

金融危機時における 資産価格変動の相互依存関係： コンピュータに基づく評価

しんたにこうへい やまだてつや よしばとしなお
新谷幸平／山田哲也／吉羽要直

要 旨

本稿では、複数の変量間の関係を表現するコンピュータを用いて、資産価格変動の相互依存構造に関する分析を行う。具体的には、コンピュータの基本概念を整理したうえで、まず、主要国の株価指数を対象に収益率分布の相互依存関係を分析し、データへの適合度の高いコンピュータの種類を実証的に調べる。次に、コンピュータを用いて CDO (collateralized debt obligation) の信用スプレッドを評価する。特に、実務上用いられることが多い正規コンピュータ以外のコンピュータも用いて CDO 評価を行い、コンピュータの種類の違いが評価結果に及ぼす影響を考察する。分析対象としては、通常の CDO と、その一部のトランシェから再証券化を行った CDO スクエアードを扱う。これらの分析の結果、ポートフォリオのリスク管理や CDO 評価においては、金融危機の可能性を考慮するならば、下方に裾依存性の強いコンピュータを用いてモデル化を行う必要性が高いことが確認された。

キーワード：コンピュータ、多変量分布、裾依存性、CDO

本稿は、2009年12月に日本銀行金融研究所が開催した「金融危機後の金融工学の展開」をテーマとするファイナンス・ワークショップへの提出論文に加筆・修正を施したものである。室町幸雄教授（首都大学東京）をはじめ、同ワークショップ参加者から貴重なコメントを頂戴した。記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りは、すべて筆者たち個人に属する。

新谷幸平 日本銀行金融研究所 (E-mail: kouhei.shintani@boj.or.jp)
山田哲也 日本銀行金融研究所企画役補佐 (E-mail: tetsuya.yamada@boj.or.jp)
吉羽要直 日本銀行金融研究所企画役 (E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp)

1. はじめに

金融資産ポートフォリオの価格付けやリスク管理では、複数のリスクファクターが多変量確率分布に従うとして評価を行うことが多い。ここで重要な点は、各変量を単体で評価した分布（周辺分布）の特徴と、周辺分布間の相互依存関係の特徴を正確に捉えることである。一般に、金融資産収益率の周辺分布については、正規分布と比べ厚い裾を持つ場合が多い。また、周辺分布間の相互依存関係については、分布の場所（中心部か裾かなど）によって依存度合いが異なることが知られている。例えば、市場に何らかのストレスが生じると、多くの株価等が同日に急速に下落する場合が多く、2007年夏の米国サブプライム住宅ローン問題再燃時や2008年秋のリーマン・ショックなど金融危機と呼ばれる時期ではこうした現象が明確に観察されている。こうした事例は、複数の資産価格変動が下落する状態では依存度合いが強まるということを示唆する。

金融実務では、周辺分布間の多様な依存構造を扱うツールの1つとして、各変量の周辺分布と多変量の同時分布をつなぐ関数であるコピュラ（copula）が利用されることがある。コピュラは、同時分布に含まれる情報の中から周辺分布間の相互依存関係だけを取り出して表現したものと考えることができる。多数の資産価格変動の同時分布を考える際には、各資産価格変動の分布を周辺分布として与えるとともに、資産価格変動間の相互依存関係をパラメトリックなコピュラで与えることにより、多資産価格変動の同時分布を構成することができる。このため、コピュラは、多数の資産からなるポートフォリオのリスク管理や信用リスクを有する多数の企業向け債務を原資産とする債務担保証券（collateralized debt obligation; CDO）等の商品評価でよく用いられている。

ポートフォリオのリスク管理やCDO評価において最も頻繁に用いられているコピュラの種類は、正規コピュラである。正規コピュラでは相関パラメータを高く設定することにより、各変量の分布全体の依存度合いを強めることができるが、各変量の分布の裾での依存度合いだけを制御することはできない。すなわち、各変量が分布の中央付近にある通常の状態では依存度合いがさほど強くないのに対して、金融危機などが生じ、各変量が相互に依存度合いを強めつつ同時に分布の裾に陥るような現象は想定することができない。これは、正規コピュラを基にしたモデルでは、金融危機の可能性を十分に考慮することが難しいという問題を示唆している。

こうした多変量の資産価格の非対称な変動を捉える実証研究としては Longin and Solnik [2001] や Poon, Rockinger, and Tawn [2004] などが知られており、最近では Tsafack [2009] が米国とカナダの2004年までの週次株価収益率を用いて適合度の高いコピュラについて実証分析を行っている。この点について、本稿では、日米欧の株価の日次収益率について最近の金融危機時を含めた2009年9月までのデータを用いて、収益率分布の裾での依存性がどのように推移したかを分析し、適合度の高いコピュラを分析する。その結果、収益率分布は下側裾依存性が強く、Tsafack [2009]

の結果と同様に反転ガンベル・コピュラの適合度が高いほか、自由度の低い t コピュラなど下側依存性の強いコピュラの適合度が総じて高いことを示す。

コピュラを用いたCDOの信用スプレッドの評価については、Li [2000] がその手法を提示した後、iTraxxなどのCDOの市場価格に適合するコピュラの種類観点でさまざまな研究が進められている。最近では、Burtshell, Gregory, and Laurent [2009] は、少数のパラメータで表現されるさまざまなコピュラを用いたCDO評価モデルについて、金融危機前の2005年8月におけるiTraxxのCDOの市場価格データを説明しうるモデルを比較・検討している。一方、本稿では、CDOの市場価格データへのフィッティングを扱うのではなく、CDOに含まれる各債務の相互依存関係をヒストリカル・データから特定できる場合に、利用するコピュラの種類の違いによってCDOの信用スプレッドがどのように変化するかを比較・検討する。具体的には、前述のように日米欧の株価収益率のヒストリカル・データは下側裾依存性が強かったことを踏まえ、株価と一定の関係を持つクレジット資産状態にも同様の特性が存在すると想定する。こうした問題意識のもと、CDOの信用スプレッド評価において通常用いられる正規コピュラに代えて、下側裾依存性の強いコピュラを用いた場合に評価結果がどのように変わるのかを比較・検討する。さらに、CDOのメザニン・トランシェから再証券化されたCDOスクエアードについても、コピュラの違いが信用スプレッドの評価結果に及ぼす影響を考察する。その結果、正規コピュラのような下側裾依存性の弱いコピュラではCDOトランシェの損失率を過小評価する可能性を示し、CDOスクエアードでは参照するインナーCDOに含まれる末端参照債務の重複度もこうした過小評価を広げる可能性があることを示す。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2節では、コピュラ概念とその比較指標である順位相関や裾依存係数について整理し、3節では、日米欧の2000年以降の日次株価収益率に関して、下側裾依存性の推計を行うとともに、データへの適合度の高いコピュラを実証的に調べる。4節では、コピュラを用いてCDOの信用スプレッドを評価する問題を取り上げ、コピュラの種類の違いにより、各トランシェの信用スプレッドがどのように変化するかを検討する。5節では、以上の分析をまとめ、ポートフォリオのリスク管理やCDOの評価においては、金融危機の可能性等を踏まえると、正規コピュラではなく下側裾依存性の強いコピュラを用いたモデルの方が頑健であると結論付ける。

2. コピュラ概念整理

本節では、コピュラの定義、本稿で用いる具体的なコピュラの種類、比較指標などを整理する。コピュラを規定するパラメータの推定方法や、各種コピュラに従う多変量乱数の発生方法については、戸坂・吉羽 [2005] を参照。

(1) コピュラの定義

n 種類の連続変数のリスク・ファクターを想定し、それらを確率変数 X_1, \dots, X_n で表す。確率変数 X_1, \dots, X_n の同時分布関数 $F(x_1, \dots, x_n) = \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$ と各変量単独の周辺分布関数 $F_j(x_j) = \Pr(X_j \leq x_j)$ を考えるとき、

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \quad (1)$$

として同時分布関数と周辺分布関数をつなぐ関数 $C(\cdot)$ は、コピュラと呼ばれている¹。各変量の確率変数 X_j を周辺分布関数 $F_j(\cdot)$ で変換して $U_j = F_j(X_j)$ とすると、 U_j は区間 $[0, 1]$ の一様分布に従う。このため、コピュラは多変量の $[0, 1]$ 一様確率変数 (U_1, \dots, U_n) の同時分布関数と解釈することもできる。

本稿では、いくつかのパラメータで規定されるパラメトリックなコピュラ $C(\cdot)$ を 6 種類 (①正規コピュラ、②tコピュラ、③クレイトン・コピュラ、④ガンベル・コピュラ、⑤反転ガンベル・コピュラ²、⑥フランク・コピュラ) 考える。具体的な関数形を明示すると以下のようになる。

$$\text{正規コピュラ} : C(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), \quad (2)$$

$$\text{tコピュラ} : C(u_1, \dots, u_n) = \mathbf{t}_{v, \Sigma}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)), \quad (3)$$

$$\text{クレイトン・コピュラ} : C(u_1, \dots, u_n) = \left(\sum_{j=1}^n u_j^{-\alpha} - n + 1 \right)^{-1/\alpha}, \quad (4)$$

$$\text{ガンベル・コピュラ} : C(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ - \left(\sum_{j=1}^n (-\ln u_j)^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\}, \quad (5)$$

反転ガンベル・コピュラ :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n u_i - 1 + \exp \left\{ - \left(\sum_{j=1}^n (-\ln(1 - u_j))^\gamma \right)^{1/\gamma} \right\}, \quad (6)$$

フランク・コピュラ :

$$C(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\delta} \ln \left(1 + \frac{\prod_{j=1}^n (e^{-\delta u_j} - 1)}{(e^{-\delta} - 1)^{n-1}} \right). \quad (7)$$

1 塚原 [2008] などでは「接合分布関数」と呼ばれている。

2 多変量の $[0, 1]$ 一様確率変数 (U_1, \dots, U_n) の同時分布関数として定義されるコピュラ $C(u_1, \dots, u_n)$ に対して、 $(1 - U_1, \dots, 1 - U_n)$ の同時分布関数として定義されるコピュラ $\hat{C}(u_1, \dots, u_n)$ を反転コピュラ (rotated copula) ないし生存コピュラ (survival copula) と呼ぶ。2 変量 ($n = 2$) の場合、反転コピュラ $\hat{C}(u_1, u_2)$ は

$$\hat{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - u_2),$$

で表現される。

表1 コピュラのパラメータと順位相関

コピュラ	パラメータ	ケンドールのタウ τ_K
正規	ρ	$(2/\pi) \arcsin \rho$
t	ρ, ν	$(2/\pi) \arcsin \rho$
クレイトン	α	$\alpha/(\alpha + 2)$
ガンベル	γ	$1 - 1/\gamma$
反転ガンベル	γ	$1 - 1/\gamma$
フランク	δ	$1 + (4/\delta)\{D_1(\delta) - 1\}$

備考： $D_1(\delta)$ は1次のデバイ (Debye) 関数で $D_1(\delta) \equiv \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{t}{e^t - 1} dt$ で与えられる。

ただし、 $\Phi_\Sigma(\cdot)$ は相関行列 Σ の n 変量標準正規分布関数³、 $\Phi^{-1}(\cdot)$ は1変量標準正規分布関数の逆関数、 $t_{\nu, \Sigma}(\cdot)$ は自由度 ν 、相関行列 Σ の n 変量 t 分布関数⁴、 $t_\nu^{-1}(\cdot)$ は自由度 ν の1変量 t 分布関数の逆関数である。

(2) コピュラの比較

コピュラを比較する指標には、①分布全体の相互依存関係を抽出する指標と②分布の一部の相互依存関係を抽出する指標とがある。

分布全体の相互依存関係を抽出する指標として一般的によく用いられる指標は線形相関係数であるが、線形相関は相互依存関係だけではなく各変量の周辺分布にも依存してしまうという問題がある。コピュラについて、分布全体の相互依存関係を抽出する指標としては、各変量の大きさにはよらない順位相関係数が用いられる。順位相関にはいくつかの種類が考えられているが、実務でよく用いられるものに、ケンドールのタウとスピアマンのローがある。本稿では、順位相関としてケンドールのタウを採用する。ケンドールのタウ τ_K は、想定する2変量同時分布に従う独立な確率変数 (X_1, X_2) 、 (X_1^*, X_2^*) について次式で定義される指標である。

$$\tau_K \equiv \Pr[(X_1 - X_1^*)(X_2 - X_2^*) \geq 0] - \Pr[(X_1 - X_1^*)(X_2 - X_2^*) < 0]. \quad (8)$$

コピュラを用いた比較を行う際には、分布全体での依存度合いが等しくなるように順位相関を一致させることが考えられる。2節(1)で示した各コピュラのパラメータとケンドールのタウ τ_K には表1の関係があることが知られている。

一方、分布の一部として特に分布の裾に注目し、その相互依存関係を抽出する指標として裾依存係数があり、同時分布の上側の裾か下側の裾かで上側裾依存係数 λ_U

3 $\Phi_\Sigma(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|\Sigma|}} \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} \exp(-\frac{1}{2}(z_1, \dots, z_n)\Sigma^{-1}(z_1, \dots, z_n)^T) dz_1 \dots dz_n$ である。

4 $t_{\nu, \Sigma}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\Gamma((\nu+n)/2)}{\Gamma(\nu/2)(\nu\pi)^{n/2} \sqrt{|\Sigma|}} \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} (1 + \frac{1}{\nu}(z_1, \dots, z_n)\Sigma^{-1}(z_1, \dots, z_n)^T)^{-\frac{\nu+n}{2}} dz_1 \dots dz_n$ である。
ただし、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数で、 $\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ で定義される。また、 $|\Sigma|$ は相関行列 Σ の行列式であり、 $(z_1, \dots, z_n)^T$ はベクトル (z_1, \dots, z_n) の転置を表す。

表2 2変量コピュラの下側裾依存係数

コピュラ	下側裾依存性 $\lambda_L(u)$	下側裾依存係数 λ_L
正規	$\frac{\Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(u))}{u}$	0
t	$\frac{t_{v, \Sigma}(t_v^{-1}(u), t_v^{-1}(u))}{u}$	$2t_{v+1}\left(-\sqrt{\frac{(1-\rho)(v+1)}{(1+\rho)}}\right)$
クレイトン	$(2-u^\alpha)^{-1/\alpha}$	$2^{-1/\alpha}$
ガンベル	$u^{2^{1/\gamma}-1}$	0
反転ガンベル	$2-2^{1/\gamma}(1-u)^{2^{1/\gamma}-1}$	$2-2^{1/\gamma}$
フランク	$-\frac{1}{u\delta}\ln\left(1+\frac{(e^{-\delta u}-1)^2}{(e^{-\delta}-1)}\right)$	0

備考：正規コピュラ、tコピュラのパラメータ Σ は非対角要素を相関パラメータ ρ とした 2×2 の行列である。

と下側裾依存係数 λ_L はそれぞれ以下のように定義される。

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \Pr[F_2(X_2) > u \mid F_1(X_1) > u], \tag{9}$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \Pr[F_2(X_2) < u \mid F_1(X_1) < u], \tag{10}$$

である。各裾依存係数が 0 より大きい値をとるとき、上側あるいは下側で漸近従属といい、裾依存係数が 0 であるとき漸近独立という。本稿では、下側裾依存性の推計の際、極限をとった (10) 式の代わりに一定の確率 u を条件とした

$$\lambda_L(u) = \Pr[F_2(X_2) < u \mid F_1(X_1) < u], \tag{11}$$

を下側裾依存性の推計値として用いる。(11) 式の条件付き確率は同時分布 $F(\cdot, \cdot)$ やコピュラ $C(\cdot, \cdot)$ を用いると次式で書き直すこともできる。

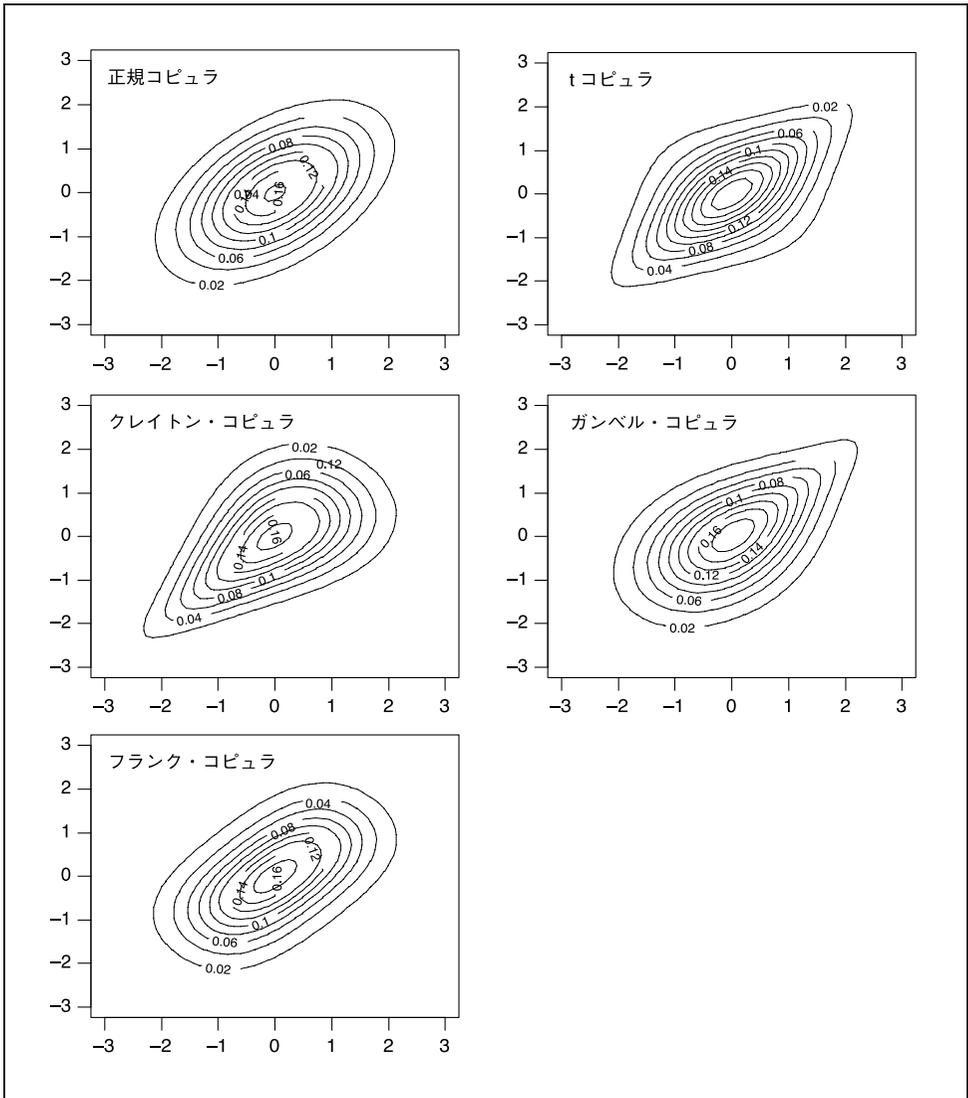
$$\lambda_L(u) = \frac{F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(u))}{u} = \frac{C(u, u)}{u}. \tag{12}$$

2変量のコピュラについて、(12) 式の下側裾依存性 $\lambda_L(u)$ とその極限值である (10) 式の下側裾依存係数 λ_L を示すと表2のとおりである⁵。tコピュラでは自由度 v が低いほど大きな下側裾依存係数となっているが、正規コピュラでは下側裾依存係数は 0 になり漸近独立となることがわかる（導出の詳細は戸坂・吉羽 [2005] を参照）。

コピュラで規定される同時分布のイメージを掴むため、2変量の同時分布で各周辺分布を標準正規分布とし、2節(1)で示した反転ガンベルを除く5種類のコピュラ

.....
5 反転ガンベル (rotated Gumbel) コピュラは下側で漸近従属になるようにガンベル・コピュラを反転させたものであり、下側での裾依存性を考慮する際によく用いられる (Tsafack [2009]、小宮 [2003] など)。

図 1 2 変量同時密度の等高線



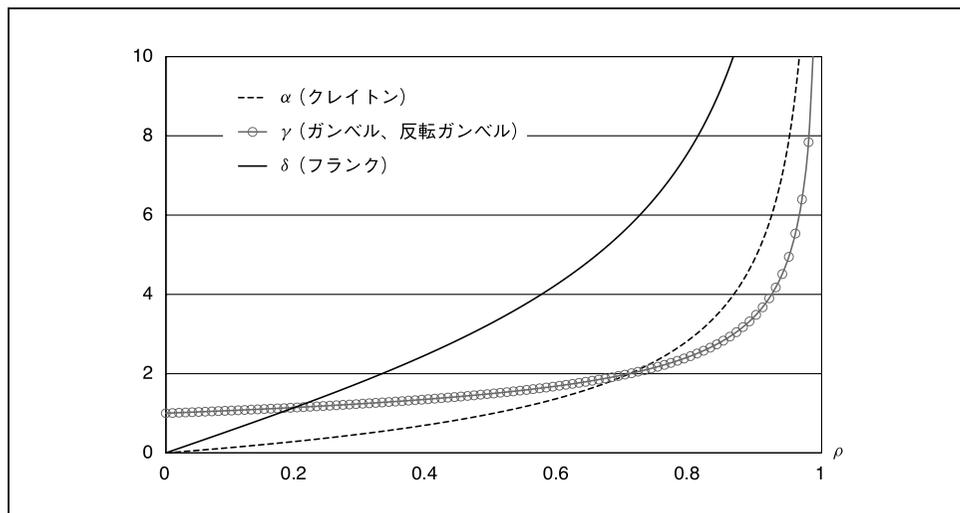
備考：Yan [2007] の copula パッケージを用いて作成

を用いて構成される同時分布の密度関数の等高線を描くと図 1 のようになる⁶。ここでは、全体の依存度合いを調整するためケンドールのタウ τ_K を 0.5 に固定し、t コピュラの自由度は 3 とした。

一般的には、正規コピュラのパラメータ ρ で相関を把握することが多いことから、4 節の分析では順位相関を正規コピュラのパラメータ ρ で表示する。具体的に正規コピュラの ρ と同一のケンドールのタウ τ_K を持つ他のコピュラのパラメータは図 2

⁶ 各コピュラに従う $[0, 1]$ の 2 変量一様乱数のプロットについては、戸坂・吉羽 [2005] を参照。

図2 正規コピュラの ρ と同一のケンドールのタウ τ_K を持つパラメータ



のように与えられる。

3. 資産価格変動の裾依存性

本節では、2節で説明した分布の裾依存性に関する実証と、各種コピュラの適合度に関する分析を行う。データとしては、米国、欧州、日本の株価インデックス（米国はS&P 500、欧州はユーロストック50、日本は日経平均）の日次データを利用する。分析期間は、2000年1月から2009年9月までである。

(1) 株価の変動

まず、分析期間における各国の株価インデックスの動きを図3に示す。それぞれ2000年1月の株価を1として基準化している。図3より、例えば、①ITバブル崩壊、②米国同時多発テロ、③中東情勢悪化、④グローバルなリスク調整期、⑤上海発世界同時株安、⑥パリバ・ショック、⑦ベアスタンズ・ショック、⑧リーマン・ショックなどの時期に市場にストレスが発生していたことが窺われる。

次に、各国株価インデックス間の相関の推移を図4に示す⁷。これは、株価の日次変化率の相関であり、各時点で、過去1年間を観測期間としてローリング推計したものである。図4より、市場にストレスが発生した時期には比較的相関が高まる傾向が窺われる。

7 米国と日本においては、時差を勘案し、前日の米国の株価収益率に対して当日の日本の株価収益率との相関を求めている。本節の他の分析も同様である。

図3 各国株価インデックスの動き

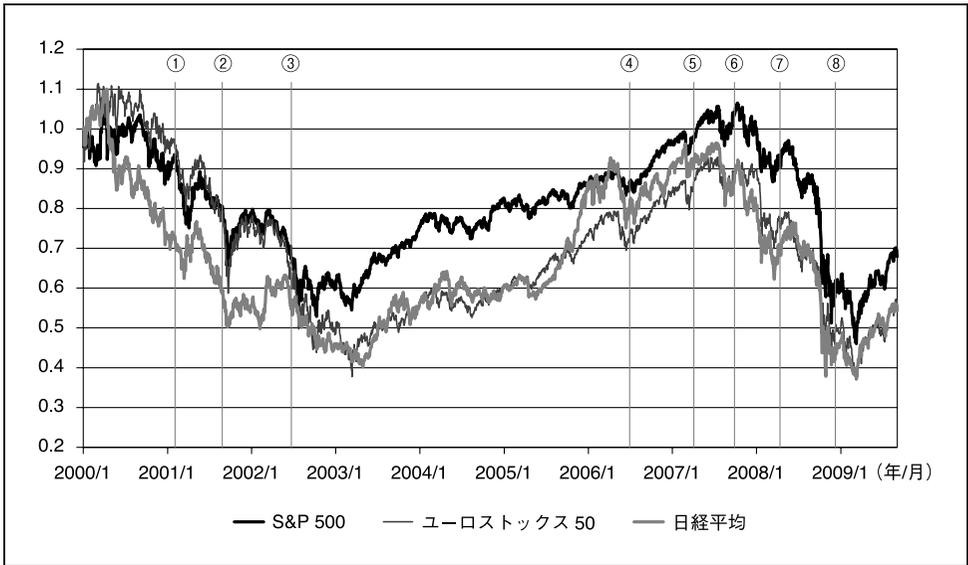


図4 各国株価インデックスの相関



(2) 各国株価変動の裾依存性

2節(2)の(11)式で示した下側裾依存性をデータに基づきノンパラメトリックに推計し、各種コンピュータでの計算値と比較する。まず、全期間で裾として認識する水準を5%、1%とした $\lambda_L(0.05)$ 、 $\lambda_L(0.01)$ を推計する⁸。そのうえで、各時点におい

8 下側裾依存係数は、推計方法が簡単な反面、観測データのうち数%のデータ（ここでは下側5%水準ない

表 3 下側裾依存性の推計結果と各コピュラに基づく計算値

		推計値	正規	t(6)	t(3)	クレイトン	反転ガンベル
$\lambda_L(0.05)$	米国と欧州	0.39	0.25	0.32	0.37	0.52	0.47
	米国と日本	0.35	0.20	0.30	0.36	0.43	0.40
	欧州と日本	0.24	0.13	0.20	0.25	0.28	0.30
$\lambda_L(0.01)$	米国と欧州	0.27	0.13	0.24	0.33	0.51	0.43
	米国と日本	0.29	0.09	0.23	0.32	0.41	0.36
	欧州と日本	0.18	0.05	0.14	0.22	0.23	0.24

備考：t(6)、t(3)の列はそれぞれ自由度 6、3 の t コピュラによる計算値である。

て過去 1 年間の観測期間とした $\lambda_L(0.05)$ のローリング推計⁹を行う。周辺分布関数 $F_1(\cdot)$ 、 $F_2(\cdot)$ には過去 1 年間の経験分布を用いる。

イ. 全期間推計

全期間における推計結果は表 3 のとおりである。表では、 $\lambda_L(u)$ の推計値と各コピュラを用いた $\lambda_L(u)$ の計算値を表示している。コピュラを用いた計算値において各コピュラのパラメータについては、まず、ケンドールのタウ τ_K を推計し、そのケンドールのタウ τ_K と一致するパラメータを表 1 の関係式から求めている。また、t コピュラの自由度は 3 あるいは 6 で固定している。どの国のペアをみても、データに基づく推計値は、正規コピュラでの計算値より高いことが確認できる。5% 水準では、米国と欧州の推計値は、自由度 3 の t コピュラの水準に達し、米国と日本の推計値および欧州と日本の推計値は、自由度 6 と自由度 3 の t コピュラの間位置している。1% 水準では、いずれの推計値も自由度 6 と自由度 3 の t コピュラの間位置している。このことから、この分析期間においては、正規コピュラでは捉えられない下側裾依存性が存在することが確認できる。

ロ. ローリング推計

次に、観測期間を 1 年としたローリング推計を行うことで、市場にストレスが発生した際に下側裾依存係数がどのように変化するか調べる。t コピュラの自由度は 3 で固定する。

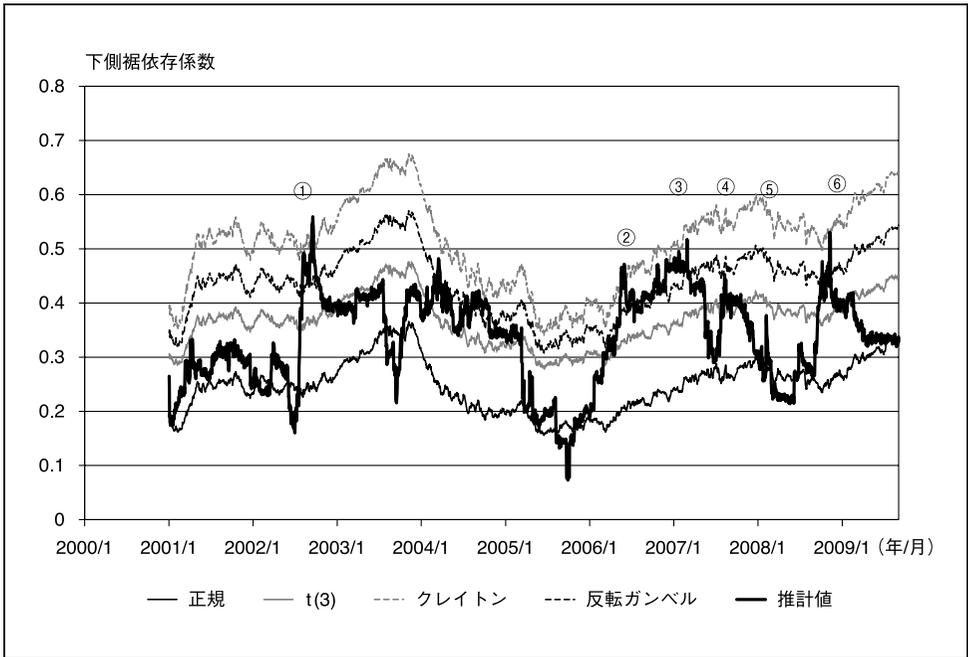
(イ) 米国と欧州

米国と欧州の推計結果は図 5 のとおりである。図 5 の横軸は評価時点を表し、縦軸は下側裾依存係数を表す (図 6、図 7 も同様)。グラフの黒太線は $\lambda_L(0.05)$ の推計

.....
 1% 水準)のみから推計を行うため、推計の精度に限界があることは留意する必要がある。

9 ノンパラメトリックに下側裾依存性をローリング推計する際には、推計に用いられるペアが少ないこと (5% 水準で約 12 個) を補完するために、ブートストラップ法を適用した。具体的には、1 年間のデータ (約 250 個) から重複を許して 250 個のデータをリサンプリングした標本を生成し、この手順を 500 回繰り返して、裾依存係数の標本の平均値を求め、それをブートストラップ法による推計値とした。

図5 裾の依存性：米国と欧州



値であり、それ以外は、各種コピュラに基づく $\lambda_L(0.05)$ の計算値を表す。

図5より、下側裾依存係数の推計値は、主に市場にストレスが発生した時期に高まる傾向にあることがわかる。具体的には、①中東情勢悪化時、②グローバルなリスク調整期時、③上海発世界同時株安時、④パリバ・ショック時、⑤ベアスタンズ・ショック時、⑥リーマン・ショック時に同係数は高まり、下側裾依存性の弱いコピュラ、例えば、正規コピュラに基づく計算値では説明できない水準に達している。すなわち、クレイトンや反転ガンベルといった裾依存性の強いコピュラに基づく計算値に近い水準まで達していることがわかる。もっとも、同係数は、2004年上期のように特段のストレス・イベントが発生していない時期に高まることもあるが、総じてみれば、何かのストレス・イベントが発生した時期に高まっている。

(ロ) 米国と日本

米国と日本についての推計結果は、図6のとおりである。米国と欧州の場合と同様、下側裾依存係数の推計値は、市場にストレスが発生した時期に高まる傾向にある。具体的には、①ITバブル崩壊時、②グローバルなリスク調整期時、③上海発世界同時株安時、④パリバ・ショック時、⑤リーマン・ショック時に下側裾依存係数が高まっている。これらの局面では、正規コピュラに基づく計算値では説明できない水準に達しており、クレイトンや反転ガンベルといった裾依存性の強いコピュラに基づく計算値に近い水準となっていることがわかる。

図6 裾の依存性：米国と日本

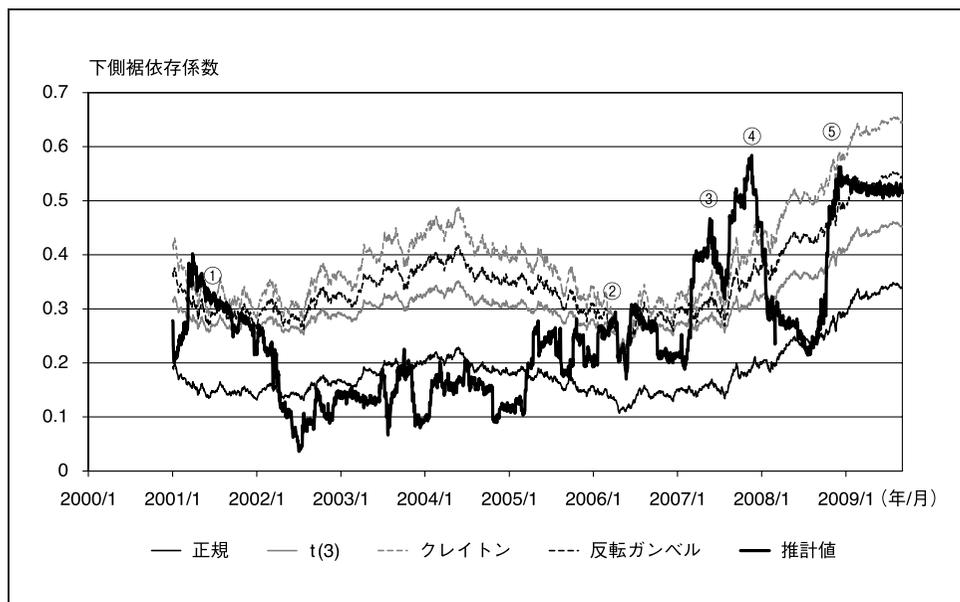
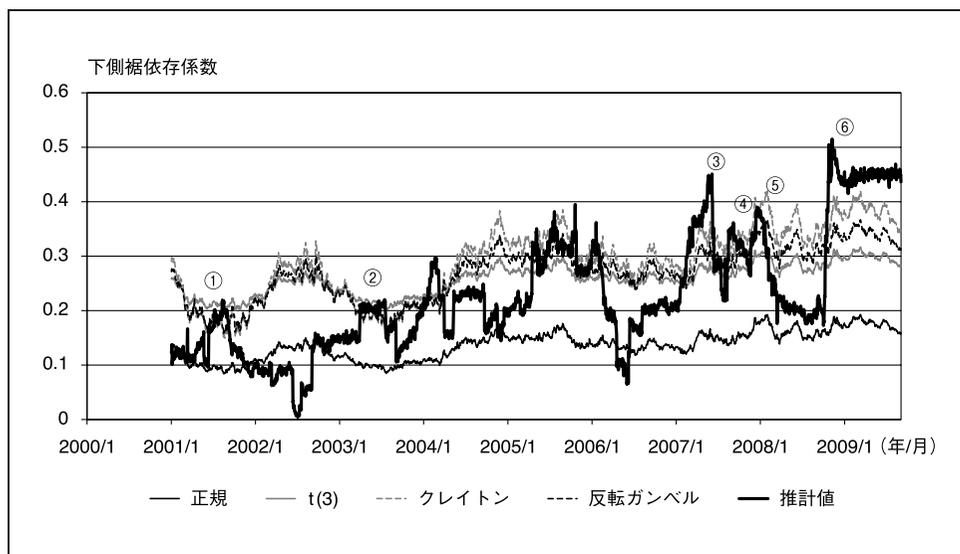


図7 裾の依存性：欧州と日本



(ハ) 欧州と日本

欧州と日本についての推計結果は、図7のとおりであり、① ITバブル崩壊時、② イラク・北朝鮮情勢悪化時、③ 上海発世界同時株安時、④ パリバ・ショック時、⑤ 各国金融機関サブプライム損失公表時、⑥ リーマン・ショック時に下側裾依存係数が高まっている。これらの局面でも、正規コピュラに基づく計算値では説明できない

表4 コピュラ・パラメータの全期間推計

	正規	t		クレイトン	ガンベル	反転ガンベル	順位相関 $\hat{\tau}_K$
	ρ	ρ	ν	α	γ	γ	
米国と欧州	0.519 (0.348)	0.520 (0.348)	3	0.831 (0.293)	1.533 (0.348)	1.539 (0.350)	0.339
米国と日本	0.443 (0.292)	0.427 (0.281)	5	0.640 (0.242)	1.366 (0.268)	1.389 (0.280)	0.273
欧州と日本	0.270 (0.174)	0.273 (0.176)	5	0.387 (0.162)	1.180 (0.153)	1.220 (0.180)	0.175

備考：() 内は、参考として、推計された各パラメータから表1の関係式を用いて順位相関（ケンドールのタウ）を算出したものである。

水準に達し、クレイトン・コピュラや反転ガンベル・コピュラに基づく計算値に近い水準となっていることが確認される。

以上より、日米欧の株価変動は何らかのストレス・イベントが発生すると下側裾依存性が強まり、正規コピュラのような裾の依存性の低いコピュラでは株価変動間の相互依存関係を十分に表現できなくなることが示唆される。一方、そうしたストレス・イベント発生時の下側裾依存係数は、t、クレイトン、反転ガンベルなど下側で漸近従属しているコピュラでの理論値に近い値になっており、ストレス・イベントの発生を考慮するには下側で漸近従属しているコピュラでモデル化する必要があると考えられる。

(3) 各種コピュラのパラメータ推計と適合度の評価

ここでは、各種コピュラの最尤推計を行い、適合度を比較する。

イ. 全期間推計

まず、全観測期間を対象として各種コピュラのパラメータの最尤推計を行ったところ、表4の結果を得た。どのコピュラのパラメータ推計値も、分布全体の依存性を表す順位相関に変換するとほぼ同じ値になることがわかる。コピュラを介さずに直接的に推計した順位相関（表4中の $\hat{\tau}_K$ ）¹⁰と比較してもほぼ同じ値となる¹¹。した

10 (8)式に基づき、 N 個のヒストリカル・データ $(x_1^1, x_2^1), \dots, (x_1^N, x_2^N)$ が与えられたときに、 $(x_1^k - x_1^l)(x_2^k - x_2^l) \geq 0$ (< 0) となる (k, l) の組合せ数の差とすべての組合せ数の比率で、

$$\hat{\tau}_K = \frac{\#\{(k, l) \mid (x_1^k - x_1^l)(x_2^k - x_2^l) \geq 0\} - \#\{(k, l) \mid (x_1^k - x_1^l)(x_2^k - x_2^l) < 0\}}{N(N-1)/2}$$

と順位相関（ケンドールのタウ）を推定する。この推定は基本的な統計量の算出であり、例えば R では標本相関を求める標準関数にオプション指定を行うことで求められる。

11 コピュラのパラメータ推定はここでは最尤推定を採用したが、順位相関を用いた積率法による推定も考えられる。例えば、McNeil, Frey, and Embrechts [2005] を参照。

表5 コピュラの適合度 (BIC 値) : 全期間

	正規	t	クレイトン	ガンベル	反転ガンベル
米国と欧州	-785	-1,055	-695	-887	-868
米国と日本	-544	-637	-488	-542	-583
欧州と日本	-183	-253	-217	-165	-248

がって、コピュラの種類によって異なるのは、分布全体の依存性でなく、表3で確認した裾など分布の一部の依存性の強さであるといえる。

最尤推計により求めた最大尤度から適合度を評価するため、パラメータ数 p とサンプルサイズ (観測データの数) N で調整を行った BIC (Schwarz の Bayesian information criteria) を算出する¹²。パラメータの集合をベクトル $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)$ で表現し対数尤度を $l(\xi)$ とすると、BIC は、求めた最尤推定量 $\hat{\xi}$ を用いて、

$$BIC = -2l(\hat{\xi}) + p \log N, \quad (13)$$

と定義される。BIC は、値が低いほど適合度が高いことを意味する。全期間における適合度は、表5のとおりである。どの国のペアをみても正規コピュラの適合度は相対的に低いことがわかる。これに対し t コピュラや下側裾依存性の強い反転ガンベル・コピュラの適合度は高いことが確認できる。このように、適合度の観点でも、本分析期間においては、正規コピュラでは捉えられない下側裾依存性が存在することが確認できる。

以上の結果は、コピュラの適合度を実証分析した先行研究とも整合的な結果である。例えば、Tsafack [2009] は、米国とカナダの株価指数を用いて各種コピュラの適合度を分析している。具体的には、1985年1月から2004年12月の20年間を分析期間として、週次収益率を用いて正規コピュラ、tコピュラ、クレイトン・コピュラ、反転ガンベル・コピュラの適合度を AIC と BIC により評価している。その結果、本稿と同様、正規コピュラより t コピュラや反転ガンベル・コピュラの適合度が高いことを示している。

ロ. ローリング推計

次に、観測期間を1年としたローリング推計を行うことで、市場にストレスが発生した際などに適合度がどのように変化するかを分析する。各種コピュラからローリング推計で算出される BIC により適合度を順位付けし、正規コピュラとの順位差をグラフに表す。すなわち、基準となる正規コピュラの順位はゼロとし、正規コピュラより順位が高い場合にはその分だけプラスの値、順位が低い場合にはその分だけマイナスの値を表示したのが図8～図10である。なお、tコピュラについては自由

12 コピュラの適合度は、AIC (Akaike information criteria) や BIC などを計測して比較することが多い。例えば Tsafack [2009] では、AIC と BIC の双方を用いている。

図 8 コピュラの適合度：米国と欧州

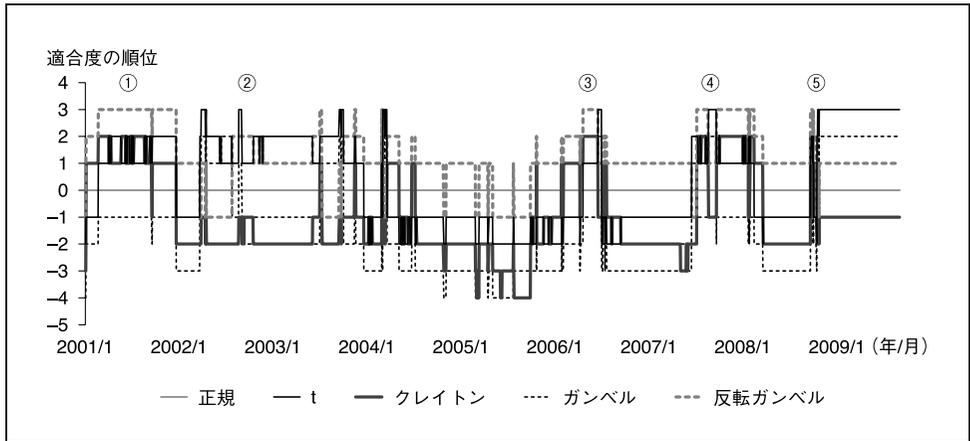


図 9 コピュラの適合度：米国と日本

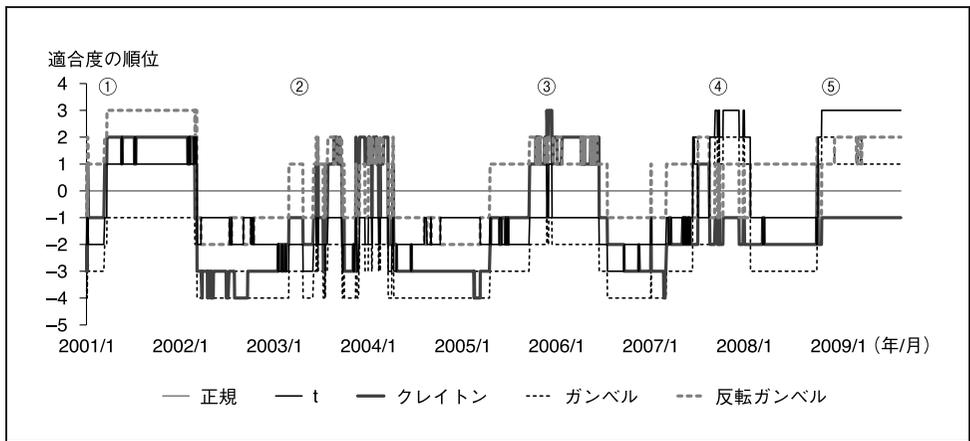
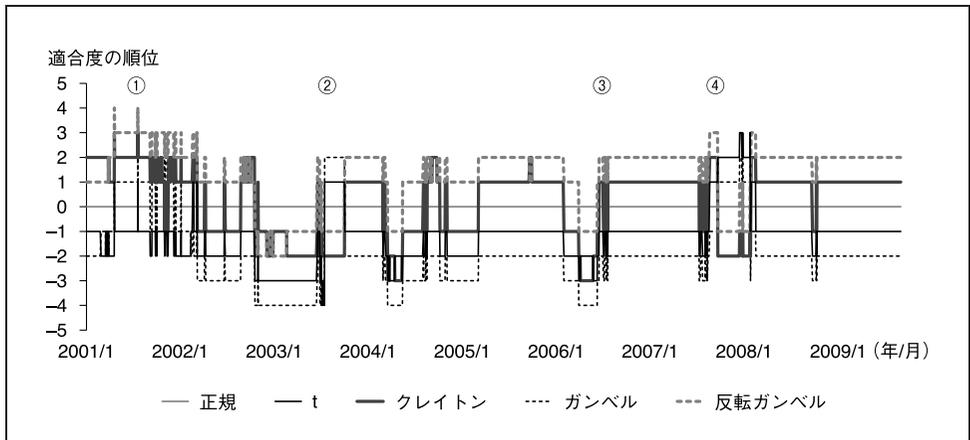


図 10 コピュラの適合度：欧州と日本



度も含めて2つのパラメータをローリング推計しており、その他のコピュラは1つのパラメータをローリング推計している。

(イ) 米国と欧州

まず、米国と欧州の推計結果を図8で確認すると、期間全体を通して下側依存性の強いtコピュラと反転ガンベル・コピュラの適合度が高いことがわかる。特に、①ITバブル崩壊時、②中東情勢悪化時、③グローバルなリスク調整期時、④パリバ・ショック時、⑤リーマン・ショック時のように市場にストレス・イベントが発生した時期には、反転ガンベル・コピュラやtコピュラに加えて、クレイトン・コピュラといった下側裾依存性の強いコピュラの適合度が高くなる。さらに、②中東情勢悪化時や⑤リーマン・ショック時には上側依存性の強いガンベル・コピュラの適合度も高くなっており、上下両側に裾依存性が強まった様子が窺われる。

(ロ) 米国と日本

次に、米国と日本の推計結果を図9で確認すると、①ITバブル崩壊時、②イラク・北朝鮮情勢悪化時、③グローバルなリスク調整期時、④パリバ・ショック時、⑤リーマン・ショック時のように市場にストレスが発生した時期には、下側依存性の強いコピュラの適合度が高くなる。さらに、④パリバ・ショック時や⑤リーマン・ショック時には上側依存性の強いガンベル・コピュラの適合度も同時に高くなっており、上下両側に裾依存性が強まった様子が窺われる。

(ハ) 欧州と日本

最後に、欧州と日本の推計結果を図10で確認すると、全期間を通じて下側依存性の強い反転ガンベルの適合度が高いことが確認できる。特に、①ITバブル崩壊時、②中東情勢不安時、③グローバルなリスク調整期時、④パリバ・ショック時のように市場にストレス・イベントが発生した時期には、下側依存性の強いコピュラの適合度が高くなっている。①ITバブル崩壊時や④パリバ・ショック時には、上側依存性の強いガンベル・コピュラの適合度も高くなっている様子が窺われる。

4. コピュラを用いたCDOの評価

CDOの価値評価は、実務的には正規コピュラを用いたモデルが標準的に用いられている¹³。しかし、前述のように、正規コピュラは変数間の裾の依存性を表現できないため、CDOの信用スプレッド評価に用いた場合、上位トランシェの損失の見積もりが甘くなる可能性がある。本節では、正規コピュラも含め、さまざまなコピュラを用いてCDOを評価する場合に、コピュラの種類の違いで生じうる評価上の問題を議論する。

13 CDO評価法については、さまざまな種類のコピュラを用いた方法を含め、室町[2007]が詳しい。

稲村・白塚 [2008] や藤井・竹本 [2009] は、標準的な正規コピュラを用いて、5年満期の等額面、等回収率、等資産相関 ρ の CDO やそのトランシェから再証券化された CDO スクエアードの損失分布評価を行っている。再証券化された CDO スクエアードについて稲村・白塚 [2008] は、各トランシェの期待損失の資産相関 ρ に対する感応度を求め、上位トランシェでは再証券化により資産相関 ρ に対する感応度が高くなることを示している。

これらの研究と同様の設定のもと、本稿では、正規コピュラのほかに、裾での依存性の強いコピュラ (tコピュラ、クレイトン・コピュラ、反転ガンベル・コピュラ) や弱いコピュラ (フランク・コピュラ) を用いることで各トランシェの期待損失率評価の違いを考察する。

(1) 1 期間構造モデルとコピュラ

コピュラを用いた評価法では、 n 個の債務からなる CDO プールの第 j 債務の満期における資産状態変数を X_j として評価を行う。各状態変数の分布関数を $F_j(x)$ として、 $U_j = F_j(X_j)$ と変数変換すると、 U_j は一様分布に従うが、この確率変数 U_j が、設定した満期までのデフォルト確率 p よりも低いかな否かで各債務のデフォルトを判定する。このとき、多変量一様確率変数 (U_1, \dots, U_n) の同時分布関数が設定したコピュラ関数となる。

例えば、正規コピュラ・モデルは、相関行列 Σ を持つ正規コピュラで上記の評価を行ったものである。正規コピュラ・モデルの中でも最も単純で代表的なモデルである 1 ファクター・シングルインデックス・正規コピュラ・モデルは、 n 個の債務からなる CDO プールの第 j 債務の状態変数 (第 j 債務者の資産状態変数) を

$$X_j = \sqrt{\rho}V + \sqrt{1 - \rho}\varepsilon_j, \quad (14)$$

と置いてモデル化する。ただし、 V と ε_j は独立に標準正規分布に従う確率変数である。状態変数は満期 T での資産状態を表しているものと考えられ、満期 T で状態変数 X_j が負債の状態を表す閾値 K_j を下回っていればデフォルトと考える。すなわち、(1 変量) 標準正規分布の分布関数を $\Phi(\cdot)$ として、

$$p = \Pr(X_j \leq K_j) = \Phi(K_j), \quad (15)$$

となることから、デフォルト閾値は

$$K_j = \Phi^{-1}(p), \quad (16)$$

で与えられるが、このデフォルトの判断 $X_j \leq K_j$ は、

$$U_j = \Phi(X_j) \leq p, \quad (17)$$

と同値であり、コピュラ・モデルの特殊ケースになっていることを確認できる。

正規コピュラ以外のコピュラに従うモデルを考える場合は、想定するコピュラに従う多変量一様確率変数 (U_1, \dots, U_n) を構成し、第 j 債務のデフォルトは (17) 式のように $U_j \leq p$ の成否で判断すればよいということになる。

(2) 等質な CDO の評価法

参照債務数 n の等質な CDO プールを考える。すなわち、CDO プールの額面を 1 に標準化し、各参照債務のエクスポージャーは等しく $1/n$ とする。各参照債務の満期までのデフォルト確率は一定で p 、各参照債務のデフォルト時損失率 ($1 -$ 回収率) も一定で LGD 、参照債務間の資産状態変数の相関は一定で ρ とする。

CDO プールの損失率 L ($L \in [0, 1]$) は、第 j 債務のデフォルト事象を $U_j \leq p$ と表現できることから、

$$L = \frac{LGD}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{U_j \leq p\}}, \quad (18)$$

と表現される。各トランシェの期待損失率や信用スプレッドの評価は、デフォルト件数の評価に帰着する。デフォルト件数は数値積分によっても評価できるが、ここでは、より一般的なアプローチとして、検討するコピュラに従う乱数を用いて各債務の損失をシミュレーションによって評価する方法を採用する。

まず、CDO プールの期待損失率について考える。各債務のデフォルト時損失率 ($1 -$ 回収率) は一定で LGD で与えられるとし、CDO プール全体の元本は 1 であるとする。シミュレーションの第 i 番目のパスでの乱数を $(U_1^{(i)}, \dots, U_n^{(i)})$ で表記すると、第 i 番目のパスでの CDO プールの損失率は

$$L^{(i)} = \frac{LGD}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{U_j^{(i)} \leq p\}}, \quad (19)$$

で表現されるため、 N 個のパスによるシミュレーションで CDO プールの期待損失率は

$$E[L] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L^{(i)} = \frac{LGD}{Nn} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n 1_{\{U_j^{(i)} \leq p\}}, \quad (20)$$

と評価される¹⁴。ここで、アタッチメント A_M 、デタッチメント D_M のトランシェ

14 こうしたアプローチは戸坂・吉羽 [2005] などで扱われている与信ポートフォリオの評価モデルとも一致している。なお、戸坂・吉羽 [2005] は、与信ポートフォリオの損失分布について期待値だけではなく分位点 (value at risk) も算出しコピュラの違いの影響を計測している。また、小宮 [2003] は、正規コピュラと反転ガンベル・コピュラの違いが各トランシェの損失率に及ぼす影響を考察している。

M を考えると、その損失率は

$$L_M = \frac{\max(L - A_M, 0) - \max(L - D_M, 0)}{D_M - A_M}, \quad (21)$$

で与えられる。この損失率の期待値は、(19) 式を用いて

$$E[L_M] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\max(L^{(i)} - A_M, 0) - \max(L^{(i)} - D_M, 0)}{D_M - A_M}, \quad (22)$$

と評価される。各トランシェの信用スプレッドは後掲(27)式にこの(22)式を代入して評価される。次に、(21)式の損失率で与えられる同額のトランシェ M を K 個参照する CDO スクエアードを評価する場合には、 K 個のトランシェ M が参照する末端債務に重複がないと仮定するならば、 Kn 変量の乱数 $(U_{1,1}^{(i)}, \dots, U_{1,n}^{(i)}, \dots, U_{K,1}^{(i)}, \dots, U_{K,n}^{(i)})$ を用いて評価を行う。第 i 番目のパスでの当該 CDO スクエアードのプールの損失率 $L_K^{\text{sq},M,(i)}$ は、

$$L_K^{\text{sq},M,(i)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\max(L_k^{(i)} - A_M, 0) - \max(L_k^{(i)} - D_M, 0)}{D_M - A_M}, \quad (23)$$

ただし、

$$L_k^{(i)} = \frac{LGD}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{U_{k,j}^{(i)} \leq D\}}, \quad (24)$$

で与えられ、CDO スクエアードのアタッチメント A_S 、デタッチメント D_S のトランシェ S の損失率 $L_S^{\text{sq},M}$ の期待値は

$$E[L_S^{\text{sq},M}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\max(L_K^{\text{sq},M,(i)} - A_S, 0) - \max(L_K^{\text{sq},M,(i)} - D_S, 0)}{D_S - A_S}, \quad (25)$$

で与えられる。

このようにして得られた CDO および CDO スクエアードの各トランシェの損失率を用いて、市場取引されるプレミアムを評価する。簡単化のため、市場はリスク中立的であるとし、CDO トランシェのプロテクションの売り手はプレミアムを定期的に受け取るのではなく、割引債形式のスプレッドとして期初に一括して受け取るものとして評価する。すなわち、満期での CDO プールの損失率を L とし、トランシェ M の信用スプレッド s_M は無リスク金利を r として

$$e^{-(r+s_M)T} = (1 - E[L_M])e^{-rT}, \quad (26)$$

を満たすことから

$$s_M = -\frac{1}{T} \ln(1 - E[L_M]), \quad (27)$$

で与えられる。CDO スクエアードのトランシェについても同様に信用スプレッドを定義できる。取引される CDO の満期は通常 5 年程度あり、この信用スプレッドは取引対象のトランシェの期待損失率を連続複利表示の年率で表示したものと解釈できる。

(3) コピュラの違いが CDO の評価に及ぼす影響

コピュラの違いが CDO の評価に与える影響を考察するため、2 節で示した①正規、②t、③クレイトン、④反転ガンベル、⑤フランクの 5 つのコピュラを比較する。等質な CDO を評価するため、①、②の正規コピュラ、t コピュラでは相関行列のすべての非対角要素が一定の ρ であるとする。②の t コピュラでは自由度については先験的に与え、具体的には 20、6、3 の 3 種類を考える。したがって、対象とするコピュラはすべて 1 パラメータとなる。

資産価格のヒストリカル・データを用いて価格変動間のコピュラのパラメータを決定することを考えると、パラメータは 3 節(3)で考察したように対象となる観測期間すべてのデータを用いて最尤推計等により求めたり、あるいは、パラメータが 1 つだけであれば順位相関に合わせてパラメータを求めることができる。ここでは、順位相関としてケンドールのタウに合わせてパラメータを求めることとする。

考察する等質な CDO の具体的な設定は、稲村・白塚 [2008] と同様に参照債務数： $n = 100$ 、満期： $T = 5$ (年) とし、各債務については一般的な回収率の設定 (40% 一定) と比較的高めなデフォルト確率 (5 年で 5%) を考える。典型的な正規コピュラの ρ としては 0.15 を考える。このとき、ケンドールのタウ τ_K は 0.096 であり、この順位相関を持つ各コピュラのパラメータはクレイトン・コピュラ： $\alpha = 0.21$ 、反転ガンベル・コピュラ： $\gamma = 1.11$ 、フランク・コピュラ： $\delta = 0.87$ で与えられる¹⁵。トランシェの分け方は、典型的な $\rho = 0.15$ の正規コピュラを想定した場合にスーパーシニアが AAA 格以上、シニアが AA~AAA 格程度、メザニンが BBB~A 格程度を確保できるよう表 6 のようにトランシングする。

このとき、各トランシェの期待損失率から計算される (27) 式のスプレッドは表 7 のようになる。以下すべてのシミュレーションは 100 万回のパスで評価している。t コピュラについては自由度 20、6、3 での結果が、それぞれ t(20)、t(6)、t(3) の行

15 t コピュラのケンドールのタウ τ_K は、表 1 で示しているように自由度 ν に依存せず、正規コピュラと同じ形式で表現される。このため、t(20)、t(6)、t(3) とともに $\rho = 0.15$ のケースが $\tau_K = 0.096$ に対応する。

表6 CDOのトランシング

	エクイティ	メザニン	シニア	スーパーシニア
アタッチメント	0%	6%	18%	36%
デタッチメント	6%	18%	36%	100%

表7 CDOの各トランシェの спреッド ($\rho = 0.15$) 単位: bp

コピュラ	エクイティ	メザニン	シニア	スーパーシニア
正規	1,147.43	63.38	0.65	0.000
t(20)	1,061.07	86.94	2.33	0.002
t(6)	899.52	127.82	9.11	0.043
t(3)	735.55	165.40	21.81	0.196
クレイトン	860.61	135.77	12.65	0.099
反転ガンベル	1,018.34	59.01	19.04	2.685
フランク	1,324.02	15.54	0.00	0.000

に示されている。表7より、下側裾依存性の弱いフランク、正規コピュラではエクイティの спреッドを高め に推定するものの、シニア、スーパーシニアといった上位トランシェの спреッドについては低めに推定してしまうことがわかる。例えば、シニアの спреッドは正規コピュラでは0.65であるのに対し、自由度3のtコピュラでは21.81、反転ガンベル・コピュラでは19.04となっており、裾依存性の認識の差が上位トランシェのリスク認識に大きな違いを生じさせることがわかる¹⁶。

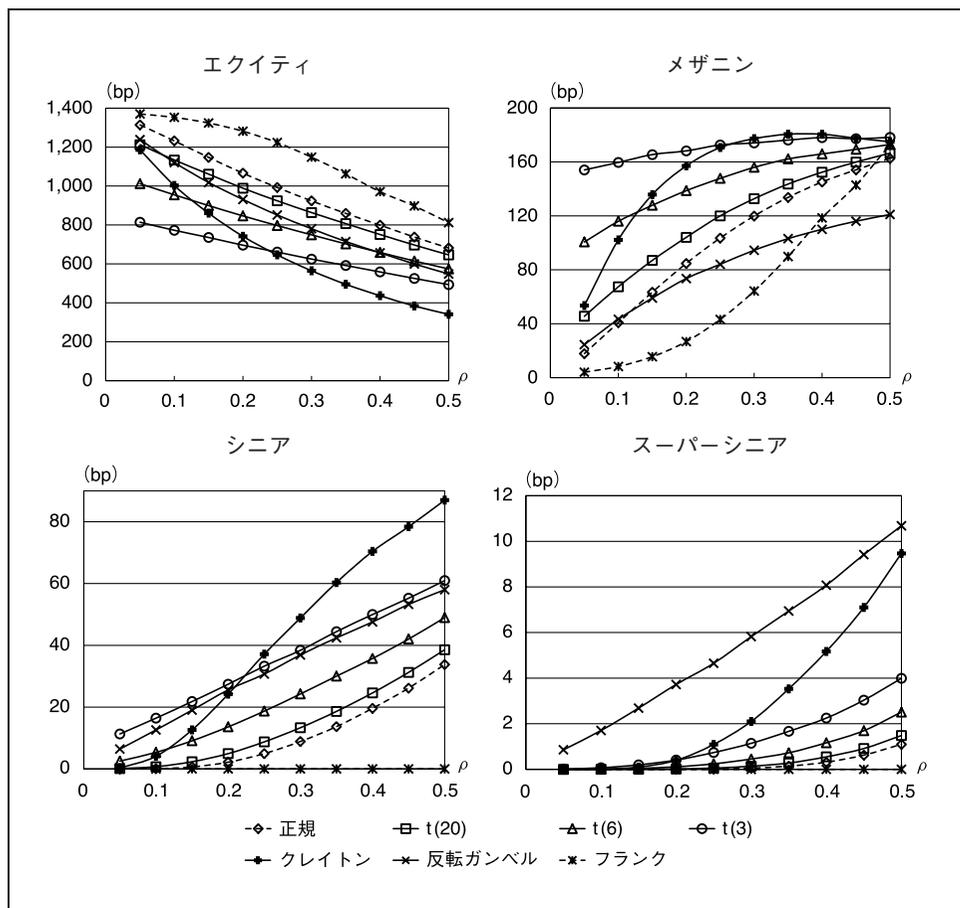
図11は、CDOの各トランシェについて、想定するコピュラの種類ごとに、参照資産の順位相関を変えた場合に спреッドの評価値がどのように変化していくかを図示したものである。横軸は順位相関を正規コピュラの相関 ρ に換算して表示しており、縦軸は各コピュラに基づき計算された спреッドを表している。

図11より、エクイティでは裾依存性の弱いフランクや正規コピュラでの спреッドが高いが、シニアでは裾依存性の弱いフランクや正規コピュラでの спреッドは低く見積もられることがわかる。相関 ρ に対する感応度の観点では、エクイティではどのコピュラでも相関の上昇に伴い спреッドは下落している一方、上位のトランシェでは相関の上昇に伴い спреッドは上昇している¹⁷。仔細にみると、メザニンでは相関 ρ が0.05と低いときに正規コピュラではほぼ0の спреッドを算出して

16 Burtshell, Gregory, and Laurent [2009]でも、同じようにコピュラを用いたCDO評価法の比較を行っている。ただし、Burtshell, Gregory, and Laurent [2009]ではコピュラ間の比較に際して順位相関を一致させるのではなく、1パラメータのコピュラについてエクイティの спреッドが等しくなるようにパラメータを設定し、上位トランシェの市場価格を説明できるモデルを考察している。すなわち、1つのパラメータですべてのトランシェの市場価格を説明できるコピュラ・モデルはどのモデルかを検討している。一方、本稿の分析はトランシェの市場価格を所与とするのではなく、各債務の状態を表す資産状態変数の順位相関が株価の過去の変動などに基づいて推定されるような場合に、コピュラによってトランシェの市場価格がどのように変化するかという観点から考察している。

17 小宮 [2003]でも指摘されているように、相関に対する感応度の観点では、相関を強めることに伴い上位のトランシェに損失リスクがより多く配分される結果として、エクイティの спреッドは下落する。一方、シニアでは、相関を強めると損失リスクがより大きく及ぶこととなり спреッドは上昇する。

図 11 相関に応じた各トランシェの спреッド



備考：横軸は順位相関を正規コピュラの相関 ρ に換算して表示したもの。縦軸は対応する各コピュラに基づくスプレッドの評価値（単位：bp）。

しまうが、下側裾依存性の強い自由度 3 の t コピュラでは 150 bp 程度と非常に高いスプレッドを算出する¹⁸。シニアでは自由度の低い t コピュラや反転ガンベルではスプレッドが高く見積もられ、相関 ρ の高まりに対してほぼ線形にスプレッドが上昇するが、正規コピュラや自由度の高い t コピュラでは下に凸の形状となっており、相関 ρ の高まりに対して期待損失率の認識が急激に高まることを示唆している¹⁹。

18 t コピュラでは相関 ρ が 0 に近づいたときに、変量間は無相関になるものの独立になるわけではない。これはシステムティック・ファクターと個別ファクターそれぞれに t 分布を考えた状態変数で表現される double-t コピュラと異なる点である。詳細は補論 2 を参照。

19 Burtshell, Gregory, and Laurent [2009] では脚注 16 のような比較を正規、t、クレイトンなどのコピュラについて行い、これら 3 つのコピュラでは上位トランシェの市場価格評価にあまり違いが生じなかったとしている。このことは、図 11 でエクイティのスプレッドを 800 bp に合わせるようにパラメータを設定したと仮定して、上位トランシェのスプレッドをコピュラ間で比較することによっても確認できる。このとき、Burtshell, Gregory, and Laurent [2009] では検討されていない反転ガンベルの結果は正規、t、クレイ

表 8 相関の変化に対する CDO トランシェのспレッド比率

ρ	正規	t(20)	t(6)	t(3)	クレイトン	反転ガンベル
	メザニン					
0.10	2.29	1.48	1.15	1.04	1.91	1.76
0.15	1.55	1.29	1.10	1.04	1.33	1.36
0.20	1.34	1.20	1.09	1.02	1.16	1.25
0.25	1.22	1.15	1.07	1.03	1.09	1.14
0.30	1.16	1.11	1.06	1.01	1.04	1.12
0.35	1.12	1.08	1.04	1.01	1.02	1.09
0.40	1.09	1.06	1.02	1.01	1.00	1.07
0.45	1.06	1.05	1.02	1.00	0.98	1.05
0.50	1.05	1.04	1.02	1.01	0.99	1.04
	シニア					
0.10	158.60	6.48	2.10	1.45	15.40	1.96
0.15	7.74	3.25	1.70	1.33	3.08	1.51
0.20	3.35	2.13	1.50	1.26	1.91	1.34
0.25	2.26	1.77	1.37	1.21	1.53	1.20
0.30	1.79	1.52	1.30	1.15	1.32	1.20
0.35	1.54	1.40	1.24	1.16	1.24	1.15
0.40	1.43	1.32	1.19	1.12	1.17	1.12
0.45	1.33	1.27	1.18	1.11	1.11	1.12
0.50	1.29	1.23	1.16	1.10	1.11	1.09

ここで、各トランシェを期待損失が一定の金額になるように保有することを考える。спレッドが小さいときにはそのトランシェについて多額の元本を保有することになる。このとき、相関 ρ が変化したときのспレッド変化率が大きいと、元本が多額であることから期待損失額の見積もりも大きくなる。そうした状況で当該トランシェを保有し続けるには、多額の資金を調達する必要性が生じてしまう。そこで、図 11 の結果を用いて相関 ρ を 0.05 上昇させた際のメザニンおよびシニアにおけるспレッドの変化率をフランク以外のコピュラについてみると、表 8 のとおりとなる²⁰。例えば、シニアの $\rho = 0.15$ での正規コピュラの値 7.74 は、 $\rho = 0.15$ のспレッドと $\rho = 0.10$ のспレッドとの比である。この表から、正規コピュラに基づくспレッド変化率が相対的に大きいことがわかる。すなわち、正規コピュラ・モデルが他の t、クレイトン、反転ガンベルといった下側依存性の強いコピュラに基づくモデルに比べて相関 ρ の変化に対して脆弱な判断を導きやすいと考えられる²¹。

トンの結果とは異なり、メザニンのспレッドを相対的に低く、シニア、スーパーシニアのспレッドを相対的に高く見積もることがわかる。

20 フランク・コピュラでは、考察している相関の範囲ではシニアのспレッドがほとんど 0 となり、相関の変化に関するспレッド変化率を求められないため、分析から除外した。

21 同様の感応度分析は 4 節(4)で扱う CDO スクエアードについても行うことができる。その結果の詳細は省略するが、定性的には、ここでの CDO に対する分析結果と同様である。

表9 CDO スクエアードのトランチング

	エクイティ	メザニン	シニア
アタッチメント	0%	20%	80%
デタッチメント	20%	80%	100%

表10 CDO スクエアードの各トランシェの спреッド
($\rho = 0.15$) 単位: bp

コピュラ	エクイティ	メザニン	シニア
正規	217.87	34.02	3.22
t(20)	257.25	58.46	10.06
t(6)	303.95	104.45	31.51
t(3)	324.82	147.91	61.82
クレイトン	306.63	115.52	39.63
反転ガンベル	113.11	50.53	29.70
フランク	78.85	0.00	0.00

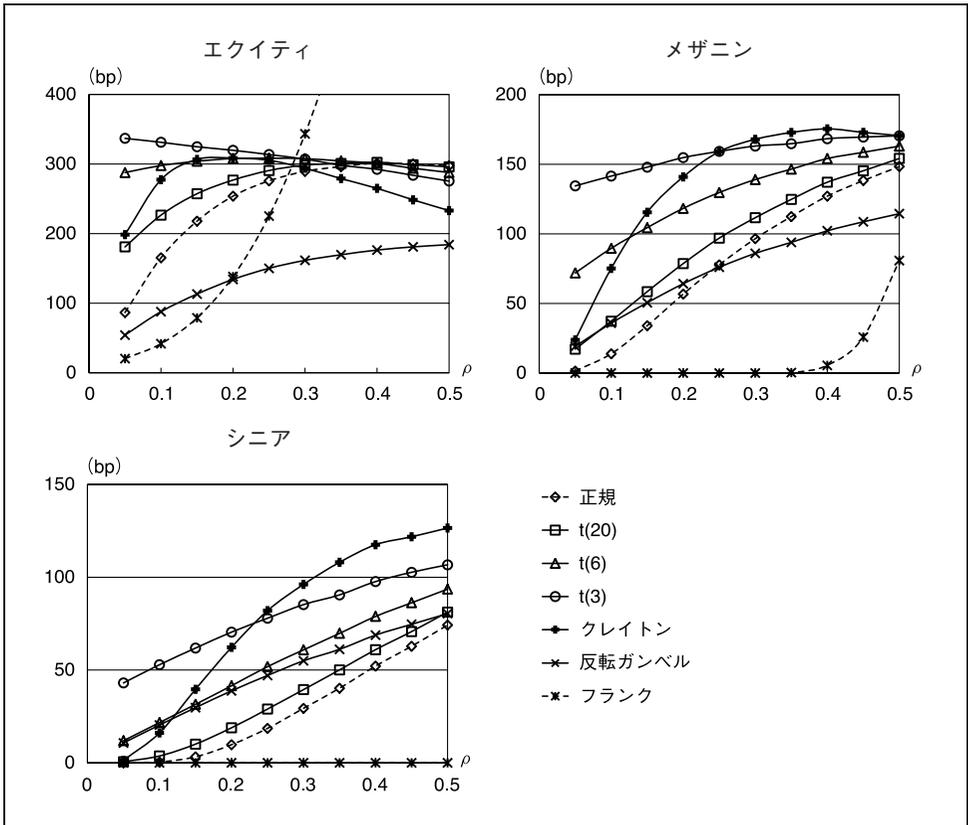
(4) コピュラの違いが CDO スクエアードの評価に及ぼす影響

コピュラの違いが CDO スクエアードの評価に及ぼす影響を考察するため、4 節 (3) で検討した CDO のメザニンのトランシェを 10 個参照する再証券化商品 (CDO スクエアード) を構成し、spredd の評価を行う。この CDO スクエアードが参照するトランシェを構成する各 CDO プール (インナー CDO) はそれぞれ 100 個の債務から構成されるとする。CDO スクエアードを以下のように 3 つのトランシェに分ける。

まず、インナー CDO が参照する債務には重複がないものとする。すなわち、CDO スクエアードが参照している末端の債務は総計で 1,000 個あるとし、各債務の状態変数は、①正規、②t、③クレイトン、④反転ガンベル、⑤フランクの 5 種類のいずれかのコピュラで関係付けられているとする。基本ケースとして正規コピュラの相関 ρ を 0.15 とし、表 9 に示したトランシェの spredd を各コピュラに基づき評価すると表 10 のようになる。シニアについては、この例のようにアタッチメントを 80% と高水準に設定しても、正規コピュラで 3.22 bp、正規以外の下側裾依存性の強いコピュラではさらに 1 桁大きい spredd となるなど、高めの期待損失率が見込まれる点が特徴的である。この点、同じ CDO スクエアードについて、後掲 4 節 (6) のような簡便な評価手法を適用すると、ここでの評価結果に比べ著しく小さな期待損失と評価されるのと対照的な結果である。

次に、図 11 と同様に相関を変化させたときに、CDO スクエアードの各トランシェの spredd が考察対象のコピュラごとにどのように変化していくかをみると、図 12 のようになる。横軸は、図 11 と同様に、順位相関を正規コピュラの相関 ρ で換算した表示となっている。メザニンおよびシニアをみると、相関 ρ の上昇に伴う

図 12 相関に応じた CDO スクエアードの各トランシェのスプレッド



備考：横軸は順位相関を正規コピュラの相関 ρ に換算して表示したもの。縦軸は対応する各コピュラに基づくスプレッドの評価値（単位：bp）。

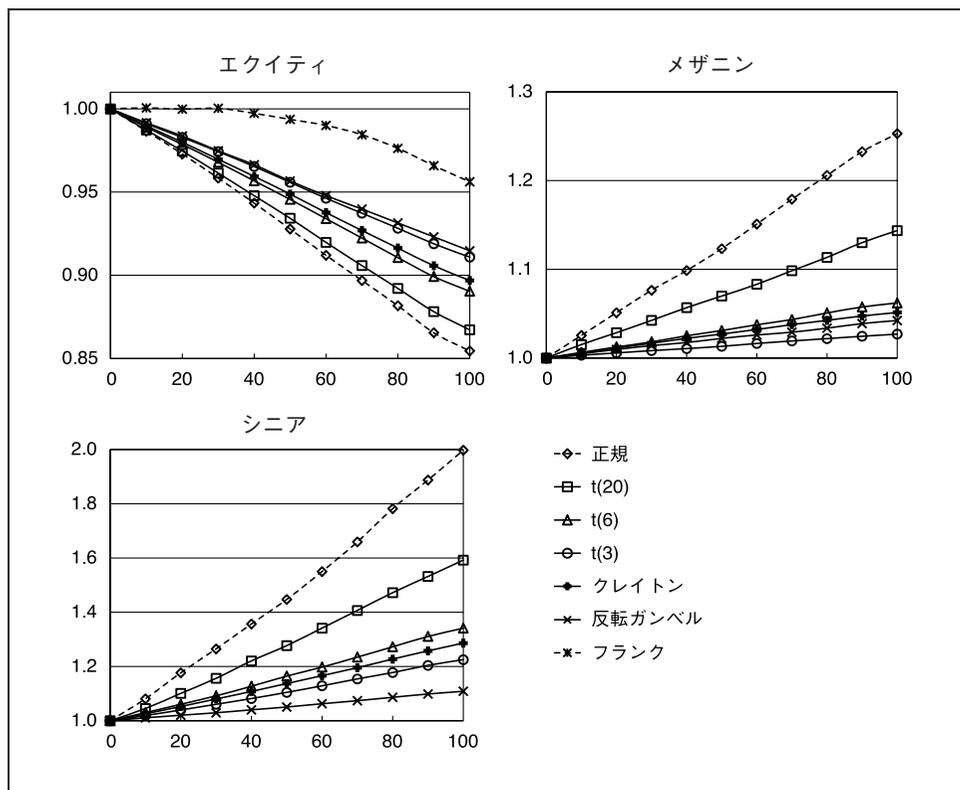
スプレッドの上昇度合いは、フランク・コピュラを除くと正規コピュラが一番大きいようにみえる。

(5) CDO スクエアードにおける末端参照債務の重複度の影響

CDO スクエアードは、参照するトランシェがさらに多くの銘柄から構成される CDO（インナー CDO）で構成されるため、参照している末端参照債務数は非常に大きな数となる。この場合、実際にはそれだけ多数の末端参照債務がすべて相異なるとは限らず、暗黙のうちにいくつかの債務を重複して参照している可能性がある。こうした重複が存在すると、想定した相関よりも実質的に高い相関が発生してしまっている可能性がある²²。

22 池上 [2005] や Whetten and Adelson [2005] でも CDO スクエアードの重複度に注目し、正規コピュラを用いてその効果を検証している。

図 13 重複銘柄数に対する各トランシェのスプレッドの変化



備考：1) フランク・コピュラについては、メザニンおよびシニアでは重複のないケースでのスプレッドが0となってしまう比率を定義できないため、分析から除外している。
 2) 横軸は重複銘柄数 (0~100)。縦軸は重複銘柄数0のケースを基準としたスプレッドの比率。各コピュラについて正規コピュラの $\rho = 0.15$ と同じ順位相関で算出。

そこで、ここでは各 100 銘柄を参照している 10 個のインナー CDO について、100 銘柄のうち m 銘柄は互いに共通の債務を参照していると想定する。正規コピュラの相関 ρ については基本ケースの 0.15 で考え、重複している銘柄数 m を 0 から 100 まで変化させたとき、各トランシェのスプレッドがどのように変化していくかを図示すると図 13 のとおりとなる。図 13 より、エクイティでは重複銘柄数の増加に伴い損失率が減少するのに対し、メザニンとシニアでは重複銘柄数の増加に伴い損失率が增大することがわかる。これは、エクイティでは相関の上昇に伴い損失率が減少する一方、シニアでは相関の上昇に伴い損失率が増加するという図 11 の現象と同じであり、重複銘柄数の増加は実質的な相関の上昇を意味していることがわかる。また、シニアについてコピュラごとに重複銘柄数の増加に伴うスプレッド比率の増加をみると、正規コピュラでは完全重複でほぼ 2 倍のスプレッドとなることがわかる一方、裾依存性の強いコピュラについてはスプレッド比率の増加は相対的に抑えられていることがわかる。

(6) 末端参照債務を考慮しないCDOスクエアード評価との比較

4節(4)、(5)では、CDOスクエアードの損失評価に際して、末端参照債務の相互依存関係を考慮して評価を行ったが、より簡便な評価方法としては、CDOスクエアードが参照している各CDOトランシェをそれぞれ1つの債務とみなして評価を行うことも考えられる。ここでは、そのような簡便な評価を行った場合にCDOスクエアードの各トランシェの期待損失率がどう評価されるかを考察する。

4節(4)、(5)で扱ったCDOスクエアードでは、メザニン10個を参照しているが、末端参照債務を考慮せず、このメザニンと同一のデフォルト確率、回収率を持つ10個の債務についてCDOを構成したと考えて評価を行う。表7より $\rho = 0.15$ の正規コピュラでのメザニンのスプレッドは $s_M = 63.38$ (bp)と与えられている。これを踏まえ、CDOスクエアードの参照資産について、満期 $T = 5$ (年)、 $LGD = 0.6$ (回収率40%)として、5年間のデフォルト確率を算出すると、

$$p = (1 - e^{-s_M T / 10000}) / LGD \cong 5.20\%, \tag{28}$$

となる。このデフォルト確率を有する債務10個を参照するCDOとして、CDOスクエアードの各トランシェの信用スプレッドを評価する。その際、相関 ρ は0.15とし、正規コピュラに基づき評価を行う。また、同様に、自由度20、6、3のt、クレイトン、反転ガンベル、フランクの各コピュラについても表7で得られているスプレッドを(28)式で10個の債務のデフォルト確率に変換し、相関 $\rho = 0.15$ で各コピュラに基づいてCDOスクエアードを評価すると、表11のとおりとなる。

表11と表10を比較すると、フランク・コピュラ以外では、末端参照債務を考慮した場合よりもメザニンとシニアを大幅に過小評価してしまうことがわかる。特に、表11では、シニアについてはどのコピュラで評価しても末端参照債務を考慮しない場合には期待損失率をゼロとしか評価できず、リスクを過小評価してしまうことがわかる。

表11 末端参照債務を考慮しない場合のスプレッド ($\rho = 0.15$) 単位: bp

コピュラ	5年デフォルト確率 p	エクイティ	メザニン	シニア
正規	5.20%	334.62	1.72	0.00
t(20)	7.09%	458.92	5.40	0.00
t(6)	10.32%	667.44	17.55	0.00
t(3)	13.23%	845.49	35.75	0.00
クレイトン	10.94%	697.67	23.08	0.00
反転ガンベル	4.85%	284.80	8.48	0.00
フランク	1.29%	765.89	6.97	0.00

備考: 5年デフォルト確率 p は表7の各コピュラに基づくメザニン・スプレッド s_M を(28)式でデフォルト確率に変換したもの。

5. おわりに

本稿では、コピュラの基本的な性質等を整理したうえで、まず、日米欧の株価指数の動きを分析した。株価指数に代表される資産価格変動の裾依存性は、平時に比べ金融危機時に強まることを確認したうえで、①正規、②t、③クレイトン、④ガンベル、⑤反転ガンベルの5つの2変量コピュラを用いて適合度の高いコピュラを分析した。2000年1月から2009年9月までの日次収益率データを用いた場合、全期間推計におけるBIC規準でみた適合度は、自由度の小さいtコピュラや反転ガンベル・コピュラが高く、主要国の株価指数変動の間には強い下側裾依存性が存在することが示された。また、ローリング推計を行うと、市場が安定している時期にはtコピュラよりも正規コピュラの適合度が高い傾向があるものの、金融危機時にはtコピュラの方が正規コピュラよりも適合度が高くなる傾向にあり、金融危機の発生の可能性を勘案すると下側裾依存性の高いコピュラを用いる必要性が強いことが確認された。

また、こうした資産変動の下側裾依存性を踏まえて、コピュラを用いたCDO評価における問題点を検討した。具体的には、資産価格変動の間の全体的な依存性を示す順位相関を固定して、コピュラの種類だけを変えた場合のCDOスプレッドの評価結果の違いについて分析した。その結果、標準的に用いられる正規コピュラではCDOの上位トランシェの損失率を過小に見積もってしまう傾向があることが示された。再証券化商品であるCDOスクエアードについても同様の結果を得たほか、末端参照債務の重複度の影響も考慮すると相関 ρ の変化に対するスプレッドの感応度は正規コピュラの方が下側裾依存性の強いコピュラよりも大きく、正規コピュラに基づく評価モデルが相対的に脆弱である可能性が示された。すなわち、CDO評価においても、金融危機のような下側裾依存性が強くなる状況を勘案するには、下側漸近従属のコピュラを用いた評価が必要になることが示唆された。

研究面での今後の課題としては、CDO評価等に用いるうえで適切なコピュラの設定が挙げられる。3節の分析では、株価収益率に適合するコピュラの種類についていくつかの候補を示したが、適合度の高低は観測時期に強く依存しており、実用的なコピュラの種類を特定するには至らなかった。また、CDOの分析では本来、企業等の資産価値の変動に関する相互依存関係を評価すべきであり、それは3節で扱った株価収益率とは異なる。このため、資産価値の変動特性を直接コピュラで分析することも課題である。このほか、本研究の拡張の方向性としては、①適用するデータの工夫、②適用する期間の工夫が挙げられる。①に関しては、例えば、価格変動そのものではなく、それをシステムティックな変動要因と個別変動要因に分解したうえで後者に対してコピュラを適用して分析することが考えられる。②に関しては、Okimoto [2008] などでも考察されているように、分析期間を平時と金融危機時の2つのレジームに分けて、それぞれ異なる種類のコピュラを適用するようなモデル化も考えられる。

最後に、本稿で得られた結果を踏まえつつ、今次金融危機を振り返って実務上の含意を考察すると以下のように整理できる。CDOの市場価格は、それにフィットする正規コピュラの相関 ρ を算出した指標で表現されることが多い。これは、インプライド・コリレーションと呼ばれ、オプション価格がブラック＝ショールズ・モデルに基づきインプライド・ボラティリティで表現されるのと同様である。このように、正規コピュラの相関は信用デリバティブ市場でいわば「共通言語」となっている面もあり、そのインプライド・コリレーションがトランシェごとに異なるというコリレーション・スマイルは、金融危機以前から観察されていた。このことは、市場参加者は必ずしも正規コピュラに全面的に依拠してCDOを評価していたのではなかったことを示唆している。一方、CDOを組成したり、その格付けを付与したりする際には、正規コピュラを用いて評価がなされていたことも多かったといわれている。そうした市場慣習と前述のような市場参加者の認識のギャップを埋めるためにも、本稿で扱ったように、さまざまなコピュラを利用した分析の幅を広げていくことは有益であろう。

参考文献

- 池上 徹、「クレジット・デリバティブ商品の考察～CDO スクエアードの仕組みとシミュレーションによる損失特性の評価と考察」、Mizuho Securities Credit Research、みずほ証券投資戦略部、2005年2月8日
- 稲村保成・白塚重典、「証券化商品のリスク特性の分析—再証券化によるレバレッジ上昇のインパクト—」、日銀レビュー 2008-J-6、日本銀行、2008年
- 小宮清孝、「CDO のプライシング・モデルとそれを用いた CDO の特性等の考察：CDO の商品性、国内市場の概説とともに」、『金融研究』第 22 巻別冊第 2 号、日本銀行金融研究所、2003 年、89～130 頁
- 塚原英敦、「接合分布関数（コピュラ）の理論と応用」、『21 世紀の統計科学 III 数理・計算の統計科学』第 5 章、2008 年、111～146 頁
- 戸坂凡展・吉羽要直、「コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説」、『金融研究』第 24 巻別冊第 2 号、日本銀行金融研究所、2005 年、115～162 頁
- 藤井真理子・竹本遼太、「証券化と金融危機—ABS CDO のリスク特性とその評価」、金融庁デイスカッションペーパー、2009 年 3 月 5 日
- 室町幸雄、『信用リスク計測と CDO の価格付け』、朝倉書店、2007 年
- Burtschell, Xavior, Jon Gregory, and Jean-Paul Laurent, “A Comparative Analysis of CDO Pricing Models under the Factor Copula Framework,” *Journal of Derivatives*, 16 (4), 2009, pp. 9–37.
- Frees, Edward W., and Emiliano A. Valdez, “Understanding Relationships Using Copulas,” *North American Actuarial Journal*, 2 (1), 1998, pp. 1–25.
- Hull, John, and Alan White, “Valuation of a CDO and an n -th to Default CDS without Monte Carlo Simulation,” *Journal of Derivatives*, 12 (2), 2004, pp. 8–23.
- Kemp, Adrienne W., “Efficient Generation of Logarithmically Distributed Pseudorandom Variables,” *Applied Statistics*, 30 (3), 1981, pp. 249–253.
- Li, David X., “On Default Correlation: A Copula Function Approach,” *Journal of Fixed Income*, 9 (4), 2000, pp. 43–54.
- Longin, François, and Bruno Solnik, “Extreme Correlation of International Equity Markets,” *Journal of Finance*, 56 (2), 2001, pp. 649–676.
- McNeil, Alexander J., Rüdiger Frey, and Paul Embrechts, *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton University Press, 2005.（『定量的リスク管理—基礎概念と数理技法—』、塚原英敦ら訳、共立出版、2008 年）
- Okimoto, Tatsuyoshi, “New Evidence of Asymmetric Dependence Structures in International Equity Markets,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 43 (3), 2008, pp. 787–815.
- Poon, Ser-Huang, Michael Rockinger, and Jonathan Tawn, “Extreme Value Dependence in Financial Markets: Diagnostics, Models, and Financial Implications,” *Review of Financial Studies*, 17 (2), 2004, pp. 581–610.

- Tsafack, Georges, “Asymmetric Dependence Implications for Extreme Risk Management,” *Journal of Derivatives*, 17 (1), 2009, pp. 7–20.
- Yan, Jun, “Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula,” *Journal of Statistical Software*, 21 (4), 2007.
- Whetten, Michiko, and Mark Adelson, “CDOs-Squared Demystified,” Nomura Fixed Income Research, 2005.

補論 1. フランク・コピュラに従う乱数の発生方法

本稿で対象とした6つのコピュラのうち、正規、t、クレイトン、ガンベル、反転ガンベルの5つのコピュラに従う乱数の発生方法については、戸坂・吉羽 [2005] で解説されている。本補論では、本稿で扱ったもう1つのコピュラであるフランク・コピュラに従う n 変量乱数の発生方法を示す。

フランク・コピュラは生成関数が

$$\phi(u_j) = -\ln(e^{-\delta u_j} - 1) + \ln(e^{-\delta} - 1), \quad (\text{A-1})$$

で与えられるアルキメディアン・コピュラであり、

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)), \quad (\text{A-2})$$

と表される。生成関数の逆関数 $\phi^{-1}(s)$ が潜在変数 θ のラプラス変換 $\zeta(s)$ と一致し、その潜在変数をシミュレートできればマーシャル＝オルキン法を適用できる²³。ラプラス変換が

$$\zeta(s) = \phi^{-1}(s) = -\ln(1 + e^{-s}(e^{-\delta} - 1))/\delta, \quad (\text{A-3})$$

と表される潜在変数 θ の確率分布はパラメータ $\beta = 1 - e^{-\delta}$ の対数級数分布（定義域は正の整数）であり、その確率関数は

$$\Pr[Y = k] = \frac{-1}{\ln(1 - \beta)} \frac{\beta^k}{k}, \quad (\text{A-4})$$

で与えられる（Frees and Valdez [1998] を参照）。パラメータ β の対数級数分布に従う乱数の発生方法は Kemp [1981] などで行くつかの手法が考察されている。その中で比較的単純な手法の LB 法では、 $-\delta = \ln(1 - \beta)$ と2つの独立な $[0, 1]$ 一様乱数 V, W を用いて、

$$\theta_0 \leftarrow \text{int} \left[1 + \frac{\ln(V)}{\ln(1 - e^{-\delta W})} \right], \quad (\text{A-5})$$

としてパラメータ β の対数級数分布に従う乱数 θ_0 を発生させる。ただし、 $\text{int}[\cdot]$ は小数部分を切り捨てて整数にする関数である。したがって、フランク・コピュラに従う乱数 U_1, \dots, U_n は以下のアルゴリズムで発生させることができる。

.....
23 マーシャル＝オルキン法の一般的な解説は戸坂・吉羽 [2005] を参照。

アルゴリズム（フランク・コピュラに従う乱数発生法）

1. 2つの $[0, 1]$ 一様乱数 V, W を独立に発生させ、潜在変数 θ_0 を (A-5) 式で生成する。
2. θ_0 とは独立な $[0, 1]$ の一様乱数 I_1, \dots, I_n を発生させる。
3. $j = 1, \dots, n$ で $U_j \leftarrow -\ln(1 + I_j^{1/\theta_0}(e^{-\delta} - 1))/\delta$ として U_1, \dots, U_n を生成する。

具体的な R のプログラム例は以下のとおりである²⁴。
 # パラメータ $\beta = 1 - \exp(-\delta)$ の対数級数分布に従う乱数
 # Kemp [1981] の LB 法
 rlogrithmic<-function(simNum,delta){
 u1<-runif(simNum); u2<-runif(simNum);
 xx<-trunc(1+log(u2)/log(1-exp(-u1*delta)));
 return(xx)
 }

フランク・コピュラに従う乱数 simNum × ndim
 rfrank_cop<-function(simNum,ndim,delta){
 beta<-1-exp(-delta);
 theta<-rlogrithmic(simNum,delta);
 ii<-matrix(runif(simNum*ndim),nrow=simNum,ncol=ndim);
 uu<--log(1-beta*exp(log(ii)/theta))/delta;
 return(uu)
 }

24 ここでは、 $n = \text{ndim}$ とし simNum 回のシミュレーションを行うことを念頭に simNum 行 ndim 列の形式でフランク・コピュラに従う乱数を発生させている。

補論 2. t コピュラと double-t コピュラの違い

t コピュラを構成する n 変量の多変量 t 分布の確率変数 (X_1, \dots, X_n) は、独立に標準正規分布に従う確率変数 Y 、 Z_i と自由度 ν のカイ 2 乗分布に従う確率変数 W を用いて

$$X_i = \frac{\nu(\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}Z_i)}{\sqrt{W}}, \quad (\text{A-6})$$

と表現される。この表現から $\rho = 0$ であっても X_1, \dots, X_n は独立にならないことがわかる。しかしながら、 $n = 2$ として X_1, X_2 の共分散を計算すると、 $x_1 = r \cos \theta$ 、 $x_2 = r \sin \theta$ という変数変換を行うことで、

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_1, X_2) &= E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] = E[X_1 X_2] \\ &= \frac{\Gamma((\nu+2)/2)}{(\nu\pi)\Gamma(\nu/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\infty} r^2 \left(1 + \frac{r^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} r dr = 0, \quad (\text{A-7}) \end{aligned}$$

となり、 X_1, X_2 が無相関になっていることがわかる。

一方、double-t コピュラは、独立に自由度 ν_U の t 分布に従う確率変数 U と自由度 ν_V の t 分布に従う確率変数 V_i を用いて、多変量確率変数 (X_1, \dots, X_n) を

$$X_i = \sqrt{\frac{\nu_U - 2}{\nu_U}} \sqrt{\rho} U + \sqrt{\frac{\nu_V - 2}{\nu_V}} \sqrt{1-\rho} V_i, \quad (\text{A-8})$$

として構成するコピュラであり、Hull and White [2004] で CDO 評価に用いられたコピュラである。(A-8) 式の表現より $\rho = 0$ では V_1, \dots, V_n の独立性から X_1, \dots, X_n が独立になることを確認できる。double-t コピュラの特例として $\nu_U = \nu_V = \nu$ の場合を考え、そのコピュラを $t(\nu)$ - $t(\nu)$ コピュラと表記することとする。 $t(\nu)$ - $t(\nu)$ コピュラでは (A-8) 式のファクター表現は

$$X_i = \sqrt{\nu(\nu-2)} \left\{ \frac{\sqrt{\rho}Y}{\sqrt{W_0}} + \frac{\sqrt{1-\rho}Z_i}{\sqrt{W_i}} \right\}, \quad (\text{A-9})$$

と整理される。ただし、 Y, Z_i は独立に標準正規分布に従う確率変数、 W_0, W_i は独立に自由度 ν のカイ 2 乗分布に従う確率変数である。

(A-6) 式の t コピュラのファクター表現と (A-9) 式の double-t コピュラ ($t(\nu)$ - $t(\nu)$) のファクター表現を比較すると、カイ 2 乗分布に従う確率変数 W を共通ファクターと個別ファクターで共通化しているか否かの点が違っている。なお、係数 ν と $\sqrt{\nu(\nu-2)}$ の違いは周辺分布に吸収され、コピュラについての差にはならない。