

OTC デリバティブ取引における カウンターパーティ・リスクの管理手法： CVA の理論と実務上の 論点に関するサーベイ

さくら ゆうじ
桜井悠司

要 旨

OTC デリバティブ取引のカウンターパーティ・リスクを管理する手法として、信用評価調整 (*credit valuation adjustment; CVA*) に対する関心が高まっている。そこで本稿では、CVA について、金融工学的側面を中心にサーベイを行う。具体的には、まず、CVA に基づくカウンターパーティ・リスク管理の基本的な枠組みを整理し、CVA 評価モデルの具体例を示す。次に、CVA の運用上の論点の 1 つである誤方向リスク (*wrong-way risk*) を取り上げ、そのモデル化について議論する。最後に、CVA の計算に有用なアメリカン・モンテカルロ法 (*American Monte Carlo; AMC*) について解説し、今後の課題を考察する。

キーワード：カウンターパーティ・リスク、CVA、誤方向リスク、
アメリカン・モンテカルロ法

本稿を作成するに当たっては、大橋和彦（一橋大学）、尾関貴昭（みずほ第一フィナンシャルテクノロジー）、中川秀敏（一橋大学）、藤本一文（三菱 UFJ モルガン・スタンレー証券）、松本直樹（JP モルガン証券）の各氏および日本銀行スタッフから有益なコメントをいただいた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

桜井悠司 日本銀行金融研究所 (E-mail: yuuji.sakurai@boj.or.jp)

1. はじめに

2007年から2008年の世界的な金融危機においては、OTC（over-the-counter）デリバティブ市場の主要な参加者である金融機関でさえもデフォルトしうることが再認識された。そうした経験を踏まえて、金融実務家や規制・監督当局の間では、OTCデリバティブ取引のカウンターパーティ・リスクへの関心が高まっている。

カウンターパーティ・リスクとは、金融商品の取引において相手方（カウンターパーティ）がデフォルトすることで損失を被るリスクを指す。OTCデリバティブのカウンターパーティ・リスクは、広義には信用リスクの1つとして捉えられるが、伝統的なローンの信用リスクと大きく異なる点がある。それは、市場の変動によりリスクにさらされている金額自体が正負を含めて日々変動する点である。カウンターパーティのデフォルトによって不利益を被るのは、カウンターパーティとのデリバティブ取引の現在割引価値が正である場合である。この正の価値は、伝統的なローンのリスク管理では残存元利金の現在価値に対応している。しかし、ローンでは残存元利金のキャッシュ・フローは確定的であるのに対し、デリバティブ取引ではそのキャッシュ・フローが確定していない。このため、カウンターパーティ・リスクの管理では、信用リスクに加えて、市場リスクも同時に捕捉する必要がある。

信用評価調整（credit valuation adjustment; CVA）¹とは、デリバティブの時価を評価するうえで、上記のような特徴を持ったカウンターパーティ・リスクを反映させるための概念である。本稿では、金融工学的側面を中心に、このCVAについてサーベイを行う。金融危機以降、Canabarro [2009]、Cesari *et al.* [2010]、Gregory [2010]、富安 [2010] 等、CVAに基づいたカウンターパーティ・リスクの実務に関する成書が出版されていることを踏まえ、本稿ではCVAの実務面だけでなく、理論面の整理にも焦点を当てて、できる限り平易に解説を行う。金融の実務でCVAを導入すべきか否かは、どのような種類と規模のOTCデリバティブ取引を行っているかなど個々の金融機関のビジネス・モデルに応じて判断されるべき問題であるが、その場合に論点となるCVAの便益とコストについて理解するうえでも本稿は有益であろう。

CVAの歴史は、20年ほど遡ることができる。1990年、当時ソロモン・ブラザーズのクオンツであったSorensenとBollierは金利スワップのカウンターパーティ・リスクを計算する方法を考案し、1994年に研究論文として公表した（Sorensen and Bollier [1994]）²。注目すべき点は、Sorensen and Bollier [1994]は、カウンターパーティ・リスクが、スワップ取引の時価評価額が正である場合に生じるという意味で、金利スワップのオプション、すなわち、金利スワップションに類似したものとして計算できることを指摘している点であり³、CVAを明示的には扱っていないものの、

1 CVAは信用価値調整（credit value adjustment）の略として説明されることもある。

2 ここでの歴史的記述はDuffie [2001]を参考としている。

3 なお、Sorensen and Bollier [1994]は、上記の論点のほか、①金利スワップのカウンターパーティ・リスクがイールド・カーブの形状に依存すること、②カウンターパーティからみた自社のカウンターパーティ・

CVA に相当する計算を行っていた。その後、1990 年代半ば以降、CVA は他の米国金融機関でも採用されたが、その過程で、CVA の税務・会計上の扱いが問題となった⁴。具体的には、金融機関がデリバティブの時価を CVA 相当額だけ保守的に見積もることにより、納税額を軽減しているのではないかという点が議論された。実際、1995 年から 13 年間にわたり、租税裁判所において、内国歳入庁と JP モルガン・チェースの間で金利スワップ取引の CVA の扱いについて争われたが⁵、最終的には、会計上、CVA に基づいてデリバティブの時価を調整することが認められた⁶。こうした背景には、金融機関がデリバティブの時価を正確に把握するには CVA のような手法が有効であるという認識が米国で広がってきたことがある。

現在では、デリバティブ市場の主要参加者である欧米の金融機関は CVA を利用しており、それを前提にクレジット・デフォルト・スワップ (credit default swap; CDS) 等を利用してさまざまなヘッジ取引を行っている (Keenan [2009])⁷。また、CVA を踏まえて、期待エクスポージャーを縮小するために担保契約を用いるなど、カウンターパーティ・リスクの軽減にも取り組んでいる (富安 [2010])。

このように、CVA の枠組みを採用している金融機関は今では少なくないが、その精緻化に向けた課題はなお残されている。例えば、カウンターパーティのデフォルト確率の高まりとデリバティブの含み益の増加が同時に起こる場合、カウンターパーティ・リスクは増大する点がある。金融危機以前には、このようなリスクは CVA の計算の枠組みで適切に捕捉できていなかったことが多いといわれている。また、市場が混乱した際には、金融資産のボラティリティが増加すると同時に、金融機関の信用リスクも高まる。金融資産のボラティリティが増加すると、より高い含み益が生じる確率が高まり、期待エクスポージャーが増加する。従来の方法ではこうしたリスクも十分に考慮されていなかったといわれている。こうした相関によって増加するリスクは、総称して、誤方向リスク (wrong-way risk) と呼ばれており、バーゼル銀行監督委員会の報告書などでも議論されている (Basel Committee on Banking Supervision [2009, 2010])。本稿では、これらの課題への対応を意識した研究もサーベイする。

リスクもオプションの形で捉えられることを指摘している。これは現代の用語では DVA (debt valuation adjustment) と呼ばれているものに相当する。DVA については 2 節(2)で詳しく説明する。

4 1990 年代後半のカウンターパーティ・リスク管理について、小田 [1999] は、当時の JP モルガンがクレジット・デフォルト・スワップの取引において、取引相手の信用度に応じたクレジット・チャージ (CVA に相当) を理論価格から差し引く場合がありうると留保していたことを記している。

5 JP モルガン・チェース (JP Morgan Chase & Co.) は、同社の系列企業であるファースト・シカゴ銀行 (First National Bank of Chicago) の承継者およびその代理として本件訴訟に及び、結審に至った。裁判の詳細については関本 [2009] を参照。

6 米国財務会計基準審議会 (Financial Accounting Standards Board; FASB) の公表している ASC 820 (旧 FAS 157) と ASC 825 (旧 FAS 159) において、CVA と (後述する) DVA の会計上の扱いが規定されている。日本のデリバティブの時価評価におけるカウンターパーティ・リスクの扱いは、日本公認会計士協会の会計制度委員会報告第 14 号「金融商品会計に関する実務指針」に記述がある。関本 [2009] や富安 [2010] の第 10 章第 3 節も参照。

7 金融機関による CVA のヘッジが活発なために、CDS 市場が影響されている事例も報告されている。例えば、Bank of England [2010] はソブリン CDS 市場が CVA のヘッジにより影響されていると述べている。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、CVAに基づくカウンターパーティ・リスク管理の基本的な枠組みとCVAに関連した概念について解説する。3節では、誤方向リスクを勘案したCVAのモデル化を紹介する。具体的な例として、通貨スワップとCDSのCVAを取り上げる。4節では、CVAを評価するうえで有用な計算手法であるアメリカン・モンテカルロ法（American Monte Carlo; AMC）について説明する。5節では、本稿をまとめ、今後の課題を考察する。

2. CVAに基づくカウンターパーティ・リスク管理手法の基本的枠組み

本節ではCVAに基づくカウンターパーティ・リスク管理の基本的な枠組みを整理する。まず、CVAとそれに関連した基本的な概念を説明する。次に、担保を考慮した場合のCVAを取り上げ、さらに、カウンターパーティごとに複数の取引をポートフォリオとしてまとめた場合のCVAの定式化を示す。最後にCVAの変動に応じた所要資本の評価に関連して、ポテンシャル・エクスポージャーと債券相当額という概念を解説する。

(1) CVAの定式化

理論的には、CVAは、カウンターパーティがデフォルトする可能性がないとの仮定のもとで評価されたデリバティブの時価 V とカウンターパーティのデフォルト可能性を考慮したデリバティブの時価 V^* の差として定義される。

$$CVA = V - V^*. \quad (1)$$

一般に、市場におけるデリバティブの価格のクオートはカウンターパーティのデフォルト可能性を考えないベース（ V ）で行われることが多く、これからCVAを差し引くことで、実際にカウンターパーティと取引すべき価格（ V^* ）を次式のように計算できる。

$$V^* = V - CVA. \quad (2)$$

最も一般的なCVAの定義は(1)式であるが、(1)式に含まれる時価をリスク中立測度における現在割引価値の期待値として具体的に表現すると、満期 T の取引に関する時点0のCVAは、(3)式のようにカウンターパーティに対するエクスポージャーにデフォルト確率を掛け合わせたものとして与えられる⁸。

8 (1)式から(3)式の導出の詳細については、Duffie and Huang [1996]のProposition 4の議論やGregory [2010]のAppendix 7.A、Fujii and Takahashi [2010]を参照。なお、Fujii and Takahashi [2010]は、担保の運用による超過収益（コスト）を考慮しているが、本稿は超過収益率をゼロとしている。

$$CVA = - \int_0^T E^Q[(1 - R_A)D(t) \cdot E(t) | \tau = t] \cdot dQ_A(t). \quad (3)$$

ここで、 $E(t)$ は時点 t におけるエクスポージャーであり、カウンターパーティがデフォルトした際に被る損失を表す。 τ はカウンターパーティのデフォルト発生時点を表し、 $Q_A(t)$ はカウンターパーティ A が時点 t までの間にデフォルトしないで生存する確率 $\Pr[\tau > t]$ を表す。すなわち、 $-dQ_A(t)$ は時点 $[t, t + dt]$ でカウンターパーティ A がデフォルトする確率 $\Pr[t < \tau \leq t + dt]$ である。この確率もリスク中立のもとで定義され、例えば、CDS スプレッドの期間構造から逆算されたリスク中立のデフォルト確率に基づいて導出される⁹。 $D(t)$ は無リスク金利での時点 t の割引率であり¹⁰、 R_A は回収率である。カウンターパーティがデフォルトした際に損失を被るのは、デリバティブが自社にとって正の価値を持つ場合のみであるため、エクスポージャー $E(t)$ は、時点 t におけるデリバティブの時価を V_t として、以下のように定式化される。

$$E(t) = \max(V_t, 0). \quad (4)$$

ここで、回収率 R_A は一定であるとする¹¹、(3) 式は、

$$CVA = -(1 - R_A) \int_0^T D(t) \cdot E^Q[E(t) | \tau = t] \cdot dQ_A(t), \quad (5)$$

と表現し直すことができる。さらに、前述のような誤方向リスクがないと仮定しよう。この仮定はエクスポージャー $E(t)$ とデフォルト時点 τ が独立であることを意味しているため、(5) 式の中の条件付き期待値を無条件期待値に置き換えることができ、

$$CVA = -(1 - R_A) \int_0^T D(t) \cdot E^Q[E(t)] \cdot dQ_A(t), \quad (6)$$

となる。

-
- 9 CDS スプレッドが利用可能でない場合は、内部格付に基づき現実測度で推定されたデフォルト確率が利用されることが多い。この場合、理論的には、現実測度で推定されたデフォルト確率をリスク中立測度でのデフォルト確率に変換する必要がある。なお、理論的には、カウンターパーティ・リスクによる追加的なスプレッドの調整のない CDS スプレッドを使うことが望まれるため、実務上は、格付の高い金融機関が提示する値等を利用する。
- 10 割引率 $D(t)$ は現時点 0 でのイールド・カーブで与えられ、時点 t の関数となる。なお、2007~08 年の金融危機以降、担保付きデリバティブについては、OIS (overnight index swap) 取引から抽出された金利で割り引くことが一般的になりつつあり、担保付きでないデリバティブについては、自社のファンディング・コストを考慮した金利で割り引くべきであるといわれている (Whittall [2010])。
- 11 無リスク金利が確率的に変動し、条件 $\tau = t$ のもとで $D(t)$ と $E(t)$ の間に相互依存性がある場合には、(5) 式右辺の $D(t)E^Q[E(t) | \tau = t]$ は $E^Q[D(t)E(t) | \tau = t]$ で置き換えられる。

ここで、(正の) 期待エクスポージャー (expected positive exposure) $EPE(t)$ を

$$EPE(t) = E^Q[E(t)] = E^Q[\max(V_t, 0)], \quad (7)$$

と定義する¹²。(5) 式を離散時間で表現すると、

$$CVA = (1 - R_A) \sum_{m=0}^{M-1} EPE(t_m) \cdot D(t_m) \cdot \gamma(t_m, t_{m+1}), \quad (8)$$

となる。 $\gamma(t_m, t_{m+1})$ は時点 t_m から時点 t_{m+1} にかけてデフォルトが発生する確率であり、 $M - 1$ は満期までの時間の分割数である。

この表現に従えば、CVA は、ある時点でカウンターパーティがデフォルトする場合の期待損失額の現在価値に、それぞれの時点でのデフォルト確率を掛けたものの合計額として計算される。実務家による CVA の解説書では (8) 式を CVA の定義としている場合もある (Cesari *et al.* [2010] 等)。以上が CVA の基本的な定義であるが、次に、CVA を計算する際の留意点について 3 点述べる。

第 1 に、CVA の計算過程で登場する $EPE(t)$ は、(7) 式からわかるように、当該デリバティブの時価を原資産とするヨーロッパアン・コール・オプション (ロング・ポジション) の時価として表されている。例えば、 V_t が金利スワップの価格であれば、(7) 式の $EPE(t)$ はスワップション価格に相当する。このため、市場が混乱した場合などデリバティブの時価の確率分布の分散が増大する際には、CVA は増大することになる。

第 2 に、(6) 式と (8) 式はデフォルト時点とエクスポージャーが独立であると仮定して導出したが、その仮定の妥当性は取引の種類によって異なる。Pykhtin and Zhu [2007] は、クレジット・デリバティブや株式デリバティブでは、この仮定は成立しない一方で、為替デリバティブや金利デリバティブでは、この仮定は妥当であると述べている。しかし、例えば、為替デリバティブでも、新興国の金融機関との通貨スワップのように、デフォルト確率とエクスポージャーの相関が問題になるケースもあるため注意が必要である。この点については 3 節で改めて議論する。

第 3 に、CVA の計算コストの問題である。例えば、経路依存性を持つオプションを取引する場合の CVA を考えてみる。ペイオフに影響する将来時点での原資産の価格を $S(t_m)$ ($m = 1, \dots, M$) とすると、 V_t は

$$V_t = E_t^Q[f(S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_M))], \quad (9)$$

となり、モンテカルロ・シミュレーションによって数値的に計算する必要がある。この例からもわかるように、一般に、デリバティブの時価 V_t を求めるには、モンテカル

12 後掲 (12) 式、(13) 式のように、負のエクスポージャーおよびその期待値を定義する場合もあり、それと対照させるうえで、(7) 式を正の期待エクスポージャーと呼ぶこともある。

ロ・シミュレーションによる期待値計算が必要となる場合がある。さらに、CVA の計算では、(7) 式の期待エクスポージャーに含まれるデリバティブの時価 V_t が (9) 式の期待値計算で与えられ、期待値計算が入れ子構造になっている。このため、モンテカルロ・シミュレーションを二重に行うこととなって、計算コストが著しく増大する可能性がある。この点については 4 節で議論する。

なお、実務上は、デリバティブに対してデルタ・ヘッジを行うのと同様に、CVA に対しても必要に応じヘッジを行う。CVA のヘッジは、基本的には、カウンターパーティのデフォルト確率に対応する CDS スプレッド s の変化とデリバティブの原資産価格 X の変化に対して行われる。これら 2 つの変化で CVA の変化を展開すると、

$$\Delta CVA = \frac{\partial CVA}{\partial s} \cdot \Delta s + \frac{\partial CVA}{\partial X} \cdot \Delta X + \dots, \quad (10)$$

となる。(10) 式の右辺第 1 項は、CDS スプレッドの変化から生じる CVA の変化を表しており、この部分は CDS によってヘッジを行う。カウンターパーティを参照する CDS が取引されていない場合には、そのカウンターパーティと相関の高い参照先の CDS で近似的にヘッジを行うことが多い。第 2 項は、原資産価格の変化から生じる CVA の変化を表しており、この部分は当該原資産を用いてヘッジを行う¹³。

(2) 双方向の CVA と DVA

ここまでは、カウンターパーティのデフォルト可能性だけを取り上げ、自社がデフォルトする可能性に伴うデリバティブの時価の調整については議論の対象とはしてこなかった。こうした枠組みで定義された CVA は一方向 (unilateral) の CVA と呼ばれている。これに対し、以下では、双方向 (bilateral) の CVA を考える。すなわち、一方向の CVA に加え、自社 B のデフォルト・リスクを時価に反映させる負債評価調整 (debt valuation adjustment; DVA) を考慮する。DVA は以下のように定義される¹⁴。

$$DVA = -(1 - R_B) \int_0^T ENE(t) \cdot D(t) \cdot dQ_B(t). \quad (11)$$

13 なお、厳密には、CDS スプレッドと原資産価格の両方の変化から生じる 2 次項 $\partial^2 CVA / \partial s \partial X$ のヘッジも問題になる。2 変数で偏微分された項は一般にクロス・ガンマと呼ばれ、ヘッジは難しい。1 つの解決策としては、ヘッジ対象となるデリバティブの時価を想定元本とするような CDS を取引することが考えられる。こうした CDS は CCDS (contingent credit default swap) と呼ばれる。CCDS については Patel [2007]、Tang and Li [2007] の第 1 章、Brigo and Pallavicini [2008]、Cesari *et al.* [2010] の第 14 章を参照。CVA のヘッジの実務に関しては Keenan [2009] を参照。

14 DVA を liability CVA と呼ぶ場合もある。DVA を liability CVA と呼ぶ場合は、CVA は asset CVA と呼ばれ、双方向の CVA は asset CVA - liability CVA で計算される。なお、より厳密に DVA の定義においてもカウンターパーティの生存確率を考慮する場合もある。その場合には、CVA の定義においても自社の生存確率を考慮する必要がある。Gregory [2010] の Appendix 7.F と 7.G を参照。

ここで、 $Q_B(t)$ は自社が時点 t までの間デフォルトせずに生存する確率であり、 $-dQ_B(t)$ は時点 $[t, t + dt]$ で自社がデフォルトする確率である。 R_B は自社がデフォルトした際の回収率である。 $ENE(t)$ は時点 t における負の期待エクスポージャー (expected negative exposure) であり¹⁵、カウンターパーティに対して支払われるべきデリバティブの利益を表す。具体的には、以下のように定義される。

$$ENE(t) = E^Q[NE(t)]. \quad (12)$$

ここで、負のエクスポージャー $NE(t)$ を

$$NE(t) = \max(-V_t, 0), \quad (13)$$

と定義した。

DVA も考慮に入れた双方向の CVA のもとでは、実際に取引を行う際の時価 V^{**} は、デフォルト可能性を考慮していない時価 V を次のように調整することで得られる。

$$V^{**} = V - CVA + DVA. \quad (14)$$

この式をみると、双方向の CVA は、一方向の CVA から DVA を差し引いたものとして与えられることがわかる。

自社の DVA はカウンターパーティにとっての CVA に相当する。実際、自社 B の DVA を DVA^B 、カウンターパーティ A の CVA を CVA^A と表記すると、自社にとってのデリバティブの時価 V_t^B とカウンターパーティにとってのデリバティブの時価 V_t^A は $V_t^B = -V_t^A$ の関係があることから、(11) 式と (6) 式を用いると、

$$\begin{aligned} DVA^B &= -(1 - R_B) \int_0^T ENE(t) \cdot D(t) \cdot dQ_B(t) \\ &= -(1 - R_B) \int_0^T E^Q[\max(-V_t^B, 0)] \cdot D(t) \cdot dQ_B(t) \\ &= -(1 - R_B) \int_0^T E^Q[\max(V_t^A, 0)] \cdot D(t) \cdot dQ_B(t) \\ &= CVA^A, \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

「自社の DVA がカウンターパーティの CVA である」ということは実務上、重要な意味を持っている。すなわち、自社がカウンターパーティのどちらかが DVA を考慮

.....
15 Cesari et al. [2010] では reverse EPE と呼ばれている。

しない場合、同一取引の公正価値に関する認識に差異が生じ、取引の合意が形成できない可能性が発生する。例えば、格付の高い金融機関 A が格付の低い金融機関 B から、CVA を考慮したうえで金融商品を買う場合を考える。A は B のデフォルト・リスクを考慮して、B から金融商品をより低価格で買おうとするはずである。この調整額が A にとっての CVA である。もし B が自らのデフォルト・リスク、つまり DVA を考慮していない場合、価格は A の CVA の分だけ合わない。これが DVA を考慮しない問題点である。

自社とカウンターパーティの両者が CVA と DVA の双方を考慮する場合は、価格が一致し、取引の合意が可能である。これを数式で表現すると、

$$\begin{aligned} V^{**A} &= V^A - CVA^A + DVA^A \\ &= -V^B - DVA^B + CVA^B \\ &= -V^{**B}, \end{aligned} \tag{16}$$

となる。近年、主要な欧米の金融機関では、DVA を考慮した双方向の CVA が用いられていると指摘されている (Algorithmics [2010]、Wood [2010])。

上記のように、DVA は取引の合意という点で重要であるが、全く別の視点から、DVA を計上することに対して批判もある。例えば、自社のデフォルト・リスクが高まるほど DVA の含み益は大きくなるため、市場での低評価をそのまま放置するのではないかというモラル・ハザードが懸念されている。この点に関して、Gregory [2010] は、DVA の含み益を実現できるのは自社がデフォルトした場合のみであり、DVA は株主にとって意味ある財務指標ではなく、その債券保有者にのみ意味がある指標であると述べている¹⁶。このほか、自社のデフォルト・リスクが減少した際に、DVA から含み損を計上することになるのは不適切であるとの指摘もある¹⁷。

また、DVA についてはヘッジの困難さも指摘されている。2 節(1)で述べた CVA のヘッジと異なるのは、自社を参照している CDS を売ることはできない点である。自社債が自社のデフォルト・リスクを反映しているため、代替手段として自社債を売り買いすることで、DVA の CDS スプレッドに対するリスク感応度をヘッジすることが理論的には可能であるが、富安 [2010] や Keenan [2009] は、自社の資金調達計画やコンプライアンスの問題を考慮すると DVA のヘッジのために自社債を自由に売買することは難しいと述べている。現実的には、自社と関連の高い金融機関の CDS を用いて間接的にヘッジを行うことが考えられる¹⁸。

16 別の問題としては、DVA を利用することで、相手から差し入れられるべき担保を過剰に減らしてしまうのではないかという、担保過少 (under-collateralization) の問題が指摘されている (Carvar [2010])。

17 同様の論点は、古市 [2007] では、「いわゆる負債の時価評価におけるパラドックス問題」として紹介されている。

18 DVA のヘッジに関しては富安 [2010] の 4 章 4 節や Gregory [2010] の 7 章 3 節も参照。

(3) CVA の計算における担保の扱い

CVA に基づくカウンターパーティ・リスク管理の枠組みに、伝統的なリスク管理において重要な役割を果たしている担保を取り入れることも可能である¹⁹。ここでは、Pykhtin [2009] と Cesari *et al.* [2010] 等を参考に、CVA の計算における担保の扱いについて整理する²⁰。

担保を追加的に要求するマージン・コールが時価評価の頻度に合わせて行われ²¹、その際には担保が瞬時に差し入れられることを仮定しよう。担保差入れに関する信用極度額 (threshold) としてカウンターパーティに対するものを K^A 、自社に対するものを K^B とする。現時点 t で保有すべき担保の価値を $C(t)$ とすると、一方向の担保契約 (one-way CSA) のもとで $C(t)$ は、

$$C(t) = \max(V_t - K^A, 0), \quad (17)$$

となり、双方向の担保契約 (two-way CSA) のもとで $C(t)$ は、

$$C(t) = \max(V_t - K^A, 0) - \max(-V_t - K^B, 0), \quad (18)$$

となる。(17) 式と (18) 式では現金が担保として差し入れられていると想定している。担保として現金以外の資産を差し入れる場合には、その資産の実際の価値ではなく、掛け目を乗じた額を担保に相当する額とする。この掛け目をヘアカット (haircut) と呼ぶ。

担保を考慮したエクスポージャーを $E_c(t)$ で表す。(4) 式と (17) 式から、 $E_c(t)$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} E_c(t) &= E(t) - C(t) \\ &= V_t \cdot 1_{\{0 < V_t \leq K^A\}} + K^A \cdot 1_{\{K^A < V_t\}}. \end{aligned} \quad (19)$$

19 デリバティブ取引に伴うカウンターパーティ・リスクを軽減する取組みとしては、ここで扱う担保の導入や、2 節(4)で扱う双方向 (full two-way payments) の一括清算ネットティング (close-out netting) のほかに、OTC 取引から清算機関 (central counter party; CCP) との取引への移行という動きもあり、特に金融危機以降は、CCP の活用について関心が高まっている (例えば Cecchetti, Gyntelberg, and Hollanders [2009])。CCP との取引において CVA をどう評価するかについては、個々の CCP の設計 (CCP における損失発生時の処理方法など) に応じて判断されるべき問題であるため、本稿では解説の対象としない。このほか、現段階で CCP での取り扱いが視野に入っているインデックス CDS やプレーンな金利スワップのほかに、より個別性の強いデリバティブについてはマルチラテラル・ネットティングのもとで取引が行われる場合も増えている。本稿では、この CVA についても具体的には扱わないが、バイラテラル・ネットティングの応用形として評価していくことが考えられる。

20 念頭に置いている担保契約は、ISDA (International Swaps and Derivatives Association) の CSA である。CSA とは Credit Support Annex の略語であり、ISDA のマスター契約に付随する、担保付き取引のドキュメンテーションの標準形である。

21 通常、時価評価の頻度に合わせ、マージン・コールは日次で行われるが、日本では週次で行われる場合もある。通常のマージン・コールに加えて、市場の急激な変動から生じるエクスポージャーを軽減するために追加的にマージン・コールを行う場合もある。これはアドホック・コール (ad-hoc call) と呼ばれる。

(19) 式から、カウンターパーティが担保を瞬時に差し入れる場合、エクスポージャー $E_c(t)$ は最大でも K^A で抑えられることがわかる。これは (17) 式の代わりに (18) 式を用いた場合も同様である。CVA の計算では、(6) 式の $E(t)$ を $E_c(t)$ で置き換えれば担保を考慮した CVA の計算を行うことができる²²。一般に、信用極度額 K^A をゼロに近づけるほど、エクスポージャーが減少するため、リスク管理の観点からはより保守的になる。実務では、信用極度額 K^A はカウンターパーティの格付等に応じて決められる²³。

実際には、時価評価を受けてマージン・コールが行われ、担保が追加的に差し入れられるまでには時間を要すると考えられる。そこで次に、時価評価後に担保が差し入れられるまでの時間を dt と考え、このタイムラグに伴うリスクを考える。具体的には、時点 $t - dt$ での時価評価でエクスポージャーが信用極度額 K^A (あるいは K^B) を超過し、それを受けてマージン・コールが行われたとする。その後、時点 t で追加担保が差し入れられるとし、この間のエクスポージャーの変化を考慮すると、自社 B に差し入れられるべき追加担保 $\Delta(t)$ は、(18) 式より

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= C(t) - C(t - dt) \\ &= \max(V_t - K^A, 0) - \max(-V_t - K^B, 0) - C(t - dt),\end{aligned}\quad (20)$$

と表される。したがって、担保が時点 t で差し入れられるまで、

$$\max(\Delta(t), 0),\quad (21)$$

の分だけエクスポージャーが残り、カウンターパーティ・リスクが存在していることになる。

理論上は、マージン・コールの頻度が時価評価の頻度と等しく、担保を瞬時に受け取ることが可能であれば、 dt がゼロになり、リスクを抑えることができるが、実務上、担保を瞬時に差し入れることは不可能である。また、カウンターパーティのデフォルトの危険性が高まるほど、カウンターパーティから担保が差し入れられるまでの時間は長くなる傾向があると考えられるため、 dt がゼロでないことから発生するリスクは考慮する必要がある。

22 なお、カウンターパーティのデフォルトと担保の両方を考慮した研究としては、Johannes and Sundaesan [2007] がある。カウンターパーティのデフォルトを考慮してはいないものの、担保を考慮に入れたデリバティブの時価評価については、さまざまなモデルが研究されている。Piterbarg [2010]、Chen, Uchiyama, and Cao [2009] は、担保の運用利益 (あるいはコスト) を考慮した再帰的な時価評価式を考案している。また、Fujii, Shimada, and Takahashi [2010] は、信用極度額がゼロ、担保が連続的に差し入れられることを仮定したうえで、担保を考慮した無裁定な金利の期間構造モデルを提案している。Tang and Williams [2009] は、フロント部門では、完全に担保によってデリバティブのカウンターパーティ・リスクがカバーされることを前提とした簡易的な時価評価を行い、CVA のリスク管理部門では、担保でカバーされていない点を考慮した時価評価を行うのが妥当な対応であると述べている。

23 De Prisco and Rosen [2005] を参照。森田 [2010] では、2007~08 年に起きた金融危機以降、信用極度額がゼロにされるケースが増えたと記されている。

Pykhtin [2009] は、直前に担保が差し入れられてから、追加担保を差し入れられることなく、カウンターパーティがデフォルトし、ポジションを清算・再構築するまでの期間のことを MPR (margin period of risk) と呼び²⁴、この MPR の日数を dt に用いている。実際の MPR の日数は個々のデフォルトの状況に依存するため不確定であるが、Pykhtin [2009] は MPR の日数を 2 週間と置いている²⁵。

MPR から生じるリスクを軽減するために活用されるのが独立担保額 (independent amount) である。これは、信用極度額に応じて差し入れられる担保の額とは独立に、カウンターパーティに対して取引当初に要求する担保である²⁶。独立担保額を利用するメリットとしては、将来時点で担保が不足した際、追加差入れまでに発生するリスクや、カウンターパーティがデフォルトしてから取引ポジションを閉じるまでの間に生じるリスクを軽減することができる点である。独立担保額を利用することのデメリットとしては、独立担保額を差し入れた側が担保過大 (over-collateralization) の状態になり、カウンターパーティがデフォルトした際の損失が大きくなってしまいう点が挙げられる²⁷ (ISDA, MFA, and SIFMA [2010])。

一般的に、マージン・コールには最低引渡金額 (minimum transfer requirement) が定められている。マージン・コールは、信用極度額を超えるだけでなく、必要な追加担保額が最低引渡金額 MTR を超えて初めて行われるので、この点を考慮した追加担保額 $\Delta^{MTM}(t)$ は、

$$\Delta^{MTM}(t) = \Delta(t) \cdot 1_{\{\Delta(t) > MTR\}}, \quad (22)$$

と表記できる。

CVA の計算において担保を考慮する際も、理想的には、マージン・コールの頻度に合わせ、 $\Delta(t)$ が最低引渡金額 MTR を超えていないかをチェックし、実際にマージン・コールが行われるかどうかを判定する形でシミュレーション計算を行うことが望ましい。しかし、満期 T が長いデリバティブの CVA の計算に際して、日次での時価評価やマージン・コールの判断をシミュレーション計算に組み込むと、計算負荷が大きくなってしまふ。そこで、Pykhtin [2009] は、信用極度額 K に最低引渡金額 MTR を足し合わせたものを実質的な信用極度額として、(22) 式を近似する扱いを提案した。この近似のもとで、(20) 式は、

24 Pykhtin and Zhu [2007] は、マージン・コールの間隔をコール・ペリオド (call period) と呼ぶ一方、カウンターパーティがデフォルトしてから、ポジションを清算・再構築するまでの期間をキュア・ペリオド (cure period) と呼び、コール・ペリオドとキュア・ペリオドの合計を MPR としている。

25 Gregory [2010] は同様の期間を再マージン・ペリオド (remargin period) と呼び、Pykhtin [2009] と同様のことを提案している。

26 イニシャル・マージン (initial margin) と呼ばれることもある。Cesari et al. [2010] は、エクスポージャーの変動によらず差し入れるべき最低限の担保をイニシャル・マージンと呼んでいる。

27 リーマン・ブラザーズがデフォルトした際には、同社が再担保化を行っていたために、同社に担保を差し入れていたヘッジ・ファンドが、担保を取り戻すことができなくなり、損失を被った。Fender and Gyntelberg [2008] や ISDA, MFA, and SIFMA [2010] を参照。

$$\begin{aligned} \Delta^{MTM}(t) \cong & \max(V_t - (K^A + MTR^A), 0) \\ & - \max(-V_t - (K^B + MTR^B), 0) - C(t - dt), \end{aligned} \quad (23)$$

となる。 MTR^A と MTR^B はそれぞれ自社とカウンターパーティの最低引渡金額である。Pykhtin [2009] は、こうした近似を行うことで、日次ではなく 2 週間程度の期間 dt ごとにシミュレーションのパスを発生させて、追加担保を考慮した CVA の計算を行っている。担保を考慮する前に (8) 式でより荒い離散化 ($t_m - t_{m-1} > dt$) のもとで CVA の計算を行っていた場合には、追加担保を考慮する際、 t_m ($m = 1, \dots, M$) 時点に加え、 $t_m - dt$ ($m = 1, \dots, M$) の時点についてもシミュレーションを行うことになる。

なお、(23) 式のような近似は計算上有効である一方、カウンターパーティから受け取るべき追加担保の額を過小評価する可能性がある。例えば、 $V_t = K^A + MTR^A + \delta$ ($\delta > 0$) としてみると、近似がない場合の (22) 式のもとでは、 $\Delta^{MTM}(t) = MTR^A + \delta - C(t - dt)$ となる一方で、近似を行った (23) 式のもとでは、 $\Delta^{MTM}(t) = \delta - C(t - dt)$ である。近似を使うと、差し入れられる担保が MTR^A の分だけ減少することがわかる。一般に、こうした近似の採否については、要求される正確性と計算負荷から判断されるべきである。

(4) カウンターパーティ・レベルでの CVA

ここまでは、個別取引の CVA のみを議論してきたが、実務上は、1 つのカウンターパーティと取引している複数のデリバティブをまとめたポートフォリオを想定して CVA を把握する必要がある。というのは、以下で説明するネットティングの効果を踏まえると、ポートフォリオの CVA は個別の CVA の合計にならないためである。本稿では、こうしたポートフォリオの CVA をカウンターパーティ・レベルでの CVA と呼ぶ。この問題は、実務上重要であるにもかかわらず、先行研究はまだ少ない。ここでは、Pykhtin and Rosen [2010] と De Prisco and Rosen [2005] に基づいてカウンターパーティ・レベルでの CVA を議論する。

まず、ネットティングについて説明する²⁸。あるカウンターパーティと取引している個別のデリバティブ i の時点 t における時価を V_t^i とし、次式のように個別取引を合計したポートフォリオの時価を V_t^{total} とする。

$$V_t^{\text{total}} = \sum_{i=1}^N V_t^i. \quad (24)$$

28 ここで説明するネットティングは、正確には双方向 (full two-way payments) の一括清算ネットティング (close-out netting) と呼ばれるものである。四塚 [1997] や Gregory [2010] の第 3 章 4 節を参照。

ネットイングしない場合のカウンターパーティ・レベルでのエクスポージャー $E^{\text{gross}}(t)$ は、単純に個別取引のエクスポージャーの総和である。すなわち、

$$E^{\text{gross}}(t) = \sum_{i=1}^N \max(V_t^i, 0), \quad (25)$$

であり、他方、全ての個別取引に対してネットイングを行った場合のエクスポージャー $E^{\text{net}}(t)$ は、

$$E^{\text{net}}(t) = \max(V_t^{\text{total}}, 0), \quad (26)$$

である。

(25) 式と (26) 式を比較すると、最大値関数 $\max(\cdot, 0)$ が下に凸であることから、

$$E^{\text{net}}(t) \leq E^{\text{gross}}(t), \quad (27)$$

となり、ネットイングを行うことにより、エクスポージャーが減少することがわかる²⁹。同様の理由から、負のエクスポージャーもネットイングにより減少する。

次に、ネットイングを行った場合のカウンターパーティ・レベルでの CVA の計算を示す。ネットイングを行い、かつ、担保を考慮したエクスポージャー $E_c^{\text{total}}(t)$ は、(19) 式の V_i を V_t^{total} として

$$E_c^{\text{total}}(t) = V_t^{\text{total}} \cdot 1_{\{0 < V_t^{\text{total}} \leq K^A\}} + K^A \cdot 1_{\{K^A < V_t^{\text{total}}\}}, \quad (28)$$

となる。その期待エクスポージャー EPE^{total} は、

$$EPE^{\text{total}} = E^Q[E_c^{\text{total}}(t)], \quad (29)$$

である。(28) 式と (29) 式から、カウンターパーティ・レベルでの期待エクスポージャー EPE^{total} を計算するには、 V_t^{total} の分布を求める必要があることがわかる。(24) 式の V_t^{total} の定義から明らかなように、 V_t^{total} の分布を求めるためには、 V_t^i ($i = 1, \dots, N$) の同時確率分布を求める必要がある。カウンターパーティ・レベルでの CVA は、(6) 式において右辺の $E^Q[E(t)]$ を (29) 式の EPE^{total} で置き換え、時間に関する積分を計算することで評価できる。

例えば、5 年の金利スワップと 10 年の金利スワップが自らのポートフォリオにある場合、5 年と 10 年のスワップ・レートのみならず、何らかの形で 2 つの

²⁹ 実際にネットイングを行うに当たっては、その対象となる取引の範囲を明らかにするための契約が必要である。これに関しては ISDA のマスター契約が広く利用されている。また、こうしたネットイングが、会計や規制資本上の扱いで認められるか否かは、対象の会計基準や自己資本合意の規定による。

レートの間関を与え、この2つのスワップ取引の合計時価の分布を計算する必要がある³⁰。

一般には、 V_t^i ($i = 1, \dots, N$) の確率分布がわかっていたとしても、 V_t^{total} がよく知られた確率分布になるとは限らない。ただ、 V_t^i ($i = 1, \dots, N$) の同時確率分布が例えば多変量正規分布である場合には、 V_t^{total} も正規分布になるため、問題は非常に簡単になる。

Pykhtin and Rosen [2010] は、個別のデリバティブの時価が多変量正規分布に従うという仮定のもとでカウンターパーティの CVA を計算している。すなわち、

$$V_t^i = \mu_i + \sigma_i X_t^i, \quad (30)$$

であり、 X_t^i は標準正規分布に従う確率変数である。 X_t^i と X_t^j の間の相関係数を $r_{i,j}$ とする。正規分布に従う確率変数の和で表される確率変数は、正規分布に従うので、 V_t^{total} は正規分布に従う。(30) 式に合わせて表記すると、

$$V_t^{\text{total}} = \mu + \sigma X_t^{\text{total}}, \quad (31)$$

であり、平均と分散は、それぞれ、

$$\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N r_{i,j} \sigma_i \sigma_j, \quad (32)$$

で与えられ、 X_t^{total} は標準正規分布に従う。このとき、個別のデリバティブの時価 V_t^i とポートフォリオ V_t^{total} の相関係数 ρ_i は以下のように表される。

$$\rho_i = \frac{\text{cov}[V_t^i, V_t^{\text{total}}]}{\sigma_i \sigma} = \frac{\text{cov}[V_t^i, \sum_{j=1}^N V_t^j]}{\sigma_i \sigma} = \sum_{j=1}^N r_{i,j} \frac{\sigma_j}{\sigma}. \quad (33)$$

以上の設定のもとで、Pykhtin and Rosen [2010] はポートフォリオの期待エクスポージャー EPE^{total} と、個別の取引の EPE^{total} への寄与 EPE^i を計算している。単純化のため、信用極度値 K^A を無限大として担保の効果を除いて考えると、ポートフォリオの期待エクスポージャーは

$$EPE^{\text{total}} = \text{E}^Q[(\mu + \sigma X_t^{\text{total}}) \cdot 1_{\{0 < \mu + \sigma X_t^{\text{total}}\}}] = \mu \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \sigma \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right), \quad (34)$$

30 金融工学の観点からは、カウンターパーティ・レベルでの期待エクスポージャーの計算は複数資産を参照するデリバティブのプライシングと等価である。ただし、この複数資産の中にそれ自体複雑なデリバティブ取引も入りうるため、その計算はより一層困難になる。例えば、スワップではなく、バミューダン・スワップション等も含めてネットティングすると、バミューダン・スワップションの時価自体の確率分布を周辺分布として把握する必要が生じる。

となり、個別の取引の寄与は、以下のように表される。

$$EPE^i = \mu_i \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \sigma_i \rho_i \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right). \quad (35)$$

ここで、 $\Phi(x)$ と $\phi(x)$ はそれぞれ標準正規分布の分布関数と密度関数である。

(35) 式の右辺第 2 項に焦点を当てて考えると、現時点で保有しているポートフォリオと個別の取引の間の相関 ρ_i が正（負）である場合には、その取引はポートフォリオ全体のエクスポージャーを増加（減少）させる。つまり、あるデリバティブの取引がカウンターパーティ・リスクを軽減するかどうかは、現時点のポートフォリオに依存しており、個別の取引のみでは判断できないことがわかる³¹。

なお、関連した研究としては、金利スワップのポートフォリオのカウンターパーティ・リスクを研究した Brigo and Masetti [2005] がある。フォワード LIBOR が対数正規分布に従うと仮定すると、金利スワップのポートフォリオの時価の確率分布は対数正規分布の和になるが、Brigo and Masetti [2005] は、対数正規分布の和について 3 次のモーメントまで一致するような 1 つの対数正規分布で置き換える手法を提案している³²。

なお、ネットティングをシステム上どのように実装するのかといった点も重要である。一般に金融機関では、為替・金利・株式・コモディティ等、それぞれの資産について独立したデリバティブの時価評価システムを持つ場合が多い。このため、カウンターパーティごとに全取引のネットティングを行い、カウンターパーティ・レベルでの CVA の計算を行うには、個々の時価評価システムを統合させた大規模なシステムが必要となろう。Albanese *et al.* [2011] は、そうしたシステムの実現に向けた考察を行っている³³。なお、こうしたシステムの構築には相応のコストを要するため、各金融機関のビジネス・モデルに応じて適切なシステム要件を検討することが必要であろう。

(5) 非期待損失と経済資本

伝統的な信用リスク管理と対比すると、CVA は OTC デリバティブに対する貸倒引当金に相当しており、期待損失 (expected loss) をカバーしている。他方、伝統的な信用リスク管理と同様に、OTC デリバティブについても非期待損失 (unexpected

31 Duffie and Huang [1996] も金利スワップを例にとって同様の点を指摘している。

32 正確には、シフトされた対数正規分布 (shifted lognormal process) で置き換えられており、パラメータが 1 つ多い。

33 Albanese *et al.* [2010] は、具体的に、グラフィックス・プロセッシング・ユニット (graphics processing units; GPU) を利用し、モンテカルロ・シミュレーションを高速化することにより、解析解がないモデルに基づく時価評価が可能になることや、ポートフォリオ・レベルでのカウンターパーティ・リスクの計算の高速化が可能になると主張している。また、単一のシステムを用いることで、フロント部門での信用リスクと市場リスクの管理を統一的に行えると述べている。

loss) を考えることができ、それを基に経済資本 (economic capital) を算出することが可能である。

非期待損失は VaR (Value at Risk) から期待損失を差し引いたものであり、VaR は OTC デリバティブから生じる損失分布の分位点である。したがって、非期待損失は、(3) 式の CVA の計算と同様に、理論的にはエクスポージャー、回収率、デフォルト確率の同時確率とその期間構造から導出することになる。ただし、これらの同時確率そのものの分析は極めて複雑であるため、実務的には、各変量の中で特に重要なエクスポージャーの確率的变化に焦点を当てて分位点を評価することが多い。そこで、ここでは、エクスポージャーの変化を捉える概念として、ポテンシャル・エクスポージャー (potential exposure) と最大ポテンシャル・エクスポージャー (maximum potential exposure) について説明する³⁴。

ポテンシャル・エクスポージャーは、カウンターパーティのデフォルトによって生じる可能性のある大幅な損失を捉える指標である。具体的には、信頼水準 α を与えて、 $100 \cdot \alpha$ パーセントイルのポテンシャル・エクスポージャー $PE_\alpha(t)$ を (36) 式のように定義する³⁵。

$$\Pr(E(t) \geq PE_\alpha(t)) = 1 - \alpha. \quad (36)$$

$PE_\alpha(t)$ はエクスポージャー $E(t)$ の VaR に相当しており、 α の具体的な値としては 95% あるいは 99% といった水準がしばしば用いられる (De Prisco and Rosen [2005])³⁶。

最大ポテンシャル・エクスポージャー $MPE_\alpha(t)$ は、ポテンシャル・エクスポージャーを用いて以下のように定義される。

$$MPE_\alpha(t) = \max_{0 \leq s \leq t} PE_\alpha(s). \quad (37)$$

すなわち、ポテンシャル・エクスポージャーを時点 0 から時点 t まで考えた際の最大値が最大ポテンシャル・エクスポージャーである。

CVA は、OTC デリバティブの時価評価の調整額であるため、リスク中立測度のもとで計算する必要があるが、非期待損失をカバーする最大ポテンシャル・エク

34 ポテンシャル・エクスポージャーはポテンシャル・フューチャー・エクスポージャー (potential future exposure) と呼ばれることも多い (富安 [2010]、Cesari *et al.* [2010] 等)。De Prisco and Rosen [2005] では、ポテンシャル・エクスポージャーをピーク・エクスポージャー (peak exposure) と呼び、最大ポテンシャル・エクスポージャーを最大ピーク・エクスポージャー (maximum peak future exposure) と定義している。

35 エクスポージャーの分布関数は狭義単調増加であると仮定する。

36 VaR に関連して指摘されている論点と同様、ここで定義されたポテンシャル・エクスポージャーも、劣加法性を満たさないという問題がある。そうした問題を避けるために、De Prisco and Rosen [2005] は、劣加法性を満たす期待ショートフォール (expected shortfall) に対応させたポテンシャル・エクスポージャーの定義も提案している。リスク指標としての VaR と期待ショートフォールの問題点と比較に関しては、山井・吉羽 [2001] を参照。

ポージャー $MPE_{\alpha}(t)$ は現実測度のもとで計算すべきである。この点は、非期待損失という指標が、ストレス下に置かれた市場で生じる損失に備えるための経済資本に対応していることを考えると自然であろう。理論的な観点から述べると、リスク中立確率のもとでデリバティブのプライシングを行っているフロント・オフィスのモデルとは別に、リスク計算上は現実測度のもとで評価を行う何らかのモデルが必要になると思われる³⁷。

(6) CVA と債券相当額

カウンターパーティ・リスクから生じる非期待損失に対して備えるための所要資本を概算するうえで、債券相当額 (equivalent bond) という概念が利用される場合がある。また、Basel Committee on Banking Supervision [2009] では、債券相当額によってカウンターパーティ・リスクに対する規制資本 (regulatory capital) を求める手法 (債券相当額アドオン方式) が提案されていた³⁸。債券相当額に基づくアプローチについては、後述のとおり、CDS スプレッド以外の CVA に影響する市場のリスク要因を考慮できないという問題もあるが、カウンターパーティ・リスクから生じる非期待損失を近似的に求めるというアイデア自体は経済資本を考えるうえでも参考になると思われる。以下では、Rebonato, Sherring, and Barnes [2010] の解説に沿って債券相当額 の概念を説明する。

債券相当額は、任意のデリバティブについて、そのエクスポージャーを近似的に仮想的な債券の元本で置き換えることで、CVA の表現を簡単にするための概念である。議論を簡単にするため、以下では、(6) 式の一方向の CVA を考える。まず、デリバティブの満期までの平均エクスポージャー \bar{E} を

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_0^T EPE(t) dt, \quad (38)$$

と定義し、(6) 式右辺の $E^Q[E(t)]$ を \bar{E} で置き換えると、

$$CVA \cong -(1 - R_A) \cdot \bar{E} \cdot \int_0^T D(t) \cdot dQ_A(t), \quad (39)$$

37 同様の観点から、Lomibao and Zhu [2005] は現実測度のもとでのシミュレーションによってカウンターパーティ・エクスポージャーを計算する方法を議論している。

38 ただし、Basel Committee on Banking Supervision [2010] は、「債券相当額」を活用したアプローチの解釈も本稿で以下に説明する内容とは異なっている。具体的には、Basel Committee on Banking Supervision [2010] では、CVA に対する規制資本の先進的な方法として、満期まで一定のエクスポージャーを考えるのではなく、時価の再評価時点ごとにエクスポージャーやクレジット・スプレッドの評価を行うことが提案されている。これは、本稿の (8) 式で CVA を計算することに対応している。

と近似することができる。(39)式は、元本を \bar{E} とする、デフォルト・リスクを内包した満期 T の債券の CVA そのものである。これは、エクスポージャーが満期まで一定で

$$\bar{E} \cong \frac{\int_0^T D(t) \cdot EPE(t) \cdot dQ_A(t)}{\int_0^T D(t) \cdot dQ_A(t)}, \quad (40)$$

であると近似したことに相当している。

(39)式の CVA を CDS スプレッドで表現することを考える。CDS スプレッド s は、プロテクションの価値とプレミアムが一致するように決められる。プロテクションとは参照先のデフォルトに対する保険のことである。プロテクションの買い手は売り手に対して、満期あるいはデフォルトが生じるまでの間、保険料としてスプレッド s を支払う。この保険料がプレミアムである。ここでは、スプレッドは連続時間で支払われると仮定する。

プロテクションの時価 $CDS_{\text{protection}}$ は、次式のように CDS の満期までに参照先がデフォルトする確率を回収率で調整したものである。

$$CDS_{\text{protection}} = -(1 - R_A) \int_0^T D(t) \cdot dQ_A(t). \quad (41)$$

プレミアムの時価 CDS_{premium} は、支払われる総保険料の期待値であり、以下のように表現される。

$$CDS_{\text{premium}} = s \int_0^T D(t) \cdot Q_A(t) dt. \quad (42)$$

この2つの時価が一致するという条件から、CDS スプレッド s は

$$s = \frac{-(1 - R_A) \int_0^T D(t) \cdot dQ_A(t)}{\int_0^T D(t) \cdot Q_A(t) dt}, \quad (43)$$

と求められる。

この CDS スプレッド s を用いると、(39)式の CVA は、

$$CVA \cong s \int_0^T D(t) \cdot Q_A(t) dt \cdot \bar{E}, \quad (44)$$

と書き直すことができる。

次に、債券相当額に基づく枠組みのもとで、CVA の変動に対して賦課すべき資本 K を考えると、以下のようになる。

$$K = \Delta CVA \cong \frac{dCVA}{ds} \Delta s. \quad (45)$$

(44) 式から CVA の CDS スプレッド s に対する感応度は

$$\frac{dCVA}{ds} \cong \int_0^T D(t) \cdot Q_A(t) dt \cdot \bar{E}, \quad (46)$$

となり、これを (45) 式に代入すると、

$$K \cong \int_0^T D(t) \cdot Q_A(t) dt \cdot \bar{E} \cdot \Delta s, \quad (47)$$

と表現される。ここでさらに

$$\int_0^T D(t) \cdot Q_A(t) dt \cong T, \quad (48)$$

という近似を行うと³⁹、

$$K \cong T \cdot \bar{E} \cdot \Delta s, \quad (49)$$

として、所要資本 K は表される。Basel Committee on Banking Supervision [2009] では、CDS の資本賦課を考えるうえでの要素として、①実質満期、②債券相当額、③リスク評価期間内のスプレッドの変動可能性という 3 点が重要であるとされているが、(49) 式は、そうした考え方と整合的である。 Δs については、ストレス下に置かれた市場を想定して、CDS スプレッドの変動の確率分布の 99 パーセンタイル値等を用いることが考えられる。

厳密には、(46) 式の感応度を求める際、Rebonato, Sherring, and Barnes [2010] が指摘しているように、生存確率 $Q_A(t)$ が CDS スプレッドの変化 Δs に依存している点を考慮する必要がある。

議論を明確にするため、カウンターパーティのデフォルト強度 λ を一定と仮定し、生存確率 $Q_A(t)$ を

$$Q_A(t) = \exp(-\lambda t), \quad (50)$$

とする。この仮定のもとで、CDS スプレッドは、

$$s = \lambda(1 - R_A), \quad (51)$$

.....
39 この計算は、算出される資本が保守的になる方向に、 $D(t) \cong 1$ 、 $Q_A(t) \cong 1$ とした近似となっている。

となる。よって、CDS スプレッド s が与えられたもとでの生存確率 $Q_A(t)$ は、

$$Q_A(t) = \exp\left(-t \frac{s}{1 - R_A}\right), \quad (52)$$

となる。(52) 式を (44) 式に代入したうえで (46) 式の感応度を求め、(45) 式に代入すると、所要資本 K は、

$$K = \left(\int_0^T D(t) \cdot Q_A(t) dt - \lambda \int_0^T D(t) \cdot Q_A(t) t dt \right) \cdot \bar{E} \cdot \Delta s, \quad (53)$$

と計算され、(47) 式に新たな項が追加されていることがわかる。すなわち、(49) 式の近似的評価は、(53) 式の右辺において、

$$-\lambda \int_0^T D(t) \cdot Q_A(t) t dt,$$

の項を省略したものとなっている。

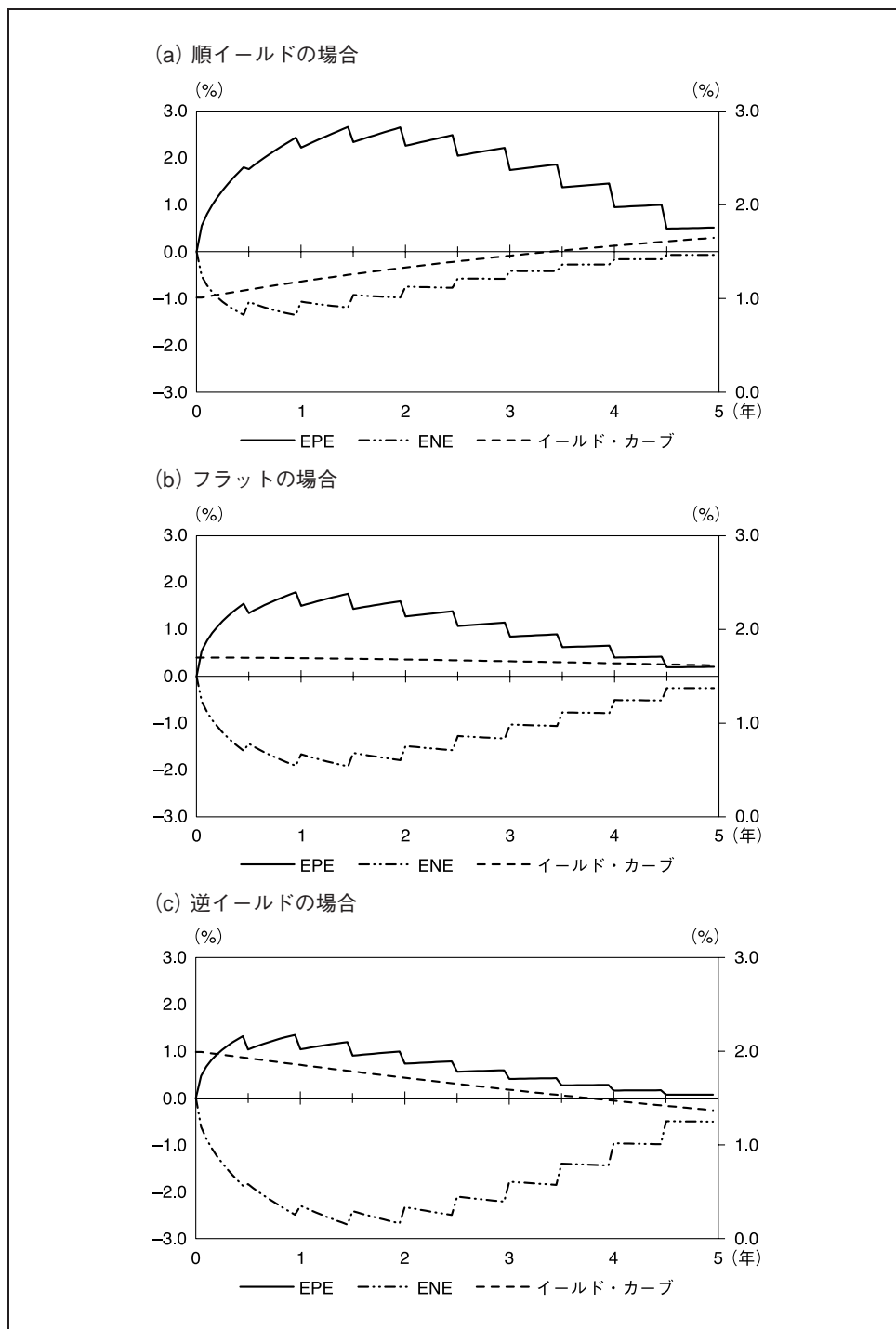
債券相当額に基づくアプローチは、(49) 式のように解釈や扱いが容易な結果が得られるという長所がある一方、上記のような近似が含まれるという短所がある。また、別の短所として、CDS スプレッド以外の市場のリスク要因の変化を取り入れるのが難しい点がある。具体的には、CDS スプレッド s がストレス下にあるような状況では当然、他の市場もストレス下にあり、 \bar{E} も増加すると思われるが、債券相当額に基づくアプローチでは捉えることができないと指摘されている (Pengelly [2010])。こうした点についても注意を払う必要がある。

(7) 具体例

変動受け・固定払いの金利スワップの場合を例にとり、期待エクスポージャーの特徴を具体的に議論する。図 1 は金利スワップについて正と負の期待エクスポージャーを計算したものである。満期は 5 年で年 2 回の支払いがあり、スワップ・レートは 1.65% である。Vasicek [1977] で仮定された、瞬間的なスポット・レートの確率過程 $dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma dW_t$ に基づいて計算されており⁴⁰、パラメータは、平均回帰速度 $\kappa = 0.2$ 、ボラティリティ $\sigma = 0.02$ とした。イールド・カーブの形状が順イールドである場合については初期瞬間スポット・レート $r_0 = 0.01$ 、平均回帰水準 $\theta = 0.03$ とし、フラットである場合は $r_0 = \theta = 0.017$ とした。逆イールドの場

40 実際の CVA の計算では、ハル=ホワイト・モデル (Hull and White [1990]) や BGM モデル (Brace, Gatarek, and Musiela [1997]) のように、スワップ・レートの期間構造やスワップションのボラティリティにキャリブレーションできるモデルを用いることが望ましいが、この例では本質を失わないようにしつつ議論を単純化するために、Vasicek [1977] のスポット・レート・モデルを用いている。

図1 変動受け・固定払いの金利スワップの期待エクスポージャー



備考：横軸は年数、縦軸の左軸は想定元本に対する期待エクスポージャーの比率、縦軸の右軸は対応するイールド・カーブの水準を表す。

表1 イールド・カーブの形状と金利スワップの期待エクスポージャー

	順イールド	逆イールド	ハンプ型
変動金利の受け・固定金利の払い	大	小	不定
変動金利の払い・固定金利の受け	小	大	不定

合には $r_0 = 0.02$ 、 $\theta = 0.005$ とした。横軸は年数、縦軸の左軸は想定元本に対する期待エクスポージャーの比率、縦軸の右軸は対応するイールド・カーブの水準を表している。

スワップ取引が開始された時点では、期待エクスポージャーはゼロである。したがって、この時点でのカウンターパーティ・リスクはゼロである。これは、スワップ取引の開始時点ではポジションに損益が発生しないパーの状態であるとの前提のもとでプライシングされるからである。

図1から以下の2点がわかる。第1に、取引開始から時間が経つにつれて、変動金利水準の確率分布が広がっていくことに応じて期待エクスポージャーも増加していく。また、ある時点を超えて減少に転じるが、これは満期が近づくにつれて、金利の支払回数が減り、期待エクスポージャーが減少するからである。Pykhtin and Zhu [2007] は前者の効果を拡散効果 (diffusion effect)、後者の効果を償却効果 (amortization effect) と呼んでいる。第2に、金利の支払時点で、期待エクスポージャーが階段状に変化している。これはカウンターパーティから金利が支払われた直後には、その利払いの分だけ損失のリスクが少なくなるためである。これらの特徴は、評価時点におけるイールド・カーブの形状によらず共通である。

一方、各時点における期待エクスポージャーの大きさ (図1のカーブ) は、評価時点のイールド・カーブに依存している。表1には、金利スワップの期待エクスポージャーの多寡とイールド・カーブの形状の関係を図1に基づき整理した。表中の大・小は、ある時点の期待エクスポージャーについてイールド・カーブがフラットである場合を基準として額が大きいか小さいかを示している。ハンプ型の場合に不定とあるのは、期待エクスポージャーの大・小はハンプの具体的な度合いに依存していることを意味している⁴¹。また、表1では図1で考察した変動受け・固定払いの金利スワップに加え、変動払い・固定受けの金利スワップについても期待エクスポージャーの多寡とイールド・カーブの形状の関係を考察している。

表1に示した性質は、イールド・カーブの形状から将来時点での変動金利の支払いの期待値が決まることを思い出すとわかりやすい。イールド・カーブが順イールド (逆イールド) である場合には、1回ごとの変動金利の支払額は時間とともに増加 (減少) していき、ある将来の時点で固定金利の支払額を上回る (下回る) ことが期待される。したがって、変動金利の受け・固定金利の払いでスワップを考えると、イールド・カーブが順イールド (逆イールド) の場合、より将来に正 (負) の

41 ハンプ型のイールド・カーブは Vasicek [1977] のスポット・レート・モデルでは表現できないが、表1では参考までに対象としている。

キャッシュ・フローが期待されるため、期待エクスポージャーはイールド・カーブがフラットな場合に比べて大きく（小さく）なる⁴²。なお、最終的な双方向のCVAの額は、期待エクスポージャーのほかに、自社とカウンターパーティのCDSスプレッドの期間構造にも依存する。

金利スワップのCVAについては、(8)式の近似のもとで、スワップションの価格評価関数を利用することで計算できる。具体的にはアット・ザ・マネー（at-the-money）のスワップションが期待エクスポージャーに相当し、これにCDSスプレッドから逆算されたデフォルト確率を掛ければよい。ただし、Stein and Lee [2009] が指摘しているように、利払いの中間時点での評価に際して、スワップションの評価では次回の利払いについて期間按分することで利払額が調整されるのに対して、期待エクスポージャーの評価では次回の利払額は調整されないといった細かな違いがある点には若干の注意が必要である。

別の例として、ヨーロピアン型のバニラ・オプションを考えよう。原資産が株式であり、満期 T のバニラ・オプションの時点 t での時価を V_t と表す。無リスク金利 r は一定であり、配当 $q = 0$ とする。バニラ・オプションの時価 V_t は常に正であるため、

$$EPE(t) = E^Q[\max(V_t, 0)] = E^Q[V_t], \quad (54)$$

である。さらに、リスク中立測度のもとで割引率とバニラ・オプションの積 $e^{-rt} V_t$ がマルチンゲールであることから、

$$EPE(t) = E^Q[V_t] = e^{rt} V_0, \quad (55)$$

となる⁴³。このように、時価が必ず正であるデリバティブの期待エクスポージャーの計算は、正負両方の時価を取りうるデリバティブに比べて若干簡単になることがわかる。

3. 誤方向リスクに関するモデル

CVAにおける誤方向リスクとは、カウンターパーティのデフォルト確率の上昇と、エクスポージャーの増大に正の相関があり、デフォルト時に期待エクスポージャーが増大してしまうリスクを指す。誤方向リスクは古くはLevy and Levin [1999] やFinger [2000] において議論されている。2007～08年に起きた金融危機では、CVA

42 Sorensen and Bollier [1994] と Duffie and Huang [1996] は同様の点を議論している。Sorensen and Bollier [1994] は、カウンターパーティと自社の格付の差も考慮したうえで、イールド・カーブとエクスポージャーの関係を示している。四塚 [1997] も参照。

43 アメリカン・オプションのようなデリバティブを考慮すると、デリバティブの価値は必ずしもマルチンゲールにならないため、(55)式の展開は常に成立するわけではない。

の計算において、誤方向リスクを十分に考慮できていなかったことが指摘されており (Basel Committee on Banking Supervision [2009])、そのモデル化の重要性が再認識されている。誤方向リスクが存在しない場合には、CVA の一般的な計算式である (5) 式を (6) 式のように簡便な形に変形できた。しかし、誤方向リスクを考慮する必要がある場合には、期待エクスポージャーとデフォルト時点が独立であると仮定できないため、(5) 式から計算を進めることになる。特に、誤方向リスクを考慮したモデルで鍵となるのは、(5) 式右辺の中の

$$E^Q[\max(V_t, 0) \mid \tau = t], \quad (56)$$

という条件付き期待値の計算である。

(56) 式の条件付き期待値の評価方法には大別して 3 つの方法がある。

第 1 の方法は、条件付き期待値と無条件の期待値 (すなわち、期待エクスポージャー) の間に単純な比例関係を仮定するというものである。Levy and Levin [1999] や Redon [2006] 論文の前半部分の通貨スワップに関する研究がこれに相当する。計算のコストは少なくなるようにモデル化されているが、仮定した比例関係の妥当性が問題となる。

第 2 の方法は、デリバティブの時価 V_t をブラウン運動や幾何ブラウン運動等、解析的に扱いやすい確率過程によってモデル化するものである。Redon [2006] 論文の後半部分の研究や Pykhtin and Rosen [2010] の研究がこれに相当する⁴⁴。計算コストは第 1 の方法に比べて増えるものの、準解析的な扱いが可能であり、複数の取引をネッティングしてカウンターパーティ・レベルでの CVA を近似的に計算できることが長所と思われる。

第 3 の方法は、デリバティブの商品設計を忠実に捉え、原資産価格過程やデフォルト時点等をモデル化し、モンテカルロ・シミュレーションや有限差分法によって数値的に誤方向リスクを計算するものである。Brigo and Chourdakis [2009] や Lipton and Sepp [2009] の CDS に関する研究がこれに相当する。第 2 の方法より正確な点が長所であるが、個々の取引の CVA を計算するうえで相当の時間がかかることが短所であろう⁴⁵。

誤方向リスクを考慮する必要がある取引の例としては、以下のような取引が挙げられる。

44 Pykhtin and Rosen [2010] の誤方向リスクのモデル化は、特定の取引を対象としたものではなく、一般的に議論されている。

45 De Prisco and Rosen [2005] は、モンテカルロ・シミュレーションにより誤方向リスクを計算する場合、Glasserman and Li [2005] や Kalkbrenner, Lotter, and Overbeck [2004] が与信ポートフォリオのリスク計算に用いた加重サンプリング (importance sampling) を利用することで、時間を短縮できることを示している。

(i) 新興国の金融機関等との為替スワップ・通貨スワップの取引

ここでの誤方向リスクは、カウンターパーティの金融機関等のデフォルト・リスクの上昇と、相手国の通貨の下落が同時に起きやすいというリスクである。為替スワップ・通貨スワップでは、取引開始時点で、自国通貨建ての元本と交換に相手国通貨建ての元本を受け取り、満期時点で、相手国通貨建ての元本の支払いとの交換で自国通貨建ての元本を受け取る。相手国の通貨価値が下落すると、為替スワップ・通貨スワップのエクスポージャーが上昇するため⁴⁶、カウンターパーティのデフォルトが起きた際の損失は大きくなる⁴⁷。新興国の金融機関は自国通貨の価値が下落する場合にデフォルト・リスクが高まる傾向にあるため、この誤方向リスクは相手国が新興国であるときに注意が必要である。

(ii) 金融機関を参照している CDS の取引

ここでの誤方向リスクは、CDS を利用してプロテクションを買った場合、カウンターパーティとなる金融機関と参照先のデフォルト・リスクの上昇が同時に起きやすいというリスクである。これは、参照先が金融機関である場合に顕著である。なぜなら、金融機関のデフォルト・リスクは互いに強く相関していると考えられるからである⁴⁸。参照先とカウンターパーティが同じ金融グループや地域に属している場合は、さらに相関が強まることが予想される⁴⁹。

(iii) カウンターパーティと相関の強い企業の株式のプット・オプション

ここでの誤方向リスクは、ある企業の株式のプット・オプションを買っている場合、原資産である企業の株価が下がると、そのプット・オプションがイン・ザ・マネー (in-the-money) になる一方、カウンターパーティのデフォルト・リスクが上昇するというリスクである (Gregory [2010])⁵⁰。例えば、ある証券会社から、同じ金融グループの企業の株式のプット・オプションを買う例が考えられる。

46 取引当初の為替レートより自社にとって有利な為替レートとなり、含み益が発生するためである。なお、厳密には、新興国通貨に関しては、政府の規制により通貨の受渡しを行えず、ドルや円などの通貨建てで同等額の決済を行う場合が多い。こうした取引は、為替スワップでは NDF (non-deliverable forward)、通貨スワップでは NDS (non-deliverable swap) と呼ばれる。植木 [2010] の第 9 章 7 節を参照。

47 通貨スワップでは、満期において元本を交換するため、金利スワップに比べて、エクスポージャーが大きい (Duffie and Huang [1996])。通貨スワップでは主にこの元本から為替に対するリスクが発生する。このリスクを軽減するため、期中で値洗いを行う通貨スワップ (mark-to-market cross currency swap) も取引されている。植木 [2010] の第 8 章 24 節を参照。

48 こうした背景には、金融危機時におけるインターバンク市場での不安の伝播や、政府の銀行支援の有無等がある。なお、金融機関の間の相関以外にも同じ企業グループや同業種の相関等も考えられる (木野・糸田 [2010])。

49 2007～08 年に起きた金融危機では、住宅ローン関連の証券化商品の価格下落と、それらに保証を与えていたモノライン保険会社 (monoline insurance company) のデフォルト・リスクの上昇から生じる誤方向リスクが問題となった。木野・糸田 [2010] の第 6 章のコラム「プロテクションの売り手と参照組織の関係」を参照。

50 これはマートンの構造型モデルを考えると理解しやすい。株価の下落の背後には資産価値の下落があり、資産価値が下落して負債水準に近づくと、デフォルト・リスクが高まる。

(iv) 特定のコモディティへの依存性が強いカウンターパーティとの取引

この取引の例としては、航空会社との原油の先物取引が挙げられる。この例での誤方向リスクは、原油価格の上昇でカウンターパーティのデフォルト・リスクが高まると同時に、原油の先物取引の含み益が増加するというリスクである。カウンターパーティが航空会社である場合のように、原油価格の上昇によりコストが増加し、十分な価格転嫁ができずにデフォルト・リスクが高まる場合、この効果は顕著である (Redon [2006])。

(v) 金融危機時における金利デリバティブの取引

金融危機時には、カウンターパーティのデフォルト・リスクの上昇と同時に、緩和的な金融政策により金利の急低下が起こる場合が多い。このようにデフォルト・リスクと金利に強い負の相関がある場合、金利が低下するほど含み益が増加するような取引を行うと、誤方向リスクを抱えることになる。具体例としては、変動金利を払い、固定金利を受けるスワップが挙げられる。金利スワップを対象に、金利とデフォルト・リスクの相関を研究した論文としては Brigo and Pallavicini [2008] がある。

先行研究では、上記(i)と(ii)について研究したものが比較的多い。こうした研究を整理することで、(iii)、(iv)、(v)も含め、誤方向リスクを包含した取引全般の分析に役立てることができると思われる。そこで、本節では以下、(i)と(ii)のそれぞれの取引について誤方向リスクをモデル化している研究を解説する。

(1) 通貨スワップにおける誤方向リスク

通貨スワップのカウンターパーティ・リスクに関する研究としては、Duffie and Huang [1996]、Levy and Levin [1999]、Hübner [2001]、Redon [2006] がある⁵¹。いずれの研究も CVA という言葉を用いているわけではないが、カウンターパーティ・リスクを分析しており、特に Levy and Levin [1999] と Redon [2006] は、誤方向リスクについて明示的にモデル化している⁵²。

この2つのモデルはどちらも Merton [1974] の構造型モデルを基にしているが、カウンターパーティのデフォルトという条件下での期待値の計算方法には、異なる扱いが含まれている。すなわち、Levy and Levin [1999] と Redon [2006] 論文の前半で紹介されている方法は、条件付き期待値を誤方向リスクが顕在化した場合とそうでない場合に分けて評価する方法である。一方、Redon [2006] 論文の後半で紹介されている方法は、カウンターパーティの資産価値とデリバティブの時価を決定する

51 Baba and Packer [2009] と Baba and Sakurai [2011] は金融危機において、それぞれ為替スワップと通貨スワップの、カバー付き金利平価説 (covered interest parity; CIP) のもとの理論価格からの乖離が金融機関のカウンターパーティ・リスクの上昇によって引き起こされたことを実証分析している。

52 厳密には、Levy and Levin [1999] はクレジット・チャージ (credit charge) という名前で、本稿の (8) 式に相当する CVA を導入している。

2変量の幾何ブラウン運動の相関により誤方向リスクを取り入れる方法である。

以下では、まず場合分けによる方法を紹介し、次に2変量の幾何ブラウン運動の間に相関を入れる方法を紹介する。

イ. 場合分けによる方法

新興国の金融機関をカウンターパーティとして、米国の金融機関がドル建てのクーポンを受け取り、当該新興国通貨建てのクーポンを支払うスワップ取引を考える。元本を1とし、カウンターパーティが払うドル建てのクーポンを c_d 、自社が払う新興国の通貨建てのクーポンを c_f とし、付利期間を δ として時点 $T_n = n\delta$ ($n = 1, \dots, N$)でクーポンの交換が行われるとする。自社はドル建てで時価評価を行うとすると、当該通貨スワップの時点 t でのドル建て価値 V_t は、新興国通貨の為替レートを $S(t)$ 、ドルの無リスク金利（連続複利表示） r_d を一定として、リスク中立確率での期待値として次式で与えられる。

$$V_t = E_t^Q \left[\left(1 - \frac{S(T_N)}{S(0)} \right) e^{-r_d(T_N-t)} + \delta \sum_{n:t < T_n}^N \left(c_d - c_f \frac{S(T_n)}{S(0)} \right) e^{-r_d(T_n-t)} \right]. \quad (57)$$

ここで、右辺第1項は満期時点での元本交換、第2項はクーポン交換の合計額である。新興国通貨の無リスク金利（連続複利表示） r_f を一定とし、カバー付き金利平価説を勘案して期待値評価を行うと、

$$V_t = \left(1 - \frac{S(t)e^{(r_d-r_f)(T_N-t)}}{S(0)} \right) e^{-r_d(T_N-t)} + \delta \sum_{n:t < T_n}^N \left(c_d - c_f \frac{S(t)e^{(r_d-r_f)(T_n-t)}}{S(0)} \right) e^{-r_d(T_n-t)}, \quad (58)$$

となる。

Levy and Levin [1999] と Redon [2006] では、「新興国の政府がデフォルトを宣言し、通貨価値が急激に下落すると同時に、カウンターパーティである新興国の金融機関がデフォルトする」というケースと「新興国政府がデフォルトを宣言せず、通貨価値が急激に下落していない状況で、カウンターパーティである金融機関がデフォルトする」というケースの2つに分けて、条件付き期待値の計算を行っている。

新興国の政府および金融機関がデフォルトする時点をそれぞれ τ_G 、 τ とし、 $x^+ = \max(x, 0)$ という表記を導入すると、期待エクスポージャーは

$$E^Q[V_t^+ | \tau = t] = p_t E^Q[V_t^+ | \tau = t, \tau_G = t] + (1 - p_t) E^Q[V_t^+ | \tau = t, \tau_G \neq t], \quad (59)$$

となる⁵³。ここで、カウンターパーティがデフォルトした際、新興国の政府もデフォルトを宣言し、通貨が急激に下落する確率 p_t を

$$p_t = \Pr(\tau_G = t \mid \tau = t), \quad (60)$$

と定義している。

Redon [2006] では、さらに2つの仮定を置くことで、(59) 式の条件付き期待値を計算している。まず、第1の仮定として、政府がデフォルトした場合の新興国通貨の価値は必ず減価すると考える。このとき、(59) 式の右辺第1項は、

$$\mathbb{E}^Q[V_t^+ \mid \tau = t, \tau_G = t] = \mathbb{E}^Q[V_t \mid \tau = t, \tau_G = t], \quad (61)$$

となる。さらに(58) 式を用いると、

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^Q[V_t^+ \mid \tau = t, \tau_G = t] \\ &= \left(1 - \frac{\mathbb{E}^Q[S(t) \mid \tau = t, \tau_G = t] e^{(r_d - r_f)(T_N - t)}}{S(0)} \right) e^{-r_d(T_N - t)} \\ & \quad + \delta \sum_{n: t < T_n} \left(c_d - c_f \frac{\mathbb{E}^Q[S(t) \mid \tau = t, \tau_G = t] e^{(r_d - r_f)(T_n - t)}}{S(0)} \right) e^{-r_d(T_n - t)}, \end{aligned} \quad (62)$$

となる。

(62) 式の右辺で、元本の交換を表す第1項が、クーポン差の合計額を表す第2項に比べて十分大きいとすると、

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^Q[V_t^+ \mid \tau = t, \tau_G = t] \\ & \cong \left(1 - \frac{\mathbb{E}^Q[S(t) \mid \tau = t, \tau_G = t] e^{(r_d - r_f)(T_N - t)}}{S(0)} \right) e^{-r_d(T_N - t)}, \end{aligned} \quad (63)$$

と近似される。ここで、(63) 式の右辺中の条件付き期待値は、政府および金融機関の双方がデフォルトした場合の期待通貨価値を表しているが、それが評価時点の通貨価値 $S(0)$ を一定率だけ減価させたものとして、

$$\mathbb{E}^Q[S(t) \mid \tau = t, \tau_G = t] = R_g \cdot S(0), \quad (64)$$

と表されると仮定する。ここで、 $1 - R_g$ は通貨の減価率（条件付き期待減価率）であり、 R_g は回収率に相当する。 R_g は過去の新興国における通貨切下げ時のデータ

53 厳密には、 τ と τ_G が同時点になることは考えにくいだが、離散的な時間で捉え、ある一定の日数の間に τ と τ_G が含まれる場合には同時にデフォルトしたとみなしている。

などを参考に決められるが、Redon [2006] は、 R_g を 50% から 70% 程度としている。(63) 式に (64) 式を代入すると、(59) 式の右辺第 1 項に現れている条件付き期待値は、

$$E^Q[V_t^+ | \tau = t, \tau_G = t] = e^{-r_d(T_N-t)} - R_g e^{-r_f(T_N-t)}, \quad (65)$$

となり、回収率を考慮した割引債価値として表現できる。

第 2 の仮定は、「カウンターパーティである新興国の金融機関がデフォルトしても、新興国の政府がデフォルトしない限り、通貨価値が金融機関のデフォルトに影響されることはない」というものである。このとき、(59) 式の右辺第 2 項において、条件付き期待値を無条件の期待値で置き換えることができる。

$$E^Q[V_t^+ | \tau = t, \tau_G \neq t] = E^Q[V_t^+]. \quad (66)$$

(65) 式と (66) 式により、(59) 式の期待エクスポージャーを計算する準備はほぼ整った。最後の課題は、確率 p_t の計算であるが、これは以下のように計算する。まず、確率 p_t をベイズの定理を用いて、

$$p_t = \frac{\Pr(\tau_G = t)}{\Pr(\tau = t)} \cdot \Pr(\tau = t | \tau_G = t), \quad (67)$$

と変形する。デフォルト時点の分布 $\Pr(\tau_G = t)$ と $\Pr(\tau = t)$ はそれぞれ、ソブリン CDS スプレッドと、カウンターパーティである金融機関の CDS から求められる。CDS が取引されていない場合は、格付等から計算する。 $\Pr(\tau = t | \tau_G = t)$ は新興国がデフォルトを宣言した際に、カウンターパーティである金融機関がデフォルトする確率を表している。Redon [2006] では $\Pr(\tau = t | \tau_G = t) = 1$ と仮定している。これは、新興国がデフォルトを宣言した際には、カウンターパーティである新興国の金融機関は必ずデフォルトすることを意味しており、保守的な見積もりといえよう。

Levy and Levin [1999] は、Redon [2006] が前半で紹介している方法と同様の場合分けを行っているが、加えて、カウンターパーティのみがデフォルトした場合の回収率 R_c が、誤方向リスクによって影響されるモデルを提案している。以下では Levy and Levin [1999] の概要を紹介する。

カウンターパーティである金融機関の資産価値 A_t が標準偏差 σ のブラウン運動に従うとする。構造型モデルの議論に倣い、資産価値 A_t が負債水準 L を下回るとデフォルトが発生すると仮定する。鏡像原理 (reflection principle) を用いると⁵⁴、カウンターパーティが、時点 0 から時点 t までにデフォルトする確率 $\Pr[\tau_c \leq t]$ は次式で与えられる。

54 鏡像原理については例えば、Shreve [2004] の 3.7 節を参照。

$$\Pr[\tau_c \leq t] = 2\Phi\left(\frac{L - A_0}{\sigma_A \sqrt{t}}\right). \quad (68)$$

逆に、これを利用して、デフォルトが生じる負債水準 L を確率 $\Pr[\tau_c \leq t]$ を用いて表すと、

$$L = A_0 + \sigma_A \Phi^{-1}\left(\frac{\Pr[\tau_c \leq t]}{2}\right) \sqrt{t}, \quad (69)$$

となる。標準正規分布の分布関数の逆関数 $\Phi^{-1}(x)$ は、 $x < 0.5$ で負の値になることに注意すると、(69) 式は資産価値 A_t が $-\sigma_A \Phi^{-1}(\Pr[\tau_c \leq t]/2) \sqrt{t}$ だけ低下するとデフォルトが起きることを意味している。この式に基づき、Levy and Levin [1999] は、金融機関のみがデフォルトした場合の通貨の減価率 $1 - R_c$ を

$$1 - R_c = -\rho \sigma_{FX} \Phi^{-1}\left(\frac{\Pr[\tau_c \leq t]}{2}\right) \sqrt{t}, \quad (70)$$

としている⁵⁵。ここで、 σ_{FX} は通貨のボラティリティであり、 ρ は新興国の通貨価値とカウンターパーティの資産価値の相関である。(70) 式より、通貨価値 $S(t)$ と金融機関の資産価値 A_t の相関係数 ρ が正に大きくなればなるほど、通貨の減価率 $1 - R_c$ が大きくなることがわかる。

ロ. 2変量の幾何ブラウン運動による方法

Redon [2006] は後半部分でも、Levy and Levin [1999] と同様に、マーティンの構造型モデルを用いて⁵⁶、通貨スワップを含めた一般的なデリバティブの誤方向リスクについて研究している。その結果、以下でみるように、誤方向リスクを勘案するには、カウンターパーティである金融機関の資産価値 A_t とデリバティブの時価 V_t の間の相関係数 ρ を用いて、デリバティブの時価 V_t を決めるブラウン運動のドリフト μ_D とボラティリティ σ_D を変換すればよいことが示されている。

具体的には、まず、マーティンの構造型モデルによって、カウンターパーティのデフォルト・リスクを捉える。金融機関の資産価値 A_t を駆動する標準ブラウン運動を W_t とする。 A_t が平均 μ_A 、標準偏差 σ_A の幾何ブラウン運動に従うとすると、

$$A_t = A_0 \exp\left(\sigma_A \cdot W_t + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right) \cdot t\right), \quad (71)$$

と表される。負債価値 L が時間を通じて一定であるとする、時点 t までに金融機関がデフォルトする確率は、

55 これは通貨価値 $S(t)$ がブラウン運動に従っていると仮定していることに相当する。この仮定を置くと、(70) 式は2変量正規分布での条件付き期待値の計算から導出可能である。

56 厳密にはマーティンの構造型モデルではなく、Crosbie and Bohn [2003] に基づいている。ただし、Redon [2006] では“A simplified version of the Merton model”としてモデルが紹介されている。

$$\begin{aligned}
\Pr(\tau \leq t) &= \Pr\left(\inf_{s \in [0, t]} A_s \leq L\right) \\
&= \Pr\left(\inf_{s \in [0, t]} \left[\sigma_A W_s + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)s\right] \leq -\ln\left(\frac{A_0}{L}\right)\right) \\
&= \Phi(-DD(t)) + e^{-2\lambda\theta} \Phi(-DD(t) + 2\theta\sqrt{t}), \tag{72}
\end{aligned}$$

として求められる。ここで、

$$\lambda = \frac{\ln(A_0/L)}{\sigma_A}, \quad \theta = \frac{(\mu_A - \sigma_A^2/2)}{\sigma_A}, \quad DD(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}} + \theta\sqrt{t}, \tag{73}$$

と置いた。 $DD(t)$ はデフォルトに到達するまでの「距離」(distance to default) である⁵⁷。

次に、デリバティブの時価評価を考える。具体的には、デリバティブの時価 V_t が平均 μ_D 、標準偏差 σ_D のブラウン運動の関数 $f(\cdot)$ として

$$V_t = f(\mu_D + \sigma_D X_t), \tag{74}$$

として表されるとする。ここで、 X_t は W_t と相関 ρ を持った標準ブラウン運動である。このとき、 X_t は W_t とは独立な別の標準ブラウン運動 ε_t を用いて以下のように表せる。

$$X_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_t. \tag{75}$$

条件付きの期待エクスポージャー $e(t)$ は

$$\begin{aligned}
e(t) &= \mathbb{E}^Q[\max(V_t, 0) \mid \tau = t] \\
&= \mathbb{E}^Q[\max(f(\mu_D + \sigma_D(\rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_t)), 0) \mid \tau = t], \tag{76}
\end{aligned}$$

となる。デフォルトが生じる時点 $\tau = t$ では、 $A_t = L$ が成立しているため、(71) 式および (73) 式からわかるように $W_t = -\sqrt{t}DD(t)$ となることを利用すると、(76) 式は

$$e(t) = \mathbb{E}^Q[\max(f(\bar{\mu}_D + \bar{\sigma}_D \varepsilon_t), 0)], \tag{77}$$

となる。ただし、 $\bar{\mu}_D$ と $\bar{\sigma}_D$ は、

$$\bar{\mu}_D = \mu_D - \rho\sigma_D\sqrt{t}DD(t), \quad \bar{\sigma}_D = \sigma_D\sqrt{1 - \rho^2}, \tag{78}$$

.....
57 導出の詳細については、Crosbie and Bohn [2003] を参照。

である。(77) 式は、(76) 式の条件付き期待値の条件 $\tau = t$ を外して無条件の期待値計算に変更した形になっている。また、(77) 式におけるドリフト $\bar{\mu}_D$ とボラティリティ $\bar{\sigma}_D$ は、元のドリフト μ_D とボラティリティ σ_D に相関係数 ρ を反映させる形で変換を行ったものとなっている。(77) 式はデリバティブ時価 V_t の正の部分の期待値を評価したものであるが、より詳細にデリバティブ時価 V_t の確率分布の分布関数を考えると、

$$\begin{aligned} \Pr(V_t \leq x \mid \tau = t) &= \Pr(f(\mu_D + \sigma_D X_t) \leq x \mid \tau = t) \\ &= \Pr(f(\bar{\mu}_D + \bar{\sigma}_D \varepsilon_t) \leq x), \end{aligned} \quad (79)$$

となり、無条件の確率分布に帰着する。

なお、Pykhtin and Rosen [2010] は、デリバティブの時価がブラウン運動に従うと仮定し、誤方向リスクをモデル化している⁵⁸。モデルは異なるものの、ドリフトとボラティリティのパラメータを変換することで条件付き期待値を無条件の期待値として表現し直すという解法を使っている点で同様である。

(2) CDS における誤方向リスク

本節冒頭の(ii)で取り上げたように、金融機関を参照する CDS では誤方向リスクが顕在化する場合がある。CDS のプライシングにおけるカウンターパーティ・リスクの評価については、さまざまな研究が行われてきたが、大別すると構造型モデルと誘導型モデルの2つのアプローチに分類される。さらに、各研究を特徴づけるうえでポイントとなるのは、①デフォルトの相関のモデル化、②与えられた CDS スプレッドの期間構造 (CDS カーブ) へのキャリブレーションの柔軟性、③計算負荷の3点である⁵⁹。

以上の観点でカウンターパーティ・リスクを取り入れた CDS のプライシング・モデルに関する代表的な論文を整理すると、表2のとおりとなる。

まず、構造型モデルから概観する。構造型モデルの欠点としては、デフォルト確率の期間構造の表現能力の低さが指摘されている⁶⁰ (Schönbucher and Schubert [2001])。Hull and White [2001] は、デフォルトの起こる負債水準が時間依存性を持っていて、観測された CDS カーブと整合的に変化していくと考えることで、この問題を解決している。具体的には、負債水準は全ての期間で一定ではなく、区分さ

58 Gregory [2010] の第 8 章の Appendix A でも Pykhtin and Rosen [2010] と同様のモデルが紹介されている。

59 なお、クレジット・デリバティブには CDS のほかに、トータル・リターン・スワップ等、さまざまな取引があるが、CDS に限らず、誤方向リスクはクレジット・デリバティブで顕在化しやすい (Gregory [2010])。これはエクスポージャー (ペイオフ) を定める参照先のデフォルトが、カウンターパーティのデフォルトと連動して起こりやすいためである。

60 市場で観測される CDS スプレッドから求められたデフォルト確率の期間構造にキャリブレーションするために、デフォルト確率の期間構造モデルに柔軟性を持たせる必要がある。

表2 カウンターパーティ・リスクを取り入れたCDSのプライシング・モデルの分類

	構造型モデル		誘導型モデル		
	Hull and White [2001]	Lipton and Sepp [2009]	Brigo and Chourdakis [2009]	Leung and Kwok [2005]	Crépey, Jeanblanc, and Zargari [2009]
デフォルトの相互依存性	2変数の正規コピュラ	共通ジャンプ	コピュラ	デフォルト強度伝播	マルコフ・コピュラ
CDSカーブへのキャリブレーション	○	○	○	×	○
計算負荷	×	△	△	○	×

れた期間ごとに設定されると仮定している⁶¹。他方、Lipton and Sepp [2009] は、カウンターパーティの資産価値を駆動するジャンプの強度が区分された期間ごとに設定されるとして、同様の問題に対処している。

また、デフォルトの相関については、Hull and White [2001] は2変数のブラウン運動によって参照先とカウンターパーティのデフォルトの相関を表現している。Lipton and Sepp [2009] は参照先とカウンターパーティの両方に共通するジャンプを確率変数として導入することでデフォルトの相関をモデル化している。

構造型モデルに基づく両研究の実務上の課題は計算負荷であろう。キャリブレーションに関しては、期間の区分数を増やすことで、デフォルト確率の期間構造をより正確に表現できるが、計算負荷が増える。また、構造型モデルでは、満期が短いところでCDSスプレッドがゼロになることを避けるために、何らかの工夫が必要になる。Hull and White [2001] は、期近の負債水準を資産価値に急激に近づけることによりこの問題に対処しているが、Schönbucher and Schubert [2001] は、こうした負債水準の扱いは期近の区分数を大幅に増やすことになり、キャリブレーションの計算負荷が大きくなるうえに、その結果が不安定になると指摘している。これに対し、Lipton and Sepp [2009] は資産価値の確率過程にジャンプを導入することで、期近のCDSスプレッドもゼロにならないようにしている。

次に、誘導型モデルについて整理する。誘導型モデルについては、従来からデフォルトの相互依存性の表現能力の低さが指摘されてきたが（Hull and White [2001]、Yu [2005]）、いくつかの解決方法が提案されている。

第1の方法はコピュラ⁶²を利用する方法である。例えば、Brigo and Chourdakis [2009] と Brigo and Capponi [2009] では、確率変数であるデフォルト強度を CIR

61 ある変数を区分的に一定 (piecewise constant) とする仮定は、何らかの期間構造を持った市場データにモデルをキャリブレートする際、モデルのフィッティングに柔軟性を持たせるため、金融工学の他の分野でもしばしば用いられる。

62 コピュラについては、例えば、戸坂・吉羽 [2005] や新谷・山田・吉羽 [2010] を参照。

(Cox-Ingersoll-Ross) 過程によりモデル化し⁶³、カウンターパーティと参照先のデフォルト時点の確率分布の間の依存性をコピュラによって記述している。

第2の方法は Jarrow and Yu [2001] のデフォルト強度伝播 (default intensity contagion) モデルに基づく方法である。Leung and Kwok [2005] は Jarrow and Yu [2001] のモデルを用いて、自社 (カウンターパーティ) のデフォルトが起きるとカウンターパーティ (自社) のデフォルト強度の上昇が引き起こされることをモデル化し、CDS のプライシングを行っている⁶⁴。

第3の方法はマルコフ・コピュラによる方法である。具体的には、まず、参照先とカウンターパーティがそれぞれデフォルトしているかどうかを定める確率変数をマルコフ過程としてモデル化する。これが周辺分布に相当する。次に、参照先とカウンターパーティがそれぞれデフォルトしているか否かで4通りの状態を考え、この4つの状態を1つのベクトルとみなして、そのベクトルの時間推移を定める作用素 (無限小時間での遷移確率行列) を与える。最後に、参照先とカウンターパーティがともにデフォルトしている状態に移行する確率を与える。この確率がコピュラの同時分布に相当しており、誤方向リスクの高まりはこの確率をより大きくすることで捉えられる。Crépey, Jeanblanc, and Zargari [2009] は、マルコフ・コピュラの枠組みを用いて、誤方向リスクのある CDS のプライシングを行っている。

上記の論文の多くは、CVA が金融工学の用語として定着する以前に書かれたため、CVA という概念を明示的には扱っていない。そこで以下では、これらの論文の中で比較的新しく、誤方向リスクを明示的に扱って CDS のプライシングを分析している2つの研究、すなわち、Lipton and Sepp [2009] の構造型モデルによるアプローチと Brigo and Chourdakis [2009] の誘導型モデルによるアプローチを解説する⁶⁵。これら2つの研究は、誤方向リスクのモデル化、すなわちデフォルトの関連のモデル化において、共通ジャンプとコピュラという異なった方法を用いており、この分野の研究の潮流を概観するうえで参考になろう。

イ. 構造型モデルと共通ジャンプによるアプローチ

Lipton and Sepp [2009] はマーソンの構造型モデルを拡張し、カウンターパーティ・リスクが存在するもとの CDS のプライシングを研究している。具体的には、企業の資産価値の従う確率過程にジャンプを導入するとともに、負債水準を時間に依存させることで、CDS スプレッドの期間構造へのキャリブレーションを可能にしている。CDS の参照先企業とカウンターパーティのデフォルトの相互依存性については、カウンターパーティと参照先の両方の資産価値に影響する共通ジャンプによってモデル化されている。以下では、この Lipton and Sepp [2009] のモデルについて

63 Cox, Ingersoll, and Ross [1985] はスポット・レートに平方根過程を仮定することにより、割引債の価格を導出している。本稿では金融経済学の分野での慣習に従い、平方根過程を CIR 過程と呼ぶ。

64 その他の研究として、例えば、Zheng and Jiang [2009] は、カウンターパーティ・リスクを考慮したバスケット CDS のプライシングをデフォルト強度伝播モデルに基づいて行っている。

65 なお、どちらの論文も担保についてはモデル化していない。

解説する。

まず、参照先企業 1 の資産価値 $A_1(t)$ とカウンターパーティ 2 の資産価値 $A_2(t)$ はそれぞれ次式のようにジャンプ拡散過程に従うものとする。

$$dA_i(t) = (r(t) - q_i(t) - \kappa_i \lambda_i(t)) A_i(t) dt + \sigma_i(t) A_i(t) dW_i + (\exp(j_i) - 1) A_i(t) dN_i, \quad i = 1, 2. \quad (80)$$

ここで、 $r(t)$ は無リスク金利であり、 $q_i(t)$ は配当率で各企業 i に依存する。 W_i は標準ブラウン運動であり、 W_1 と W_2 の間の相関は ρ である。 N_i は強度を $\lambda_i(t)$ とするポアソン過程であり、後述のとおり、カウンターパーティと参照先企業に共通するジャンプを表すポアソン過程と、個別に生じるジャンプを表すポアソン過程の和で表現される。ドリフト項に含まれている κ_i は、ジャンプを考慮したドリフト項の調整パラメータであり、

$$\kappa_i = \mathbb{E}^Q[\exp(j_i) - 1] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j_i) \bar{\omega}(j_i) dj_i - 1, \quad (81)$$

と定義される。 $\bar{\omega}(j_i)$ は各企業のジャンプ幅の対数値 j_i に関する確率密度関数である。Lipton and Sepp [2009] は、 $\bar{\omega}(j)$ について、1パラメータ ν の具体的な確率密度関数形として、デルタ関数型と指数関数型の 2 つを提案している。いずれの関数型でもドリフト調整パラメータ κ は ν の簡単な関数で表現できるため、キャリブレートしやすい。

一方、各企業の負債水準 $L_i(t)$ の変化は、次式のように、(80) 式で与えられる資産水準の平均的な変化と等しくなるような確定的な時間の関数とする。

$$L_i(t) = L_i(0) \exp\left(\int_0^t \left(r(s) - q_i(s) - \frac{1}{2} \sigma_i^2(s)\right) ds\right), \quad i = 1, 2. \quad (82)$$

通常の構造型モデルと同様に

$$x_i(t) = \ln\left(\frac{A_i(t)}{L_i(t)}\right), \quad (83)$$

というレバレッジ比率を表す変数を導入し、 $x_i(t)$ が 0 を下回ると企業 i はデフォルトすると考える。

(80) 式右辺第 3 項のジャンプ過程については、 M 社の企業間の資産相関を考える際には $2^M - 1$ 個のジャンプの存在をあらかじめ仮定する。 M 個の数字から作られる冪集合から空集合を除いたものを $\Pi(M)$ とする。例えば、 $M = 2$ であれば、 $\Pi(M) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ となる。 π を $\Pi(M)$ のある要素とし、 N_π を対応するポアソン過程とし、 $\lambda_\pi(t)$ をその強度とする。 $\pi' \neq \pi$ であれば $N_{\pi'}$ と N_π は独立であるとする。このとき、企業 i のジャンプ項を以下のように与える。

$$N_i = \sum_{\pi \in \Pi(M)} 1_{\{i \in \pi\}} N_\pi, \quad \lambda_i(t) = \sum_{\pi \in \Pi(M)} 1_{\{i \in \pi\}} \lambda_\pi(t). \quad (84)$$

例えば、参照先とカウンターパーティの2企業のみを考える場合のジャンプとその強度 N_i 、 $\lambda_i(t)$ は、

$$\begin{aligned} N_1 &= N_{\{1\}} + N_{\{1,2\}}, & N_2 &= N_{\{2\}} + N_{\{1,2\}}, \\ \lambda_1(t) &= \lambda_{\{1\}}(t) + \lambda_{\{1,2\}}(t), & \lambda_2(t) &= \lambda_{\{2\}}(t) + \lambda_{\{1,2\}}(t), \end{aligned} \quad (85)$$

と表現でき、参照先とカウンターパーティが $N_{\{1,2\}}$ というポアソン過程のジャンプを共有することで、資産間の相関は表現される。カウンターパーティ・レベルでのCVAを計算する際には、2企業のみではなく、(84)式のように対象となるポートフォリオに含まれる M 社の企業全てを考慮する必要がある。このとき、ジャンプ $N_{\{1, \dots, M\}}(t)$ は、实体经济や金融市場に対する市場のシステミック・リスクを表していると捉えることができる。

以上の設定のもとで、CDSのプライシングは偏微分積分方程式 (partial integro-differential equations; PIDE) を数値的に解くことに帰着する⁶⁶。Lipton and Sepp [2009] は、偏微分積分方程式の係数が時間に依存する場合としない場合の両方について解法を提案している。Lipton and Sepp [2009] は、係数に時間依存性がない場合については、Lipton [2002] や Sepp [2004] で示されているのと同様に、偏微分積分方程式に対して時間に関するラプラス変換を施すことで方程式が解けることを示している。一方、デフォルトの期間構造へのキャリブレーションの結果、ジャンプ強度を表す係数に時間依存性がある場合については、解法は複雑になるが、離散フーリエ変換 (discrete Fourier transform) を用いて計算できるとして解法の概略を示している。

具体的なキャリブレーションの手順としては、まず、参照先企業とカウンターパーティのそれぞれのボラティリティ $\sigma_i(t)$ 、ジャンプ強度 $\lambda_i(t)$ 、ジャンプのパラメータ ν_i に対してキャリブレーションする。次に、個別ジャンプの強度 $\lambda_{\{1\}}(t)$ 、 $\lambda_{\{2\}}(t)$ と共通ジャンプの強度 $\lambda_{\{1,2\}}$ については、以下のような関係式を仮定する。

$$\begin{aligned} \lambda_{\{1,2\}}(t) &= \max(\rho, 0) \min\{\lambda_1(t), \lambda_2(t)\}, \\ \lambda_{\{1\}}(t) &= \lambda_1(t) - \lambda_{\{1,2\}}(t), & \lambda_{\{2\}}(t) &= \lambda_2(t) - \lambda_{\{1,2\}}(t). \end{aligned} \quad (86)$$

なお、標準ブラウン運動の相関 ρ は別のクレジット・デリバティブから求めるか、ヒストリカル・データから推定することを提案している。

66 一般にジャンプを含む確率過程のもとでのデリバティブのプライシングは、偏微分積分方程式を解くことに帰着する。例えば、Sepp [2004] を参照。

Lipton and Sepp [2009] は、CDS の参照先と、CDS のプロテクションの売り手であるカウンターパーティの間の相互依存性を考慮した際、プロテクションの時価に対して CVA がどの程度になるかを数値検証している。具体的には、参照先とカウンターパーティの CDS スプレッドをそれぞれ、250 bps、150 bps 程度とし、相関 $\rho = 0.5$ で計算すると、CVA の割合はジャンプ幅の密度関数形に応じて時価の 2~10% 程度になると報告している。また、デルタ関数型のジャンプのもとでの CVA の方が、指数関数型ジャンプのもとでのそれより大きいことも指摘している。

ロ. 誘導型モデルとコピュラによるアプローチ

Brigo and Chourdakis [2009] は、CDS の参照先とカウンターパーティのデフォルト強度を CIR 過程によってモデル化したうえで、2社のデフォルトの相互依存性を正規コピュラによってモデル化した。この手法では、誤方向リスクは条件付きコピュラによって捉えられている。以下では、モデルの設定と条件付きコピュラの計算について紹介する。

まず、デフォルト強度 $\lambda_j(t)$ については、(87) 式のように CIR 過程に従う状態変数 $y_j(t)$ を用いてモデル化する。以下、 $j = 1$ は CDS の参照先、 $j = 2$ はカウンターパーティを表す。 W_j は独立な標準ブラウン運動である。

$$\begin{aligned}\lambda_j(t) &= y_j(t) + \psi_j(t, \beta_j), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, \\ dy_j(t) &= \kappa_j(\mu_j - y_j(t)) dt + \nu_j \sqrt{y_j(t)} dW_j, \quad j = 1, 2.\end{aligned}\tag{87}$$

ここで、 $\psi_j(t, \beta_j)$ はキャリブレーションに柔軟性を持たせるための時間に関する確定的な関数であり、 β_j はその振舞いを決定するパラメータ群である。 $\psi_j(t, \beta_j)$ を用いることで、市場で観測された CDS スプレッドにデフォルト強度 $\lambda_j(t)$ を完全にフィットさせることができる。

次に、参照先 1 とカウンターパーティ 2 のデフォルトの依存性については、 $[0, 1]$ 区間の一様分布に従う確率変数 U_1 と U_2 の同時分布関数、すなわち、(88) 式のコピュラ $C(u_1, u_2)$ を用いてモデル化する⁶⁷。

$$C(u_1, u_2) = \Pr(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2).\tag{88}$$

以下、確率変数 U_1, U_2 が (87) 式のデフォルト強度 $\lambda_j(t)$ で与えられる参照先 1 とカウンターパーティ 2 のデフォルト時刻 τ_1, τ_2 とどのように関係づけられるかを説明する。まず、累積デフォルト強度 $\Lambda_j(t)$ を

$$\Lambda_j(t) = \int_0^t \lambda_j(s) ds, \quad j = 1, 2,\tag{89}$$

67 Brigo and Chourdakis [2009] では、(88) 式のコピュラ的具体例として正規コピュラを用いている。

と定義すると、(87) 式のように与えられたデフォルト強度 $\lambda_j(t)$ のもとでは、 $\Lambda_j(t)$ の確率分布は解析的に表現できる⁶⁸。また、累積デフォルト確率は $1 - \exp(-\Lambda_j(t))$ と表現され、初期時点では 0、遠い将来まで考えると 1 に近づくことから、 $[0, 1]$ の分布となる。したがって、各社に対して $[0, 1]$ の一様分布に従う確率変数 U_j を与えると、

$$U_j = 1 - \exp(-\Lambda_j(\tau_j)), \quad j = 1, 2, \quad (90)$$

という関係式によって、確率変数 U_j とデフォルト時点 τ_j が 1 対 1 の関係で対応づけられる。

(88) 式のコピュラを用いて誤方向リスクはモデル化されるが、CDS のプライシングで誤方向リスクが顕現化するの、カウンターパーティ 2 が参照先 1 より先にデフォルトする場合である。すなわち、「カウンターパーティ 2 が参照先 1 より先にデフォルトする」という条件付きで参照先 1 のデフォルト時点の確率分布を捉える必要がある。以下、この条件付きの確率分布が本モデルで数値積分を用いて簡単に計算できることを示す。

所与とするのは、①カウンターパーティ 2 についてはデフォルト時点 τ_2 までの情報 F_{τ_2} が得られており、②カウンターパーティ 2 が参照先 1 より先にデフォルトする $\tau_1 > \tau_2$ という 2 つの条件である。この条件のもとで参照先 1 が時点 T まで生存している確率は $\Pr(\tau_1 > T \mid F_{\tau_2}, \tau_1 > \tau_2)$ と表すことができる。

確率 $\Pr(\tau_1 > T \mid F_{\tau_2}, \tau_1 > \tau_2)$ の 2 つの条件をそれぞれコピュラの条件で置き換えよう。まず、①については、(90) 式を用いて、 τ_2 に対応する U_2 が所与であるという条件に置き換える。また、②については、 τ_1 の下限である τ_2 を対応する \bar{U}_1 で表し、条件 $\tau_1 > \tau_2$ を $U_1 > \bar{U}_1$ で置き換える。ここで、 \bar{U}_1 は

$$\bar{U}_1 = 1 - \exp\{-\Lambda_1(\tau_2)\}, \quad (91)$$

で定められる。

このように条件を置き換えると、確率 $\Pr(\tau_1 > T \mid F_{\tau_2}, \tau_1 > \tau_2)$ は、条件付きコピュラ $C_{1|2}(u, U_2)$ と、 τ_1 に対応する U_1 の周辺分布の確率 $P(u)$ を用いて以下の積分で表現できる。

$$\Pr(\tau_1 > T \mid F_{\tau_2}, \tau_1 > \tau_2) = \int_{\bar{U}_1}^1 P(u) dC_{1|2}(u, U_2). \quad (92)$$

積分の下限が \bar{U}_1 であるのは、 $U_1 > \bar{U}_1$ という条件があるためである。

(92) 式の積分の $P(u)$ 、 $C_{1|2}(u, U_2)$ の各要素は以下のように計算できる。まず、 U_1 の確率 $P(u)$ は

68 (87) 式のデフォルト強度に含まれる CIR 過程に従う $y_j(t)$ については、ジャンプの項を追加することもでき、その場合も累積デフォルト強度 $\Lambda_j(t)$ の確率分布は解析的に表現される。

$$P(u) = \Pr(u > 1 - \exp\{-\Lambda_1(T)\} | F_{t_2}) = \Pr(\Lambda_1(T) < -\ln(1 - u)), \quad (93)$$

で与えられ、 $\Lambda_1(T)$ の分布関数に基づく確率に帰着する。 $\Lambda_1(T)$ の確率分布は解析的に評価されているため、(93) 式の実確率はそれを用いて簡単に評価できる。次に、(92) 式右辺の条件付きコピュラ $C_{1|2}(u, U_2)$ は

$$\begin{aligned} C_{1|2}(u_1, U_2) &= \Pr(U_1 \leq u_1 | U_2, U_1 > \bar{U}_1) \\ &= \frac{\Pr(U_1 \leq u_1 | U_2) - \Pr(U_1 \leq \bar{U}_1 | U_2)}{1 - \Pr(U_1 \leq \bar{U}_1 | U_2)}, \end{aligned} \quad (94)$$

となる。この条件付きコピュラは、(88) 式のコピュラが微分可能であれば、

$$C_{1|2}(u_1, U_2) = \frac{\frac{\partial C(u_1, U_2)}{\partial u_2} - \frac{\partial C(\bar{U}_1, U_2)}{\partial u_2}}{1 - \frac{\partial C(\bar{U}_1, U_2)}{\partial u_2}}, \quad (95)$$

として計算できる⁶⁹。このように、(92) 式の積分は数値積分を行うことで計算できることがわかる。

Brigo and Chourdakis [2009] は、正規コピュラのもとで、満期 5 年の CDS について誤方向リスクを試算している。具体的には、参照先 1 とカウンターパーティ 2 の CDS スプレッドがそれぞれ 252 bps、120 bps、回収率 30% という設定のもとで、正規コピュラの相関係数が 60% とすると、誤方向リスクを勘案するために必要な CDS スプレッドの追加調整幅は 60~90 bps になると報告している。なお、CDS スプレッドのボラティリティが増加するほど、この追加調整は大きくなる。

Brigo and Capponi [2009] は、Brigo and Chourdakis [2009] をさらに拡張し、DVA を考慮するために、自社のデフォルトを考慮したモデルを提案している。基本的なモデルの設定は同じであり、デフォルト強度がジャンプ付きの CIR 過程に従うとしている⁷⁰。

4. アメリカン・モンテカルロ法による CVA の計算

CVA の計算は、原理的には、(5) 式について期待値計算と積分計算を行うことに尽きる。しかし、実務上は、経路依存型のエキゾチック・デリバティブの取扱いをはじめとして、CVA を正確かつ高速に計算することは必ずしも容易でない。なぜな

69 例えば、正規コピュラであれば、 $C(u_1, u_2)$ の u_2 での偏微分は 1 次元の標準正規分布の密度関数、分布関数とその逆関数で書き表せて、簡単に計算できる。

70 室井 [2006] は、CVA について議論したものではないが、Brigo and Capponi [2009] と同様に、CDS 参照先、カウンターパーティ、自社の 3 社のデフォルト強度をモデル化して CDS プライシングを行っている。具体的には、偏微分方程式の数値解法と漸近展開の 2 つの解法を提案している。

ら、一般に解析解を持たないような経路依存型のデリバティブについては、モンテカルロ・シミュレーションか偏微分方程式の数値計算を行うことで価格を求めるが⁷¹、CVA の計算においては、さらに、カウンターパーティのデフォルト時点ごとに、その価格自体の確率分布を計算する必要があるからである。このため、モンテカルロ・シミュレーションで求めた価格に対してさらにモンテカルロ・シミュレーションを行って分布を導出することになり、二重のシミュレーションが必要になって計算時間が増大してしまう⁷²。

こうした問題に対するアプローチとして、Cesari *et al.* [2010] が紹介しているのがアメリカン・モンテカルロ法 (American Monte Carlo; AMC) である。アメリカン・モンテカルロ法とは、アメリカン性 (早期償還条項付き取引) を持つデリバティブをモンテカルロ・シミュレーションによりプライシングを行う手法の総称である⁷³。本稿で扱っている CVA 自体はアメリカン性との直接的な関連はないが、以下で示すように CVA の計算においてもアメリカン・モンテカルロ法の適用は有効である。そこで、本稿では実務家の慣習に従い、CVA の計算で用いるモンテカルロ法もアメリカン・モンテカルロ法と呼ぶことにする。

具体的に CVA の計算においてアメリカン・モンテカルロ法の優れている点は、デリバティブの時価の分布が各時点で近似的に計算できることにある。アメリカン・モンテカルロ法では満期から現時点に向けてバックワードに、各時点でのデリバティブの時価を何らかの近似的な手法で推定していく。これにより、シミュレーションで発生させた各パスについて、与えられた時点におけるデリバティブの価格が近似的に定められる。パスごとに求められた価格を使えば、その時点でのデリバティブの時価の標本分布が得られる。

一方、アメリカン・モンテカルロ法を CVA の計算に実際に応用した研究例はまだ少ない。例えば、ポテンシャル・エクスポージャーを計算する場合には、デリバティブの時価の分布の裾 (tail) が重要な情報となるが、こうした計算においてアメリカン・モンテカルロ法による近似計算がどの程度まで正確なのかについての研究は現時点ではなされていないようである。

本節では以下、アメリカン・モンテカルロ法の基本となる手法として、Longstaff and Schwartz [2001] の最小二乗モンテカルロ法と Tilley [1993] のバンドリング法を紹介したうえで、アメリカン・モンテカルロ法を CVA の計算に応用した研究について触れる。

71 経路依存性のないエキゾチック・デリバティブについてはツリーを用いた解法も考えられるが、多資産のデリバティブをプライシングするには適していない。

72 経路依存性のあるデリバティブの中でも比較的単純なデリバティブについては、CVA の計算が保守的になることを前提として、解析解のあるデリバティブによって置き換えるという解決策も考えられる。例えば、ノック・アウト条項付きのコール・オプションをヨーロッパン・コール・オプションで代替するといった方法がある (Cesari *et al.* [2010])。

73 アメリカン・モンテカルロ法全般については Glasserman [2004] の第 8 章を参照。

(1) 最小二乗モンテカルロ法

まず、Longstaff and Schwartz [2001] の最小二乗モンテカルロ法 (least squares Monte Carlo approach) をアメリカン・オプションに適用した場合について考える。アメリカン・オプションでは権利行使が満期までの任意の時点で可能であるが、以下では権利行使時点が有限個 $G = \{t_0 < t_1 < \dots < t_M \leq T\}$ で与えられている場合のみを考える⁷⁴。時点 t_m でみた最適停止時刻 τ を $G_m = \{t_m < t_{m+1} < \dots < t_M \leq T\}$ の要素とする。ペイオフを $h(S)$ とするアメリカン・オプションの時点 t_m での価格 $V_m(S)$ は、原資産価格を $S(t_m) = S$ とすると、以下のように条件付き期待値で表すことができる。

$$V_m(S) = \sup_{\tau \in G_m} E^Q[h(S(\tau)) | S(t_m) = S]. \quad (96)$$

なお、議論を簡略化するため、無リスク金利はゼロとする。

最小二乗モンテカルロ法は、以下のように2段階で近似を行うことで(96)式を計算する。

第1の近似は時間の離散化である。離散時間での動的計画法の形で(96)式を表現し直すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} V_M(S) &= h(S(t_M)), \\ V_m(S) &= \max[h(S(t_m)), E^Q[V_{m+1}(S(t_{m+1})) | S(t_m) = S]], \\ m &= 0, \dots, M-1. \end{aligned} \quad (97)$$

ここで、時間について満期 t_M からバックワードに価格を計算していることに注意されたい。 t_m 時点でのデリバティブの価格は、権利行使する場合のペイオフ $h(S(t_m))$ と権利行使しない場合の価格 $E^Q[V_{m+1}(S(t_{m+1})) | S(t_m) = S]$ のうち、どちらか大きい方になる。後者の権利行使しない場合の価格が条件付き期待値の形になっていることに注意する。

第2の近似は最小二乗法による条件付き期待値の推定であり、アメリカン・オプションのプライシングで鍵となる部分である。まず、条件付き期待値

$$F_m(S) \equiv E^Q[V_{m+1}(S(t_{m+1})) | S(t_m) = S], \quad (98)$$

が無限個の基底関数 $\psi_k(S)$ の線形結合で表現されるとする。Longstaff and Schwartz [2001] は、(99)式のように条件付き期待値を有限個の基底関数 $\psi_k(S)$ の線形結合で近似した。

74 厳密にはバミューダ・オプションを考えていることに相当するが、以下では、アメリカン・オプションと表記する。

$$F_m(S) = \sum_{k=1}^K c_k^m \psi_k(S). \quad (99)$$

ここで、 $\psi_k(S)$ の基底関数として、具体的にはラゲール多項式、エルミート多項式、ルジャンドル多項式などが用いられる。(98) 式右辺の期待値評価する前の確率変数については、

$$V_{m+1}(S(t_{m+1})) = \sum_{k=1}^K c_k^m \psi_k(S) + \varepsilon_m, \quad (100)$$

であるとする。 ε_m は誤差項であり、平均 0 と仮定する。仮に (100) 式の左辺が既知であれば、回帰係数 c_k^m ($k = 1, \dots, K$) を最小二乗法によって推定することができる。このため、本手法は最小二乗モンテカルロ法と名付けられている。この回帰の結果を (99) 式に適用すれば、条件付き期待値 $F_m(S)$ が近似的に求まり、モンテカルロ・シミュレーションを二重に実行することを避けられる。なお、Longstaff and Schwartz [2001] は、最小二乗モンテカルロ法の正確性は、1次元の場合には、多項式の選択によらず、 $K = 3$ でも条件付き期待値を近似するのに十分であると述べている。

具体的なアルゴリズムは以下ようになる。まず、モンテカルロ・シミュレーションにより、 N 本のパス $S_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) を発生させる。計算は時間についてバックワードに行く⁷⁵。時点 t_{m+1} でのデリバティブの価格 $\hat{V}_{m+1}(S_i)$ は既に計算されているとして、時点 t_m での価格を求める⁷⁶。 $\hat{V}_{m+1}(S_i)$ 、 $F_m(S_i)$ 、 c_k^m 、 $\psi_k(S_i)$ 、 ε_m のベクトルをそれぞれ以下のように表記する。

$$\begin{aligned} \hat{V}_{m+1} &= [\hat{V}_{m+1}(S_1), \dots, \hat{V}_{m+1}(S_N)]^T, \quad \mathbf{F}_m = [F_m(S_1), \dots, F_m(S_N)]^T, \\ \mathbf{c}_m &= [c_1^m, \dots, c_K^m]^T, \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1(S_1), \dots, \psi_K(S_1) \\ \vdots \\ \psi_1(S_N), \dots, \psi_K(S_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_m = [\varepsilon_{m,1}, \dots, \varepsilon_{m,N}]^T. \end{aligned} \quad (101)$$

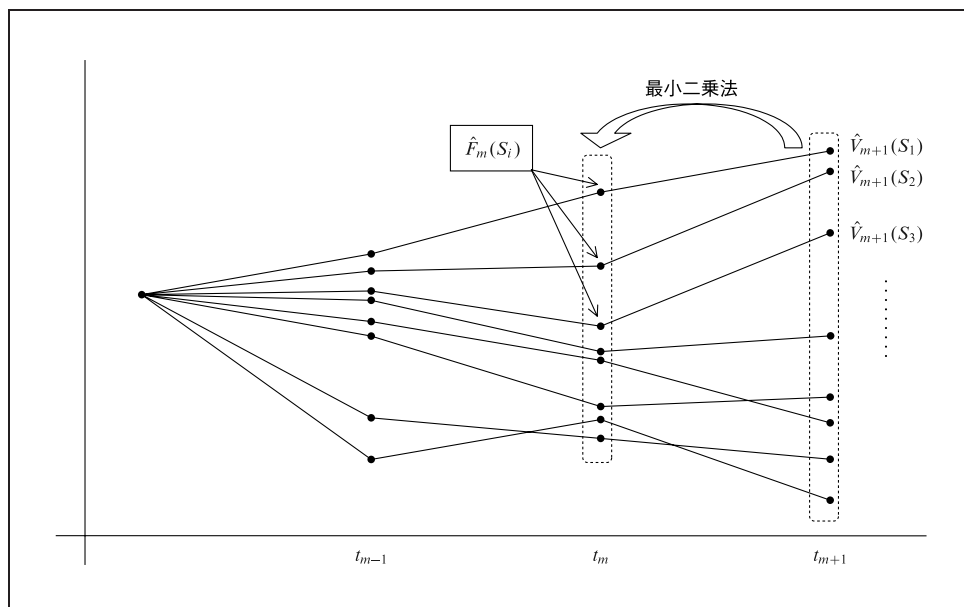
(100) 式をベクトル表記に書き改めたくて左辺を既に推定されている \hat{V}_{m+1} で置き換えると

$$\hat{V}_{m+1} = \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{c}_m + \mathbf{e}_m, \quad (102)$$

⁷⁵ 時間についてバックワードに計算を行う点はツリーと同じである。しかし、例えば、二項ツリーでは、1期先の時点での2つの価格を用いて条件付き期待値を計算するのに対して、最小二乗モンテカルロ法では、1期先の時点での全ての価格を利用し、統計的推定により条件付き期待値を計算する点が異なっている。

⁷⁶ $\hat{V}_{m+1}(S_i)$ は推定されたものであることを明示するためにハットを付けて表記している。

図2 最小二乗モンテカルロ法の概念図



となる。 Ψ のデータも与えて、基底関数 ψ の回帰係数 c_m を最小二乗法により求めると、

$$\hat{c}_m = (\Psi^T \cdot \Psi)^{-1} \cdot (\Psi^T \cdot \hat{V}_{m+1}), \quad (103)$$

として計算できる。この結果を利用し、時点 t_m での条件付き期待値 $F_m(S)$ のベクトルは、

$$\hat{F}_m = \Psi \cdot \hat{c}_m, \quad (104)$$

で推定される。このプロセスを図示すると図2のとおりである。こうして求められた $\hat{F}_m(S_i)$ ($i = 1, \dots, N$) について、(97)式に従って時点 t_m でのペイオフ $h(S_i(t_m))$ との比較を行い、 $\hat{V}_m(S_i(t_m))$ を求める。以上の計算をバックワードに M 回繰り返せば、それぞれのパスについて各時点の価格 $\hat{V}_m(S_i(t_m))$ ($m = 0, \dots, M$) が得られる。

なお、Longstaff and Schwartz [2001] は、回帰の精度を上げるために、アウト・オブ・ザ・マネーの状況で権利行使することはないことを踏まえ、 $h(S_i(t_m))$ がイン・ザ・マネーになっているパス $S_i(t_m)$ のみに対して回帰を行うことを推奨している。

最小二乗モンテカルロ法の計算の過程では、 t_m 時点ごとに N 個のデリバティブの価格を得られることが重要である。この性質を利用すると、(7)式より N 個の価格のうち正の値のものを平均化することでCVAの計算に必要な期待エクスポージャーを求めることができる。

Longstaff and Schwartz [2001] と同様に回帰を利用したアルゴリズムを提案している論文としては、Carriere [1996]、Tsitsiklis and Roy [1999, 2001]、Egloff [2005]、Egloff, Kohler, and Todorovic [2007] などがある。Clément, Lamberton, and Protter [2001] と Stentoft [2004] は、Longstaff and Schwartz [2001] の示した最小二乗モンテカルロ法の収束性に関する結果を一般化しており、Glasserman and Yu [2004] は、発生させるパスの数と基底関数の数に応じて、収束の速さがどう変わるかを議論している。また、最小二乗モンテカルロ法による計算値は真の価格の下界 (lower bound) を与えることになるが⁷⁷、真の価格の上界 (upper bound) を求める研究も行われてきた。これらに関しては、Rogers [2002]、Haugh and Kogan [2004]、Andersen and Broadie [2004] を参照されたい。さらに、実際にヘッジを行うには Greeks (Greeks) と呼ばれるリスク感応度を算出する方法が必要であるが、最小二乗モンテカルロ法のもとでの Greeks の計算に関する研究としては、Wang and Calfisch [2010] がある。Wang and Calfisch [2010] は、パスの出発点での原資産価格を 1 つの値ではなく、適当な確率分布からランダムに生成することで、Greeks の計算が容易になると述べている。

(2) バンドリング法

Tilley [1993] は、発生させたパスを一定数ごとにまとめて平均を取り、その平均を条件付き期待値の近似値とする方法を提案している。Tilley [1993] では、この近似によって、二重のモンテカルロ・シミュレーションを避けている。

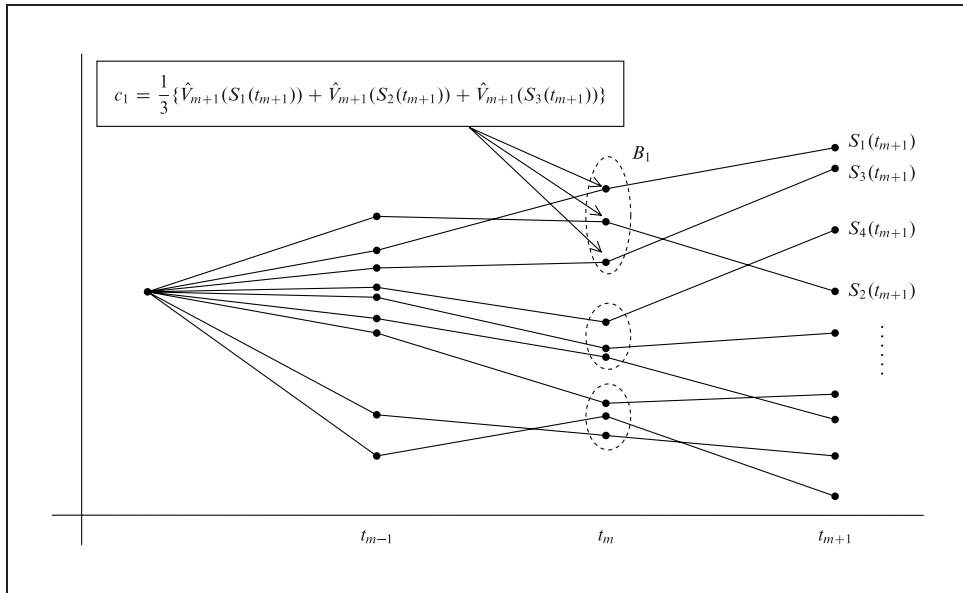
具体的なアルゴリズムは、以下のとおりである。まず、モンテカルロ・シミュレーションにより N 本のパス $S_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) を発生させる。価格は時間についてバックワードに計算するため、時点 t_m では 1 期先のデリバティブの価格の推定値 $\hat{V}_{m+1}(S_i)$ は既に計算されている。次に、時点 t_m での原資産価格 $S_i(t_m)$ について、価格の高い順から番号 k を振る。高い順から並べられたパス $S_k(t)$ を P 本ごとにまとめ、 N/P 個のバンドル (束) を作る。この P 本のパスから、ある t 時点での条件付き期待値を次式により求める。

$$E^Q[V_{m+1}(S(t_{m+1})) | S_k(t_m)] \cong \frac{1}{P} \sum_{i \in B_{j,k}} \hat{V}_{m+1}(S_i(t_{m+1})). \quad (105)$$

ここで、 $B_{j,k}$ は番号 k のパスが属しているバンドルを示している。それぞれの $B_{j,k}$ ($j = 1, \dots, N/P$) は P 個の値を持つパスの番号の集合である。(105) 式の左辺は同じバンドル $B_j = B_{j,k}$ 内のパス $i \in B_j$ については一定の値 c_j となる。このプロセスを $P = 3$ として図示すると、図 3 のとおりである。

⁷⁷ 最小二乗モンテカルロ法に基づくアメリカン・オプションの価格計算では、既にみたように、最適権利行使価格の計算に必要な条件付き期待値を算出するうえで基底関数による近似を行っているため、権利行使が厳密な最適点から乖離する。このため理論価格よりも低い値が計算される。

図3 バンドリング法の概念図



Tilley [1993] に基づいたアメリカン・オプションの価格評価では、こうして計算された条件付き期待値 c_j と、その時点で権利を行使した際のペイオフ $h(S_k(t_m))$ を (97) 式に基づいて比較し、大きい方を当該時点 t_m での価格 $V_m(S_k(t_m))$ とする。

ここで、 $h = \min B_j$ 、 $l = \max B_j$ とすると、(105) 式は $S(t_m) \in [S_l(t_m), S_h(t_m)]$ について条件付き期待値 $E^Q[V_{m+1}(S(t_{m+1})) | S(t_m)]$ を一定値 c_j としており、区分的に一定な原資産価格 S の関数で条件付き期待値を推定していると考えられる。

このように考えると、Tilley [1993] と Longstaff and Schwartz [2001] の違いは、条件付き期待値の近似を区分的に一定な関数で行うか、多項式関数で行うかの違いでしかないことがわかる。この点は、最小二乗モンテカルロ法の (99) 式とバンドリング法の (105) 式を比較すると理解しやすい。

(3) CVA の計算への応用

ここまで議論した手法を CVA の計算に応用する。具体的には、アメリカン・モンテカルロ法の計算の過程で得られた価格の推定値 $\hat{V}_m(S_i(t_m))$ を用いて、時点 t_m での期待エクスポージャー $EPE(t_m)$ は以下のように計算される。

$$EPE(t_m) = E^Q[\max(V_m, 0)] \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max(\hat{V}_m(S_i(t_m)), 0). \quad (106)$$

こうして求められた期待エクスポージャーを (8) 式に代入し、その時点のデフォルト確率 $\gamma(t_m, t_{m+1})$ 、割引率 $D(t_m)$ 、デフォルト時損失率 $1 - R_A$ を掛け合わせて、時間

方向に和を求めれば CVA を算出できる。

アメリカン・モンテカルロ法の CVA 計算への応用に関する研究は少ないが、実務家による研究としては、Cesari *et al.* [2010] がある。Cesari *et al.* [2010] の第 4 章では、アメリカン・モンテカルロ法について、スワップションと早期償還条項付きのスワップの CVA を例に解説を行っている。彼らは CVA の計算を効率よく行うために、Tilley [1993] のバンドリング法と Longstaff and Schwartz [2001] の最小二乗モンテカルロ法を組み合わせ、バンドルごとに最小二乗モンテカルロ法を適用することを提案している。また、CVA に関するものではないが、関連した研究としては Kan *et al.* [2010] と Ng, Peterson, and Rodriguez [2010] がある。Kan *et al.* [2010] は Longstaff and Schwartz [2001] の最小二乗モンテカルロ法をアメリカン・オプションのエクスポージャーの計算に適用しており、対称変量法と制御変量法を併用することで精度が向上することを報告している。対称変量法と制御変量法はともに、モンテカルロ法の精度を向上させる分散減少法の 1 つである⁷⁸。さらに、Kan *et al.* [2010] は、権利行使価格を区切りとして、回帰の領域を 2 つに分割し、それぞれの領域ごとに回帰を行っている。彼らは、この方法をバケッティングと呼んでいるが、バケッティングのアイデアは Tilley [1993] に非常に近く、Cesari *et al.* [2010] と同様に Tilley [1993] のバンドリング法と Longstaff and Schwartz [2001] の最小二乗モンテカルロ法を組み合わせた手法を提案しているとも考えることもできる。Ng, Peterson, and Rodriguez [2010] はアメリカン・モンテカルロ法の一種である確率的メッシュ法を用いて⁷⁹、複数の資産に連動するエキゾチック・デリバティブのポテンシャル・エクスポージャーを計算している。具体的な計算対象としては、ハル＝ホワイト・モデルのもとでの PRDC (power reverse dual currency) スワップを取り上げている。

また、実務ではカウンターパーティ・レベルでの CVA を計算することが求められるが、これには、複数のデリバティブの時価の同時分布を計算することが可能な多次元のアメリカーン・モンテカルロ法を適用することになる。

多次元のアメリカーン・モンテカルロ法では、1 次元の場合に比べ多大な計算時間を要することになるが、効率化に向けた研究が進められている。例えば、Boyle, Kolkiewicz, and Tan [2003] や Chaudhary [2005] は、超一様分布列 (low-discrepancy sequence) を用いることによって高速化が可能であると述べている⁸⁰。こうしたシミュレーションに用いる数列の工夫に加え、並列計算等の技術を組み合わせて利用

78 詳細については、例えば、石川・内田 [2002] を参照。なお、アメリカン・オプションのモンテカルロ・シミュレーションによる価格計算への制御変量法の適用については、Rasmussen [2005] と Ehrlichman and Henderson [2007] も参照。

79 確率的メッシュ法は Broadie and Glasserman [2004] によって提案された手法であり、時点 t_m での条件付き期待値 $F_m(S)$ を、時点 t_{m+1} での全ての $\hat{V}_{m+1}(S_i)$ について $w_{i,m}$ で重み付けされた平均を取ることで求める。確率的メッシュ法では、この重み $w_{i,m}$ を時点 t_0 から時点 t_m までの確率分布と時点 t_m から時点 t_{m+1} までの確率分布の尤度比で与えている。他方、最小二乗モンテカルロ法では (103) 式の回帰係数を通じて重み $w_{i,m}$ を与えている。確率的メッシュ法を用いるには原資産価格の推移確率分布を求める必要があり、実務への応用の際にはその点を考慮する必要がある。詳細については Glasserman [2004] の 8 章の 6 節と 8 節を参照。

80 準乱数 (quasi random number) とも呼ばれる。超一様分布列については手塚 [2003] を参照。

していくことも有効な対応法であろう。

また、多次元のアメリカン・モンテカルロ法では、数列の工夫のほかに基底関数の選択も精度に影響することを考慮して、効率的な基底関数を検討していく必要がある。Moreno and Navas [2003] は、一定の本数のパスでさまざまな種類の直交多項式のもとの最小二乗モンテカルロ法の精度を比較している。その結果、1次元の場合には基底関数の選択が精度に大きな影響を与えない一方⁸¹、多次元の場合には基底関数の選択が精度に影響を与えると指摘している。

したがって、カウンターパーティ・レベルでのCVAの計算精度を向上させるには、超一様分布列や基底関数の選択に工夫を施し、効率的な多次元のアメリカン・モンテカルロ法を開発していく必要がある。

5. おわりに

本稿では、OTCデリバティブのカウンターパーティ・リスクを管理する手法として関心が高まっているCVAについて、金融工学的側面を中心にサーベイを行った。CVAに基づくカウンターパーティ・リスク管理についての基本的な概念はそれほど難しいものではないが、実務での運用上は誤方向リスクのモデル化やアメリカン・モンテカルロ法のように、いくつかの金融工学上の課題が存在しており、それぞれ、3節、4節で重点的に解説した。

CVAの歴史は約20年前まで遡ることができるが、公表されている先行研究はまだそれほど多くはない。今後の研究上の課題としては、以下のような点が挙げられる。

第1に、カウンターパーティのデフォルト・リスクが高まるときに限って、担保の差入れが遅延する傾向があり、その結果、エクスポージャーが想像以上に拡大してしまうリスクがある。これも一種の誤方向リスクと考えられるが、この点に関して研究した例は、数少ないように思われる⁸²。契約通りの担保が差し入れられないままカウンターパーティがデフォルトすれば、より大きな損失を被る。このようなリスクをモデル化し、把握することが課題として考えられる。

第2に、金融市場における危機の伝播（contagion）の影響をどのようにCVAの枠組みに取り入れるべきかについて、市場参加者の間で統一した見解が得られていないように思われる。あるカウンターパーティのデフォルト・リスクが別のカウンターパーティのデフォルト・リスクに影響することはよく知られており、こうした影響をどう勘案すべきかは今後の検討課題である。

また、CVAを有効に利用していくうえでの実務上の課題としては、以下のような点が挙げられる。

81 これは上述のLongstaff and Schwartz [2001]の結果と整合的である。

82 間接的にはあるが、この問題に関連する先行研究としては、山下・吉羽 [2010]がある。山下・吉羽 [2010]は担保付貸出を対象に、担保価値とデフォルト強度の負の相関のモデル化について研究している。

第1に、CVA をカウンターパーティ・レベルで扱ううえでのシステム面の対応がある⁸³。為替・金利・株式・コモディティ等、異なる種類の資産を参照しているデリバティブのネットティングを扱うには、そうした複数の資産のデータを一元的に管理するシステムを利用できれば理想的である。前述した *Albanese et al.* [2011] はそうしたシステムを提案している。しかし、システムの構築や管理には相応のコストを要するため、システムの投資コストとメリットについて個々の金融機関がビジネス・モデルに応じた判断を行い、必要に応じてシステム面の対応を進めることが課題といえる。

第2に、計算の高速化の問題である。4節では、CVA の計算負荷を軽減するにはアメリカン・モンテカルロ法が有効であることを説明したが、複雑なデリバティブを含めたポートフォリオ・レベルでの CVA の計算を高速に行うには、モンテカルロ・シミュレーションの高速化技術をさらに追求していく必要があるだろう。

このように、CVA については、研究面でも実務面でもなお課題が残っている。OTC デリバティブ取引のリスク管理を発展させるうえで CVA が重要な枠組みであることを踏まえると、今後も、これらの課題の克服に向けた取組みが続けられることを期待したい。

83 CVA を計算するシステムの具体的な構築に関しては *Cesari et al.* [2010] の第5、7章を参照。

参考文献

- 石川達也・内田善彦、「モンテカルロ法によるプライシングとリスク量の算出について—正規乱数を用いる場合の適切な実装方法の考察—」、『金融研究』第21巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、2002年、51～89頁
- 植木雅広、『必携デリバティブ・ドキュメンテーション 担保・個別契約書編』、近代セールス社、2010年
- 小田信之、「信用リスクを反映した金融商品のプライシング」、『金融研究』第18巻第1号、日本銀行金融研究所、1999年、65～104頁
- 木野勇人・糸田真吾、『ビッグバン後のクレジット・デリバティブ』、財経詳報社、2010年
- 新谷幸平・山田哲也・吉羽要直、「金融危機時における資産価格変動の相互依存関係：コピュラに基づく評価」、『金融研究』第29巻第3号、日本銀行金融研究所、2010年、89～122頁
- 関本大樹、「スワップ取引における自己側信用リスクの課税上の取扱い（試論）—JP Morgan Chase 事件訴訟の終結を踏まえて—」、『税大ジャーナル』第11号、2009年、71～101頁
- 手塚 集、「超一様分布数列の数理」、『計算統計 I—確率計算の新しい手法—統計科学のフロンティア 11』、岩波書店、2003年、65～120頁
- 戸坂凡展・吉羽要直、「コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説」、『金融研究』第24巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2005年、115～152頁
- 富安弘毅、『カウンターパーティリスクマネジメント トレーディングとの融合によるリスク管理の収益源化』、金融財政事情研究会、2010年
- 古市峰子、「担保の会計処理をめぐる一考察」、『金融研究』第26巻第3号、日本銀行金融研究所、2007年、69～122頁
- 室井芳史、「ハザード間の相関を考慮に入れた信用派生商品の評価法」、『金融研究』第25巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2006年、105～152頁
- 森田智子、「ISDA 契約書に基づくデリバティブ取引の信用リスク管理」、国際ワークショップ「カウンターパーティ・リスクの管理と CVA の活用」、日本銀行金融機構局、2010年
- 山井康浩・吉羽要直、「バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について—理論的サーベイによる期待ショートフォールとの比較分析—」、『金融研究』第20巻第2号、日本銀行金融研究所、2001年、33～68頁
- 山下智志・吉羽要直、「デフォルト率と回収率の負の相関を考慮した担保付貸出の損失評価：CIR 型ハザード率過程での解析的評価」、日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー No. 2010-J-10、2010年
- 四塚利樹、「スワップ信用リスクのプライシング」、『証券アナリストジャーナル』1997年10月号、10～19頁

- Albanese, Claudio, Toufik Bellaj, Guillaume Gimonet, and Giacomo Pietronero, "Coherent Global Market Simulations for Counterparty Credit Risk," *Quantitative Finance*, 11 (1), 2011, pp. 1–20.
- , Guillaume Gimonet, Giacomo Pietronero, and Steve White, "Towards a Global Valuation Model," *Risk Magazine*, 22 (5), 2010, pp. 68–71.
- Algorithmics, "Credit Value Adjustment," White Paper, 2010.
- Andersen, Leif, and Mark Broadie, "Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multidimensional American Options," *Management Science*, 50 (9), 2004, pp. 1222–1334.
- Baba, Naohiko, and Frank Packer, "From Turmoil to Crisis: Dislocations in the FX Swap Market before and after the Failure of Lehman Brothers," *Journal of International Money and Finance*, 28 (8), 2009, pp. 1350–1374.
- , and Yuji Sakurai, "When and How US Dollar Shortages Evolved into the Full Crisis? Evidence from the Cross-Currency Swap Market," *Journal of Banking and Finance*, 2011 (forthcoming).
- Bank of England, "Markets and Operations," *Quarterly Bulletin*, 2010 Q2, 50 (2), 2010, pp. 78–91.
- Basel Committee on Banking Supervision, *Consultative Document: Strengthening Resilience of the Banking Sector*, December, 2009.
- , *Basel III: A Global Regulatory Framework for More Resilient Banks and Banking Systems*, December, 2010.
- Boyle, Phelim P., Adam W. Kolkiewicz, and Ken Seng Tan, "An Improved Simulation Method for Pricing High-Dimensional American Derivatives," *Mathematics and Computers in Simulation*, 62, 2003, pp. 315–322.
- Brace, Alan, Dariusz Gatarek, and Marek Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, 7 (2), 1997, pp. 127–155.
- Brigo, Damiano, and Agostino Capponi, "Bilateral Counterparty Risk Valuation with Stochastic Dynamical Models and Application to Credit Default Swaps," Working Paper, 2009.
- , and Kyriakos Chourdakis, "Counterparty Risk for Credit Default Swaps," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 12 (7), 2009, pp. 1007–1026.
- , and Massimo Masetti, "Risk Neutral Pricing of Counterparty Risk," in Michael Pykhtin, ed. *Counterparty Credit Risk Modeling: Risk Management, Pricing, and Regulation*, Risk Books, 2005, pp. 285–335.
- , and Andrea Pallavicini, "Counterparty Risk and Contingent CDS Valuation under Correlation between Interest-Rates and Default," Working Paper, 2008 (<http://www.damianobrigo.it>).

- Broadie, Mark, and Paul Glasserman, “A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options,” *The Journal of Computational Finance*, 7 (4), 2004, pp. 35–72.
- Canabarro, Eduardo, ed., *Counterparty Credit Risk: Measurement, Pricing and Hedging*, Risk Books, 2009.
- Carriere, Jacques F., “Valuation of the Early-Exercise Price for Options Using and Nonparametric Regression,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 19 (1), 1996, pp. 19–30.
- Carvar, Laurie, “Quant Congress USA: Ban DVA, Counterparty Risk Quant Says,” Risk.net, 16 July 2010 (<http://www.risk.net/risk-magazine/news/1722984/quant-congress-usa-ban-dva-counterparty-risk-quant>).
- Cecchetti, Stephen, Jacob Gyntelberg, and Marc Hollanders, “Central Counterparties for Over-the-Counter Derivatives,” *BIS Quarterly Review*, September, 2009, pp. 45–58.
- Cesari, Giovanni, John Aquilina, Niels Charpillon, Zlatko Filipović, Gordon Lee, and Ion Manda, *Modelling, Pricing, and Hedging Counterparty Credit Exposure—A Technical Guide—*, Springer, 2010.
- Chaudhary, Suneal, “American Options and the LSM Algorithm: Quasi-Random Sequences and Brownian Bridges,” *The Journal of Computational Finance*, 8 (4), 2005, pp. 101–115.
- Chen, L. Chen, Katsuhiko Uchiyama, and Guanghua Cao, “Generalized Valuation of Collateralized Derivatives,” in Eduardo Canabarro, ed. *Counterparty Credit Risk: Measurement, Pricing and Hedging*, Risk Books, 2009, pp. 199–217.
- Clément, Emmanuelle, Damien Lamberton, and Philip Protter, “An Analysis of a Least Squares Regression Method for American Option Pricing,” *Finance and Stochastics*, 6 (4), 2001, pp. 449–471.
- Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, and Stephen Ross, “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica*, 53 (2), 1985, pp. 385–407.
- Crépey, Stéphane, Monique Jeanblanc, and Behnaz Zargari, “CDS with Counterparty Risk in a Markov Chain Copula Model with Joint Defaults,” Working Paper, Université de Lyon and Université de Nice, 2009.
- Crosbie, Peter, and Jeff R. Bohn, “Modeling Default Risk,” Working Paper, Moody’s KMV, 2003.
- De Prisco, Ben, and Dan Rosen, “Modelling Stochastic Credit Exposures for Derivatives Portfolios,” in Michael Pykhtin, ed. *Counterparty Credit Risk Modelling: Risk Management, Pricing, and Regulation*, Risk Books, 2005, pp. 3–47.
- Duffie, Darrell, “Expert Report of Darrell Duffie,” United States Tax Court, 2001.
- , and Ming Huang, “Swap Rates and Credit Quality,” *Journal of Finance*, 51 (3), 1996, pp. 921–950.

- Egloff, Daniel, “Monte Carlo Algorithms for Optimal Stopping and Statistical Learning,” *The Annals of Applied Probability*, 15 (2), 2005, pp. 1396–1432.
- , Michael Kohler, and Nebojsa Todorovic, “A Dynamic Look-Ahead Monte Carlo Algorithm for Pricing Bermudan Options,” *The Annals of Applied Probability*, 17 (4), 2007, pp. 1138–1171.
- Ehrlichman, Samuel M. T., and Shane G. Henderson, “Adaptive Control Variates for Pricing Multi-dimensional American Options,” *The Journal of Computational Finance*, 11 (1), 2007, pp. 65–91.
- Fender, Ingo, and Jacob Gyntelberg, “Overview: Global Financial Crisis Spurs Unprecedented Policy Actions,” *BIS Quarterly Review*, December, 2008, pp. 1–24.
- Finger, Christopher C., “Toward a Better Estimation of Wrong-Way Credit Exposure,” *RiskMetrics Journal*, May, 2000, pp. 25–40.
- Fujii, Masaaki, and Akihiko Takahashi, “Asymmetric and Imperfect Collateralization, Derivative Pricing, and CVA,” SSRN Working Paper, 2010.
- , Yasufumi Shimada, and Akihiko Takahashi, “On the Term Structure of Interest Rates with Basis Spreads, Collateral and Multiple Currencies,” SSRN Working Paper, 2010.
- Glasserman, Paul, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2004.
- , and Jingyi Li, “Importance Sampling for Portfolio Credit Risk,” *Management Science*, 51 (11), 2005, pp. 1643–1656.
- , and Bin Yu, “Number of Paths versus Number of Basis Functions in American Option Pricing,” *The Annals of Applied Probability*, 14 (4), 2004, pp. 2090–2119.
- Gregory, John, *Counterparty Credit Risk: The New Challenge for Global Financial Markets*, Wiley, 2010.
- Haugh, Martin B., and Leonid Kogan, “Pricing American Options: A Duality Approach,” *Operations Research*, 52 (2), 2004, pp. 258–270.
- Hübner, Georges, “The Analytical Pricing of Asymmetric Defaultable Swaps,” *Journal of Banking and Finance*, 25 (4), 2001, pp. 295–316.
- Hull, John C., and Alan D. White, “Pricing Interest Rate Derivative Securities,” *Review of Financial Studies*, 3 (4), 1990, pp. 573–592.
- , and ———, “Valuing Credit Default Swaps II: Modeling Default Correlations,” *Journal of Derivatives*, 8 (3), 2001, pp. 12–21.
- ISDA (International Swaps and Derivatives Association), MFA (Managed Funds Association), and SIFMA (Securities Industry and Financial Markets Association), “Independent Amounts,” White Paper, 2010.
- Jarrow, Robert A., and Fan Yu, “Counterparty Risk and the Pricing of Defaultable Securities,” *Journal of Finance*, 56 (5), 2001, pp. 1765–1799.
- Johannes, Michael, and Suresh Sundaresan, “The Impact of Collateralization on Swap Rates,” *Journal of Finance*, 62 (1), 2007, pp. 383–410.

- Kalkbrenner, Michael, Hans Lotter, and Ludger Overbeck, "Sensible and Efficient Capital Allocation for Credit Portfolios," *Risk Magazine*, 17 (1), 2004, pp. s19–s24.
- Kan, Kin Huang, Greg Frank, Victor Mozgin, and R. Mark Ressor, "Optimized Least-Square Monte Carlo for Measuring Counterparty Credit Exposure of American-Style Options," *Mathematics-in-Industry Case Studies Journal*, 2, 2010, pp. 64–85.
- Keenan, Julian, "Spotlight on Exposure," *Risk Magazine*, 22 (10), 2009, pp. 48–51.
- Leung, Seng Yuen, and Yue Kuen Kwok, "Credit Default Swap Valuation with Counterparty Risk," *Kyoto Economic Review*, 74 (1), 2005, pp. 25–45.
- Levy, Arnon, and Ronald Levin, "Wrong-Way Exposure: Are Firms Underestimating Their Credit Risk? Assessing Credit Risk When Default and Market Risk are Adversely Related," *Risk Magazine*, 12 (7), 1999, pp. 52–55.
- Lipton, Alexander, "Assets with Jumps," *Risk Magazine*, 15 (9), 2002, pp. 149–153.
- , and Artur Sepp, "Credit Value Adjustment for Credit Swaps via Structural Default Model," *The Journal of Credit Risk*, 5 (2), 2009, pp. 123–146.
- Lomibao, Dante, and Steven Zhu, "A Conditional Valuation Approach for Path-Dependent Instruments," in Michael Pykhtin, ed. *Counterparty Credit Risk Modeling: Risk Management, Pricing, and Regulation*, Risk Books, 2005, pp. 97–126.
- Longstaff, Francis, and Eduardo Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: Simple Least Square Approach," *Review of Financial Studies*, 14 (3), 2001, pp. 113–147.
- Merton, Robert C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29 (2), 1974, pp. 449–470.
- Moreno, Manuel, and Javier Navas, "On the Robustness of Least-Squares Monte Carlo (LSM) for American Derivatives," *Review of Derivatives Research*, 6 (2), 2003, pp. 107–128.
- Ng, Leslie, Dave Peterson, and Andres Eulogio Rodriguez, "Potential Future Exposure Calculations of Multi-asset Exotic Products Using Stochastic Mesh Method," *The Journal of Computational Finance*, 14 (2), 2010, pp. 119–153.
- Patel, Navroz, "In the Shadows," *Risk Magazine*, 20 (6), 2007, pp. 28–30.
- Pengelly, Mark, "Charge Changes," *Risk Magazine*, 23 (8), 2010, pp. 27–29.
- Piterbarg, Vladimir, "Funding beyond Discounting: Collateral Agreements and Derivative Pricing," *Risk Magazine*, 23 (2), 2010, pp. 97–102.
- Pykhtin, Michael, "Collateralized Counterparty Credit Risk," in Eduardo Canabarro, ed. *Counterparty Credit Risk: Measurement, Pricing and Hedging*, Risk Books, 2009, pp. 17–50.
- , and Dan Rosen, "Pricing Counterparty Risk at the Trade Level and CVA Allocations," Federal Reserve Board, Finance and Economics Discussion No. 2010-10, 2010.

- , and Steven Zhu, “A Guide to Modeling Counterparty Credit Risk,” *GARP Risk Review*, July/August, 2007, pp. 16–22.
- Rasmussen, Nicki S., “Control Variates for Monte Carlo Valuation of American Options,” *The Journal of Computational Finance*, 9 (1), 2005, pp. 83–118.
- Rebonato, Riccardo, Mike Sherring, and Ronnie Barnes, “CVA and the Equivalent Bond,” *Risk Magazine*, 23 (9), 2010, pp. 118–121.
- Redon, Christian, “Wrong Way Risk Modeling,” *Risk Magazine*, 19 (4), 2006, pp. 90–95.
- Rogers, Leonard C. G., “Monte Carlo Valuation of American Options,” *Mathematical Finance*, 12 (3), 2002, pp. 271–286.
- Schönbucher, Philipp J., and Dirk Schubert, “Copula-Dependent Default Risk Intensity Models,” Working Paper, Bonn University, 2001.
- Sepp, Artur, “Analytical Pricing of Double-Barrier Options under a Double-Exponential Jump Diffusion Process: Applications of Laplace Transform,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7 (2), 2004, pp. 151–175.
- Shreve, Steven E., *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, 2004.
- Sorensen, Eric H., and Thierry F. Bollier, “Pricing Swap Default Risk,” *Financial Analyst Journal*, May–June, 1994, pp. 23–33.
- Stein, Harvey, and Kin Pong Lee, “Counterparty Valuation Adjustments,” Bloomberg Working Paper, 2009.
- Stentoft, Lars, “Convergence of the Least Squares Monte-Carlo Approach to American Option Valuation,” *Management Science*, 50 (9), 2004, pp. 129–168.
- Tang, Yi, and Bin Li, *Quantitative Analysis, Derivatives Modeling, and Trading Strategies: In the Presence of Counterparty Credit Risk for the Fixed-Income Market*, World Scientific, 2007.
- , and Andrew Williams, “Funding Benefit and Funding Cost,” in Eduardo Canabarro, ed. *Counterparty Credit Risk: Measurement, Pricing and Hedging*, Risk Books, 2009, pp. 185–198.
- Tilley, James A., “Valuing American Options in a Path Simulation Model,” *Transactions of the Society of Actuaries*, 45, 1993, pp. 83–104.
- Tsitsiklis, John N., and Benjamin Van Roy, “Optimal Stopping of Markov Processes: Hilbert Space Theory, Approximation Algorithm, and an Application to Pricing High-Dimensional Financial Derivatives” *IEEE Transactions of Automatic Control*, 44 (10), 1999, pp. 1840–1851.
- , and ——, “Regression Methods for Pricing Complex American-Style Options,” *IEEE Transactions of Neural Networks*, 12 (4), 2001, pp. 694–703.
- Vasicek, Oldrich, “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics*, 5 (2), 1977, pp. 177–188.

- Wang, Yang, and Russel Caflisch, "Pricing and Hedging American-Style Options: A Simple Simulation-Based Approach," *The Journal of Computational Finance*, 13 (4), 2010, pp. 95–125.
- Whittall, Christopher, "Dealing with Funding on Uncollateralised Swaps," *Risk.net*, 25 July, 2010 (<http://www.risk.net/risk-magazine/feature/1722984/dealing-with-funding-uncollateralised-swaps>).
- Wood, Duncan, "Price Confusion," *Risk Magazine*, 23 (5), 2010, pp. 26–28.
- Yu, Fan, "Default Correlation in Reduced-Form Models," *Journal of Investment Management*, 3 (4), 2005, pp. 33–42.
- Zheng, Harry, and Lishang Jiang, "Basket CDS Pricing with Interacting Intensities," *Finance and Stochastics*, 13 (3), 2009, pp. 445–469.