

信用リスク移転機能の発展と 最適ローンポートフォリオ選択

しんたにこうへい やまだてつや
新谷幸平／山田哲也

要旨

近年、クレジット・デリバティブや証券化などの信用リスク移転手段が発達したことに伴い、金融機関はローンポートフォリオの信用リスクを効率的にヘッジし、分散化することが可能となった。しかし、証券化は、金融機関の過剰なリスクテイクを助長したとの批判も根強い。そこで、本稿ではこのようなリスク移転手段の発達により、金融機関のローンポートフォリオおよびそのリスク・リターン特性がどのように変化するのかをポートフォリオ選択の視点から理論的に分析する。

具体的には、銀行が保有するローンの一部だけが取引可能な不完全市場を想定して、銀行の最適ローンポートフォリオを導出する。その結果、市場の発展は、基本的に銀行のシャープレシオを上昇させ、投資効率を高めるという点でプラスの効果を与えることを示す。また、市場の発展途中では、完全市場の場合と異なり、銀行の目標収益や許容リスク量あるいはリスク回避度の水準次第で、シャープレシオが異なりうることを示す。このほか、自己資本の毀損などによりリスク回避度が高まる銀行が登場した場合には、市場の価格が変動することを通じて、他の銀行のポートフォリオ選択に影響が及ぶことなどを示す。

キーワード：CAPM、ポートフォリオ選択、不完全市場、信用リスク移転、
ローンポートフォリオ、リスクプレミアム

本稿を作成するに当たっては、池田昌幸、大橋和彦、木島正明、高森 寛、中川秀敏、牧本直樹の各氏をはじめ、ファイナンスの数理解析とその応用ワークショップ、日本金融・証券計量・工学会 2009 冬季大会、日本ファイナンス学会第 18 回大会の各参加者および日本銀行スタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。本稿に示されている意見は筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りは、すべて筆者たち個人に属する。

新谷幸平 日本銀行金融研究所 (E-mail: kouhei.shintani@boj.or.jp)
山田哲也 日本銀行金融研究所企画役補佐
(現 金融機構局企画役補佐、E-mail: tetsuya.yamada@boj.or.jp)

1. はじめに

近年、クレジット・デリバティブや証券化などの信用リスク移転手段が発達したことに伴い、金融機関はローンポートフォリオの信用リスクを効率的にヘッジし、分散化することが可能となった。しかし、証券化は、今次金融危機の発生要因の1つとして、金融機関の過剰なリスクテイクを助長したとの批判も根強い。そこで、本稿では、証券化手法やクレジット・デリバティブの発達が、金融機関（銀行）のローンポートフォリオに与える影響を理論的な立場から分析し、銀行経営に対する含意を考える。

クレジット・デリバティブや証券化が銀行経営に与える影響についての研究は、実証分析を中心に比較的多く行われているが、それらの含意については、主に2つの論調に分かれている。すなわち、クレジット・デリバティブや証券化は、(1)銀行が保有するローンポートフォリオの投資効率の向上や信用リスクの減少に寄与したことを示す研究がある一方で、(2)リスクの高い借り手に対する貸出を増やしたりレバレッジ比率を上昇させることで、銀行がハイリスク・ハイリターン型の投資を行うインセンティブを誘発した可能性を指摘する研究もある。

例えば(1)についてみると、Alexander-Andrew [2006] は、銀行のローンポートフォリオのリスクが分散化されるという意味で、クレジット・デリバティブが銀行のローンポートフォリオの効率性を高めているとの見方を示している¹。Hänsel and Krahen [2007] は、ローン ABS 市場で活発に取引している銀行は、取引していない銀行に比べて、信用リスク・エクスポージャーが小さくなっていることを主張している。

一方(2)について、Cebenoyan and Strahan [2004] は、ローン売買を行っている銀行は、リスクを過剰に増加させているわけではないものの、リスクの高い借り手に対する貸出を増加させていると報告している。Jiangli and Pritsker [2008] は、ローンの証券化を行っている銀行は、そうでない銀行よりもローンの貸倒引当率や貸出金償却率が高く、レバレッジ比率も高いという分析結果を示している。Mian and Sufi [2009] は、証券化の発達により信用力が低い借り手へのローンが増加したと指摘している。また、Allen and Carletti [2010] および Keys, Mukhrjee, Seru, and Vig [2010] は、証券化の発達が、銀行が借り手の信用力を正確に審査するインセンティブを低下させたことで、質の低いローンが数多く組成されたと主張している。

他方、クレジット・デリバティブや証券化の発展が銀行経営に影響を与えるメカニズムをファイナンス理論の観点から分析した研究についてもさまざまなものがあ

1 このほか、Bernanke [2008] は、リスク移転機能がリスクの分散化や資金調達を容易にする点で効果的であるとの認識を示しており、今次金融危機を経て数多くの不備が指摘された組成・転売型ビジネスモデル (originate-to-distribute model) についても、将来的にそれらの不備が修正されることによって、効果的なビジネスモデルとなることが期待されると述べている。

る²。その中の1つである Instefjord [2005] は、ポートフォリオ選択問題を用いて、クレジット・デリバティブの発展が銀行の保有リスクに与える影響を分析している。すなわち、ローンとクレジット・デリバティブという2資産のポートフォリオ選択問題を考え、2つの資産の相関が高まることを信用リスク移転機能の発展と捉えている。分析の結果としては、こうした移転機能の発展に伴い、銀行の貸出量が増加する可能性があることを主張している。しかしながら、Instefjord [2005] は、単に貸出量の増減だけに着目した分析を行っており、ローンポートフォリオのリスク・リターンがどのように変化するかについては考察していない。こうした意味で、銀行経営に与える影響を十分に把握しているとはいえない。

本稿では、ポートフォリオ選択問題を用いて信用リスク移転機能の発展の影響を分析している点で Instefjord [2005] と類似しているが、以下の2点で分析上の設定が異なる。まず、本稿では多資産のポートフォリオ選択問題を考え、信用リスク移転機能が発展する効果を、市場で取引可能なローンの種類が増加することと捉え、Instefjord [2005] とは異なる形で明示的にモデルに取り入れている。また、その結果として、本稿では銀行が保有するローンポートフォリオのリスクが分散化される効果を新たに取り入れている。このような分析の枠組みは、Sharpe [1964]、Lintner [1965] に端を発する完全市場でのポートフォリオ選択問題の議論を取引不可能な資産が存在する不完全市場³に拡張した形となっている。不完全市場におけるCAPM (Capital Asset Pricing Model) については、古くはMayers [1972] によって扱われ、取引不可能な資産が1つ存在する場合が分析対象とされた。その後、Duffie and Jackson [1989]、Demange and Guy [1995a]、Ohashi [1995] をはじめとするセキュリティ・デザインの研究分野⁴では、社会厚生を最大化する金融市場のあり方について分析するうえで、取引不可能な資産が複数存在する不完全市場が研究された。本稿が扱っている分析の枠組みはこれらの研究とほぼ同様であるが、本稿に独自の点としては、信用リスク移転市場の発展が銀行の最適ローンポートフォリオや投資効率に与える変化に注目した点、また市場にショックが発生した場合の銀行行動について比較静学を用いて分析した点がある。この際、本稿ではローンの信用リスクを移転する手段として、ローン売買やクレジット・デフォルト・スワップなどペイオフが単純な取引を想定している。この点、原理的には、より複雑なペイオフを持つクレジット・デリバティブを利用してポートフォリオのリスク・プロファイルを柔軟に制御することも考えられ、その場合市場の不完全性を一段と緩和していくことができるだろう。しかしながら、このような可能性を視野に入れても、本稿で得ら

2 本稿とは視点が異なるが、例えば銀行理論の立場からクレジット・デリバティブの発展が銀行行動に与える影響を分析したものとして Duffie and Zhou [2001]、Allen and Carletti [2006] 等がある。

3 一般的に、経済学においては、完全市場では(1)取引コストがゼロ、(2)市場で経済主体が自由に売買可能、(3)完全情報という3つの条件が満たされており、いずれかが満たされていない市場を不完全市場と呼ぶ。ここでは、投資対象資産の一部が自由に取引できない点で(2)を満たしていないため、不完全市場の一種と考えられる。

4 Duffie and Rahi [1995] では、セキュリティ・デザインに関する研究分野における1990年代半ばまでの研究の流れが纏められている。

れた含意に本質的な変化は生じないと考えられる⁵。

ただし、本稿には課題も残っている。例えば、銀行のポートフォリオ選択問題を扱った先行研究の多くと同様、ローンの需要者である企業の行動についてはモデルに取り入れていないほか、景気変動と銀行のポートフォリオ選択との関係についても、ローンの収益率等に関して比較静学を行うことにとどまっており、モデルに直接取り入れていない⁶。また、Demange and Guy [1995b] や Rahi [1995] 等とは異なり、金融取引に関する情報の非対称性が銀行の取引インセンティブに与える影響についても考慮していない。さらに、今次金融危機の発生要因としてローンの組成段階での銀行行動のあり方が大きな論点となっているが、その点についても本稿では分析の対象としていない。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、銀行が保有するローンポートフォリオの一部だけが無制限に売買可能な不完全市場を想定し、市場における取引がローンの市場価格に影響を及ぼさないと仮定したもとの銀行の最適ポートフォリオを導出する。また、解析結果を基に数値例に基づく分析を行い、取引市場の発展が、銀行の最適ローンポートフォリオ構成および投資効率などに与える影響を考察する。次に3節では、2節のモデルを拡張し、複数の銀行が取引を行う中でローンの市場価格が需給に応じて変動する場合の各銀行の最適ポートフォリオおよびローンの均衡価格を解析的に導出する。さらに、解析結果を基に数値例に基づく分析を行い、2節との相違を考察するほか、市場にショックが発生した場合を想定した比較静学を行い、信用リスク移転市場の発展の程度によってショックの影響がどう異なるか分析する。4節で結論と今後の課題を述べる。

2. 銀行のローンポートフォリオに関する主体的均衡

本節では、Sharpe [1964]、Lintner [1965] などが導出したCAPMを拡張したモデルを考察する。すなわち、銀行が保有するローンポートフォリオの一部だけが無制限に売買可能な不完全市場を想定し、銀行の最適ローンポートフォリオを導出する。なお、本節のモデルではある1つの銀行を考え、その銀行の取引は市場の価格に影響を及ぼさないと仮定のもとで主体的均衡を分析し、最適ポートフォリオを導出する。

5 本稿ではローンの信用リスク移転に限定して考察しているが、デリバティブ取引等を利用した市場リスクの移転についても同様の議論が可能であろう。

6 銀行理論の立場から、景気変動と銀行のポートフォリオの関係およびクレジット・デリバティブがそれと与える影響をモデル化したものとして Heyde and Neyer [2010] がある。また、实体经济における資源配分の歪みと、貸出市場における資源配分の歪みの関係を実証分析したものとして大谷・白塚・山田 [2007] がある。

(1) モデルの設定

ある銀行は、 m 社の企業のローンから構成されるローンポートフォリオを保有している。企業 i ($i = 1, \dots, m$) のローンから生じる収益率を r_i ($i = 1, \dots, m$) とする。 r_i は、以下の平均・分散共分散を持つと仮定する。

$$E[r_i] = \mu_i, \quad \text{cov}[r_i, r_j] = \sigma_{ij}. \quad (1)$$

各企業に対するローンの保有比率を x_i ($i = 1, \dots, m$)、無リスク資産の保有比率を x_{m+1} とする。銀行は、このうち企業 $i = 1, \dots, h$ ($h \leq m$) に対するローンの保有比率を、クレジット・デリバティブ市場やローン市場などを通じてリバランスすることができ、それ以外のローンの保有比率は、市場でリバランスできないとする。銀行が保有するポートフォリオから生じる収益率 R は以下のように記述される。ここで、 r は無リスク金利である。

$$R = r_h^T \mathbf{x}_h + r_\varepsilon^T \mathbf{x}_\varepsilon + r x_{m+1},$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_i = 1. \quad (2)$$

ただし、 $\mathbf{x}_h = (x_1, \dots, x_h)^T$ 、 $\mathbf{x}_\varepsilon = (x_{h+1}, \dots, x_m)^T$ 、 $\mathbf{r}_h = (r_1, \dots, r_h)^T$ 、 $\mathbf{r}_\varepsilon = (r_{h+1}, \dots, r_m)^T$ である。(2) 式のうち、 $\mathbf{r}_h^T \mathbf{x}_h$ は市場で取引可能なローンのポートフォリオから生じる収益率、 $\mathbf{r}_\varepsilon^T \mathbf{x}_\varepsilon$ は市場で取引不可能なローンのポートフォリオから生じる収益率を表している。すべてのローンが取引可能となった場合、すなわち $h = m$ のときは、本稿のモデルは通常の CAPM の議論に帰着する。一方、 $h < m$ の場合は、市場で取引できない資産が 1 つ以上存在するため、市場は不完全となる。この点が通常の CAPM とは異なる。

また、市場で取引可能なローンの数 h は、市場の発展を表すパラメータと解釈できる。 h の上昇に伴い、市場で取引可能なローンが増える結果、分散投資やヘッジが容易になることを意味する。本稿では、特に h が上昇した場合に市場が発展したと考える。

(2) 銀行の最適ローンポートフォリオ選択

ここでは、本節(1)で示したポートフォリオを保有する銀行について、最適なローンポートフォリオを考察する。最適ローンポートフォリオを決定するに当たり、銀行が以下の3つのリスク管理方針⁷に従う場合を考える。

.....
7 各方針の名称は、Schinasi and Smith [2000] を参考にした。

- リターンベンチマーク・ルール（ポートフォリオの期待収益率に下限を与えたうえで、保有リスクを最小化）
- セーフティファースト・ルール（ポートフォリオのリスクに上限を与えたうえで、期待収益率を最大化）
- トレードオフ・ルール（リスク回避度一定のもとで、リスク調整後収益率を最大化）

以下、それぞれのリスク管理方針に対応した枠組みを示し、 \mathbf{x}_ε 、 μ_i 、 σ_{ij} ($i, j = 1, \dots, m$) を所与として \mathbf{x}_h を選択する最適化問題を解く⁸。

イ. リターンベンチマーク・ルールに従う場合

銀行は、目標収益の達成を優先した以下の最適化問題の解を最適ローンポートフォリオとして選択すると考える。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_h} \text{var}[R - r] &= \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x}, \\ \text{s.t. } \text{E}[R - r] &= (\boldsymbol{\mu} - r \mathbf{1})^T \mathbf{x} \geq R_p. \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、 R_p は銀行が目標とするポートフォリオの期待超過収益率⁹（定数）を表す。このほか、 \mathbf{x} は各ローンの保有比率、 $\boldsymbol{\mu}$ は各ローンの期待収益率、 $\boldsymbol{\Sigma}$ は各ローンの収益率に関する分散共分散行列を表し、具体的には以下のように表現される。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_h \\ \mathbf{x}_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} - r \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h \\ \boldsymbol{\mu}_\varepsilon - r \mathbf{1}_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{hh} & \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon}^T & \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{hh} &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{h1} & \cdots & \sigma_{hh} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} = \begin{pmatrix} \sigma_{1h+1} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{hh+1} & \cdots & \sigma_{hm} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} &= \begin{pmatrix} \sigma_{h+1h+1} & \cdots & \sigma_{h+1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{mh+1} & \cdots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h &= (\mu_1 - r, \dots, \mu_h - r)^T, \quad \boldsymbol{\mu}_\varepsilon - r \mathbf{1}_\varepsilon = (\mu_{h+1} - r, \dots, \mu_m - r)^T. \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、添え字 h は取引可能なローンを、添え字 ε は取引不可能なローンをそれぞれ表す。例えば、取引可能なローンについては、保有比率を \mathbf{x}_h 、期待収益率を $\boldsymbol{\mu}_h$ 、

⁸ 各最適化問題の解の導出については、補論1を参照。

⁹ ポートフォリオの期待収益率から無リスク利率を控除したもの。

投資収益率の分散共分散行列を Σ_{hh} と表す。同様に、取引不可能なローンについては、保有比率を \mathbf{x}_ε 、期待収益率を $\boldsymbol{\mu}_\varepsilon$ 、投資収益率の分散共分散行列を $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ と表す。さらに、取引可能なローンと取引不可能なローンの投資収益率の共分散行列を $\Sigma_{h\varepsilon}$ と表す。また、 $\mathbf{1}_h$ 、 $\mathbf{1}_\varepsilon$ はそれぞれ h 次元、 $(m-h)$ 次元の単位ベクトルを表す。

(3) 式は、銀行がポートフォリオの期待超過収益率 $E[R-r]$ に下限 R_p を与えたいうえで、保有リスク $\text{var}[R-r]$ を最小化していることを表す。(3) 式から得られる最適保有比率を $\hat{\mathbf{x}}_h = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_h)^T$ で表すと、最適性の 1 階条件より、以下の関係が得られる。

$$\lambda_R(\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h) = \Sigma_{hh}\hat{\mathbf{x}}_h + \Sigma_{h\varepsilon}\mathbf{x}_\varepsilon. \quad (5)$$

λ_R はラグランジュ乗数を表す¹⁰。(5) 式を変形すると、最適解 $\hat{\mathbf{x}}_h$ は以下の形で得られる。

$$\hat{\mathbf{x}}_h = \lambda_R \Sigma_{hh}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h) - \Sigma_{hh}^{-1}\Sigma_{h\varepsilon}\mathbf{x}_\varepsilon. \quad (6)$$

また λ_R は以下の形で与えられる。

$$\lambda_R = \frac{R_p - \{(\boldsymbol{\mu}_\varepsilon - r\mathbf{1}_\varepsilon)^T - (\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h)^T \Sigma_{hh}^{-1} \Sigma_{h\varepsilon}\} \mathbf{x}_\varepsilon}{(\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h)^T \Sigma_{hh}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h)}. \quad (7)$$

なお、ここで得られた解の意味や解釈については、本節(3)でまとめて説明する。

ロ. セーフティファースト・ルールに従う場合

次に、銀行は、許容できるリスク量を遵守した、以下の最適化問題の解を最適ローンポートフォリオとして選択すると考える。

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}_h} E[R-r], \\ & \text{s.t. } \text{var}[R-r] \leq \sigma_p^2. \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 σ_p^2 は銀行の許容リスク量（定数）であり、(8) 式は銀行が保有リスク $\text{var}[R-r]$ に上限 σ_p^2 を与えたいうえで、保有ポートフォリオの期待超過収益率 $E[R-r]$ を最大化していることを意味する。最適性の 1 階条件より、以下の関係が得られる。

$$\hat{\mathbf{x}}_h = \frac{1}{\lambda_\sigma} \Sigma_{hh}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h) - \Sigma_{hh}^{-1}\Sigma_{h\varepsilon}\mathbf{x}_\varepsilon. \quad (9)$$

10 不等式制約を持つ最適化問題を解く際には、クーン・タッカー条件を用いて最適解を選択する必要があるが、本稿で設定した問題については、相補性条件から不等式制約が等式で成立することがわかるため、ラグランジュ未定乗数法を用いて最適解を導出している。

ただし、

$$\lambda_\sigma = \sqrt{\frac{(\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h)^T \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h)}{\sigma_p^2 + \mathbf{x}_\varepsilon^T \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon}^T \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \mathbf{x}_\varepsilon - \mathbf{x}_\varepsilon^T \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} \mathbf{x}_\varepsilon}}, \quad (10)$$

である。

ハ. トレードオフ・ルールに従う場合

最後に、銀行は、リスク調整後収益率の最大化を目指す、以下の最適化問題の解を最適ローンポートフォリオとして選択すると考える。

$$\max_{\mathbf{x}_h} \left\{ E[R - r] - \frac{\gamma}{2} \text{var}[R - r] \right\}. \quad (11)$$

ここで、 γ は銀行のリスク回避度（定数）であり、(11) 式は銀行がリスク回避度を一定としたうえで、リスク調整後の期待超過収益率を最大化していることを意味する。最適性の1階条件より、(12) 式が得られる。

$$(\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h) = \gamma \boldsymbol{\Sigma}_{hh} \hat{\mathbf{x}}_h + \gamma \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \mathbf{x}_\varepsilon. \quad (12)$$

(12) 式を変形すると、最適解 $\hat{\mathbf{x}}_h$ は以下の形で得られる。

$$\hat{\mathbf{x}}_h = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h) - \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \mathbf{x}_\varepsilon. \quad (13)$$

(3) 最適ポートフォリオの特徴

ここでは、本節(2)で得られた結果のうち通常のCAPMとは異なる点をまとめる。なお、トレードオフ・ルールに従う銀行（本節(2)ハ.の場合）を例にとって分析するが、その結果として得られる特徴は、他の銀行行動（本節(2)イ.、ロ.の場合）を仮定しても同様に成立する。

イ. 市場で取引できないローンが最適ローンポートフォリオに与える影響

最適ローンポートフォリオを表す(13)式は、取引可能なローンのリスク・リターン（第1項）だけでなく、取引できないローンのリスク・リターンおよび保有比率（第2項）にも依存している。特に、銀行の最適ローンポートフォリオが取引できないローンの保有比率 \mathbf{x}_ε に依存する点は、以下のような特徴として捉えることができる。

ベンチマークとして、取引できないローンを保有していないケースを考える。このとき、最適ポートフォリオ $\hat{\mathbf{c}}_h = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_h)^T$ は(14)式で与えられる。

$$\hat{c}_h = \frac{1}{\gamma} \Sigma_{hh}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h). \quad (14)$$

通常のCAPMでは、すべての証券が取引可能であると考えため、これが最適ポートフォリオとなる。一方、ここでの銀行の最適ポートフォリオ $\hat{\mathbf{x}}_h$ は、CAPMでの最適ポートフォリオから乖離したものとして、

$$\hat{\mathbf{x}}_h = \hat{c}_h - \Sigma_{hh}^{-1} \Sigma_{h\varepsilon} \mathbf{x}_\varepsilon, \quad (15)$$

と表せる。取引可能なローンが増加する ($h \rightarrow m$) ことで両者の差が小さくなり、 $h = m$ で $\hat{\mathbf{x}}_h$ は \hat{c}_h に一致することが理解できる。また $\Sigma_{h\varepsilon} = \mathbf{0}$ 、すなわち取引可能なローンと取引不可能なローンの投資収益率が無相関である場合、取引可能なローンの最適保有比率 $\hat{\mathbf{x}}_h$ は通常のCAPMにおける同比率 \hat{c}_h に一致する。不完全市場においては、最適ポートフォリオを規定するファクターとして、取引可能なローンと取引不可能なローンに関する共分散の性質が重要と考えられる。共分散の性質と最適ポートフォリオの関係については、本節(4)イ.で数値例を用いて再度考察する。

ロ. 分離定理の不成立

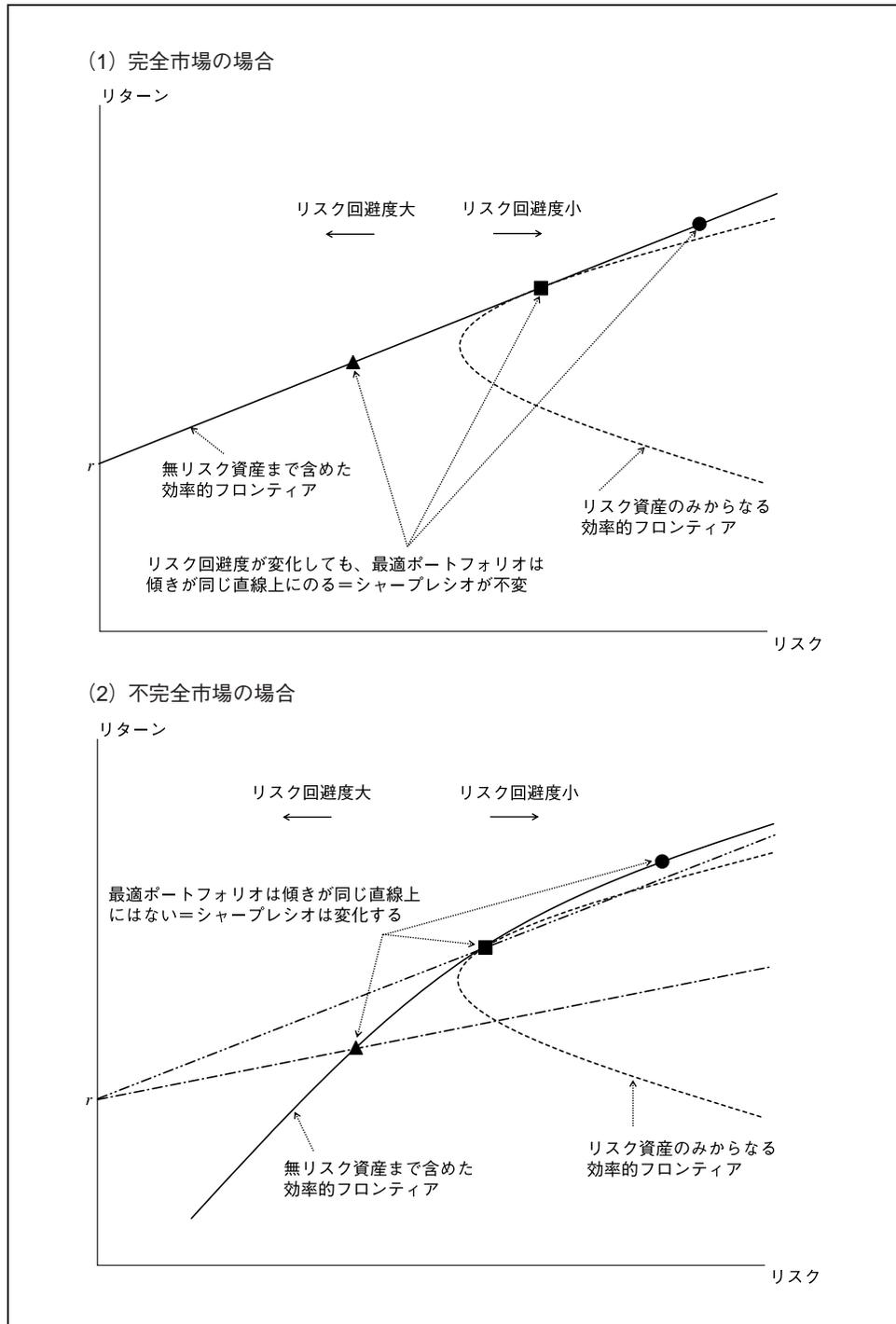
通常のCAPMのもとでは、(13)式において $h = m$ が成立している。したがって、各リスク資産の最適な保有比率は、(16)式のようにリスク回避度にかかわらずただ1つに定まる。

$$\hat{\mathbf{x}}_m = \frac{1}{\gamma} \Sigma_{mm}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r \mathbf{1}) \propto \Sigma_{mm}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r \mathbf{1}). \quad (16)$$

ここで、 α は両辺のベクトル成分の比率が等しいことを表す。(16)式において、リスク回避度はリスク資産全体と無リスク資産の配分比率、すなわちリスク資産を γ^{-1} の割合、無リスク資産を $1 - \gamma^{-1}$ の割合で保有するというにのみ影響し、リスク資産の最適な構成比 $\Sigma_{mm}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r \mathbf{1})$ には影響しないという、いわゆる分離定理が成り立つ。このため、銀行のリスク回避度がどのような水準であったとしても、無リスク資産との配分比率を変化させることで最適なポートフォリオを達成できる。しかし、本稿のモデルの場合、(13)式のようにリスク資産の最適保有比率はリスク回避度に依存する。したがって、リスク回避度の水準が異なる場合、単に無リスク資産とリスク資産の配分比率が変わるだけでなく、リスク資産の構成比率も変わってくる。このため、本節(4)で後述するようにリスク回避度の水準次第では、収益対比リスクの高いポートフォリオを選択する可能性もあり、この点で通常のCAPMと異なっている。

この状況を直観的に説明したのが図1である。完全市場の場合は、図1(1)のように、無リスク資産まで含めたポートフォリオの効率的フロンティアは、リスク資産のみからなる最適ポートフォリオと無リスク資産を結ぶ直線となる。このため、リ

図1 分離定理が成立しないことの直観的説明



リスク回避度が変わると、リスク資産と無リスク資産の割合は変化するが、選択されるリスク資産の構成比は不変である。上記の直線の傾きはシャープレシオを意味するが、リスク回避度が変わっても、同一直線上のポートフォリオが選択されるため、シャープレシオは不変である。

一方、不完全市場の場合は、銀行が取引不可能なリスク資産を保有しており、リスク回避度を変えたときに、最適なリスク資産の構成比そのものが変化する。このため、図1(2)のように無リスク資産まで含めたポートフォリオの効率的フロンティアは曲線となる¹¹。この際、最適ポートフォリオと無リスク資産を結ぶ直線の傾きがシャープレシオに対応するが、リスク回避度が変わると、最適ポートフォリオが曲線上を動くことで直線の傾きが変わるため、シャープレシオが変化することが確認される。このようなメカニズムが働く結果、次のハ.で述べるとおり、不完全市場ではシャープレシオの値がリスク回避度に依存する。

ハ. 最適ポートフォリオにおけるシャープレシオのリスク回避度への依存性

ロ.で述べたように、通常のCAPMのもとでは、リスク資産の最適保有比率はリスク回避度にかかわらずただ1つに定まり、最適ポートフォリオのシャープレシオもリスク回避度に依存しない。しかし、本稿のモデルでは、図1(2)で示されたように、リスク回避度に応じてシャープレシオが変化する。これを確認するためにシャープレシオを計算すると、(17)式のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{E[R - r]}{\sqrt{\text{var}[R - r]}} \\ &= \frac{\frac{1}{\gamma}(\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h)^T \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h) + \{(\boldsymbol{\mu}_\varepsilon - r\mathbf{1}_\varepsilon)^T - (\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h)^T \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon}\} \mathbf{x}_\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{\gamma^2}(\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h)^T \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_h - r\mathbf{1}_h) + \mathbf{x}_\varepsilon^T (\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} - \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon}^T \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon}) \mathbf{x}_\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (17)$$

(17)式の右辺は一般に γ に依存している。ただし、すべてのリスク資産が取引可能($h = m$)な場合は、右辺が $\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})^T \boldsymbol{\Sigma}_{mm}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})}$ となり、 γ に依存しないことがわかる。これは通常のCAPMに相当する。

完全市場では、銀行のリスク回避度がどのような水準であったとしても、また、どのような目標収益や許容リスク量を設定していたとしても、最適化されたポートフォリオのシャープレシオは同じとなる。この点で、シャープレシオは、投資効率を評価する指標として特別な意味を持つ。一方、不完全市場においては、上述のように投資目標等の設定次第でポートフォリオのシャープレシオが異なるため、シャープレシオは投資効率を図る数ある指標の1つに過ぎなくなる。不完全市場での投資効率を考える際には、このような完全市場との違いに注意する必要がある。

11 無リスク資産を含む効率的フロンティアは、取引不可能なリスク資産の数が多いほど曲線の曲率が大きい。この点は、補論2(3)における図A-1および図A-2を参照。

(4) 数値例に基づく分析

ここでは、本節(2)で得られた結果を用いて、数値例に基づく分析を行う。銀行は初期状態で3種類のローンを保有しているとする。また、状態 $h = 1$ でローン1、 $h = 2$ でローン1とローン2、 $h = 3$ ですべてのローンが市場で取引可能とする。さらに、銀行は無リスク金利で借入れを行うことができるとする。数値分析の基準となるパラメータは以下のように与える。

- ローンの期待収益率： $\mu_i = 0.03$ ($i = 1, 2, 3$)
- ローンの収益率のボラティリティ： $\sigma_i = 0.2$ ($i = 1, 2, 3$)
- ローンの収益率の相関： $\rho_{ij} = 0.2$ ($i, j = 1, 2, 3, i \neq j$)
- 初期状態での各ローンの保有比率： $(x_1, x_2, x_3) = (0.6, 0.3, 0.1)$
- 無リスク金利： $r = 0.01$

上記のパラメータは、以下のような状況を想定して設定したものである。銀行は3種類のローンを保有しているが、すべてのローンのリスク・リターン特性が同質であるため、仮にすべてのローンが市場で取引可能であった場合、すべてのローンを同じ割合だけ保有する戦略がリスク分散の点で最適となる。しかし、営業地盤に関する地理的な制約やメインバンク制などの要因¹²により、銀行はローンの保有比率を自由にコントロールできない状況となりうる。そのため、市場の発展途中では必ずしも最適とはいえないローンポートフォリオを保有しうる。

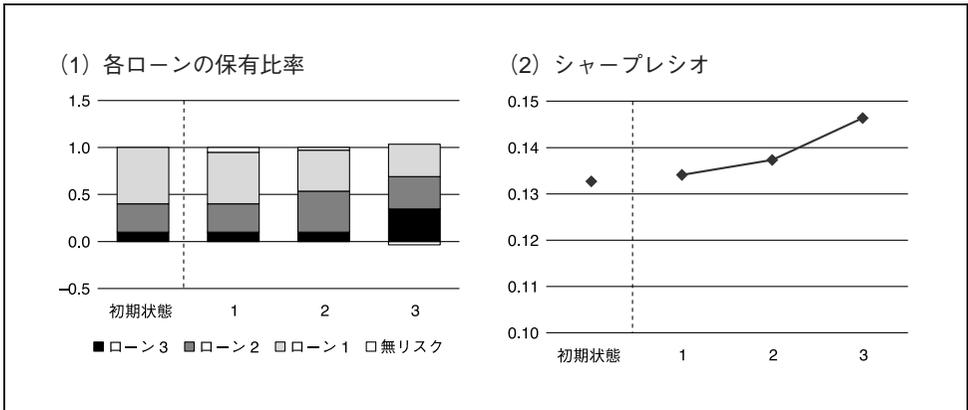
図2は、基準となるパラメータのもとで、銀行の最適ローンポートフォリオの保有比率およびシャープレシオが市場の状態に応じてどう変化するかを示したものである。この例では、銀行はセーフティファースト・ルールに従っていると仮定し、銀行が目標とするポートフォリオの許容リスク量 σ_p^2 を0.02と設定した。

各グラフの横軸は取引可能なローンの数を示しており、取引できるローンを1つずつ増やしていくことで、信用リスク移転市場の発展が銀行の最適ローンポートフォリオに与える影響を観察している。まず図2(1)をみると、信用リスク移転市場が発達するとともに、銀行のポートフォリオ構成は徐々に最適な構成、すなわち、この例では、3つのローンを同じ割合で保有する構成に近づいていく。この際、図2(2)のようにシャープレシオは緩やかに上昇し、市場の発展は銀行の投資効率にプラスの効果を与えていることがわかる¹³。

12 例えば、(1)銀行の営業地盤に存在する企業の業種が偏っているため、最適な分散投資が達成できない場合、(2)メインバンクとなっている企業に対して、当該企業とのリレーションシップを優先することにより、銀行の最適ポートフォリオだけでは貸出量を決められない場合などが考えられる。

13 本稿で取り上げた3つのリスク管理方針のうち、任意のリスク管理方針に従う銀行において、 $h = m$ における銀行の最適ポートフォリオのシャープレシオが、初期状態や市場の発展途中の状態 ($h < m$) のシャープレシオを必ず上回することは解析的に証明することができる。特に、リターンベンチマーク・ルールおよびセーフティファースト・ルールに従う銀行の最適ポートフォリオのシャープレシオは、市場の発展に伴って単調増加することが解析的に証明される。一方、トレードオフ・ルールの場合は、図7(4)で示されるように市場の発展途中では必ずしも単調増加とはならないケースがみられる(詳細は補論2を参照)。

図2 基準となるパラメータを用いた数値例



- 備考：1) 両図とも、横軸は取引可能なローンの数を表す。左端はすべてのローンが取引不可能な初期状態、右端はすべてのローンが取引可能な完全市場の場合に相当する。
- 2) (1)の縦軸は、各ローンおよび無リスク資産の保有比率を示している。棒グラフが0を示す線より上に出ている場合は当該資産をロング、下に出ている場合はショートしていることを意味する。以降保有比率を示す図においては同様。
- 3) (2)の縦軸はシャープレシオの値を表す。以降シャープレシオを示す図においては同様。

次に、ここでは2つのケースを想定して比較静学を行う。すなわち、1つめはローン市場の性質、具体的には各ローン間の相関係数を変化させた場合に、銀行の最適ローンポートフォリオおよび投資効率がどのように変化するのかを観察する。2つめは、銀行の性質（目標収益、許容リスク量、リスク回避度）を変化させた場合に、銀行の最適ポートフォリオおよびシャープレシオがどのように変化するのかを観察する。

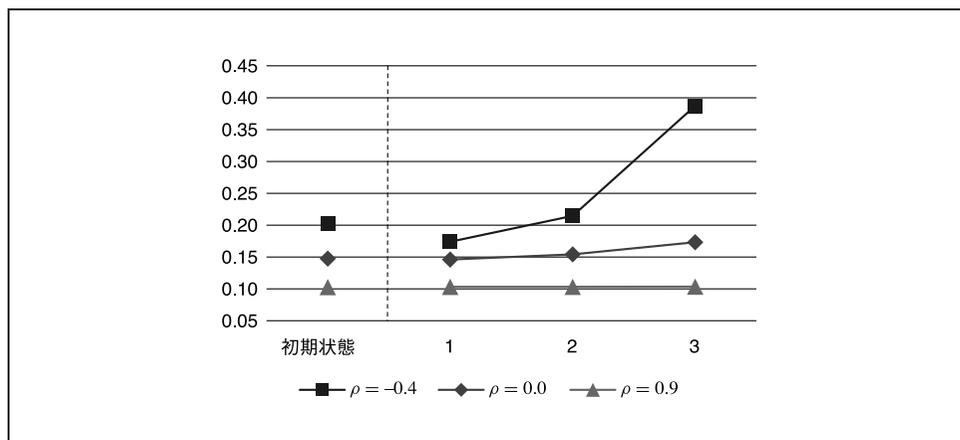
イ. 市場の性質による比較

本節(3)の(15)式において、銀行の最適ローンポートフォリオを特徴づける要素として、取引可能なローンと取引不可能なローンの相関が重要であることを指摘した。そこで、ここではローン間の相関係数を変化させた場合の最適ローンポートフォリオおよびシャープレシオの変化を観察する。銀行のタイプとしては、セーフティファースト・ルールに従うリスク管理を行う銀行（本節(2)ロ.の場合）を例にとる。銀行が許容するリスク量の上限 σ_p^2 は0.02とする。

図3は、ローン間の相関係数を変化させた場合、具体的には $\rho_{ij} = -0.4, 0.0, 0.9$ ($i, j = 1, 2, 3, i \neq j$) とした場合¹⁴の、市場の発展に伴うシャープレシオの変化を示している。これは次のような状況を想定した設定である。まず、相関が¹⁴-0.4の場

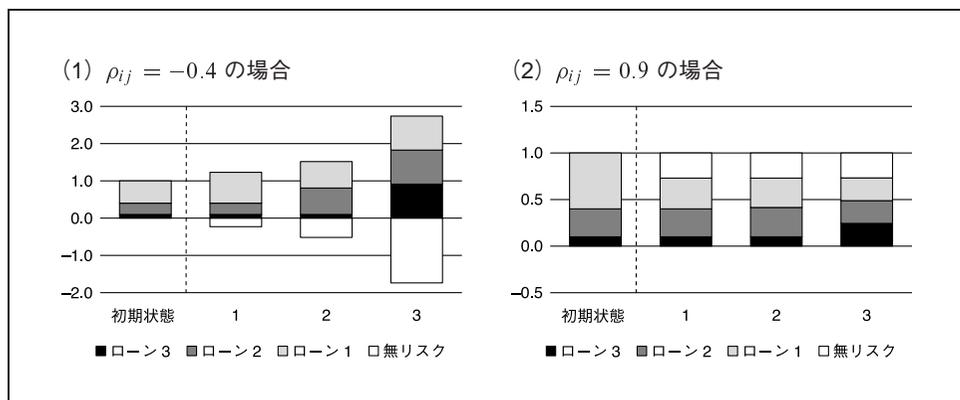
14 各成分が同一のファクター ρ ($-1 \leq \rho \leq 1$) の相関行列について、行列が正定値となる ρ の範囲が $-0.5 < \rho < 1$ であることが解析的に示される。ここでは、正相関と負相関の違いが最適ポートフォリオに与える影響をより明確にするため、 $-0.5 < \rho < 1$ の中で相関の上下幅が比較的大きい $\rho_{ij} = -0.4$ および $\rho_{ij} = 0.9$ を採用した。

図3 異なる相関係数でのシャープレシオ



備考：図2を参照。

図4 異なる相関係数での最適ポートフォリオの保有比率

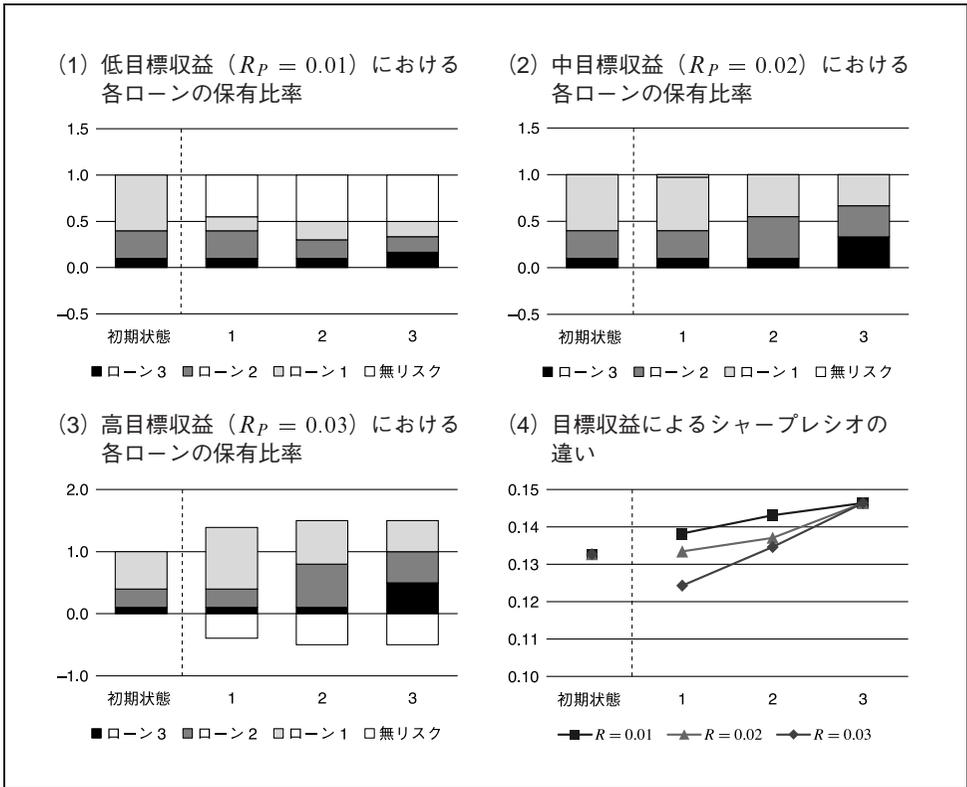


備考：図2を参照。

合はローンが互いに逆相関の関係にあるため、互いにヘッジや分散効果が働きやすいローン市場を想定している。一方、相関が0.9の場合は、互いに同じ動きをする同質なローン市場を意味するため、ヘッジや分散効果が働きにくい状況を想定している。こうした状況を踏まえて図3をみると、相関係数が小さいほどシャープレシオが相対的に高くなっており、この効果は市場が発達するほど大きくなっていることが確認される。これは、互いに相関が負のローンを最適な量だけ保有することでヘッジ効果や分散投資効果が働くことによるものである。

この際の最適ポートフォリオの保有比率をみたものが図4である。ここでは、 $\rho_{ij} = -0.4$ の場合と $\rho_{ij} = 0.9$ の場合の最適ポートフォリオをそれぞれ図4(1)と図4(2)で比較している。これをみると、 $\rho_{ij} = -0.4$ の方が無リスク金利での借入

図5 目標収益による最適ポートフォリオの違い



備考：図2を参照。

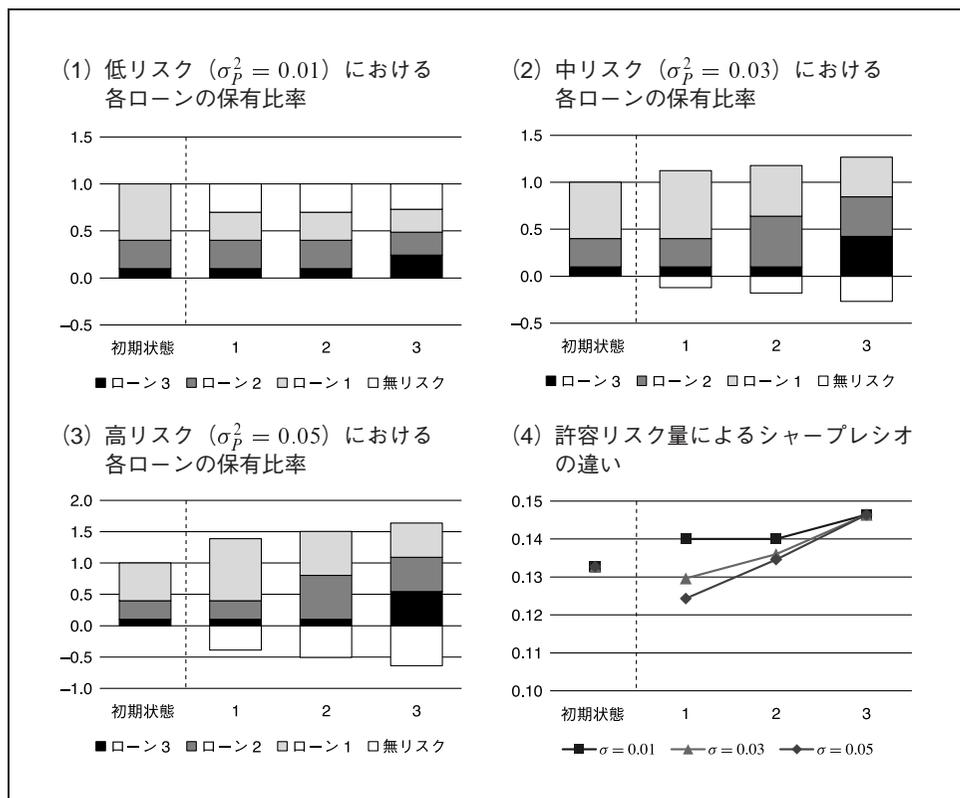
れを増やし、バランスシートを拡大させていることがわかる¹⁵。これは、互いに負の相関を持つローンが取引可能となることで、より大きな分散投資効果が生まれ、金融機関の貸出余力が増加したためである。このような状況では、貸出先の企業に対しても、資金調達の世界拡大などのプラスの効果及んでいられる。また、銀行行動に関する含意としては、取引不可能なローンの収益率と負の相関を持つ金融商品を作り出してポートフォリオに組み込むインセンティブが高まる可能性が考えられる。

ロ. 銀行のリスク管理方針による比較

ここでは、銀行の性質にさまざまな変化を与えることにより、銀行の性質による最適ローンポートフォリオの違いを分析する。

15 本稿では銀行の資産サイドに注目してその資産配分を考えているが、バランスシートが拡大する状況を考える際には資産・負債の両サイドの動きを考えると理解しやすい。すなわち、初期状態では負債サイドはすべて自己資本で調達していると考え、バランスシートが拡大した際には、その分だけ負債サイドに無リスク金利による借入れが加わり、レバレッジの掛かった状態になると解釈できる。

図6 許容リスク量による最適ポートフォリオの違い

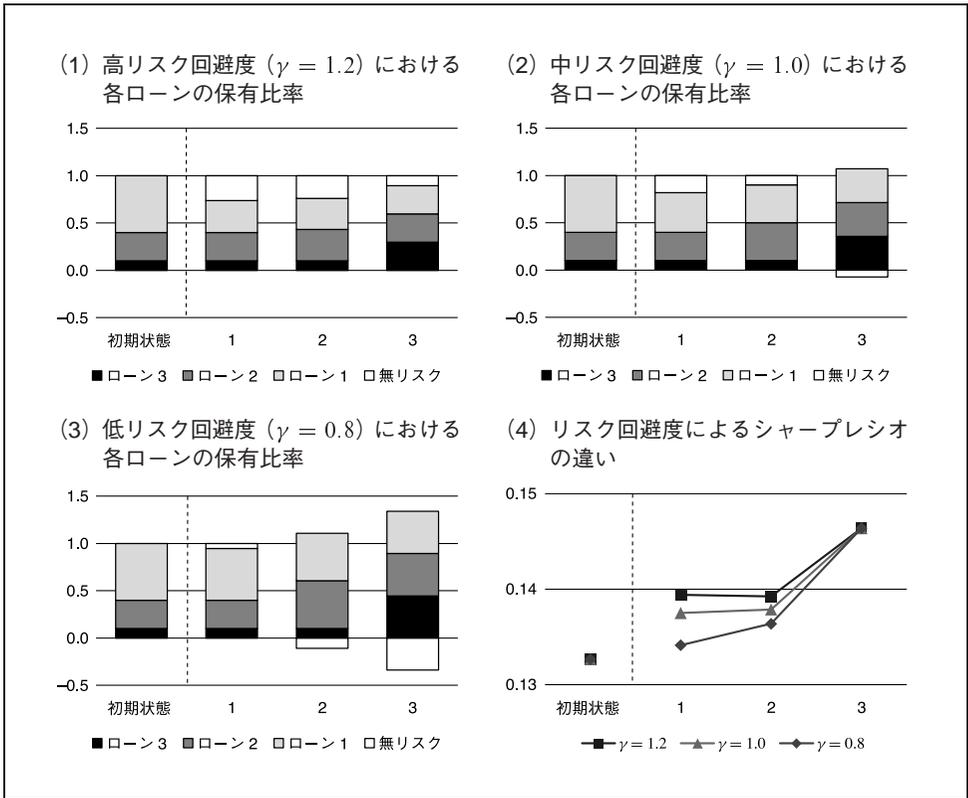


備考：図2を参照。

(イ) リターンベンチマーク・ルールに従う銀行の場合

まず、本節(2)イ.で導出した、リターンベンチマーク・ルールに従う銀行について考察を行う。図5は、銀行の目標収益を期待超過収益率表示で $R_p = 0.01, 0.02, 0.03$ とした場合の計算結果である。どのローンも取引できない初期状態におけるポートフォリオの目標収益は0.02に設定されている。図5(4)をみると、まず目標収益を0.02のまま変更しなかった場合、市場の発展に伴い銀行のシャープレシオは改善を続けるものの、目標収益を0.01と低くした場合と比較して、その改善度合いは緩やかになっていることがわかる。また、このときのシャープレシオの水準は、目標収益を0.01とした場合よりも低い。目標収益を0.03と高く設定した場合、市場の発展途中においては、銀行のシャープレシオは目標収益を0.01、0.02とした場合よりもさらに低い。この際、図5(3)をみると、銀行は無リスク金利で借入れを行い、バランスシートを拡大させていることがわかる。こうした結果は、銀行の目標収益の設定次第では、シャープレシオが低めの投資案件にレバレッジを掛けて投資を行う可能性があることを示唆している。これは前述したように、不完全な市場については分離定理が成立しないことに起因している。

図7 リスク回避度による最適ポートフォリオの違い



備考：図2を参照。

(ロ) セーフティファースト・ルールに従う銀行の場合

図6は、本節(2)ロ.の銀行の許容リスク量を変化させた場合、具体的には $\sigma_P^2 = 0.01, 0.03, 0.05$ とした場合の計算結果である。得られた結果の定性的な含意は、上記(イ)とほぼ同様である。

(ハ) トレードオフ・ルールに従う銀行の場合

図7は、本節(2)ハ.の銀行のリスク回避度を変化させた場合、具体的には $\gamma = 1.2, 1.0, 0.8$ とした場合の計算結果である。この場合、本節(2)イ.、ロ.の銀行と異なる点として、市場の発展に伴い最適ポートフォリオのシャープレシオが低下するケースが存在する点が挙げられる。例えば、図7(4)において $\gamma = 1.2$ のケースをみると、状態1から状態2に変化する際に、最適ポートフォリオのシャープレシオがわずかながらも低下している。この現象も、不完全市場において分離定理が成立しないことに起因する。詳細な議論は補論2(3)で行っている。

このように不完全市場においては、銀行がトレードオフ・ルールに従うとき、目的関数は最適化される一方で、シャープレシオは市場の発展に伴って低下することが

ある。一方、銀行がリターンベンチマーク・ルールやセーフティファースト・ルールに従うときは、補論2(2)に示すように、銀行が目的関数を最適化することで、市場の発展に伴ってシャープレシオは必ず増加する。この結果は、不完全市場における効用最大化と投資効率の関係を考えるうえで興味深い。

3. 信用リスク移転市場における均衡の分析

2節のモデルは、ある1つの銀行の最適ローンポートフォリオを考察しており、その銀行の取引は、市場の価格に影響を及ぼさないことを仮定していた。本節では、2節で議論したモデルを拡張する。具体的には、複数の銀行が存在する中で、銀行が互いにローンを売買することによって各自のポートフォリオを最適化するリスクの移転市場を考え、この市場で需給が一致するような均衡価格を導出する(市場均衡)¹⁶。そのうえで、信用リスク移転機能の発展に伴う銀行の最適ローンポートフォリオの変化および投資効率の変化を、数値例により分析する。ただし、ここでは各銀行が保有するローンの量は外生的に与えられているとし、企業の資金需要の変化などは考慮しない。簡単化のため¹⁷、本節ではトレードオフ・ルールに従う銀行についてのみ分析を行う。

(1) モデルの設定

本節では、銀行が N 行存在すると仮定する。初期状態における銀行 I ($I = 1, \dots, N$) の保有ポートフォリオ $\bar{\mathbf{x}}^I$ および価格調整後の市場均衡下での各銀行 I の最適ポートフォリオ $\tilde{\mathbf{x}}^I$ を以下のようにおく。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}^I &= \begin{pmatrix} \bar{x}_h^I \\ \bar{x}_e^I \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}_h^I = (\bar{x}_1^I, \dots, \bar{x}_h^I)^T, \quad \bar{\mathbf{x}}_e^I = (\bar{x}_{h+1}^I, \dots, \bar{x}_m^I)^T, \\ \tilde{\mathbf{x}}^I &= \begin{pmatrix} \tilde{x}_h^I \\ \tilde{x}_e^I \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_h^I = (\tilde{x}_1^I, \dots, \tilde{x}_h^I)^T. \end{aligned} \tag{18}$$

16 このような市場均衡分析は、古くは Bühlmann [1980] にさかのぼる。また、1節で述べたとおり、セキュリティ・デザインの分野においてもリスク移転市場に関する研究が数多くなされており、本節と同様の議論も行われている。詳細は Duffie and Rahi [1995] の3節等を参照。さらに、最近では、こうした考え方をデリバティブの価格付け等へ応用したものとして Wang [2005] や Kijima [2006] などがある。

17 補論1で後述するが、銀行がリターンベンチマーク・ルールおよびセーフティファースト・ルールに従う場合、均衡価格が満たす関係式が非線形ベクトル方程式となる。したがって、均衡価格および最適ポートフォリオを求めるには数値計算が必要となる。

2節のモデルと同様、各銀行はそれぞれ m 社の企業のローンから構成されるローンポートフォリオを保有しており、そのうち h 個のローンの保有比率については、市場を通じてリバランスできるとする。ただし、2節のモデルとは異なり、各銀行のローンに対する需要量¹⁸と市場に存在するローンの総額が等しくなるように取引価格が変化する。これらの条件を基に、以下では市場均衡での最適ローンポートフォリオおよびローンの均衡価格を導出する。

(2) 銀行の最適ローンポートフォリオ選択およびローンの均衡価格

市場均衡下における各銀行 I の最適ポートフォリオ $\tilde{\mathbf{x}}_h^I$ およびローンの均衡価格¹⁹ $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h$ を、以下の2つの条件を満たすように定める。

1. 各銀行は、個々の最適ポートフォリオを選択する。

$$\max_{\{\tilde{\mathbf{x}}_h^I\}} \left\{ (\tilde{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})^T \tilde{\mathbf{x}}^I - \frac{\gamma_I}{2} (\tilde{\mathbf{x}}^I)^T \Sigma \tilde{\mathbf{x}}^I \right\}. \quad (19)$$

ここで、 $\tilde{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1} = ((\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r\mathbf{1}_h)^T, (\boldsymbol{\mu}_\varepsilon - r\mathbf{1}_\varepsilon)^T)^T$ 、 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r\mathbf{1}_h = (\tilde{\mu}_1 - r, \dots, \tilde{\mu}_h - r)^T$ は市場均衡下でのローンの超過収益率を表す。主体的均衡の場合と異なり、 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h$ も未知変数として、市場の需給が一致するように決定する。

2. 市場全体のローンの需給が一致する（市場の清算条件）。

$$\sum_{I=1}^N \omega_I \tilde{\mathbf{x}}_h^I = \sum_{I=1}^N \omega_I \tilde{\mathbf{x}}_h^I. \quad (20)$$

ここで、 ω_I は銀行 I の保有資産総額である。(20)式の左辺は初期状態において市場に存在するローンの総量を表し、右辺は価格調整後に銀行が需要するローンの総量を表している。これらが等しくなるように均衡価格 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h$ が決定される。

以上の条件式から、最適ポートフォリオと均衡価格を導出する。まず、(19)式は2節(2)ハ.の最適化問題と同じ形であるため、 $\tilde{\mathbf{x}}_h^I$ は以下のように導出できる。

$$\tilde{\mathbf{x}}_h^I = \frac{1}{\gamma_I} \Sigma_{hh}^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r\mathbf{1}_h) - \Sigma_{hh}^{-1} \Sigma_{h\varepsilon} \tilde{\mathbf{x}}_\varepsilon^I. \quad (21)$$

さらに、(21)式を(20)式に代入すると、以下の関係式が得られる。

18 本節はローンの売買市場を考えているため、ここでの「需要」とは、銀行が市場から購入を希望するローンの量を意味している。また、「供給」とは銀行が市場へ売却を希望するローンの量を意味する。

19 正確には、 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h$ は均衡価格そのものではなく、均衡価格を利回り表示したものである。すなわち、当該ローンに対して市場が要求する期待収益率である。

$$\sum_{I=1}^N \omega_I \bar{x}_h^I = \left(\sum_{I=1}^N \frac{\omega_I}{\gamma_I} \right) \Sigma_{hh}^{-1} (\tilde{\mu}_h - r \mathbf{1}_h) - \Sigma_{hh}^{-1} \Sigma_{h\varepsilon} \left(\sum_{I=1}^N \omega_I \bar{x}_\varepsilon^I \right). \quad (22)$$

ここで、 $\gamma = (\sum_{I=1}^N (\omega_I / \gamma_I))^{-1}$ 、 $\bar{x}_h = \sum_{I=1}^N \omega_I \bar{x}_h^I$ 、 $\bar{x}_\varepsilon = \sum_{I=1}^N \omega_I \bar{x}_\varepsilon^I$ として (22) 式を整理すると、 $\tilde{\mu}_h$ は (23) 式のように導出される。

$$\tilde{\mu}_h - r \mathbf{1}_h = \gamma (\Sigma_{hh} \bar{x}_h + \Sigma_{h\varepsilon} \bar{x}_\varepsilon). \quad (23)$$

(21) 式、(23) 式からわかるように、市場均衡下での各銀行の最適ポートフォリオおよび均衡価格は、初期状態において市場に存在するローンの総額 ($\bar{x}_h, \bar{x}_\varepsilon$) に依存して決定される。これは、銀行の最適ポートフォリオに組み入れられるローンの総額が市場に存在するローンの総額に一致するように価格が調整されているためである。

ここで、均衡価格の意味を考えるために、価格が調整される前の最適ポートフォリオと期待収益率の関係式

$$\mu_h - r \mathbf{1}_h = \gamma (\Sigma_{hh} \hat{x}_h + \Sigma_{h\varepsilon} \bar{x}_\varepsilon), \quad (24)$$

と (23) 式を比較する。(24) 式の導出は 2 節における最適ポートフォリオの場合と同様である。(23) 式では、前述のように、市場に存在するローンの総額 ($\bar{x}_h, \bar{x}_\varepsilon$) を所与としてローンの期待収益率 $\tilde{\mu}_h$ が調整されている。一方、(24) 式では、価格が調整される前の期待収益率 μ_h を所与として \hat{x}_h が調整される形で最適ポートフォリオが選択されている。(23) 式と (24) 式の差をとることにより、均衡価格は (25) 式のように表現することができる²⁰。

$$(\tilde{\mu}_h - r \mathbf{1}_h) = (\mu_h - r \mathbf{1}_h) + \gamma \Sigma_{hh} (\bar{x}_h - \hat{x}_h). \quad (25)$$

(25) 式左辺は市場の均衡価格、すなわち市場で要求されている超過収益率を表す。右辺第 1 項は価格が調整される前の超過収益率を表し、第 2 項は需給の差 $\bar{x}_h - \hat{x}_h$ によるリスクプレミアムを表している²¹。この式から、均衡価格（厳密には均衡収益率）は市場のローンの供給額が各銀行のローンの需要量と等しいとき、すなわち $\bar{x}_h = \hat{x}_h$ のときに実際の期待収益率と一致し、それ以外の場合には需給に合わせて均衡価格が変化することがわかる。

20 (25) 式は、プライシング・カーネルを用いて表現することも可能である。詳細は補論 3 で述べる。

21 ここでは μ_h を価格調整前の期待収益率、 $\tilde{\mu}_h$ を価格調整後の期待収益率と解釈しているが、ファイナンス理論の観点からみれば、 μ_h はもともと観測されていた実測度における期待収益率である一方、 $\tilde{\mu}_h$ はリスク中立測度下での期待収益率である。したがって、この 2 つの収益率の差はリスクプレミアムを意味する。

(3) 数値例に基づく分析

ここでは、本節(2)で得られた結果を用いて、数値例に基づく分析を行う。設定としては、2つの銀行が存在し、おのおの3種類のローンを保有しているとする。また、2節(4)と同様に、状態 $h=1$ でローン1、 $h=2$ でローン1とローン2、 $h=3$ ですべてのローンが取引可能になるとする。数値例の基準となるパラメータ（ベンチマーク）は以下のように与える。なお、これらのパラメータ設定は、各ローンに対する本節(2)の均衡条件を満たしている²²。

- ローンの期待収益率： $\mu_i = 0.03$ ($i = 1, 2, 3$)
- ローンの収益率のボラティリティ： $\sigma_i = 0.2$ ($i = 1, 2, 3$)
- ローンの収益率の相関： $\rho_{ij} = 0.2$ ($i, j = 1, 2, 3, i \neq j$)
- 初期状態での各ローンの保有比率： $(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = (0.6, 0.4, 0.1)$ 、 $(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = (0.055, 0.255, 0.555)$
- 各銀行のリスク回避度： $\gamma_1 = 1.0$ 、 $\gamma_2 = 1.2$
- 無リスク金利： $r = 0.01$
- 初期状態での各銀行の保有資産総額： $\omega_1 = \omega_2 = 1.0$

以下では、2つのケースを想定して数値分析を行う。1つめのケースは市場の需給が一致しているケースであり、2つめのケースは、市場の需給が一致しなくなるケースである。

イ. 市場の需給が一致している場合

市場の需給が一致している場合、(25)式より、 $\tilde{\mu}_h = \mu_h$ となることがわかる。すなわち、この場合は2節のモデルに帰着する。したがって、2節(4)で得られた結果が本節のモデルでも成立する。

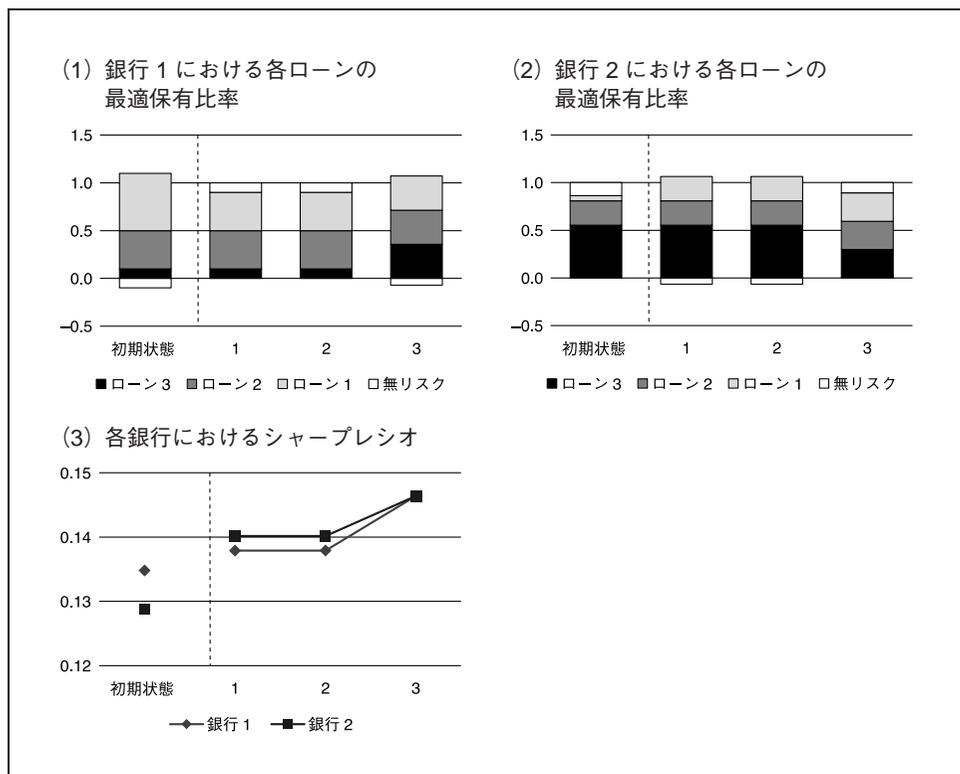
基準となるパラメータを用いた数値例を図8に示す。2節のモデルの場合と同様、銀行のシャーププレシオは市場の発展に伴って概ね上昇傾向にあり、市場の発展は銀行の投資効率にプラスの効果を与えていることがわかる。

ロ. ショックにより市場の需給が崩れる場合

イ.では、需給が一致している場合を考えたが、ここでは市場にショックが加わったことにより需給が崩れた場合を考える。具体的には(イ)ローンの期待収益率を低下させた場合、(ロ)銀行1のリスク回避度 γ_1 を低下させた場合、(ハ)銀行1のリスク回避度 γ_1 を上昇させた場合に、銀行の最適ポートフォリオおよびシャーププレシオがどのように変化するかを観察する。この際、2節や本節(3)イ.と同様、市場の発

22 銀行1の初期保有比率を定めた後、市場の需給が一致するように銀行2の初期保有比率を定めた。また、銀行2の保有比率は小数第4位を四捨五入して表示している。

図8 基準となるパラメータを用いた数値例



備考：図2を参照。

展が銀行の投資効率にプラスの効果を与える一方で、ローンの市場価格が変動することによる効果が新たに生まれる。ここでは、そのような価格変動の効果まで考慮した分析を行っている。

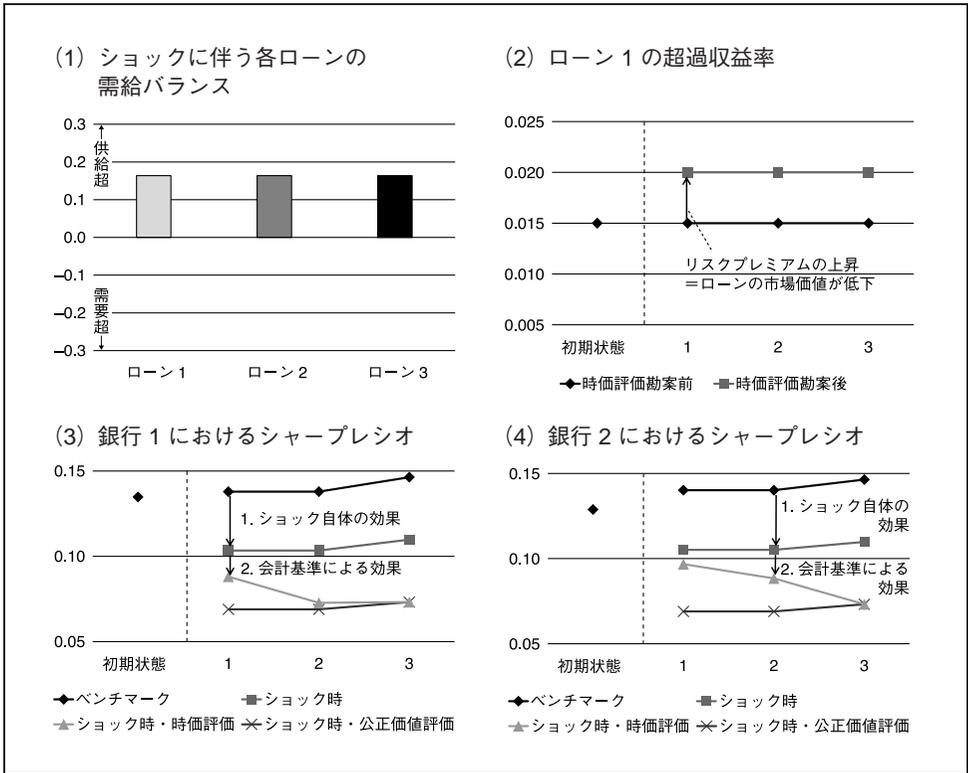
(イ) ローンの期待収益率を低下させた場合

ローンの期待収益率を低下させた場合、具体的には μ_i ($i = 1, 2, 3$) を 0.03 から 0.025 に引き下げた状況を考える。これは、景気の悪化などにより、すべてのローンに共通してマイナスのショック²³が発生したケースを想定したものである。この場合の市場の状態および銀行の投資効率の変化を示したのが図9である。図9(1)で示すように、まず、 μ_i が低下したことにより、銀行がリスク資産に投資する魅力が低下するため、市場全体としては各ローンが供給超過となる²⁴。図9(2)は、一例として

23 Schinasi and Smith [2000] ではキャピタル・ショックと呼ばれている。

24 この例ではすべてのローンが供給超過となっているが、一部のローンの期待収益率のみを引き下げる(具体的には、 μ_2 のみを0.03から0.02に下げる)と、需要超過のローンと供給超過のローンが混在する。この場合、ローンの市場価格はショックが発生したローンのみ下落し、その他のローンは不変となる(補論4(1)を参照)。

図9 ローンの期待収益率を低下させた場合の市場の状態および銀行の投資効率の変化



備考：1) (1)の縦軸は、各ローンの供給量と需要量との差を表す。棒グラフが0を示す線より上に出ている場合は供給超過の状態、下に出ている場合は需要超過の状態を表す。
 2) (2)の縦軸は、ローンの超過収益率を表す。2つのグラフの差は、市場の需給が崩れたことによるリスクプレミアムの変化を表している。
 3) (3)、(4)の「ベンチマーク」は、基準となるパラメータで計算した場合、「ショック時」は、ショックに対応したパラメータを変更した際の最適ポートフォリオにおいて時価評価を全く行わなかった場合、「ショック時・時価評価」は「ショック時」と同じポートフォリオについて市場で取引可能な資産のみ時価評価を行った場合、「ショック時・公正価値評価」は同ポートフォリオについて、市場取引の可否にかかわらずすべてのローンを公正価値評価した場合の値である。
 4) 図10、図11についても、上記の備考のとおり。

ローン1の超過収益率の変化を示したものであるが、図9(1)で示した需給のギャップを修正するために、ローン1が市場で取引可能となる状態1以降において、市場がローン1に対して要求するリスクプレミアムが上昇(ローンの市場価格が下落)していることがわかる。なお、ここでは図示していないが、ローン2のリスクプレミアムは状態2と状態3で、ローン3のリスクプレミアムは状態3で上昇する。このようなリスクプレミアムの変動は、次の(ロ)および(ハ)の場合でも同様にみられる。こうした状況をシャープレシオの観点から確認したものが図9(3)と図9(4)であ

る。まず、図中の各項目を説明すると、「ベンチマーク」は、基準となるパラメータを用いて計算した場合のシャープレシオである。「ショック時」は、ショックに対応してパラメータを変更した際の各銀行の最適ポートフォリオに対するシャープレシオであるが、ローンの時価変化に伴う収益率の変化は考慮していない場合のシャープレシオを示している。一方、「ショック時・時価評価」は、「ショック時」と同じ最適ポートフォリオについて、市場で取引が可能なローンのみ時価変化に伴う収益率への影響を勘案した場合のシャープレシオであり、「ショック時・公正価値評価」は、「ショック時」と同じ最適ポートフォリオについて、市場の状態にかかわらず、すべてのローンに対して公正価値の変化の影響を勘案した場合のシャープレシオである。これらは次の(ロ)および(ハ)でも同様である。

図9(3)、図9(4)をみると、矢印1で示されるように、シャープレシオは、ローンの期待収益率に対する下方ショックにより、「ベンチマーク」から「ショック時」の水準へと平行に低下していることがわかる。仮に市場取引が可能なローンに対してのみ時価会計が適用されるとすると、図9(3)、図9(4)の矢印2で示されるとおり、先ほどの低下分に加え、時価会計に伴うキャピタル・ロスの発生を反映して、シャープレシオは「ショック時・時価評価」の水準となる。一方、市場取引の可否にかかわらずすべてのローンが公正価値で評価されているとすると、シャープレシオは「ショック時・公正価値評価」の水準となる。このように、どの基準でみるかによって投資効率についての解釈は異なるが、以下では、いずれの状態においても全ローンの価値変動を勘案可能な「公正価値評価」の視点からシャープレシオの動きを分析する。

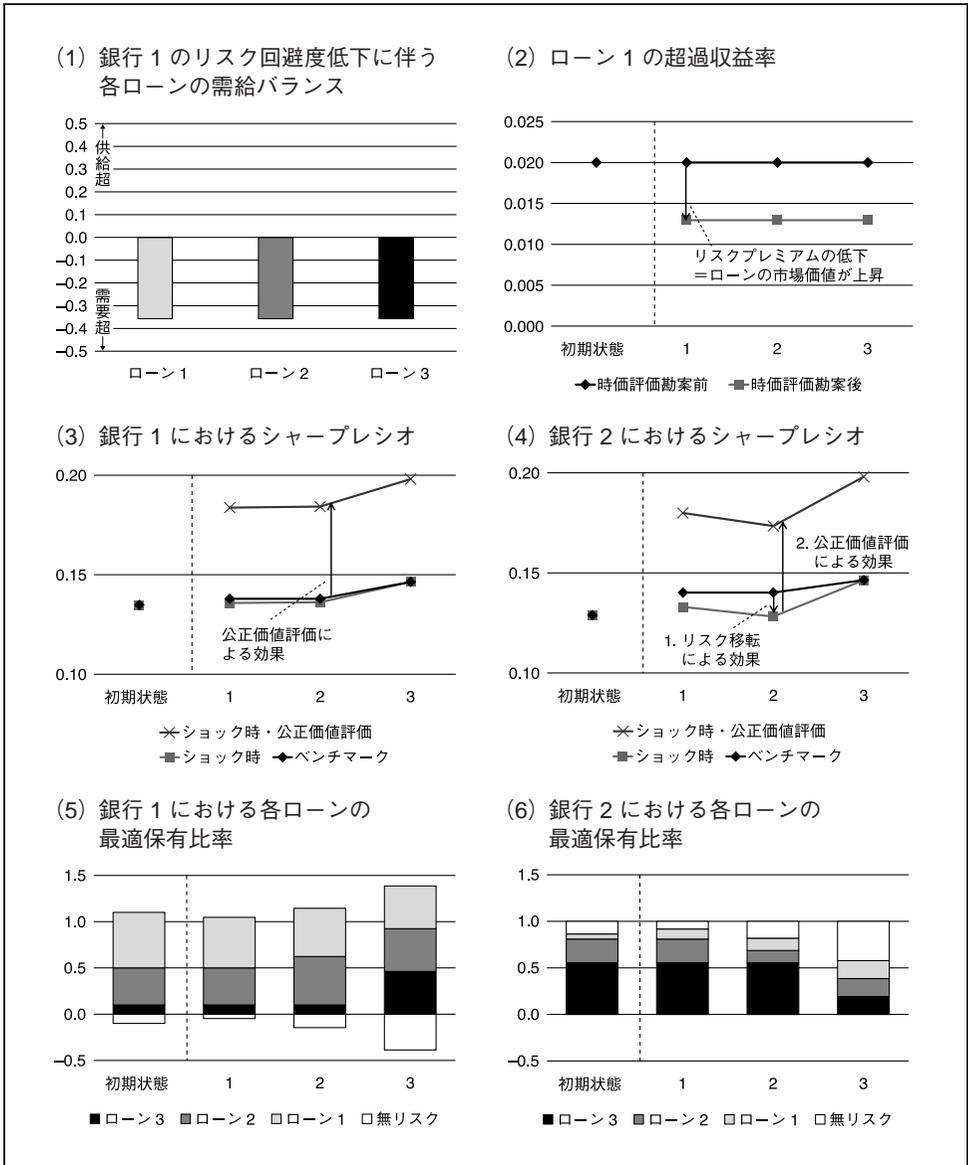
(ロ) 銀行1のリスク回避度を低下させた場合

ここでは、銀行1のリスク回避度を基準設定から低下させた場合、具体的には γ_1 を1.0から0.5に引き下げた状況を考える。これは、例えば好景気が長期間続いたために、リスク資産を好む銀行が登場したような状況を想定したものである。この場合の市場の状態および銀行の投資効率の変化を示したのが図10である。まず図10(1)をみると、 γ_1 が低下したことにより、銀行1にはリスク資産をより多く保有するインセンティブが働くため、ローンの取引市場において各ローンが需要超過となる。したがって、ローンの取引市場が各ローンに対して要求するリスクプレミアムが低下する²⁵。図10(2)では、一例としてローン1の超過収益率の変化を示しているが、ローン1が取引可能となる状態1以降で、リスクプレミアムが低下(ローンの市場価格が上昇)していることがわかる。

次に、それぞれの状態ごとにシャープレシオの変化をみると、図10(3)、図10(4)で示すように、状態1および状態2では、「ショック時」の水準は「ベンチマーク」よりわずかに低いものの、「ショック時・公正価値評価」の水準は「ベンチマー

25 すべてのローンのリスクプレミアムが低下する点は、ローンの期待収益率や分散共分散行列の構造にかかわらず解析的に示すことができる(補論4(2)を参照)。

図 10 銀行 1 のリスク回避度が低下した場合の市場の状態および銀行の投資効率の変化



備考：図 2、図 9 を参照。

ク」より高いことがわかる。「ベンチマーク」から「ショック時」へのシャープレシオの変化は、ポートフォリオのリバランスのみから生じたリスク移転の効果である。一方、「ショック時」から「ショック時・公正価値評価」へのシャープレシオの変化は、すべてのローンを公正価値評価することによる効果であり、前者と後者の和が、ローン価格の変化が最適ポートフォリオの投資効率に対して与えるトータルの効果

となる。

このように考えたもとの、状態1、状態2および状態3を比較し、市場が発達したときの効果をみると、状態1および状態2では、各銀行が異質なローンポートフォリオを保有しているため、銀行間でローンの売買が成立し、各ローンを公正価値評価することによる効果の一部が、リスク移転による効果によって相殺されている。一方、完全市場の場合（状態3）は、分離定理により銀行が保有するローンポートフォリオの構成比率がすべて同一であり、各銀行間でローンの売買が成立しないため、リスク移転による効果が全く生じない。そのため、各ローンの価格変動による効果が、そのまま銀行の投資効率の変化として現れる。

(ハ) 銀行1のリスク回避度を上昇させた場合

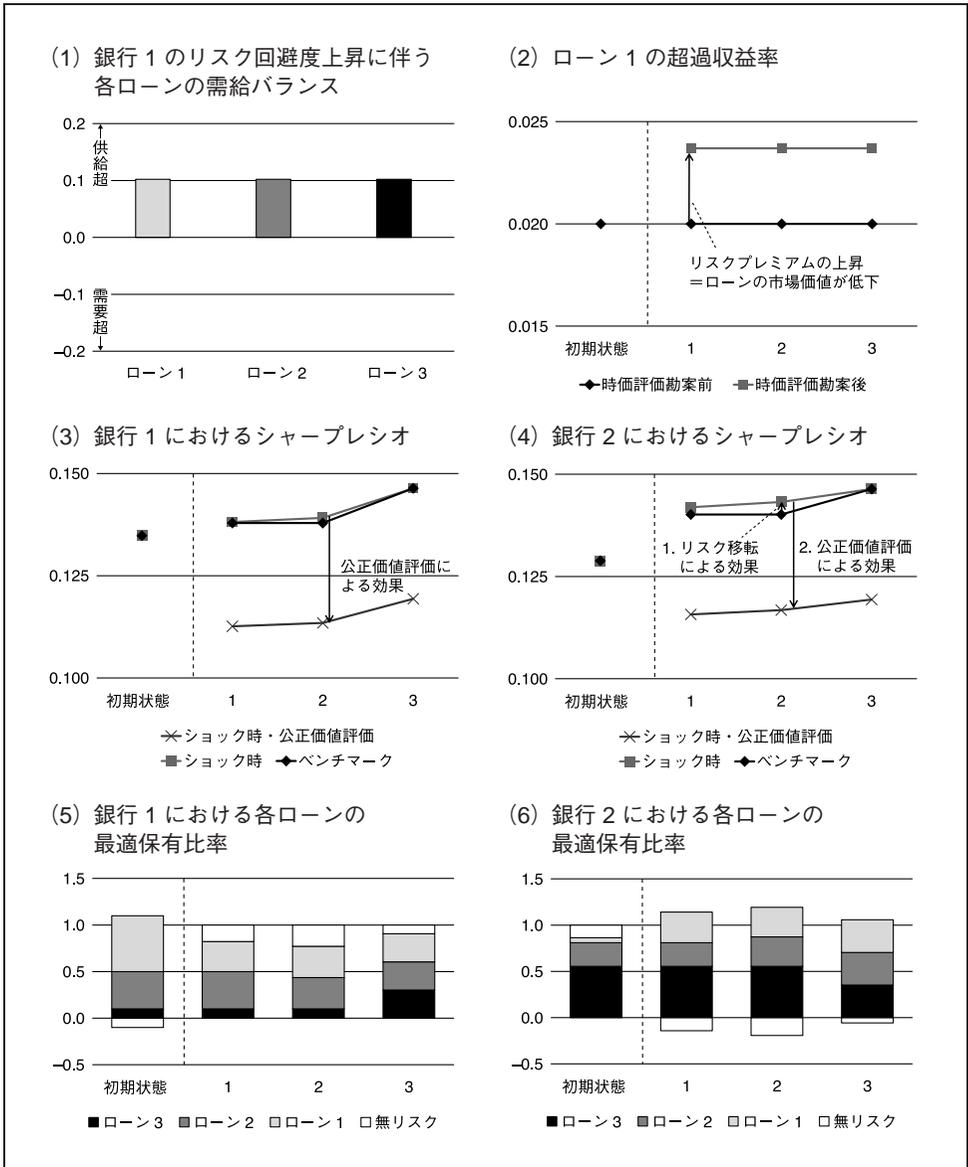
(ロ)と逆に、銀行1のリスク回避度を基準設定から上昇させた場合、具体的には γ_1 を1.0から1.4に引き上げた状況を考える。これは、例えば自己資本の毀損などにより、リスク資産の保有を避ける銀行が登場したような状況を想定したものである。この場合の市場の状態および投資効率の変化を示したのが図11である。まず図11(1)をみると、 γ_1 が上昇したことにより、銀行1がリスク資産を保有するインセンティブは低下するため、市場において各ローンが供給超過となる。したがって、市場が各ローンに対して要求するリスクプレミアムが上昇する²⁶。図11(2)では、一例としてローン1の超過収益率の変化を示しているが、ローン1が取引可能となる状態1以降で、ローン1のリスクプレミアムが上昇（ローンの市場価格が低下）していることがわかる。また図11(4)をみると、 γ_1 の上昇によって、銀行1だけでなく銀行2のシャープレシオもベンチマーク対比で低下している。銀行2については、自身のリスク回避度 γ_2 に全く変化がないにもかかわらず、銀行1のリスク回避度上昇を受けたローンポートフォリオの公正価値の低下の影響を受けていることがわかる²⁷。こうした考察をもとに、(イ)の場合と同様に市場が発達したもとのシャープレシオの変化をみると、図11(3)、図11(4)で示すように、状態1および状態2では、「ショック時」の水準は「ベンチマーク」よりもわずかに高いが、「ショック時・公正価値評価」の水準は「ベンチマーク」よりも低い。これは(ロ)と同様、状態1および状態2では各銀行が異質なローンポートフォリオを保有しているため、銀行間でローンの売買が成立し、各ローンを公正価値評価することによる効果の一部が、リスク移転による効果によって相殺されることを意味している。一方、完全市場の場合（状態3）は、銀行間でローンの売買が成立しないため、各ローンを公正価値評価することによる効果が、そのまま銀行の投資効率の変化として現れる。

このように、需給バランスが崩れたことによるローンの市場価格の変化を考慮した場合、各銀行が保有するローンポートフォリオが異質なものであるほど、銀行が

26 すべてのローンのリスクプレミアムが上昇する点も、脚注21と同様の方法で解析的に示すことができる。

27 ここでの問題設定とはやや異なるが、ある銀行におけるイベントが他の銀行に影響を及ぼすという分析は、例えばAllen and Carletti [2006]でも行われている。同論文では、ある金融機関がデフォルトし資産価格に下方ショックが発生することで、他の金融機関のデフォルトを誘発することを数値例を用いて示している。

図 11 銀行 1 のリスク回避度が上昇した場合の市場の状態および銀行の投資効率の変化



備考：図 2、図 9 を参照。

互いにローンを売買する余地が大きいと、ショックに伴う各銀行の投資効率の変動は緩やかなものとなる。特に、ある銀行のリスク回避度が上昇した場合には、各銀行が異質なローンポートフォリオを保有することで、投資効率の低下が緩和される。この結果は、市場における銀行間の相互作用と資産価格変動との関係を考えるうえで示唆に富むものと思われる。

4. おわりに

本稿では、銀行が保有するローンポートフォリオを分析対象とし、ローンの一部だけが取引可能な不完全市場を想定して、最適ポートフォリオおよび均衡価格を導出した。

まず、ある1つの銀行を想定し、その銀行の市場取引がローンの市場価格に影響しないことを想定した主体的均衡での最適ポートフォリオを解析的に導出した。解析解を用いた数値分析の結果、市場の発展に伴い、銀行のシャープレシオは基本的には上昇していくことを確認した。この結果は、クレジット・デリバティブや証券化手法が発達することが、基本的には銀行の投資効率を高める効果をもたらすことを意味する。また、市場の発展途中では、完全市場の場合と異なり、銀行の目標収益や許容リスク量あるいはリスク回避度の水準次第で、シャープレシオが異なりうることも確認された。さらに、銀行がトレードオフ・ルールに従う場合には、市場の発展に伴いその目的関数の値は単調増加するものの、リターンベンチマーク・ルールやセーフティファースト・ルールの場合と異なり、シャープレシオは一時的に低下しうることも示された。

次に、複数の銀行がローン売買市場で取引を行うことを考え、各銀行のポートフォリオ最適化を反映した市場の需給が価格に影響することを想定した市場均衡モデルへの拡張を行った。その結果、ローン市場の需給が一致する場合は、市場で要求されるローンの超過収益率が主体的均衡で設定したものと一致し、主体的均衡と同じ結論が得られることを示した。一方、何らかの理由によりローン市場の需給が一致しないケース、例えば、ある銀行の自己資本が毀損し、リスク回避度が上昇した場合には、市場の均衡価格の変動を通じて他の銀行を含む市場全体で公正価値が低下することを示した。この際、この公正価値の変化は、市場が発達した完全市場において大きい。これは、完全市場においては、各銀行が互いに同一のポートフォリオを保有しているため、互いにリスクを移転することでショックを吸収することができず、すべてが公正価値の低下として現れるためである。

以上で得られた結果を基に、デリバティブ市場や証券化市場の発展の効果を考察すると以下ようになる。まず、デリバティブ市場や証券化市場の発展は、市場参加者間での互いに異なるリスクの交換を通じて資本の効率性を高めるという意味でプラスの効果があることが改めて確認された。これは、デリバティブや証券化が本来目的としてきた機能である。一方で、市場が発達することは、1つの銀行の行動が均衡価格の変化を通じて他の銀行のポートフォリオ選択へも影響を及ぼしうることを意味する。市場が発達したもとは、銀行間の相互作用の影響がローンの価格にどう影響するかを分析することが重要になると思われ、こうした分野の研究がさらに発展することが期待される。

参考文献

- 大谷 聡・白塚重典・山田 健、「資源配分の歪みと銀行貸出の関係について：銀行の金融仲介機能の低下とその影響」、日本銀行ワーキングペーパー No. 07-J-4、2007年
- 木島正明・田中敬一、『資産の価格付けと測度変換』、朝倉書店、2007年
- Alexander-Andrew, Vernie, “The Effectiveness of Credit Derivatives on Bank Holding Company Portfolio Management,” *Journal of Business and Economics Research*, 4 (9), 2006, pp. 67–76.
- Allen, Franklin, and Elena Carletti, “Credit Risk Transfer and Contagion,” *Journal of Monetary Economics*, 53 (1), 2006, pp. 89–111.
- , and ———, “An Overview of the Crisis: Causes, Consequences, and Solutions,” *International Review of Finance*, 10 (1), 2010, pp. 1–26.
- Bernanke, Ben S., “Addressing Weakness in the Global Financial Markets: The Report of the President’s Working Group on Financial Markets,” Delivered at the World Affairs Council of Greater Richmond’s Virginia Global Ambassador Award Luncheon, Richmond, Virginia, April 10, 2008.
- Bühlmann, Hans, “An Economic Premium Principle,” *Astin Bulletin*, 11 (1), 1980, pp. 52–60.
- Cebenoyan, A. Sinan, and Phillip E. Strahan, “Risk Management, Capital Structure and Lending at Banks,” *Journal of Banking and Finance*, 28 (1), 2004, pp. 19–43.
- Demange, Gabrielle, and Laroque Guy, “Optimality of Incomplete Markets,” *Journal of Economic Theory*, 65 (1), 1995a, pp. 218–232.
- , and ———, “Private Information and the Design of Securities,” *Journal of Economic Theory*, 65 (1), 1995b, pp. 233–257.
- Duffee, Gregory R., and Chunsheng Zhou, “Credit Derivatives in Banking: Useful Tools for Managing Risk?” *Journal of Monetary Economics*, 48 (1), 2001, pp. 25–54.
- Duffie, Darrell, and Matthew O. Jackson, “Optimal Innovation of Futures Contracts,” *Review of Financial Studies*, 2 (3), 1989, pp. 275–296.
- , and Rohit Rahi, “Financial Market Innovation and Security Design: An Introduction,” *Journal of Economic Theory*, 65 (1), 1995, pp. 1–42.
- Hänsel, Dennis N., and Jan P. Krahenen, “Does Securitization Reduce Bank Risk? Evidence from the European CDO Market,” Working Paper, 2007.
- Heyde, Frank, and Ulrike Neyer, “Credit Default Swaps and the Stability of the Banking Sector,” *International Review of Finance*, 10 (1), 2010, pp. 27–61.
- Instefjord, Norvald, “Do Credit Derivatives Increase Bank Risk?” *Journal of Banking and Finance*, 29 (2), 2005, pp. 333–345.
- Jiangli, Wenying, and Matt Pritsker, “The Impacts of Securitization on US Bank Holding Companies,” Working Paper, New York University, 2008.

- Keys, J. Benjamin, Tanmoy Mukhrjee, Amit Seru, and Vikrant Vig, "Did Securitization Lead to Lax Screening? Evidence from Subprime Loans," *Quarterly Journal of Economics*, 125 (1), 2010, pp. 307–362.
- Kijima, Masaaki, "A Multivariate Expansion of Equilibrium Pricing Transforms: The Multivariate Esscher and Wang Transforms for Pricing Financial and Insurance Risks," *Astin Bulletin*, 36 (1), 2006, pp. 269–283.
- Lintner, John, "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets," *Review of Economics and Statistics*, 47 (1), 1965, pp. 13–37.
- Mayers, David, "Nonmarketable Assets and Capital Market Equilibrium under Uncertainty," in Michael C. Jensen ed. *Studies in the Theory of Capital Markets*, New York, Praeger, 1972, pp. 223–248.
- Mian, Atif, and Amir Sufi, "The Consequences of Mortgage Credit Expansion: Evidence from the U.S. Mortgage Default Crisis," *Quarterly Journal of Economics*, 124 (4), 2009, pp. 1449–1496.
- Ohashi, Kazuhiko, "Endogenous Determination of the Degree of Market Incompleteness in Futures Innovation," *Journal of Economic Theory*, 65 (1), 1995, pp. 198–217.
- Rahi, Rohit, "Optimal Incomplete Markets with Asymmetric Information," *Journal of Economic Theory*, 65 (1), 1995, pp. 171–197.
- Schinasi, Garry J., and Richard T. Smith, "Portfolio Diversification, Leverage, and Financial Contagion," *IMF Staff Papers*, 47 (2), International Monetary Fund, 2000, pp. 159–176.
- Sharpe, William F., "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance*, 19 (3), 1964, pp. 425–442.
- Wang, Shaun S., "Equilibrium Pricing Transforms: New Results Using Buhlmann's 1980 Economic Model," *Astin Bulletin*, 33 (1), 2005, pp. 57–73.

補論 1. ポートフォリオ選択問題の詳解

(1) 主體的均衡モデルでの最適化問題

ここでは、本文2節(2)イ.、ロ.、ハ.の各ポートフォリオ最適化問題について、最適解を導出する手順を述べる。

イ. リターンベンチマーク・ルール

ラグランジュ乗数を λ_R として、目的関数を $V_R = (\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x})/2 + \lambda_R \{(\boldsymbol{\mu} - r \mathbf{1})^T \mathbf{x} - R_P\}$ とおく。 V_R を最大化する \mathbf{x}_h が最適化問題の解となる。 V_R に関する最適性の1階条件より (A-1) 式、(A-2) 式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_R}{\partial \mathbf{x}_h} &= (\boldsymbol{\Sigma}_{hh} \mathbf{x}_h + \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \mathbf{x}_\varepsilon) + \lambda_R (\boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h) = \mathbf{0} \\ \implies \text{解} : \hat{\mathbf{x}}_h &= \lambda_R \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h) - \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \mathbf{x}_\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{\partial V_R}{\partial \lambda_R} = (\boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h)^T \hat{\mathbf{x}}_h + (\boldsymbol{\mu}_\varepsilon - r \mathbf{1}_\varepsilon)^T \mathbf{x}_\varepsilon = R_P. \quad (\text{A-2})$$

(A-1) 式を (A-2) 式に代入して整理すると、 λ_R が (7) 式のとおりに得られる。この λ_R を用いて、最適ポートフォリオ $\hat{\mathbf{x}}_h$ は (A-1) 式で与えられる。

ロ. セーフティファースト・ルール

ラグランジュ乗数を λ_σ として、目的関数を $V_\sigma = (\boldsymbol{\mu} - r \mathbf{1})^T \mathbf{x} + \{\lambda_\sigma (\sigma_P^2 - \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x})\}/2$ とおく。 V_σ に関する最適性の1階条件より (A-3) 式、(A-4) 式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\sigma}{\partial \mathbf{x}_h} &= (\boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h) - \lambda_\sigma (\boldsymbol{\Sigma}_{hh} \mathbf{x}_h + \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \mathbf{x}_\varepsilon) = \mathbf{0} \\ \implies \text{解} : \hat{\mathbf{x}}_h &= \frac{1}{\lambda_\sigma} \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h) - \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \mathbf{x}_\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

$$\frac{\partial V_\sigma}{\partial \lambda_\sigma} = \hat{\mathbf{x}}_h^T \boldsymbol{\Sigma}_{hh} \hat{\mathbf{x}}_h + 2 \mathbf{x}_\varepsilon^T \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon}^T \hat{\mathbf{x}}_h + \mathbf{x}_\varepsilon^T \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} \mathbf{x}_\varepsilon = \sigma_P^2. \quad (\text{A-4})$$

(A-3) 式を (A-4) 式に代入して整理すると、 λ_σ が (10) 式のとおりに得られる。この λ_σ を用いて、最適ポートフォリオ $\hat{\mathbf{x}}_h$ は (A-3) 式で与えられる。

ハ. トレードオフ・ルール

トレードオフ・ルールの場合は、目的関数 $V = (\boldsymbol{\mu} - r \mathbf{1})^T \mathbf{x} - \gamma (\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x})/2$ を最大化する \mathbf{x}_h を導出すればよい。したがって、 V に関する最適性の1階条件より (A-5) 式のとおり最適ポートフォリオが得られる。

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_h} = (\boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h) - \gamma(\boldsymbol{\Sigma}_{hh} \mathbf{x}_h + \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \mathbf{x}_\varepsilon) = \mathbf{0}$$

$$\implies \text{解} : \hat{\mathbf{x}}_h = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h) - \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \mathbf{x}_\varepsilon. \quad (\text{A-5})$$

(2) 信用リスク移転市場における均衡での最適化問題

ここでは、市場均衡モデルにおいて、リターンベンチマーク・ルールおよびセーフティファースト・ルールに従う銀行の最適ポートフォリオが満たす式を導出する。

イ. リターンベンチマーク・ルール

銀行がリターンベンチマーク・ルールに従う場合、市場均衡下では (A-6) 式および (A-7) 式を満たす。

$$\tilde{\mathbf{x}}_h^I = \lambda_R^I \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h) - \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \tilde{\mathbf{x}}_\varepsilon^I, \quad (\text{A-6})$$

$$\sum_{I=1}^N \omega_I \tilde{\mathbf{x}}_h^I = \sum_{I=1}^N \omega_I \tilde{\mathbf{x}}_h^I. \quad (\text{A-7})$$

(A-6) 式および

$$\lambda_R^I = \frac{R_{P_I} - \{(\boldsymbol{\mu}_\varepsilon - r \mathbf{1}_\varepsilon)^\top - (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h)^\top \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon}\} \tilde{\mathbf{x}}_\varepsilon^I}{(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h)^\top \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h)},$$

を (A-7) 式に代入して整理すると (A-8) 式が得られる。ここで、 R_{P_I} は銀行 I の目標収益を表し、 $R = \sum_{I=1}^N \omega_I R_{P_I}$ である。(A-8) 式は非線形ベクトル方程式であるため、一般に解析解を導出することは難しい。

$$\boldsymbol{\Sigma}_{hh} \tilde{\mathbf{x}}_h + \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \tilde{\mathbf{x}}_\varepsilon = \frac{R - \{(\boldsymbol{\mu}_\varepsilon - r \mathbf{1}_\varepsilon)^\top - (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h)^\top \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon}\} \tilde{\mathbf{x}}_\varepsilon}{(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h)^\top \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h)}. \quad (\text{A-8})$$

ロ. セーフティファースト・ルール

銀行がセーフティファースト・ルールに従う場合、市場均衡下では (A-7) 式および (A-9) 式を満たす。

$$\tilde{\mathbf{x}}_h^I = \frac{1}{\lambda_\sigma^I} \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h) - \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \tilde{\mathbf{x}}_\varepsilon^I. \quad (\text{A-9})$$

したがって、(A-7) 式に (A-9) 式および

$$\frac{1}{\lambda_{\sigma}^I} = \sqrt{\frac{\sigma_{P_I}^2 + (\bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon}^I)^T \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon}^T \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon}^I - (\bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon}^I)^T \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon}^I}{(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h)^T \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h)}},$$

を代入すると (A-10) 式が得られる。ここで、 $\sigma_{P_I}^2$ は銀行 I の許容リスク量である。(A-10) 式は非線形ベクトル方程式であるため、一般に解析解を導出することは難しい。

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\Sigma}_{hh} \bar{\mathbf{x}}_h + \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon} \\ &= \sum_{I=1}^N \omega_I \left\{ \sqrt{\frac{\sigma_{P_I}^2 + (\bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon}^I)^T \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon}^T \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon}^I - (\bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon}^I)^T \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon}^I}{(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h)^T \boldsymbol{\Sigma}_{hh}^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h)}} \right\} (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h). \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

補論 2. 市場の発展とシャープレシオの変化との関係

(1) 不完全市場より完全市場において最適ポートフォリオのシャープレシオが高いことの証明

ここでは、まず、任意のリスク管理方針に従う銀行において、不完全市場 ($h < m$) より完全市場 ($h = m$) の方が最適ポートフォリオのシャープレシオが高くなることを証明する。すなわち、

$$\frac{E[R - r]}{\sqrt{\text{var}[R - r]}} \Big|_{h < m} \leq \frac{E[R - r]}{\sqrt{\text{var}[R - r]}} \Big|_{h = m},$$

であることを示す。どのタイプの銀行についても同様の形で証明が可能であるため、ここではリターンベンチマーク・ルールに従う銀行について証明を行う。

まず、完全市場における銀行の最適ポートフォリオ $\hat{\mathbf{x}}_m$ は以下の関係を満たす（補論 1 を参照）。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\mu}_m - r \mathbf{1}_m) &= \alpha_m \boldsymbol{\Sigma}_{mm} \hat{\mathbf{x}}_m, \\ \alpha_m &= \frac{R_p}{(\boldsymbol{\mu}_m - r \mathbf{1}_m)^T \boldsymbol{\Sigma}_{mm}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_m - r \mathbf{1}_m)}. \end{aligned} \tag{A-11}$$

(A-11) 式は以下のように同値変形できる。ここで、 r_m^M は市場ポートフォリオの投資収益率である。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \vdots \\ \mu_m - r \end{pmatrix} &= \alpha_m \begin{pmatrix} \text{cov}[r_1, r_1] & \cdots & \text{cov}[r_1, r_m] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[r_m, r_1] & \cdots & \text{cov}[r_m, r_m] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{pmatrix} \\ &= \alpha_m \begin{pmatrix} \text{cov}[r_1, \hat{x}_1 r_1 + \cdots + \hat{x}_m r_m] \\ \text{cov}[r_2, \hat{x}_1 r_1 + \cdots + \hat{x}_m r_m] \\ \vdots \\ \text{cov}[r_m, \hat{x}_1 r_1 + \cdots + \hat{x}_m r_m] \end{pmatrix} \\ &= \alpha_m \begin{pmatrix} \text{cov}[r_1, r_m^M] \\ \text{cov}[r_2, r_m^M] \\ \vdots \\ \text{cov}[r_m, r_m^M] \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{A-12}$$

これより、

$$\alpha_m = \frac{\mu_1 - r}{\text{cov}[r_1, r_m^M]} = \dots = \frac{\mu_m - r}{\text{cov}[r_m, r_m^M]}. \quad (\text{A-13})$$

さらに任意のポートフォリオ θ_m に対する期待収益率 $(\mu_m - r \mathbf{1}_m)^\top \theta_m = \mu_m^\theta - r$ に対しても (A-12) 式の左から θ_m をかけることにより $\mu_m^\theta - r = \alpha_m \text{cov}[r_m^\theta, r_m^M]$ 、すなわち、

$$\alpha_m = \frac{\mu_m^\theta - r}{\text{cov}[r_m^\theta, r_m^M]}, \quad (\text{A-14})$$

が成立する。特に $\theta_m = \hat{\mathbf{x}}_m$ とした場合を考えると、

$$\alpha_m = \frac{\mu_m^\theta - r}{\text{cov}[r_m^\theta, r_m^M]} = \frac{\mu_m^M - r}{\text{var}[r_m^M]}. \quad (\text{A-15})$$

(A-15) 式を変形してシャープレシオの形を導出すると、以下の結果を得る。

$$\frac{\mu_m^\theta - r}{\sqrt{\text{var}[r_m^\theta]}} = \frac{\text{cov}[r_m^\theta, r_m^M]}{\sqrt{\text{var}[r_m^\theta]} \sqrt{\text{var}[r_m^M]}} \times \frac{\mu_m^M - r}{\sqrt{\text{var}[r_m^M]}}. \quad (\text{A-16})$$

ここで、(A-16) 式右辺の第 1 項は r_m^θ と r_m^M の相関係数そのものであるため、1 以下となる。したがって、(A-17) 式を得る。

$$\frac{\mu_m^\theta - r}{\sqrt{\text{var}[r_m^\theta]}} \leq \frac{\mu_m^M - r}{\sqrt{\text{var}[r_m^M]}}. \quad (\text{A-17})$$

特に θ_m として不完全市場における最適なポートフォリオ $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{x}}_h^\top, \mathbf{x}_s^\top)^\top$ をとることにより、完全市場における最適ポートフォリオのシャープレシオの方が高くなることが示される。

(2) シャープレシオが市場の発展に伴って単調増加することの証明

ここでは、リターンベンチマーク・ルールおよびセーフティファースト・ルールに従う銀行の最適ポートフォリオについては、そのシャープレシオが市場の発展に伴って単調増加していくことを示す。すなわち、

$$\frac{E[R - r]}{\sqrt{\text{var}[R - r]}} \Big|_{h=1} \leq \frac{E[R - r]}{\sqrt{\text{var}[R - r]}} \Big|_{h=2} \leq \dots \leq \frac{E[R - r]}{\sqrt{\text{var}[R - r]}} \Big|_{h=m},$$

であることを示す。以下ではリターンベンチマーク・ルールに従う銀行について具体的な証明を与えるが、セーフティファースト・ルールに従う銀行についても同様の議論で証明できる。

$h \geq 1$ とし、最適化問題 (3) 式の解を $(\hat{\mathbf{x}}_h^T, \mathbf{x}_e^T)^T = \hat{\mathbf{x}}_{(h)}$ とかく。このとき、 $\hat{\mathbf{x}}_{(h)}$ と $\hat{\mathbf{x}}_{(h+1)}$ に関してシャープレシオを比較する。まず、これらのポートフォリオのリターンは (A-2) 式から

$$(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})^T \hat{\mathbf{x}}_{(h)} = (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})^T \hat{\mathbf{x}}_{(h+1)} = R_P, \quad (\text{A-18})$$

と同じ水準になる。一方、ボラティリティに関しては、最小化問題の定義より

$$\hat{\mathbf{x}}_{(h)}^T \boldsymbol{\Sigma} \hat{\mathbf{x}}_{(h)} \geq \hat{\mathbf{x}}_{(h+1)}^T \boldsymbol{\Sigma} \hat{\mathbf{x}}_{(h+1)}, \quad (\text{A-19})$$

となり h より $h+1$ の方が小さくなる。これらの比を考えることで、

$$\frac{(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})^T \hat{\mathbf{x}}_{(h)}}{\sqrt{\hat{\mathbf{x}}_{(h)}^T \boldsymbol{\Sigma} \hat{\mathbf{x}}_{(h)}}} \leq \frac{(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})^T \hat{\mathbf{x}}_{(h+1)}}{\sqrt{\hat{\mathbf{x}}_{(h+1)}^T \boldsymbol{\Sigma} \hat{\mathbf{x}}_{(h+1)}}}, \quad (\text{A-20})$$

となり、シャープレシオは市場の発展に伴い単調増加することが示される。なお、トレードオフ・ルールの場合には、(A-20) 式が常に成立するわけではない（反例は図 7 (4)）ことに注意しよう。この点は次の (3) で説明する。

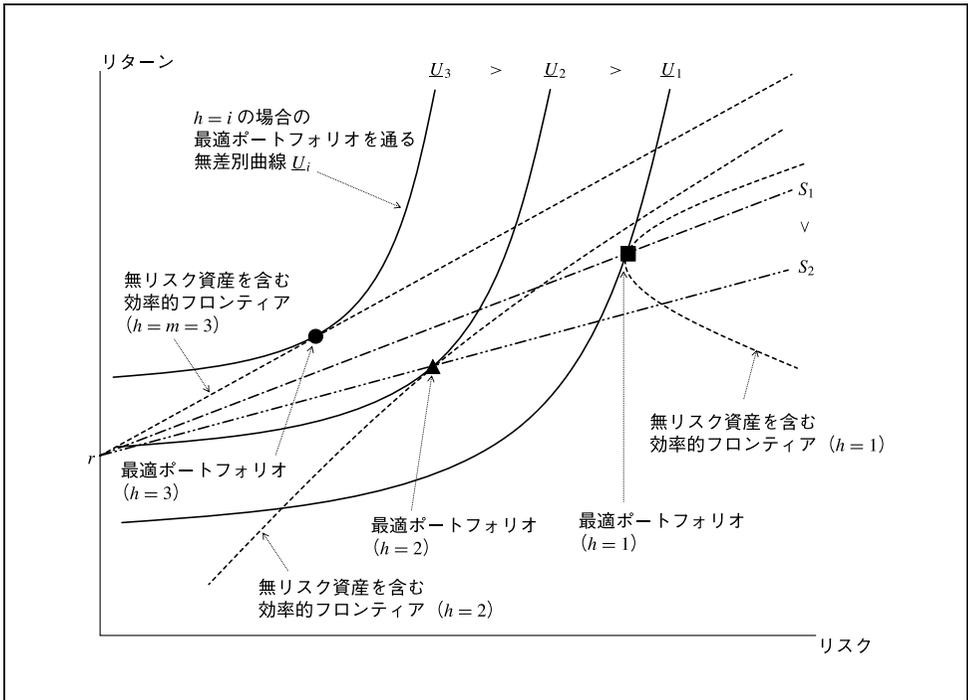
(3) トレードオフ・ルールにおけるシャープレシオの一時的低下について

トレードオフ・ルールの場合、(A-20) 式が常に成立するわけではない。すなわち、特定のパラメータ設定のもとでは、市場の発展に伴いシャープレシオが一時的に低下する場合がある²⁸。これは図 7 (4) の数値例で示したとおりであるが、このような現象が起こるメカニズムを以下で説明する。

図 A-1 は、市場の発展に伴う銀行の効率的フロンティア、無差別曲線および最適ポートフォリオの変化を概念的に図示したものである。ここでの効率的フロンティアは無リスク資産を含むポートフォリオに対して描いている。これと無差別曲線の接点が最適ポートフォリオとなる。各フロンティアと接する無差別曲線を見ると、市場の発展とともに上側に単調にシフトしている。これは、市場の発展に伴い効用が単調に増加することを示している ($\underline{U}_1 < \underline{U}_2 < \underline{U}_3$)。一方、シャープレシオは、最適ポートフォリオと無リスク資産を結んだ直線の傾きとして表される。 $h = 3$ (完全市場) の場合、すなわち通常の CAPM においては、この直線と効率的フロンティアは一致する。しかし $h = 1, 2$ (不完全市場) においては、この直線と効率的フロンティアが一致しない。すなわち、効率的フロンティアは直線ではなく曲線となってい

28 銀行のリスク回避度や投資収益率の分散・共分散といった各種パラメータの設定を変えると、市場の発展に伴いシャープレシオが単調増加する場合もあれば、ここで示す例のように、シャープレシオが一時的に低下する場合もある。

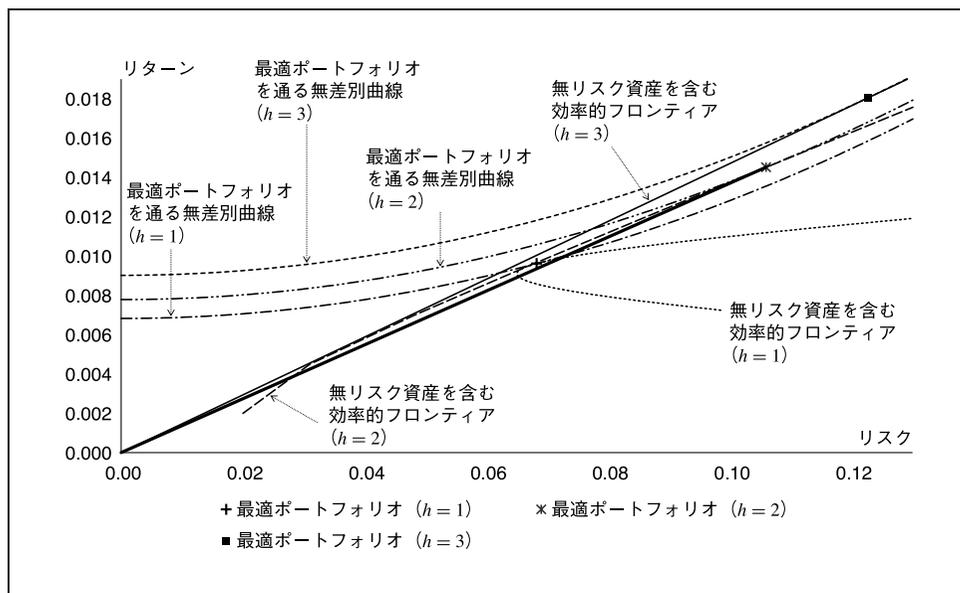
図 A-1 シャープレシオが一時的に低下するケースの概念図



ることに注意しよう。これは、銀行が取引不可能なローンを保有するため、無リスク資産のみからなるポートフォリオを選択することができないことに起因する。こうしたことにより、 $h = 1$ のときの直線の傾きは、 $h = 2$ のときの直線の傾きよりも大きくなっている ($S_1 > S_2$)。これは、市場の発展に伴ってシャープレシオが一時的に低下することを示している。

このような議論が実際の数値例でも成立しているか確認したものが図 A-2 である。ここでは、トレードオフ・ルールに従う場合の最適ポートフォリオの解析解を用いて、市場の発展に伴う銀行の効率的フロンティア、無差別曲線および最適ポートフォリオの変化を計算している。なお、この例では $(x_1, x_2, x_3) = (0.6, 0.3, 0.1)$ 、 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0.015, 0.035, 0.03)$ 、 $\sigma_i = 0.2$ ($i = 1, 2, 3$)、 $\rho_{ij} = 0.2$ ($i, j = 1, 2, 3, i \neq j$)、 $\gamma = 1.2$ とした。図 A-2 に示されているとおり、市場の発展に伴い無差別曲線が上側に単調にシフトする。一方、 $h = 1$ のときの最適ポートフォリオと無リスク資産を結んだ直線の傾きは、 $h = 2$ のときの最適ポートフォリオと無リスク資産を結んだ直線の傾きよりもわずかながら大きくなっている。すなわち、図 A-1 で示した議論が、解析解を用いた数値計算例でも成立していることが確認された。

図 A-2 解析解を用いた数値計算結果



補論 3. 均衡価格とプライシング・カーネルの関係

本節では、均衡価格をプライシング・カーネルを用いて記述する。均衡価格 (25) 式は、以下のように同値変形することができる。

$$\begin{aligned}
 \tilde{\boldsymbol{\mu}}_h &= \boldsymbol{\mu}_h + \gamma \boldsymbol{\Sigma}_{hh} (\bar{\mathbf{x}}_h - \hat{\mathbf{x}}_h) \\
 &= \boldsymbol{\mu}_h + \gamma \begin{pmatrix} \text{cov}[r_1, r_1] & \cdots & \text{cov}[r_1, r_h] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[r_h, r_1] & \cdots & \text{cov}[r_h, r_h] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_h - \hat{x}_h \end{pmatrix} \\
 &= \boldsymbol{\mu}_h + \gamma \begin{pmatrix} \text{cov}[r_1, r_1(\bar{x}_1 - \hat{x}_1) + \cdots + r_h(\bar{x}_h - \hat{x}_h)] \\ \vdots \\ \text{cov}[r_h, r_1(\bar{x}_1 - \hat{x}_1) + \cdots + r_h(\bar{x}_h - \hat{x}_h)] \end{pmatrix} \\
 &= \boldsymbol{\mu}_h + \gamma \text{cov}[\mathbf{r}_h, \mathbf{r}_h^T (\bar{\mathbf{x}}_h - \hat{\mathbf{x}}_h)]. \tag{A-21}
 \end{aligned}$$

さらに、 $\boldsymbol{\mu}_h = E[\mathbf{r}_h]$ および共分散の定義を用いて、最終的に (A-22) 式のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}
 \tilde{\boldsymbol{\mu}}_h &= E[\mathbf{r}_h \cdot \{\mathbf{1} + \gamma \mathbf{r}_h^T (\bar{\mathbf{x}}_h - \hat{\mathbf{x}}_h) - \gamma E[\mathbf{r}_h^T (\bar{\mathbf{x}}_h - \hat{\mathbf{x}}_h)]\}] \\
 &= E[\mathbf{r}_h \cdot \mathbf{m}_h]. \tag{A-22}
 \end{aligned}$$

ここで、 $E[\mathbf{m}_h] = E[\mathbf{1} + \gamma \mathbf{r}_h^T (\bar{\mathbf{x}}_h - \hat{\mathbf{x}}_h) - \gamma E[\mathbf{r}_h^T (\bar{\mathbf{x}}_h - \hat{\mathbf{x}}_h)]] = \mathbf{1}$ となることから、 \mathbf{m}_h はプライシング・カーネルとなっていることがわかる。

さらに、 \mathbf{m}_h は近似的に (A-23) 式のように表現できる。

$$\mathbf{m}_h \approx \frac{\mathbf{1} + \gamma \mathbf{r}_h^T (\bar{\mathbf{x}}_h - \hat{\mathbf{x}}_h)}{\mathbf{1} + \gamma E[\mathbf{r}_h^T (\bar{\mathbf{x}}_h - \hat{\mathbf{x}}_h)]} \approx \frac{\exp\{\gamma \mathbf{r}_h^T (\bar{\mathbf{x}}_h - \hat{\mathbf{x}}_h)\}}{E[\exp\{\gamma \mathbf{r}_h^T (\bar{\mathbf{x}}_h - \hat{\mathbf{x}}_h)\}]}. \tag{A-23}$$

したがって、 \mathbf{m}_h は、エッシャー変換の近似的な表現となっていることがわかる。

特に、 r_i ($i = 1, \dots, h$) が正規分布に従う確率変数であるとき、プライシング・カーネル \mathbf{m}_h はエッシャー変換と一致する。この結果は、以下の手順で導出される。まず (A-21) 式より、以下の関係が成立する。

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h = \boldsymbol{\mu}_h - \gamma \text{cov}[\mathbf{r}_h, \mathbf{r}_h^T (\hat{\mathbf{x}}_h - \bar{\mathbf{x}}_h)].$$

また、多変量正規分布に従う確率変数ベクトル \mathbf{X} 、 \mathbf{Y} について、(A-24) 式が成立する (木島・田中 [2007] を参照)。

$$E[X] - \text{cov}[X, Y] = E\left[X \frac{\exp\{-Y\}}{E[\exp\{-Y\}]}\right]. \quad (\text{A-24})$$

したがって、(A-24)式において $X = \mathbf{r}_h$ 、 $Y = \mathbf{r}_h^T(\hat{\mathbf{x}}_h - \bar{\mathbf{x}}_h)$ とすると、(A-25)式が得られる。

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h = E\left[\mathbf{r}_h \frac{\exp\{-\gamma \mathbf{r}_h^T(\hat{\mathbf{x}}_h - \bar{\mathbf{x}}_h)\}}{E[\exp\{-\gamma \mathbf{r}_h^T(\hat{\mathbf{x}}_h - \bar{\mathbf{x}}_h)\}]}\right]. \quad (\text{A-25})$$

したがって、プライシング・カーネルはエッシャー変換に厳密に一致する。

また、プライシング・カーネル \mathbf{m}_h は、効用関数を用いて表現することも可能である。(A-26)式のような2次型の効用関数 $U(\mathbf{x})$ を与える。

$$U(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{1}{2}\gamma(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])^2. \quad (\text{A-26})$$

$U'(\mathbf{x}) = \mathbf{1} - \gamma(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])$ より、 $U(\mathbf{x})$ を用いて (A-27) 式のように表現することができる。

$$\frac{U'(\mathbf{x})}{E[U'(\mathbf{x})]} = \frac{\mathbf{1} - \gamma(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])}{E[\mathbf{1} - \gamma(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])]} = \mathbf{1} - \gamma\mathbf{x} + \gamma E[\mathbf{x}]. \quad (\text{A-27})$$

これを用いると、プライシング・カーネル \mathbf{m}_h は、(A-27)式を用いて (A-28) 式のように表現できる。これがプライシング・カーネルの効用関数を用いた表現である。

$$\mathbf{m}_h = \mathbf{1} - \gamma \mathbf{r}_h^T(\bar{\mathbf{x}}_h - \hat{\mathbf{x}}_h) + \gamma E[\mathbf{r}_h^T(\bar{\mathbf{x}}_h - \hat{\mathbf{x}}_h)] = \frac{U'(\mathbf{r}_h^T(\hat{\mathbf{x}}_h - \bar{\mathbf{x}}_h))}{E[U'(\mathbf{r}_h^T(\hat{\mathbf{x}}_h - \bar{\mathbf{x}}_h))]} \quad (\text{A-28})$$

補論 4. ショックが発生した場合の銀行の取引行動

(1) 1つのローンの期待収益率のみ低下させた場合

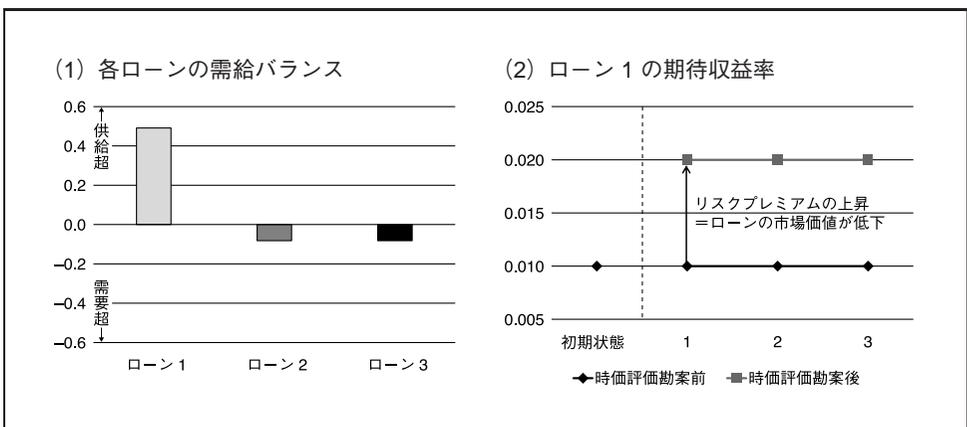
3節(3)ロ.(イ)では、すべてのローンの期待収益率を低下させた場合に、どのローンも供給超過となる例を示した。ここでは1つのローンのみの期待収益率を低下させた場合を考え、他のローンは需要超過となりうることを示す。

図 A-3 は、ローン 1 の期待収益率 μ_1 を 0.03 から 0.02 とし、その他のパラメータは 3 節(3)の数値例において基準とした数値を用いて、需給の変化およびローンのリスクプレミアムの変化を計算したものである。この例では、ローン 1 が供給超過となっている一方、ローン 2 およびローン 3 は需要超過となっていることがわかる。これは、期待収益率の低下によりローン 1 の需要が低下する一方、相対的にローン 1 よりも投資効率が高くなった他のローンに対する需要が拡大すること、すなわち、ローン間に代替効果が生じていることが主因と考えられる。一方、ローンのリスクプレミアムはローン 1 のみ低下し、ローン 2 およびローン 3 のリスクプレミアムは不変となっている。

(2) 1つの銀行のリスク回避度を上昇させた場合

3節(3)ロ.(ハ)では、1つの銀行のリスク回避度を上昇させると、市場ではどのローンも供給超過となり、リスクプレミアムが上昇する例を示した。ここでは、後者の結果が頑健なものであること、すなわち、ローンの期待収益率やその相関がどのような値であっても、すべてのローンのリスクプレミアムが上昇することを解析

図 A-3 一部のローンの期待収益率を低下させた場合



備考：図 9 を参照。

的に示す。

銀行のリスク回避度が γ_0 から γ_1 へ上昇($\gamma_0 < \gamma_1$)した場合を考える。まず、(23)式において $\gamma = \gamma_0$ とし、このとき市場の需給が一致しているとする。すなわち、(A-29)式が成立している。

$$\boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h = \gamma_0 (\boldsymbol{\Sigma}_{hh} \bar{\mathbf{x}}_h + \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \bar{\mathbf{x}}_\varepsilon). \quad (\text{A-29})$$

次に、 $\gamma = \gamma_1$ ($\gamma_0 < \gamma_1$) の場合を考える。市場の価格が調整された後の最適ポートフォリオとリスクプレミアムの関係は(23)式から、

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - r \mathbf{1}_h = \gamma_1 (\boldsymbol{\Sigma}_{hh} \bar{\mathbf{x}}_h + \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \bar{\mathbf{x}}_\varepsilon), \quad (\text{A-30})$$

となる。(A-30)式から(A-29)式を差し引くことで、

$$\frac{1}{\gamma_1 - \gamma_0} (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - \boldsymbol{\mu}_h) = \boldsymbol{\Sigma}_{hh} \bar{\mathbf{x}}_h + \boldsymbol{\Sigma}_{h\varepsilon} \bar{\mathbf{x}}_\varepsilon = \frac{1}{\gamma_0} (\boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h). \quad (\text{A-31})$$

(A-31)式を整理すると以下の結果を得る。

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_h - \boldsymbol{\mu}_h = \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_0} (\boldsymbol{\mu}_h - r \mathbf{1}_h) > \mathbf{0}. \quad (\text{A-32})$$

すなわち、市場が均衡しているもとの、市場の平均的なリスク回避度 γ が上昇した場合、すべてのローンのリスクプレミアムが上昇する。同様に、市場に参加する銀行のリスク回避度が低下した場合、すべてのローンのリスクプレミアムが低下することが示される。