” *Wilmott Magazine*, September, 2002, pp. 84–108.
- Henry-Labordère, Pierre, “A General Asymptotic Implied Volatility for Stochastic Volatility Models,” Working Paper, SSRN eLibrary, 2005 (<http://ssrn.com/paper=698601>).
- , *Analysis, Geometry, and Modeling in Finance: Advanced Methods in Option Pricing*, Chapman & Hall/CRC, 2008.
- , “Calibration of Local Stochastic Volatility Models to Market Smiles,” *Risk*, 22 (9), 2009, pp. 112–117.
- Heston, Steven L., “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options,” *Review of Financial Studies*, 6 (2), 1993, pp. 327–343.
- Hull, John, and Alan White, “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities,” *Journal of Finance*, 42 (2), 1987, pp. 281–300.
- Kunitomo, Naoto, and Akihiko Takahashi, “The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rate Contingent Claims,” *Mathematical Finance*, 11 (1), 2001, pp. 117–151.
- Lewis, Alan L., *Option Valuation under Stochastic Volatility: With Mathematica Code*, Finance Press, 2000.

- Lord, Roger, Remmert Koekkoek, and Dick Van Dijk, "A Comparison of Biased Simulation Schemes for Stochastic Volatility Models," *Quantitative Finance*, 10 (2), 2010, pp. 177–194.
- Nalholm, Morten, and Rolf Poulsen, "Static Hedging of Barrier Options under General Asset Dynamics: Unification and Application," *Journal of Derivatives*, 13 (4), 2006, pp. 46–60.
- Osajima, Yasufumi, "The Asymptotic Expansion Formula of Implied Volatility for Dynamic SABR Model and FX Hybrid Model," Working Paper, SSRN eLibrary, 2007 (<http://ssrn.com/paper=965265>).
- Paulot, Louis, "Asymptotic Implied Volatility at the Second Order with Application to the SABR Model," Working Paper, 2009 (<http://ssrn.com/paper=1413649>).
- Piterbarg, Vladimir V., "Markovian Projection Method for Volatility Calibration," *Risk*, 20 (4), 2007, pp. 84–89.
- Pogudin, Andrey, "Theoretical and Practical Aspects of Hedging within SABR and LMM-SABR Models," master's thesis, Oxford University, 2008.
- Press, William H., William T. Vetterling, Saul A. Teukolsky, and Brian P. Flannery, *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 2001.
- Rebonato, Riccardo, Kenneth McKay, and Richard White, *The SABR/LIBOR Market Model: Pricing, Calibration and Hedging for Complex Interest-Rate Derivatives*, Wiley, 2010.
- Reiswich, Dimitri, and Uwe Wystup, "FX Volatility Smile Construction," Working Paper, 2009 (<http://www.econstor.eu/dspace/handle/10419/40186>).
- Ren, Yong, Dilip Madan, and Michael Q. Qian, "Calibrating and Pricing with Embedded Local Volatility Models," *Risk*, 20 (9), 2007, pp. 138–143.
- Rubinstein, Mark, "Displaced Diffusion Option Pricing," *The Journal of Finance*, 38 (1), 1983, pp. 213–217.
- Shiraya, Kenichiro, Akihiko Takahashi, and Masashi Toda, "Pricing Barrier and Average Options under Stochastic Volatility Environment," *Journal of Computational Finance*, forthcoming, 2011.
- Takahashi, Akihiko, "An Asymptotic Expansion Approach to Pricing Financial Contingent Claims," *Asia-Pacific Financial Markets*, 6 (2), 1999, pp. 115–151.
- , Kohta Takehara, and Masashi Toda, "Computation in an Asymptotic Expansion Method," Working Paper, SSRN eLibrary, 2009 (<http://ssrn.com/paper=1413924>).
- Tort, Klaus Bjerre, and Changneng Xuan, "How Well Can Barrier Options Be Hedged by a Static Portfolio of Standard Options?" *Journal of Financial Engineering*, 7, 1998, pp. 147–176.

- Vassilevich, Dmitri V., “Heat Kernel Expansion: User’s Manual,” *Physics Reports*, 388 (5–6), 2003, pp. 279–360.
- Watanabe, Shinzo, “Analysis of Wiener Functionals (Malliavin Calculus) and Its Applications to Heat Kernels,” *The Annals of Probability*, 15 (1), 1987, pp. 1–39.
- Wilmott, Paul, *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, Volume 1 and 2, John Wiley, 2000.
- Yoshida, Nakahiro, “Asymptotic Expansions of Maximum Likelihood Estimators for Small Diffusions via the Theory of Malliavin-Watanabe,” *Probability Theory and Related Fields*, 92 (3), 1992, pp. 275–311.

## 補論. SABR モデルでの鞍点

本補論では、(80) 式を SABR モデル (Hagan *et al.* [2002]) に適用するうえで必要となる、鞍点と鞍点に関係するいくつかの量をまとめる。具体的には、Paulot [2009] 等の先行研究で導出された、SABR モデルでの  $\mathcal{L}_0$ 、 $\mathcal{L}_1$  の関数形をまとめ<sup>89</sup>、SABR モデルの鞍点である (78) 式の解を 1 次のヒートカーネルと同じ精度で求める。すなわち、鞍点を  $\Delta t$  によるベキ展開近似

$$\alpha_{\min} = \alpha_{\min}^{(0)} + \alpha_{\min}^{(1)} \times \Delta t + o(\Delta t), \quad (\text{A-1})$$

として表現する<sup>90</sup>。

まず、ゼロ次近似である  $\alpha_{\min}^{(0)}$  は (78) 式の  $\Delta t$  の 0 次項の解であり

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{\min}^{(0)}} = d \cdot d' \Big|_{\alpha=\alpha_{\min}^{(0)}} = 0, \quad (\text{A-2})$$

の解である。ここで SABR モデルのリーマン距離  $d$  は、 $q$  を

$$q = \int_{F_0}^F \frac{1}{F^\beta} dF, \quad (\text{A-3})$$

とおくと

$$d(0, \alpha_0; q, \alpha) = \cosh^{-1} \left( 1 + \frac{q^2 + (\alpha - \alpha_0)^2 - 2\rho q(\alpha - \alpha_0)}{2(1 - \rho^2)\alpha_0\alpha} \right), \quad (\text{A-4})$$

であるため、 $\alpha_{\min}^{(0)}$  は

$$\alpha_{\min}^{(0)} = \sqrt{\alpha_0^2 + 2\rho\alpha_0q + q^2}, \quad (\text{A-5})$$

と求まる。また、 $\alpha = \alpha_{\min}^{(0)}$  でのリーマン距離とその  $\alpha$  についての微分は

$$d_{\min}^{(0)} \equiv d(0, \alpha_0; q, \alpha_{\min}^{(0)}) = \left| \ln \left( \frac{\alpha_{\min}^{(0)} + \rho\alpha_0 + q}{(1 + \rho)\alpha} \right) \right|, \quad (\text{A-6})$$

$$d'_{\min}^{(0)} \equiv d'(0, \alpha_0; q, \alpha_{\min}^{(0)}) = 0, \quad (\text{A-7})$$

$$d''_{\min}^{(0)} \equiv d''(0, \alpha_0; q, \alpha_{\min}^{(0)}) = \frac{1}{\alpha_0(1 - \rho^2)\alpha_{\min}^{(0)} \sinh(d_{\min}^{(0)})}, \quad (\text{A-8})$$

89  $\mathcal{L}_2$  については定義が煩雑であるため本稿では記していないが、Paulot [2009] での (47)、(49)、(51) 式の和が  $-\mathcal{L}_2$  に等しい。

90 表記を簡単にするために、本補論では  $t \rightarrow v^2 t$ 、 $\alpha \rightarrow \alpha/v$ 、 $v \rightarrow 1$  と変数変換している。そのため、本補論の結果を利用する際には再度変数変換が必要となる。

と求まる。

次に、 $\alpha_{\min}$  に対する 1 次の補正  $\alpha_{\min}^{(1)}$  を求める。(A-4) 式からヴァン・ヴレック行列式  $\Delta$ 、計量の行列式  $g = \det(g_{ij})$  は

$$\Delta = \frac{d}{\sinh d}, \quad (\text{A-9})$$

$$g(F, \alpha) = \frac{1}{\alpha^4 F^{2\beta} (1 - \rho^2)}, \quad (\text{A-10})$$

と求まり、測地線に沿った積分  $-\ln \mathcal{P}$  は

$$-\ln \mathcal{P} = \int_C \left( \frac{1}{2(1 - \rho^2)} d \ln(F^\beta) - \frac{\rho\beta F^{\beta-1}}{2(1 - \rho^2)} d\alpha \right), \quad (\text{A-11})$$

と表現される。

(A-9)、(A-10)、(A-11) 式から、(76) 式の微分は

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \alpha} = \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{2} \frac{d'}{d} + \frac{1}{2} \frac{\cosh d}{\sinh d} \cdot d' - \frac{\rho\beta F^{\beta-1}}{2(1 - \rho^2)}, \quad (\text{A-12})$$

と導かれ、(78) 式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} &= d' \left( d - \frac{\Delta t}{2d} + \frac{\Delta t \cosh d}{2 \sinh d} \right) + \frac{2}{\alpha} \Delta t - \frac{\rho\beta F^{\beta-1}}{2(1 - \rho^2)} \Delta t + o(\Delta t) \\ &= \{d_{\min}''^{(0)} \times \alpha_{\min}^{(1)} \Delta t + o(\Delta t)\} \{d_{\min}^{(0)} + O(\Delta t)\} \\ &\quad + \frac{2}{\alpha_{\min}^{(0)}} \Delta t - \frac{\rho\beta F^{\beta-1}}{2(1 - \rho^2)} \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

と表現される。以上から 1 次の補正は

$$\alpha_{\min}^{(1)} = \frac{\frac{\rho\beta F^{\beta-1}}{2(1 - \rho^2)} - \frac{2}{\alpha_{\min}^{(0)}}}{d_{\min}^{(0)} d_{\min}''^{(0)}}, \quad (\text{A-14})$$

と近似できる。

