

メイン寄せリスクと 貸出債権価値の評価： ゲーム論的リアルオプション によるアプローチ

しばた たかし やまだ てつや
芝田隆志 / 山田哲也

要旨

企業の信用力が低下した際に、貸出を回収する銀行に代わってメインバンクが追加貸出を行うことがある。こうしたメインバンクへのエクスポージャー集中は、一般にメイン寄せと呼ばれている。本稿では、企業の業況が悪化していく際に、2つの銀行が貸出の早期回収を巡って競争する状況を考え、メインバンクが肩代わり貸出を行う合理性がゲームの均衡として表現できること、回収・清算の最適タイミングや、メイン寄せリスクを考慮したうえでの貸出債権価値評価が導出できることを示す。モデルの比較静学より、i) 企業の清算価値が低いほどメイン寄せが生じやすくなるとともに、いったんメイン寄せされた後は、清算を先送りする合理性が強まってしまうこと、ii) 貸出金利スプレッドが低いと、メイン寄せの発生を通じて貸出ポートフォリオの集中リスクが高まる可能性があること、特に、企業の信用状況が悪化したときほど信用リスクは加速度的に上昇することが確認された。

キーワード：メイン寄せ、リアルオプション、ゲーム理論、貸出債権価値、集中リスク

本稿の作成に当たっては、木島正明教授（首都大学東京）、小佐野広教授（京都大学）、今井潤一准教授（慶応義塾大学）、RIETI 金融・産業ネットワーク研究会の参加者から有益なコメントをいただいた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

芝田隆志 首都大学東京大学院社会科学研究所准教授 (E-mail: tshibata@tmu.ac.jp)
山田哲也 日本銀行金融研究所主査 (E-mail: tetsuya.yamada@boj.or.jp)

1. はじめに

社債や貸出債権の価値評価理論では、企業のデフォルトやデフォルト時の回収率に着目し、損失分布として信用リスクを認識するモデルが発展してきた。しかし、バブル崩壊以降の日本の貸出市場をみると、こうした標準的な信用リスクモデルでは評価できないような現象が不良債権問題の発生・解消の過程で観察されてきた。例えば、企業の信用力が低下した際に、メインバンクが貸出を回収しようとする他行の肩代わりをし、結果的に損失を拡大させるケースが見受けられた。いわゆる「メイン寄せ」である。こうしたメイン寄せは、貸出額を固定してリスク評価を行うことの限界を示唆するとともに、貸出額の変動を考えるうえで他行の行動が無視できないことを明らかにした。こうした問題意識のもと、本稿ではメイン寄せが発生するメカニズムを理論モデル化し、そのうえで、メイン寄せによる損失拡大の可能性を考慮した貸出債権の評価法を構築した。また、メイン寄せの発生に影響を及ぼす種々の要因についても考察を行った。

モデル化に際しては、メイン寄せの発生タイミングやその確率を内生的に決定するために、貸出継続・回収・肩代わり・企業清算という銀行の選択を最適化問題の解として導出し、得られた銀行の最適行動に基づいて貸出回収を巡る銀行間のゲーム的狀況を考察した。山田 [2007] では、貸出回収に関する2銀行間の非協力ゲームとしてメイン寄せを解釈し、企業の信用力低下時にゲームの均衡としてメイン寄せが生じうることを示しているが、ゲームの利得を表す貸出債権価値は単純な1期間モデルで与えられていた。しかし、本来、貸出回収や肩代わりの判断には将来の企業動向に関する予想が反映されているはずである。そこで、本稿では貸出債権価値を決定する確率変数を導入し、連続時間モデルへ拡張したうえで最適な回収・清算のタイミングや貸出継続・肩代わり実行の合理性を表現できるモデルを構築した。

ただし、連続時間モデルへ拡張したことにより、貸出債権の評価方法は、いわゆるDCF法をベースとした評価方法となっている。したがって、本稿のモデルは、過去に発生したいわゆる「メイン寄せ」を分析対象としているのではなく、DCF法が導入された環境下において、メイン寄せが発生するメカニズムを考察したものとなっている。

まず、銀行間の回収競争を考えない場合の貸出債権評価は、Leland [1994] やこれを発展させた Mella-Barral and Perraudin [1997] の手法を用いた。これらのモデルは、貸出債権が生み出すキャッシュフローの割引現在価値で債権価値を評価する、いわゆる単純なDCF法ではなく、リアルオプション理論を用いた評価方法を展開している。DCF法ではリスクを加味した割引率を用いることで将来キャッシュフローの不確実性に対応している。しかし、実際には、将来の不確実性が有利・不利いずれの方向に働くか見極めがついた時点で柔軟に対応すればよいというオプションを持っている場合が多い。リアルオプション理論は、こうした非対称な対応行動の可能性を勘案した評価・判断モデルである。

例えば、工場への設備投資タイミングは、その工場が生み出す事業収益のリスク調整後現在価値が設備投資額を上回った時点とは限らない。その後の状況が良くも悪くもなる可能性があるのなら、しばらく様子見し、事態が好転して工場の現在価値がより高まった時点で設備投資に踏み切るという戦略を採ることで、事態が悪化した場合のデメリットを回避することができる。このように意思決定を先送りするオプションを持っていること自体に価値が存在し、その価値はリアルオプション理論で評価可能である。また、不確実性の程度がわかれば、最適な設備投資タイミングも評価可能となる。

これを貸出債権価値に当てはめた場合、現在価値がゼロになったとしても、すぐ企業や事業を清算するのではなく、回復の可能性をしばらく様子見することで、もし回復したら貸出を継続することで将来の利払い収益を獲得し、より悪化したならば清算価値分を回収するという戦略を採ることが考えられる。リアルオプション理論を用いると、こうした戦略を採った場合の貸出債権価値評価や、先送りされた清算の最適タイミング（回復の可能性があったとしても、これ以上悪化するなら清算したほうがよいという限界点）の算出が可能となる。

以上の事例では、設備投資の場合、状況が悪化したときの損失フロアがゼロに限定され（設備投資は未だ実行されていないため）、貸出の場合も清算価値という下限フロアに限定されている¹。このため、不確実性のうち状況が好転することのメリットを非対称的に活用することが可能となっている。

ところが、こうしたリアルオプション理論だけではメイン寄せ現象を理解することはできない。上記のような回復の可能性を考慮した貸出債権価値評価に基づいて、複数の銀行が貸出継続・回収・清算という戦略を行使し、これがメイン寄せを生じさせている。相手行の出方によって自らの貸出債権価値が変化するため、単一銀行貸出の場合の最適戦略と複数銀行貸出の場合のそれは異なってくる。

そこで、ゲーム理論とリアルオプション理論を組み合わせたゲーム論的リアルオプションの活用を考えた。同手法は、他企業との競争がある中での最適な投資時期を決定する理論として発展したものであり、競争が投資タイミングを早期化させる現象を理論モデルとして導出している。リアルオプション理論では、ある程度まで設備投資の様子見を行うことが最適戦略であった。しかし、企業間競争を考慮すると、市場に先行参入した企業が先行者利得を占有するケースが少なくない。このため、最適な設備投資タイミングはある程度前倒しされる。そのタイミングは、様子見戦略の価値と先行参入の価値のバランスで決定される。

貸出の場合、他行が先行回収し、その分を肩代わりしないと事業継続不可能となり自らの貸出債権が大きく毀損してしまう状況に追い込まれてしまうリスクがある。このため、自行も他行より先に回収しようというインセンティブが生じるが、このことを知った他行もまた回収を前倒ししてくる。しかし、回収は将来の事業収益の

1 ここでは、清算価値が回収額のフロア（下限）を与えていると仮定しているが、事業の悪化が清算価値を低下させる可能性もあり、その場合の考察はさらに複雑となる。

放棄につながるため、早ければよいというものではなく、何らかの最適点が存在すると考えられる。また、2つの銀行の貸出額が同じでなければ、両行の戦略に違いが存在し、これが、一方は回収するが他方は肩代わりしても貸出を継続するという状況、いわゆるメイン寄せをもたらすかもしれない。

本稿では、ゲーム論的リアルオプションを用いて Mella-Barral and Perraudin [1997] の単一銀行モデルを複数銀行貸出に拡張し、相手行の最適戦略を前提として自行が最適戦略を考えるようなゲーム的状况において均衡が存在すること、さらには、メイン寄せ現象を銀行が互いに合理的に行動した結果の均衡として説明可能なことを示した。また、企業の清算価値（回収可能額）や貸出金利の水準、企業の信用リスクを左右する確率ファクターのボラティリティなど外生条件を変化させた場合、2つの銀行の最適行動にどのような変化が生じるのか、その結果、メイン寄せの発生タイミングはどう変わるのかをモデルの比較静学により検証することも試みた。

こうしたモデル検証から以下のような示唆が得られた。

- i) 企業の清算価値が低いとメイン寄せが生じる可能性が高まるとともに、いったんメイン寄せされた後は、清算を先送りする合理性が強まってしまう。
- ii) 貸出金利スプレッドが低いと、単純に収益額が小さくなるだけでなく、メイン寄せの発生を通じて貸出ポートフォリオの集中リスクが高まる可能性があり、特に、企業の信用状況が悪化したときほど信用リスクの加速度的上昇をもたらしてしまう。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、メイン寄せを扱った数少ない先行研究や考察を紹介したうえで、本稿のアプローチを概説する。3節では、次節以降の準備として、単一銀行が貸出を行う Mella-Barral and Perraudin [1997] のモデルを説明する。ここで、リアルオプション理論が貸出債権にどのように応用できるかを示す。4節では、2銀行が貸出を行っている状況に上記モデルを拡張し、事業が悪化した場合の回収競争がどのようなメカニズムで生じるか、それぞれの銀行の最適戦略はどのようなものかを考察する。5節では、その結果として生じるゲームの均衡がメイン寄せ現象を説明すること、メイン寄せリスクを考慮したうえでの貸出債権評価が可能なことを示す。6節は、比較静学分析から得られたインプリケーションを述べる。7節は、本稿のまとめである。

2. 先行研究と本稿のアプローチ

(1) 先行研究

大企業のデフォルトが稀であった時代には、メインバンクが企業の経営危機時に救済機能を担うというメインバンク・システムの一機能が維持可能であり、銀行経営に深刻な問題を引き起こすことはなかった。ところが、不良債権問題が深刻化し

た1990年代後半以降、救済のための追加融資、いわゆる追い貸しや、貸出を回収する他行の肩代わり融資、いわゆる「メイン寄せ」が生じた²。こうした大口の信用コストの発生は日本の銀行システム危機の一因となり、追い貸しやメイン寄せに対する関心が高まった。メイン寄せという言葉が現れたのもこの時期である。

こうしたメイン寄せの発生に関しては、マクロ・ミクロの両方の観点から実証研究が行われている。マクロ的な観点からメイン寄せを検証したものとしては、平成15年版の経済財政白書（内閣府〔2003〕第2章3節）が挙げられる。同白書では、政策投資銀行のデータベースを用いて、借入のメインバンク依存度（メインバンク借入額/銀行借入額）および金融機関借入比率（金融機関借入額/有利子負債調達額）を業種別に計測している。1990年代前半の5年平均と後半のそれを比較した結果、いずれの比率も上昇していること、すなわち、企業ファイナンスにおいて金融機関依存度が高まるだけでなく、特にメインバンクへの依存度が上昇したことを明らかにしている。とりわけ、建設、不動産、サービス、卸・小売業でこうした傾向が顕著に観察されている。同白書では、こうしたデータをもとに「いわゆるメイン寄せが進展している」と指摘している。

個別事例をもとにミクロ的な観点からメイン寄せを検証したものとしては、福田・鯉淵〔2004, 2006〕を挙げることができる。これらの論文では、1999年3月期から2005年3月期にかけて行われた債権放棄39事例について、メインバンクの負担率を有価証券報告書やディスクロージャー誌、新聞報道から推計しており、メインバンクの貸出額のシェアが多いほど負担率が高くなっていること、メインバンクは貸出シェア以上の債権放棄を負担していることの2点を指摘している。このうち、前者の論文では、1995年3月期と債権放棄直前の貸出シェアを比較しており、業績が悪化する過程でメインバンクの貸出シェアが高まったことを確認している³。

さらに、個別企業のデータをもとにメイン寄せを実証分析したものとして小幡・坂井〔2005〕を挙げるができる⁴。同論文では、1991年から2002年にかけて経

2 メイン寄せがゼロサムゲームだとすると、銀行業全体でみた場合の損失額は不変であるが、与信ポートフォリオの分散投資の度合いが低下する（集中リスクが高まる）。このため、メイン寄せを受けた銀行の損失額分布の分散が拡大してしまう。なお、メインバンクに貸出が集中することによって、債権者間における企業再建の調整が行いやすくなるというメリットが生じる可能性があることが指摘されている。こうしたメリットを求めて互恵的にメイン寄せが双方向に行われたとしたら、これは一種の協力ゲームに相当する。福田・鯉淵〔2006〕は、企業を存続させた場合の現在価値が負債額ほど大きくはないが清算価値よりは大きい場合について、メインバンクがより多額の債権放棄に応じる協力ゲーム解が得られることを示している。

3 メインバンクの貸出シェアの上昇は大手行の合併によって生じた部分があるが、論文は、ほとんどの債権放棄事例において、合併行のシェアを合算した以上に貸出シェアの上昇が観察されたと指摘しており、これをもっていわゆる「メイン寄せ」が生じていた可能性を示唆している。

4 同論文はもともと「追い貸し」を実証分析した論文である。同論文は、「追い貸し」の先行研究において、ROA等の指標と貸出増減の負相関をもって、効率性の低い企業が追加融資が行われたと判断されている点を批判している。1990年代後半においては、ROAが高い企業が財務リストラで借入を圧縮した可能性か、安全企業（低成長だが低リスク）への融資を増加させる合理性が存在していたことを挙げ、別のアプローチが必要なことを訴えている。同論文では、「通常の状態であれば（銀行が）融資を行わないような企業」を特定するため、メインバンク以外の金融機関の3分の2以上が融資を減らした場合に限定して分析を行っている。このため、結果的にはメイン寄せの実証分析となっている。

営危機に陥った企業のうち⁵、メインバンク（貸出額が最大の銀行）以外の多くの金融機関が貸出を減らした468社を対象にして、メインバンクが追い貸しを行ったかどうかを検証している。具体的には、追加貸出の有無を被説明変数とし、メインバンクの貸出比率⁶や銀行と企業の系列ダミー、メインバンクの自己資本比率などを説明変数としてプロビット分析を行っている。この結果、メインバンクの貸出比率は正で有意に働く一方、系列ダミーは有意でないとの結果が得られ、追加貸出を行うかどうかは、企業系列関係やメインバンクの財務状況が重要なのではなく、貸出額の多寡が決め手になると結論付けている。同論文は、この結果に対する解釈として「メインバンクは、融資先に倒産されると元も子もないので、融資を引き揚げるより追加融資を行う妥当性を持つ一方、多数の影響力を持たない銀行は、融資を引き揚げやすく、いわゆるメイン寄せが起きている」ことを挙げているが、そのメカニズムをモデル化するには至っていない。本稿では、こうした結果と統合的な理論モデルの構築を試みる。

その他、実証分析ではないが、実務家の観点からもメイン寄せの発生が指摘されている。例えば、企業の私的整理円滑化のための環境整備を論じた経済産業省 [2006] では、債権放棄におけるプロラタ原則（融資額に応じた債権放棄）適用の困難さが、私的整理を通じた企業再建の障害となっている点を挙げている。債権放棄における銀行間の調整ではメインバンクが重要な役割を果たすが、プロラタ原則の合意を取り付けるのは容易ではなく、実際には、メインバンクが企業支援・再建において中心的な役割を果たすべきという慣習のもとでメイン寄せが生じていることを指摘している。経済産業省が行った「事業再生に関するアンケート調査」（経済産業省 [2005]）でも、債権者間の調整を困難にさせる理由としてメイン寄せ慣習の存在が最も多く挙げられている。

また、銀行間の債権放棄交渉をゲーム理論の視点から指摘した事例もある。上記の経済産業省 [2006] は、銀行間交渉を「チキンゲーム」にたとえている。すなわち、債権調整が合意に至らなければ、時間を浪費したうえで最終的に法的整理に移行し事業価値を毀損してしまう可能性があるが、非メインバンクは自発的にプロラタ原則に応じるインセンティブがなく、メインバンクが貸出比率以上の債権放棄負担に応じることに期待する。メインバンクは、こうした負担に応じる合理性がなければ、非メインバンクとの交渉のチキンゲームを続け、何らかの合理性があれば⁷、高い債権放棄率やメイン寄せなどに応じることになる。産業再生機構のCOOであった富山和彦氏は、上記のような債権放棄の調整が進まない事情を個々のプレーヤー

5 上場または公開企業を対象としている。経営危機に陥った企業の定義は、「売上⁵の5%以上減少が2年連続しており、そのどちらかの年において営業赤字または経常赤字に陥った企業」としている。

6 メインバンク貸出比率の定義は、①当該企業向けメインバンク貸出額/当該企業負債総額、②当該企業向けメインバンク貸出額/メインバンク貸出総額、③当該企業向けメインバンク貸出額/メインバンク経常収益の3つを採用しているが、いずれの変数に対しても同様の分析結果が得られている。

7 例えば、法的整理による事業価値の毀損が大きい場合、債権放棄時点での負担は増えても再建支援を行うほうがその後の損失額を抑制できるなど。

における先送りの合理性として説明し、その結果として全体最適化が達成されないことを指摘している（総合研究開発機構 [2006]）。

(2) 本研究のアプローチ

上述のような債権放棄に関するゲーム理論的視点は、貸出の回収や他行が回収した場合の選択（自行も貸出を回収し企業は清算、もしくは企業を存続させるために肩代わり貸出）としてメイン寄せ現象の説明にも応用できる。また、メインバンクが肩代わりするのであれば自行は回収したいが、肩代わりに応じない場合には清算に伴う損失を回避するために貸出を継続するというチキンゲーム的状况を説明できる。補論1にその一例を示した。この事例では、チキンゲームやメイン寄せの発生条件を企業のデフォルト確率や2銀行間の貸出額の割合で記述している。

もっとも、1回限りのゲームでは、チキンゲームに陥った後の展開を記述することができない。その後の企業の業績悪化から、いずれかの時点で非メインバンクは貸出を回収する可能性があり、その可能性を踏まえてメインバンクが、現在、あるいは回収が行われた時点でどのような対応を採るかを多期間モデルで考察する必要がある。

本稿は、企業価値を決定する要因を確率過程として与え、貸出回収の最適タイミングを連続時間モデルで考察する。そのうえで、貸出額の相違に起因する①最適タイミングの相違と②肩代わりする場合の利得の相違に注目し、これらに基づいてメイン寄せの動学的ゲーム状況を記述することを試みている。

貸出回収の最適タイミングの決定にはリアルオプション理論を用いている。これは、企業価値が確率変動する場合、将来の回復の可能性に賭けて貸出を継続する、もしくは肩代わり貸出を行ってでも企業支援を行うことに合理性が存在するためである。また、リアルオプション理論を用いることで、支援継続の限界の線引きを定量的に示すことが可能となる。逆に、支援を継続するという銀行の判断を正当化するためには、企業価値の回復可能性（確率過程のパラメータ）はどのようなものでなければならないかを逆算することも可能となる。

しかし、通常のリアルオプション理論だけでは、回収の先送りや肩代わり貸出を説明できても、回収の前倒し（回収競争）を説明することができない。本稿のモデルでは、個々の銀行にとっての回収の最適タイミングを導出し、互いの銀行が相手の最適戦略を知っていると想定したうえで、2つの銀行間で生じるゲーム的状况を考え、これにより回収の前倒し現象を表現可能とした。

こうしたアプローチは、近年のリアルオプションの応用研究で多くみられる。Grenadier [1996] は、不動産市場において、競合企業の早期参入をおそれるために開発投資のタイミングを前倒しさせ、結果として不況にもかかわらず開発競争が起こりうるメカニズムを説明している。また Weeds [2002] は、企業の R&D 投資において、競合企業との競争により投資が早まることを示し、協調して投資をした場合と

の比較を行っている。その他、多数の研究が行われているが、いずれも、投資に不可逆性がある場合にはリターンの不確実性が投資を先送りさせる一方で、市場シェアや特許の獲得等、先行投資に戦略的優位性が存在する場合には、逆に投資を前倒しさせる誘引が働くため、両者のバランスで投資タイミングが決定されるという点が特徴となっている。

本稿では、貸出額の相違という最も基本的かつ損失に確実に関係してくる要因に焦点を絞り込んで、メイン寄せの発生を理論的に説明しているが、メイン寄せの発生原因には、貸出額以外にもさまざまな候補が考えられる。メイン・非メインバンクの非対称性に起因するものとしては、情報の非対称性や貸出業務以外の収益の相違が挙げられる。一般にメインバンクのほうが企業情報を多く有しており、デフォルトリスクや将来の成長に関する判断が的確に行われやすいと考えられる。このとき、情報の少ない非メインバンクには、出し抜かれるリスクを回避するため貸出回収を早期化するインセンティブが生じうる。また、メインバンクは、貸出業務以外にも決済サービスや従業員の給与振込み口座提供などさまざまな収益源を有している。このため、非メインバンクに比べ企業存続をより強く要望し、肩代わり貸出に応じやすくなる誘引を生み出しているとも考えられる。さらには、メインバンクが企業支援を諦めて清算・回収を行った場合、銀行のレピュテーションが低下し、他企業への貸出業務などに悪影響を及ぼすことも考えられなくはない。

3. 基本モデル

(1) モデル設定

2つの銀行間のゲームを考察する前に、まず、銀行が1行しか存在しない場合について、企業行動と銀行行動をモデル化する。本節のモデルは、Leland [1994] および、これを拡張した Mella-Barral and Perraudin [1997] (以下、MP モデルと表記) に基づいている。Leland [1994] は、単純化のために株主・企業間にプリンシパル・エージェント問題が存在しない状態、すなわち株主が企業を直接経営する状況を想定し、企業が借入債務を負っているもとの株式価値最適化問題を考えた。株主は倒産オプションを有しており、事業収益の現在価値が将来にわたり借入債務の額面まで回復する見込みがなくなると、企業を存続させて債務を履行し続けるインセンティブがなくなるため、企業を倒産させる。ここで企業の「倒産」とは、いわゆる「法的倒産」のことではなく、利払いのインセンティブがなくなった株主が、企業の所有権譲渡と引換えに、銀行に債務免除等を求めることと定義する⁸。このように、株主は

⁸ 経営権の銀行への譲渡という仮定に関しては、経営難に陥った企業に対して、銀行から経営者が送り込まれたり、債務の資本化 (Debt Equity Swap) が行われることを想定すれば、それほど不自然な仮定ではないと考えられる。

最適なタイミングで企業を倒産させるオプションを加味して株式価値最適化を計っていると想定すると、倒産オプションは、満期がないアメリカン・プット・オプションとして表現することができる。

これに対し、MPモデルは、企業の倒産後、所有者となった銀行が事業を続け、貸出金利を含めて事業収益全体を直接回収することを想定し、このとき銀行にとっての貸出債権価値が倒産発生以前の健全な段階でどのように評価されるかを考察した⁹。MPモデルでは、事業収益の現在価値が企業の清算価値より高い限り事業を継続するが、同価値が清算価値以下になり回復の見込みがなくなると企業を清算し、所有財産を売却して回収を計る。したがって、貸出債権価値は清算オプションの行使による回収を加味したものとなっている。また、最適清算タイミングは貸出債権価値の最適化問題から導出される。

以下では、MPモデルの設定を解説し、株主にとっての企業価値（株式価値）と銀行にとっての貸出債権価値を示す。また、企業価値を左右する確率変数（売上高）の変化に対し、これらがどのような関数形状となっているかを図示する。

企業の売上を X_t とし、これが幾何ブラウン運動、

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dz_t, \quad X_0 = x, \quad (1)$$

に従っていると仮定する。ただし、 z_t は標準ブラウン運動を表す。

企業の事業コストを固定値 w とし、各期の事業収益を $X_t - w$ で与える。企業の借入額、すなわち銀行の貸出額を M とし、企業の清算価値を C とする。いずれも固定値とし、清算価値 C は企業の実物資産価値に相当すると考える。また、この実物資産は銀行にとって貸出担保の役割を果たしている。担保カバー率 c ($= C/M$) は 100% より小さく $C \leq M$ であると仮定する¹⁰。株主や銀行の行動を期待値の最適化問題として記述するため、株主や銀行はリスク中立な経済主体と仮定し、売上の確率過程におけるドリフト項の μ はリスク中立測度で測られたものとする。割引率をリスクフリー・レート r で与え、 $r > \mu$ を仮定する¹¹。また、銀行借入金利は b とし、 $b > r$ とする。

株主や銀行は、時刻 t までに得られる X_t に関する情報を用いて事業継続や倒産、清算の意思決定を行う。 X_t に関する情報集合の増大列（フィルトレーション）を \mathcal{F}_t と定義する。この条件下で株式価値や貸出債権価値の最適化問題を考えると、企業の倒産時刻 τ_b や清算時刻 τ_c は \mathcal{F}_t に関する停止時刻として計算される。 \mathcal{F}_t に関す

9 経営交代の前後で企業価値は変化しないと仮定している。実際には、信用不安が一段と高まるため、無形固定資産が劣化したり、事業継続が一段と困難化するため、企業価値は非連続的に低下すると考えられる。あるいは全く逆に、経営再建への期待が高まり企業価値が向上するとも考えられるが、モデルでは単純化のためにこれらの可能性を捨象している。

10 担保カバー率が 100% を超える場合は、銀行に貸倒れリスクが存在しなくなるため考察対象としない。

11 この仮定は、企業の事業収益の現在価値や株価が有限な値となるために必要な条件である。すなわち、 $r > \mu$ ならば、積分 $\int_{(0,\infty)} e^{-rt} (X_0 e^{\mu t}) dt$ は $X_0/(r - \mu)$ に収束するが、 $r \leq \mu$ ならば同積分は発散する。

る「時刻 t より将来の停止時刻」を全体の集合 \mathcal{T}_t と定義する。今、 \mathcal{F}_t に関する条件付期待値を $\mathbb{E}_t(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}_t)$ と表記すると、株主の株式価値最適化問題は、

$$E(X_t) = \max_{\tau_b \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}_t \left(\int_t^{\tau_b} e^{-r(s-t)} (X_s - w - bM) ds \right), \quad (2)$$

と表現される。ここで最適化された株式価値を $E(x)$ と表す。(2) 式は、企業倒産前 ($t < \tau_b$) における利払い後の事業収益を現在価値評価したものである。企業倒産後 ($\tau_b \leq t$) においては、所有権が既に銀行に譲渡されているため、事業収益の動向は株式価値に何ら影響を及ぼさない。

これに対し、銀行にとっての貸出債権価値の最適化問題は、株主の行動を所与としたうえで定義される。株主は銀行の意向にかかわらず倒産時点を選択することができるため、銀行は、(2) 式の解として得られる企業の最適倒産時刻 $\tau_b^* \in \mathcal{T}_t$ を所与として、貸出債権価値の最適化問題、

$$D(X_t) = \max_{\tau_c \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}_t \left(\int_t^{\tau_b^*} e^{-r(s-t)} bM ds + \int_{\tau_b^*}^{\tau_c} e^{-r(s-t)} (X_s - w) ds + e^{-r(\tau_c-t)} C \right), \quad (3)$$

を解き、最適清算時刻 $\tau_c^* \in \mathcal{T}_t$ を算出する。ここで最適化された貸出債権価値を $D(x)$ と表す。

(3) 式の期待値内の各項は、各期間における企業の状態に対応した銀行収入について現在価値を求めたものである。第 1 項は、企業が倒産していない状態 ($t < \tau_b^*$) において每期得られる支払金利 bM の現在価値を表している。第 2 項は、企業倒産から清算までの間 ($\tau_b^* < t < \tau_c$)、銀行が得た事業収益 $X_s - w$ の現在価値を示している。第 3 項は、企業の清算時 ($t = \tau_c$) において実物資産（貸出担保）を売却して清算価値 C を得ることを意味する。

(2) 倒産オプション価値

最適化問題である (2) 式には解析解が存在し、最適化された株式価値 $E(x)$ は、

$$E(x) = \left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{w + bM}{r} \right) + \left(-\frac{x_b}{r - \mu} + \frac{w + bM}{r} \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma, \quad x_b < x, \quad (4)$$

$$x_b = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{w + bM}{r} \right) (r - \mu), \quad (5)$$

と表現できる。導出の詳細は補論 2 に示した。ここで、 γ は (3) 式を解くための特性方程式 $\sigma^2/2 \cdot \gamma(\gamma - 1) + \mu\gamma = r$ の負の根であり、 $\gamma = 1/2 - \mu/\sigma^2 -$

$\sqrt{(\mu/\sigma^2 - 1/2)^2 + 2r/\sigma^2} < 0$ で表される。

(4) 式の第 1 項は、倒産していない状態にある企業から株主が得る事業収益の割引現在価値を表している¹²。現在の売上 x が大きいほど、固定費が低いほど、借入金利が低いほど、借入額が少ないほど、売上の確率過程のドリフト項 μ が大きいほど、この価値は増大する。期待値の最適化問題ゆえに、確率過程のボラティリティ σ は関係していない。一方、第 2 項は、株主が企業を「倒産もしくは存続させる決定権」を保有していることによるオプション価値を表している（以下、これを倒産オプション価値と呼ぶ）。第 1 項と異なり、 σ の増加関数となっている¹³。これは、将来売上の変動ボラティリティが大きいほど、倒産オプション価値が高まることを示している。

倒産オプション価値の発生源を考察するために、倒産閾値 x_b の意味を考えてみる。(5) 式の x_b は株式価値が非正となる x の閾値であり、売上が x_b を下回った場合に株主は企業を倒産させることが最適となる。負値 γ と $r > \mu$ の関係より、(4) 式第 1 項をゼロとする x^* は x_b より大きくなる。また、今期の収益がゼロとなる x^{**} は、 x^* より更に大きい。これは、事業コストや支払金利をカバーできないほど売上が低下し、収益が赤字となった ($x < x^{**}$)、あるいは、将来収益の現在価値すらも負になった ($x < x^*$) としても、倒産を回避し、将来の売上回復に期待することが合理的な場合 ($x_b < x < x^*$) が存在することを意味している。こうした状況では、負値となった第 1 項を第 2 項の倒産オプション価値が補っていることになる。これは、将来、売上回復が果たせず、結局倒産に至ったとしても銀行に譲渡される企業所有権は既に正の価値を失っているので、回復に賭けて事業を継続するほうが望ましいことを示している。

(4) 式の第 2 項に含まれる $(x/x_b)^\gamma$ は、 x が x_b に到達する確率、すなわち企業が倒産する確率¹⁴を表しており、 $x \rightarrow \infty$ のとき $(x/x_b)^\gamma \rightarrow 0$ 、 $x = x_b$ のとき $(x/x_b)^\gamma = 1$ となる。したがって、株式価値 $E(x)$ は、 $x \rightarrow \infty$ のとき第 1 項が示す事業収益現在価値に近づき、 $x = x_b$ となる倒産時にはゼロとなる。なお、 $E(x)$ は、 $x = x_b$ でゼロに等しくなるだけでなく、滑らかにゼロに近づく、すなわち微分値 $E'(x)$ が $x = x_b$ でゼロとなるような制約のもとで解かれている。その様子を図 1 に示している。また、制約条件や解法の詳細を補論 2 に示している。

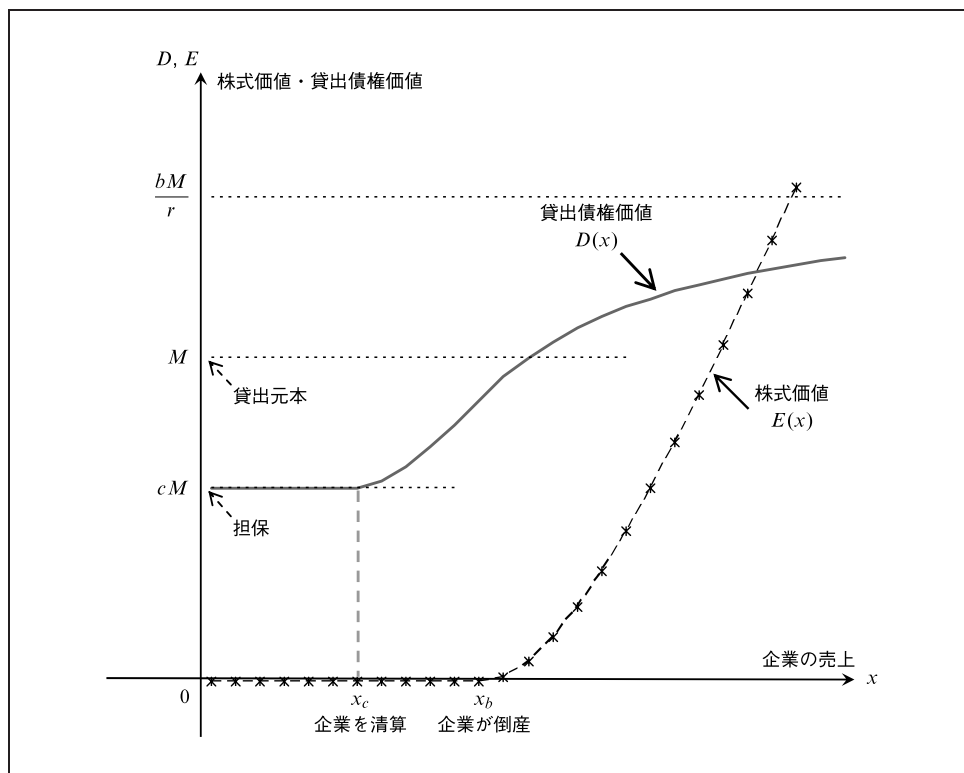
こうした株主の倒産オプションの活用は、銀行の貸出債権価値を毀損する方向に働く。これに対し、銀行の最適戦略がどのようなものかを、貸出債権価値の最適化問

12 $w + bM$ の割引率が r であるのに対し x の割引率は $r - \mu$ となっている。これは、 x が (1) 式に従って確率的に変動するためである。

13 (4) 式を σ で微分すると $dE/d\sigma = \{(\partial E/\partial x_b)(\partial x_b/\partial \gamma) + \partial E/\partial \gamma\} \partial \gamma/\partial \sigma = (\partial E/\partial \gamma)(\partial \gamma/\partial \sigma)$ となる ($\partial E/\partial x_b = 0$ に注意)。ここで、 $\partial E/\partial \gamma = \{-x_b/(r - \mu) + (w + bM)/r\}(x/x_b)^\gamma \log(x/x_b) > 0$ 、 $(\partial \gamma/\partial \sigma) > 0$ であることから $dE/d\sigma > 0$ が導かれる。

14 厳密には、各将来時点 $[t, t + dt)$ における倒産確率 $\mathbb{P}(t \leq \tau_b < t + dt)$ を現在価値に割引いた $\int_{[0, \infty)} e^{-rt} \mathbb{P}(t \leq \tau_b < t + dt)$ に等しい。これは、 $\int_{[0, \infty)} e^{-rt} \mathbb{P}(t \leq \tau_b < t + dt) = \mathbb{E}(\exp(-r\tau_b)) = (x/x_b)^\gamma$ の手順で導出される。詳細は Dixit and Pindyck [1994] を参照。

図1 株式価値・貸出債権価値（単一銀行のケース）



題(3)式の解より考察する。株主の倒産オプションの行使時刻 x_b が(5)式で与えられたとき、最適清算時刻に相当する x_c の値、および、最適化された貸出債権価値は、

$$D(x) = \frac{bM}{r} + \left(D|_{x \leq x_b}(x_b) - \frac{bM}{r} \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma, \quad x_b < x, \quad (6)$$

ここで、

$$D|_{x \leq x_b}(x) = \frac{x}{r - \mu} - \frac{w}{r} + \left(cM - \frac{x_c}{r - \mu} + \frac{w}{r} \right) \left(\frac{x}{x_c} \right)^\gamma, \quad (7)$$

$$x_c = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(cM + \frac{w}{r} \right) (r - \mu), \quad (8)$$

と求められる。導出の詳細は、補論3を参照。

(6)式の第1項は、銀行が受け取る支払金利の現在価値を表しており、第2項は、株主が企業を倒産させ、価値が劣化した企業を継承させられることによる「負のオプション価値」を表している。 $D(x)$ は、 $x \rightarrow \infty$ のとき第1項に近づき、 x が低下して x_b に近づくにつれ第2項の負値が増大することで全体として減少し、 $x = x_b$ では(7)式が示す「倒産時の貸出債権価値」 $D|_{x \leq x_b}(x)$ に等しくなる。

倒産時の貸出債権価値 (7) 式を順にみていく。第 1 項と第 2 項は、事業継続によって得られる事業収益の現在価値を示している。ただし、支払金利が控除された (4) 式第 1 項と比べると、事業コストを除く全収益が銀行に所属している点が異なる。第 3 項は、銀行が企業を清算する権利を保有していることに伴う「正のオプション価値」を表している。これは、清算時の回収額 $C (= cM)$ から清算によって失う将来の事業収益価値を差し引いたものに、清算確率に相当する $(x/x_c)^{\gamma}$ を乗じた式となっている。 $D|_{x \leq x_b}(x)$ は、 x が x_c に近づくにつれて減少し、 $x = x_c$ 時点で清算価値 C に滑らかに収束する。この条件は $D'(x_c) = 0$ として最適化問題の制約条件として課せられている。

(6) 式で表される「負のオプション価値」の中には、(7) 式で表される「正のオプション価値」が含まれる入れ子構造となっている。負のオプションは $x_b < x$ の領域で考察されるが、内包される正のオプションは、 $x < x_b$ の領域で算出される点に注意が必要である。また、株主の倒産選択時刻と銀行の清算選択時刻の前後関係は、担保カバー率 c に依存する。これが 100% 未満である場合、 $b > r$ という条件から $x_c < x_b$ という関係が導出される。したがって、 x が連続的に変化する限り、株主のほうが先に倒産アクションを起こすことになる。また、清算価値 C が低いほど、(7) 式第 3 項が示す清算のオプション価値は減少し、また、清算閾値 x_c が低下するため清算が行われにくくなり、赤字下での事業継続が長期化しやすくなる。

図 1 は、株式価値、貸出債権価値の関係を示している。いずれも現在の売上 x の関数として表現され、減少関数であること、倒産閾値でゼロに対して、清算閾値で清算価値に対して滑らかに収束していること、貸出債権価値は無限期間の支払金利の現在価値が上限となること、清算価値が元本を下回る限り、倒産選択が清算選択より早期に行われることを示している。

4. 2 銀行間のゲーム

本節では、2つの銀行が企業に貸出を行っている場合を考える。前節では、銀行の貸出回収は企業の清算を意味した。これに対し、2つの銀行が企業に貸出を行う場合は、一方が貸出を回収しても他方が肩代わりをすれば、企業は事業を継続できる。したがって、2つの銀行間で貸出の回収を巡るゲームを展開することが可能となる。その準備として、先行回収する立場になった場合、肩代わりする立場になった場合、それぞれについて貸出債権価値の最適化問題とその解を導出する。本節では、自行がどちらの立場になるかを所与としており、ここでの考察結果は、5 節で銀行間ゲームの均衡を導出するのに用いられる。

(1) モデルの設定

3節と同様に企業の倒産は株主によって決定される。A行とB行の2つの銀行が貸出を行っており、いずれかの銀行が貸出を回収した場合、もう片方の銀行は、企業を清算して回収する、もしくは、事業を継続するために肩代わりをして追加貸出を行うと想定する。2行間での協調行動は行われず、先行する貸出回収は他行への事前相談なしに行われるとする。2行の貸出額を M_A 、 M_B ($M_A + M_B = M$)、貸出シェアを m_A 、 m_B とし、貸出金利 b は両行とも同じとする。両行の担保カバー率は100%未満であればよく、異なっても構わない¹⁵。

以上の設定のもとで、①先に貸出を回収する場合、②肩代わりの追加貸出を行う場合について最適化問題を考察した。一般性を失わないよう貸出額の多寡に関する想定は置かず、上記2つのケースについてそれぞれ最適化問題の解を導出し、そのもとで貸出額の相違が銀行の戦略にもたらす影響について検証するという手順を踏む。以下では、ゲーム論的リアルオプションの先行研究での慣行に沿って、先に回収する銀行Lをリーダー銀行、肩代わりする銀行Fをフォロアー銀行と呼ぶ。

株主の株式価値最適化問題は前節と同じであり、その最適倒産時刻 τ_b^* のもとでリーダー銀行の最適化問題を考える。貸出債権価値を $D_i^L(x)$ ($i = A$ 行, B 行) とし、貸出を回収する時刻を $\tau_m \in \mathcal{T}_i$ とする。このとき、リーダー銀行の最適化問題は、

$$D_i^L(X_t) = \max_{\tau_m \in \mathcal{T}_i} \mathbb{E}_t \left(\int_t^{\tau_b^*} e^{-r(s-t)} m_i b M ds + \int_{\tau_b^*}^{\tau_m} e^{-r(s-t)} m_i (X_s - w) ds + e^{-r(\tau_m-t)} m_i M \right), \quad (9)$$

と表現される。(9)式の期待値内の第1項は企業が倒産する以前 ($t < \tau_b^*$) の支払金利の現在価値を、第2項は倒産から貸出回収するまでの期間 ($\tau_b^* \leq t < \tau_m$) の事業収益の現在価値を表している。後者については、企業の所有権が貸出シェアに応じて銀行間で按分され、事業収益についても同様な扱いがなされることを想定している。倒産以前に回収が生じる場合は、第1項の積分区間が t から τ_b^* までとなり、第2項がなくなる。後述するように、リーダー銀行が必ず先に回収するという条件のもとでは、回収が倒産より早い時点で生じることはない。最後の第3項は、リーダー銀行が $t = \tau_m$ 時点で貸出全額 $m_i M$ を回収することを想定している。

15 両行の担保カバー率を非対称に設定してもゲームの均衡には影響を及ぼさない。本稿のモデル設定では、両行がどのような行動を選択しても、各行の貸出回収額が各行の担保カバー率に無関係となるためである。すなわち、①先行して貸出を回収した場合は、相手行が肩代わりする（後述するように同時回収で清算という均衡解は連続的なモデルゆえに存在しない）ため、担保カバー率にかかわらず貸出全額が回収され、②肩代わり後に企業を清算して貸出を回収した場合は、企業全体の清算価値が回収されるためである。後者は、貸出全額 M に対する担保カバー率の水準は、ゲームの均衡に影響することを意味している。この点は、6節の比較静学分析で確認する。

フォロワー銀行の最適化問題は、リーダー銀行の最適回収時点 τ_m^* を所与としたもとで、

$$D_j^F(X_t) = \max_{\tau_c \in \mathcal{T}} \mathbb{E}_t \left(\int_t^{\tau_b^*} e^{-r(s-t)} m_j b M ds + \int_{\tau_b^*}^{\tau_m^*} e^{-r(s-t)} m_j (X_s - w) ds - e^{-r(\tau_m^* - t)} m_i M + \int_{\tau_m^*}^{\tau_c} e^{-r(s-t)} (X_s - w) ds + e^{-r(\tau_c - t)} C \right), \quad (10)$$

により与えられる。フォロワー銀行は τ_m^* において貸出の肩代わりを行った後、最適な時刻で企業の清算をする。その時刻は (10) 式の最適化問題の解として得られる。

(10) 式の期待値内の第 1 項は、企業が倒産する以前 ($t < \tau_b^*$) の支払金利の現在価値、第 2 項は、倒産から肩代わりするまでの間 ($\tau_b^* \leq t < \tau_m^*$) の按分後事業収益の現在価値である。第 3 項は、時刻 τ_m^* においてリーダー銀行の貸出額を肩代わりすることを示している。第 4 項は、その後、企業を清算するまでの間 ($\tau_m^* < t < \tau_c$) に得た事業収益全額の現在価値である。第 5 項は、時刻 τ_c で企業を清算したときの回収額 (清算価値 C) の現在価値である。

この最適化問題を解くために (10) 式の第 3 項を以下のように変形しておく。

$$\begin{aligned} -e^{-r(\tau_m^* - t)} m_i M &= - \int_{\tau_m^*}^{\infty} e^{-r(s-t)} r m_i M ds \\ &= - \int_{\tau_m^*}^{\tau_c} e^{-r(s-t)} r m_i M ds - e^{-r(\tau_c - t)} m_i M. \end{aligned} \quad (11)$$

この式変形の意味は以下のとおりである。元の最適化問題では、フォロワー銀行は時刻 τ_m^* において自己資金で肩代わり貸出を調達することを想定している。一方、(11) 式では、 $\tau_m^* \leq t < \tau_c$ の期間において肩代わりに必要となる資金をリスクフリー・レートで調達し、清算時点で返済すると想定している。自己資金を保有する機会費用はリスクフリー・レートと考えられるため、両者の現在価値は同一となる。これを用いて、最適化問題 (10) 式は

$$D_j^F(X_t) = \max_{\tau_c \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}_t \left(\int_t^{\tau_b^*} e^{-r(s-t)} m_j b M ds + \int_{\tau_b^*}^{\tau_m^*} e^{-r(s-t)} m_j (X_s - w) ds + \int_{\tau_m^*}^{\tau_c} e^{-r(s-t)} (X_s - w - r m_i M) ds + e^{-r(\tau_c - t)} (C - m_i M) \right), \quad (12)$$

と再定義される。なお、銀行の資金調達に対してデフォルト・リスク等を含めたより高い金利が適用される場合についても、以下に示す本稿の議論は本質を失うことなく拡張可能である。

(2) 貸出債権価値の導出

最適化問題の解として得られたリーダー銀行の貸出債権価値 $D_i^L(x)$ は、

$$D_i^L(x) = \frac{m_i b M}{r} + \left(D_i^L|_{x \leq x_b}(x_b) - \frac{m_i b M}{r} \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma, \quad x_b < x, \quad (13)$$

ここで、

$$D_i^L|_{x \leq x_b}(x) = m_i \left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{w}{r} \right) + m_i \left(M - \frac{x_m}{r - \mu} + \frac{w}{r} \right) \left(\frac{x}{x_m} \right)^\gamma, \quad (14)$$

$$x_m = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(M + \frac{w}{r} \right) (r - \mu), \quad (15)$$

と表現される。解析解の導出方法は補論4に示した。

(13)式は、倒産前の貸出債権価値であり、第1項が支払金利の現在価値に、第2項が株主の倒産オプション行使に伴う「負のオプション価値」に相当する。この点は、単一銀行が貸出を行う場合の(6)式と同じである。もっとも、第2項に含まれる「倒産後の価値 $D_i^L|_{x \leq x_b}(x)$ 」がより複雑となる。(14)式において、第1項は企業収益の現在価値を、第2項が、リーダー銀行がフォロワー銀行より先に貸出を回収することの「正のオプション価値」を表している。この価値は、最適回収時刻が他行より早いことに伴って発生している。

この正のオプション価値は、①銀行全体の貸出額 M から、リーダー銀行の回収閾値 x_m における事業収益価値を差し引き、リーダー銀行の貸出シェアを乗じた部分と、②回収が行われる確率 $(x/x_m)^\gamma$ の部分から構成される。①は、リーダー銀行が貸出回収により得ることができる価値を意味するため、これに回収を行う確率を掛けたものは、リーダー銀行の回収オプション価値と解釈できる。なお、(15)式に示された回収閾値の x_m は、リーダー銀行の貸出額に依存しない。これは、リーダー銀行の貸出回収判断は、①で述べた「銀行全体の貸出額」と「回収時点の事業収益価値」の比較に基づいているためである。両者に貸出シェアを乗じて比較しても、その判断に変化はなく、したがってリーダー銀行の貸出額に依存しないことがわかる。

x が x_m に近づくとオプション価値は増加し、 $x = x_m$ で最大値に至ったところで回収オプションが行使される。このとき、倒産後の貸出債権価値 $D_i^L|_{x \leq x_b}(x)$ は、リーダー銀行の貸出額となることが(14)式から確認される。また、同貸出額への収束は、最適化問題の解の導出に当たって課せられた制約条件 $D_i^L|_{x \leq x_b}(x_m) = 0$ により、滑らかなものとなる。

(5)式の x_b と(15)式の x_m を比較すると、 $b > r$ という条件より、 $x_b > x_m$ が必ず成立することがわかる。すなわち、リーダー銀行が貸出を回収するのは企業倒産後であり、リーダー銀行の貸出回収とこれに即時追随したフォロワー銀行の回収が、企業を倒産即清算に至らせることはない。

図2 リーダー銀行の貸出債権価値

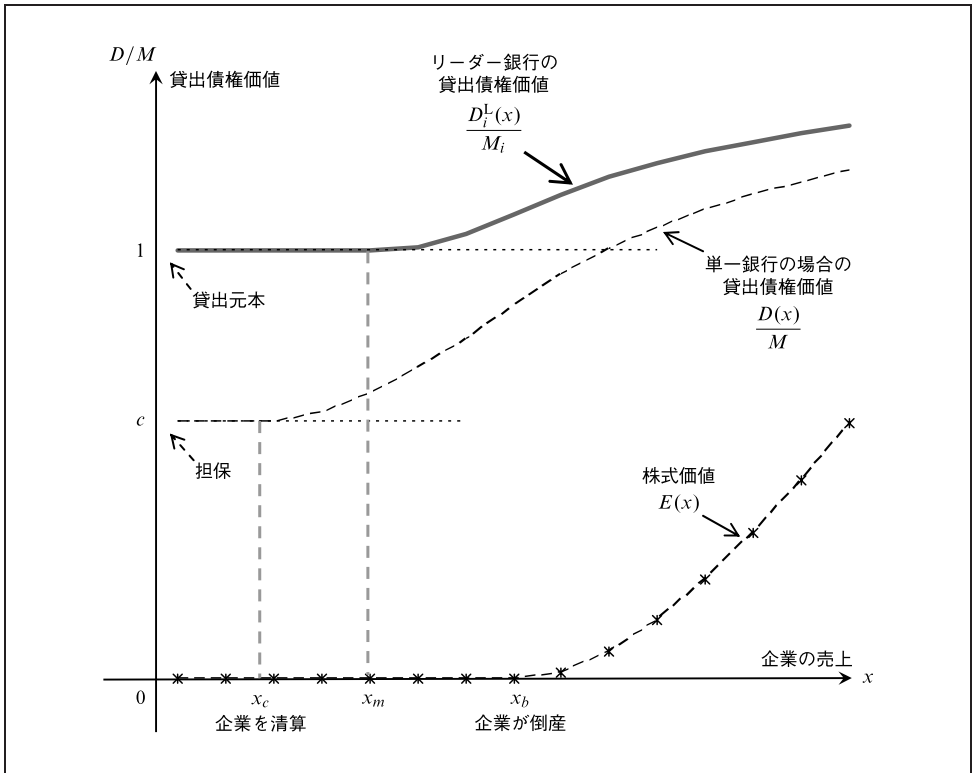


図2は、リーダー銀行にとっての貸出債権価値が、現在の売上 x に対応してどう変化するかを示している。債権価値は貸出額で基準化して表示している。まず、モデル想定により、リーダー銀行にとっての債権価値は1以下にはならず、回収閾値 x_m で滑らかに1に向かって接続している。 x が大きいほど、将来の支払総額が増加するため、債権価値は増大し、(13)式第1項（倒産しない場合の支払金利の現在価値）を M で基準化した値に近づいていく。

株主に倒産オプションを行使されるため、リーダー銀行の貸出債権価値は毀損するが、フォロワー銀行に対しては回収オプションを有している。それゆえ、(13)式において回収オプション価値を内包するかたちで表現された倒産オプションの負の価値は、単一銀行の場合の(6)式より小さくなる。図2には単一銀行のケースを点線で示したが、リーダー銀行の貸出債権価値曲線は回収オプション価値が加わっている分だけ上方に位置している。このオプション価値が x_m に近づくほど増大することは図2からも確認される。

次に、フォロワー銀行の貸出債権価値 $D_j^F(x)$ を考察する。倒産閾値 x_b と貸出回収閾値 x_m が与えられたもとで、最適化された債権価値は、

$$D_j^F(x) = \frac{m_j b M}{r} + \left(D_j^F|_{x \leq x_b}(x_b) - \frac{m_j b M}{r} \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma, \quad x_b < x, \quad (16)$$

ここで、

$$D_j^F|_{x \leq x_b} = m_j \left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{w}{r} \right) + \left(D_j^F|_{x \leq x_m}(x_m) - m_j \left(\frac{x_m}{r - \mu} - \frac{w}{r} \right) \right) \left(\frac{x}{x_m} \right)^\gamma, \quad (17)$$

$$D_j^F|_{x \leq x_m} = \left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{w}{r} - m_i M \right) + \left(cM - \frac{x_c}{r - \mu} + \frac{w}{r} \right) \left(\frac{x}{x_c} \right)^\gamma, \quad (18)$$

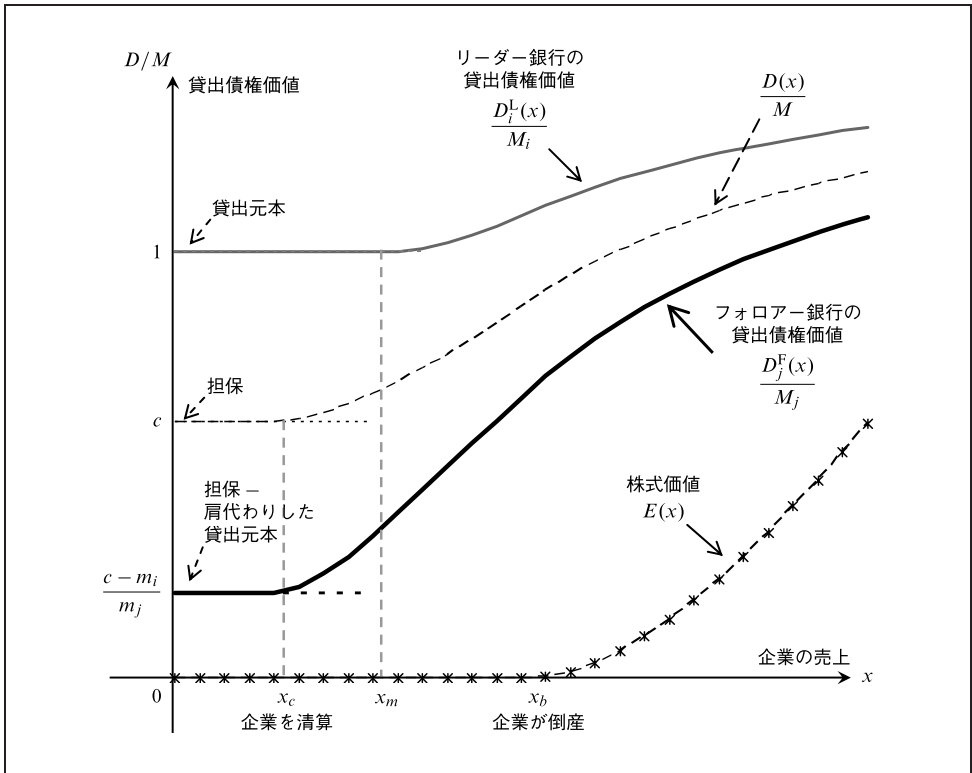
と求められる。解の導出は補論5に示した。

(16)式は、リーダー銀行の場合と類似しているが、倒産後の貸出債権価値 $D_j^F|_{x \leq x_b}(x)$ の内容が異なる。(17)式の第2項は、リーダー銀行に先行回収されることの「負のオプション価値」を表している。その中には、肩代わり後の貸出債権価値 $D_j^F|_{x \leq x_m}(x)$ が含まれており、内容を(18)式に示した。第1項は、事業収益の現在価値からリーダー銀行の貸出額を引いたものであり、先行回収された場合に事業収益価値の一部がリーダー銀行によって持ち出されることを意味している。第2項は、フォロワー銀行が企業を清算する権利を保有していることによる清算オプション価値である。清算価値 cM から清算閾値 x_c で評価した事業収益価値を差し引いたものに、清算確率 $(x/x_c)^\gamma$ を乗じた式で表現される。

清算価値が貸出額未満（担保カバー率が100%未満）という仮定から、 $x_c \leq x_m$ が導ける。これは、清算時刻が回収時刻より早くはならないことを意味している。担保カバー率が100%未満であるため、フォロワー銀行はリーダー銀行が回収した時点で肩代わりをする合理性があり、 x_c と x_m の距離が大きいほど、肩代わりした後、事業を継続する状態が続きやすくなる。

図3にフォロワー銀行の貸出債権価値を太線で示した。リーダー銀行に回収オプションを行使される「負のオプション価値」を持つため、単一銀行貸出の場合よりさらに下方にシフトしていることがわかる。このようにリーダー銀行とフォロワー銀行間で利得の格差が大きく、特に売上が低下した局面で著しく拡大するため、いずれの銀行も、フォロワー銀行になるのを回避したいと考えるであろう。次節では、こうしたゲーム的状况の帰結がどのようなものとなるかを考察する。

図3 フォロアー銀行の貸出債権価値



5. メイン寄せの均衡分析

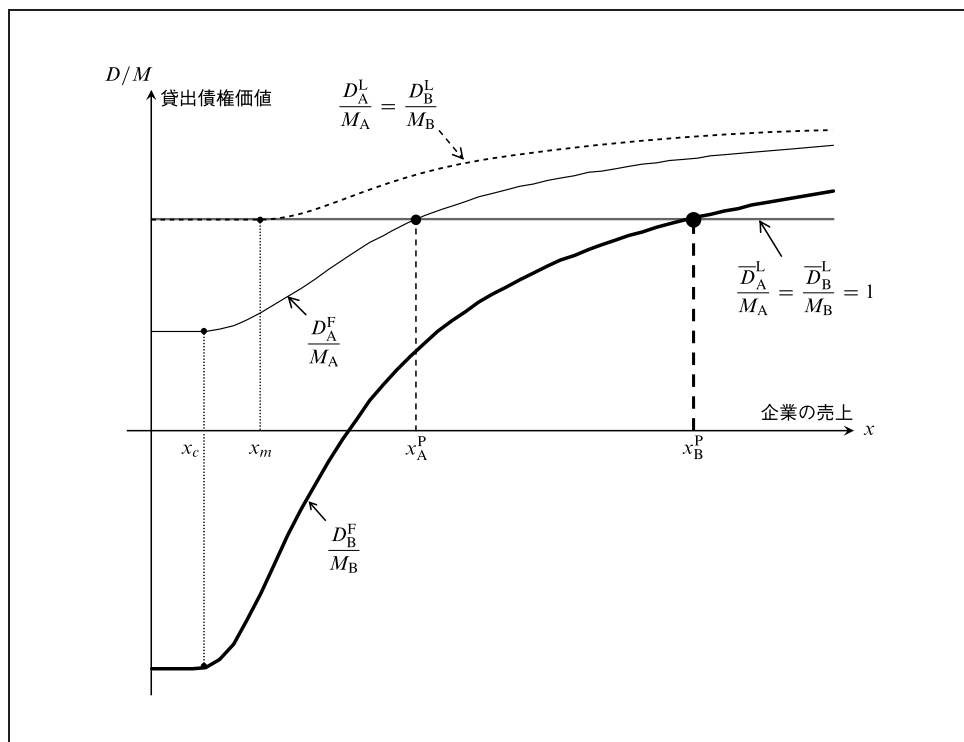
前節では、リーダー銀行になるかフォロアー銀行になるかを所与として貸出債権価値の最適化行動の結果をモデルにより表現した。本節では、これを利得関数としてゲームの均衡を考えることで、「メイン寄せ」現象を説明する¹⁶。

(1) 非対称な銀行間のゲーム

まず、貸出額が異なる場合を検討する。A銀行のほうがB銀行より貸出額が多いと仮定し、A銀行をメインバンク、B銀行を非メインバンクと呼ぶ。ここで、メイン・非メインの区別は貸出額の多寡のみによるものとする。このとき、フォロアー銀行になった場合の利得を出発点に、後方から前方に遡ってゲームの状況を考察することで、均衡解を得ることができる。

¹⁶ 本稿では、貸出額に差がある初期状態がどのような経緯によってもたらされたかは考察しない。初期状態を所与としたうえでのゲームの均衡表現であり、初期状態を均衡として導出することは論考の対象外としている。

図4 貸出シェアと早期回収の関係



まず、各銀行について、フォロアーになった場合の貸出債権価値 $D_A^F(x)$ 、 $D_B^F(x)$ を考える。図4は、メインバンクの貸出シェアを80%、非メインバンクを20%とし、細実線でメインバンクの $D_A^F(x)$ 曲線を、太実線で非メインバンクの $D_B^F(x)$ 曲線を表している。非メインバンクは、フォロアー銀行になった場合に肩代わりする貸出額が大きい分、最終的に清算に至った場合の損失増加が著しい。したがって、回収オプションをメインバンクに行使されうることの負のオプション価値は、 $D_B^F(x)$ 曲線をより大きく下方に押し下げる。この曲線を用いて、非メインバンクにとって最適な回収時刻を考察する。

非メインバンクは、メインバンクに先立って貸出を回収した場合、将来の支払利子の現在価値分を放棄することで貸出全額の回収をすることができる。その場合の利得は、図4における値1の水平線で示される。点 x_B^P より右側の売上領域では、貸出債権価値の曲線が水平線を上回るため、貸出を継続したほうが望ましい。逆に、左方では回収するほうが望ましい。したがって、非メインバンクにとって最適な回収時刻は、一見したところ売上が x_B^P まで低下した時点のように思われる¹⁷。

17 厳密には、同点上では回収と貸出継続は非メインバンクにとって無差別になるため、 x がこれを下回ったときに回収がなされる。

ところが、 $D_B^F(x)$ 曲線は、あくまで非メインバンクがフォロアーになった場合の貸出債権価値であり、メインバンクがリーダーとなることを前提とした行動である。しかし、 $D_A^F(x)$ 曲線からは、 $x_A^P < x < x_B^P$ において、メインバンクはフォロアーとなったとしても貸出を継続することがわかる。したがって、 $x_A^P < x < x_B^P$ における非メインバンクの行動は、メインバンクの貸出継続を既知としたものでなければならない。

そこで、非メインバンクが、上記領域内のある一点 x_0 に達した際に貸出の回収を行うという戦略を考えてみよう。この場合の非メインバンクの貸出債権価値は、① $x < x_0$ では、貸出元本 M_B と一致し（基準化した図4の値1の水平線）、② $x_0 < x$ では、貸出金利の割引現在価値 $b/r \cdot M_B$ に、 x_0 で貸出元本を回収することができる正のオプション価値を加えたものになる¹⁸。第2項のオプション価値は、回収を先延ばしするほど価値が上昇するため、非メインバンクはできる限り小さい値の x_0 で貸出を回収する戦略を採るほうが有利である。したがって、メインバンクが $x_A^P < x < x_B^P$ で貸出を継続するという前提のもとでは、 $x_0 = x_A^P$ が最適となる。

次に、 $x \leq x_A^P$ における非メインバンクの行動を考える。メインバンクの $D_A^F(x)$ 曲線から、メインバンクが貸出を回収してくることがわかるため、非メインバンクは、 x が x_A^P まで低下した際に（厳密にはそれより少しだけ前に）貸出を回収することになる¹⁹。

次に、メインバンクの立場を考察する。 $x > x_A^P$ においては、肩代わりさせられる負のオプションを加味しても、なお $D_A^F(x)$ 曲線は値1の水平線より上方に位置するため、肩代わりをしてでも貸出を継続するほうが望ましい。実際には、非メインバンクも貸出を継続するため、2行融資の状態となる。 $x = x_A^P$ では、非メインバンクは貸出を回収し、メインバンクはこれを肩代わりするため追加貸出を行う。 $x < x_A^P$ ではメインバンクにも回収インセンティブが生じるが、 x が連続的に変化するという前提のもとでは、既に非メインバンクの回収と自行による肩代わりが生じているため、清算価値との比較となる。 $D_A^F(x)$ 曲線が左側で水平になる部分が清算価値となり、これに滑らかに接続する箇所が売上 x でみた清算閾値 x_c となる。したがって、 $x_c < x < x_A^P$ では、肩代わりした状態での貸出継続が、 $x \leq x_c$ では清算が選択される。

以上の議論より、ゲームの均衡として「メイン寄せ」を表現できる。すなわち、メインバンクを貸出額が多い銀行と定義すると、メインバンクに貸出回収のインセンティブが働く限界的な売上閾値（以下、 x^P ）において、メインバンクは、肩代わりをして

18 これは (15) 式および図2の $D_B^L(x)$ とは異なる。 $D_B^L(x)$ は、非メインバンクがどの x であっても貸出を先に回収できると想定しているが、ここでは $x_A^P < x < x_B^P$ という限定された領域内で先に回収できるという条件のもとで貸出債権価値を導出している。

19 厳密には、この領域における非メインバンクの選択肢は、①メインバンクより少しだけ先に貸出を回収する、②フォロアーになって貸出を続けるの2つだけでなく、脚注15で述べたように、③メインバンクが貸出回収すると同時に、企業を清算し担保権を実行するという選択肢がある。しかし、この領域の最初の到達点である $x = x_A$ において、明らかに①と②の価値（非メインバンクの貸出額）が③の価値（非メインバンクの担保価値）を上回るため、選択肢から外して議論しても問題ない。

も貸出を続けることが最適となり、非メインバンクは、金利収入を失っても先に回収したほうが最適となる。したがって、非メインバンクは貸出を回収することが、メインバンクはそれを肩代わりすることがゲームの均衡となる。貸出額が多い銀行が肩代わりを行う点で均衡するため、この均衡が「メイン寄せ」に相当する²⁰。メイン寄せの発生時刻は、売上 X_t が初めて x^P を下回る時刻として、 $\tau^P = \min\{t \mid X_t < x^P\}$ と定義される。

4 節で、株主にとっての株式価値、リーダー・フォロアー銀行にとっての貸出債権価値を単独で分析した際には、リアルオプション価値は、倒産や回収、清算のタイミングを後ずれさせる方向に働いた。これに対し、上述のような銀行間の回収競争を導入すると、相手行に出し抜かれる可能性があるため、回収時期は、 x_m から x^P へ早期化することが確認される（図 4 参照）。

(2) 対称な銀行間のゲーム

以下では、A・B 行間で貸出額が対称な場合を考察する。図 5 (1) にはリーダー・フォロアー銀行の貸出債権価値を $D_{AB}^L(x)$ 曲線、 $D_{AB}^F(x)$ 曲線として描いている。両行にとって同一曲線を共有する点が前述のケースと異なっている。 $D_{AB}^F(x)$ 曲線が値 1 と交差する点を x^P とすると、 $x > x^P$ においてはフォロアーになるリスクがあったとしても貸出を続けたほうがよい。相手行も同一の判断となることを知っているため、ともに貸出継続を選択する。これに対し、 $x < x^P$ では、いずれもリーダーとして貸出の早期回収を計る。

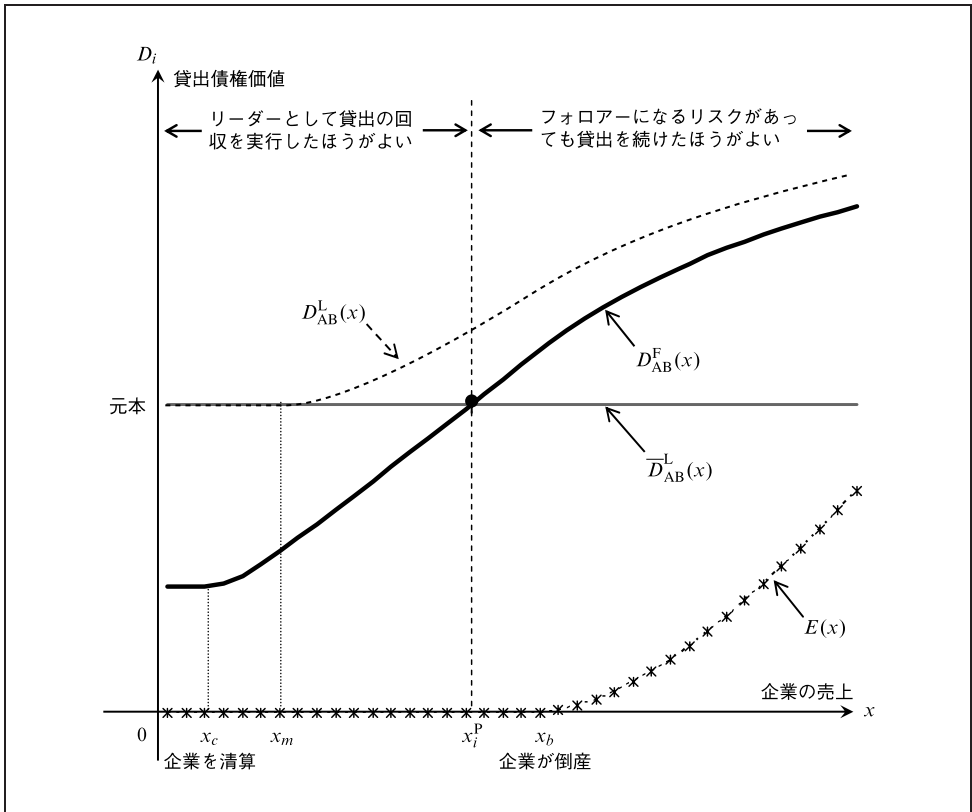
x が低下してきて x^P に至る際には、その直前で先んじて回収しようというインセンティブと、直前まで回収を回避して値 1 のリターンに確定してしまうのを避けるインセンティブの両方が働くが、 x^P となった瞬間には、いずれか片方の銀行が回収し、もう一方が肩代わりすることになる。ただし、どの銀行がリーダーになるかは一意には決まらない。こうした均衡を pre-emption 均衡と呼ぶ²¹。この問題をさらに踏み込んで考察するために、Fudenberg and Tirole [1985] は、限界的な瞬間（ここでは $x = x^P$ ）における行動選択に確率を導入した混合戦略ゲームを考えた。彼らは新規事業への参入ゲーム（ここでは回収ゲーム）について、2 企業が同時に参入意思を持った場合に対応するため、その際の「参入の強度」を決める関数を別途導入し、この参入確率に関する混合戦略を考えることでゲームの均衡を導出している²²。Huisman and Kort [1999] は、上記のモデルを意思決定の関数（本稿では売上 x ）が

20 4 節の仮定（脚注 15）で述べたように、担保カバー率の非対称性はゲームの均衡に影響しない。これは、均衡を考えるうえで鍵となる「フォロアー銀行の貸出の価値 (10) 式」が、フォロアー銀行の担保カバー率に依存するのではなく、肩代わり後の総貸出の担保カバー率に依存するからである。

21 定訳はまだないようであり、その意味合いから、例えば、先取り均衡や優先均衡という訳が考えられる。

22 もし 2 社とも参入した場合には供給過剰となり両社ともに収益性が悪化するという状況を考慮しているため、ゲームの構造はより複雑なものになっている。

図 5 (1) pre-emption 均衡



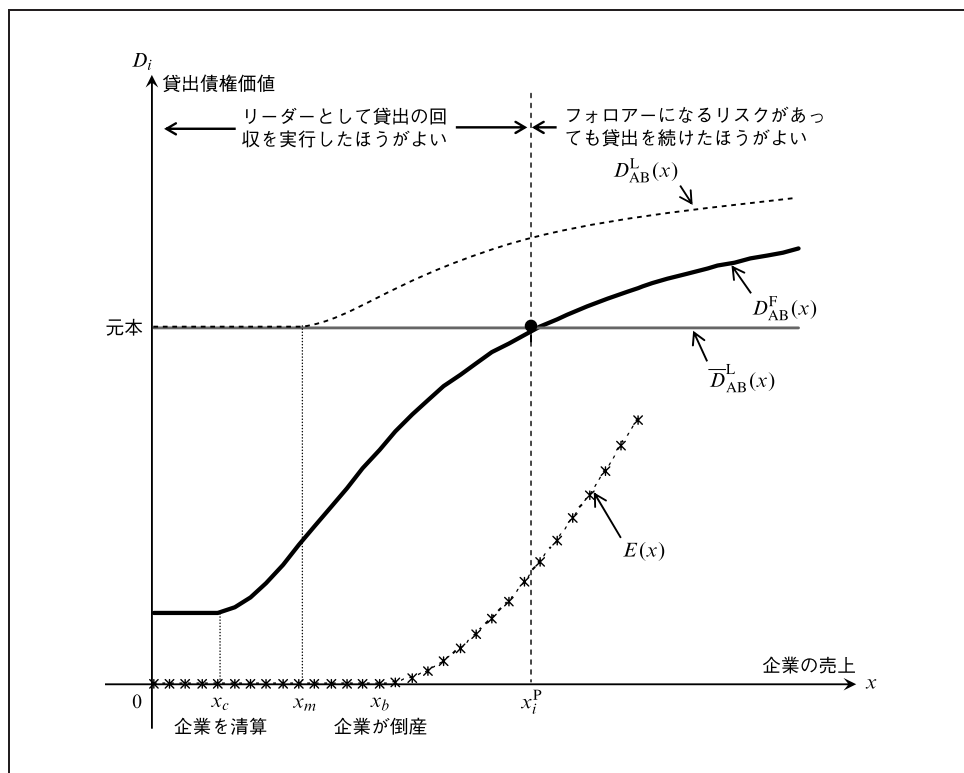
連続確率変数である場合への拡張を試みている²³。また、Kijima and Shibata [2005] では n 人ゲームでの pre-emption 均衡に発展されている。本稿では、メイン寄せ現象の理解が主眼であるため、決定論的な選択の場合の解説にとどめておく。

なお、図 5 (1) には、競争状況にない、すなわち、相手方が必ずフォロアーになることを想定した場合のリーダー銀行の貸出債権価値 (図 2 参照) が点線で示してある。 x^P は同曲線が決定する回収閾値 x_m よりも大きくなっており、競争が貸出回収が生じる点を早期化させている様子が読み取れる。この点は、メイン寄せが生じる非対称な銀行のケースと同様である。

また、図 5 (2) に示すとおり、貸出の早期回収が企業の倒産前に行われること ($x_b < x_i^P$) がありうる。企業が倒産する前にフォロアー銀行の貸出債権価値が貸出元本を下回る場合 ($D_i^F|_{x \leq x_b}(x_b) \leq m_i M$) に起こる現象で、企業の清算価値が低い場合や、貸出金利が低い場合に生じうる。これは、4 節のように回収競争の可能性がない場合には生じなかった現象である。

23 しかし Huisman [2001] では正しい均衡解の導出に至っていない。また、Weeds [2002] では、リーダーおよびフォロアーになる確率を当初から 1/2 であると仮定してこの問題を避けている。このように、対称なプレーヤーによるゲーム論的リアルオプションでは、均衡解に関する議論が発展途上にある。

図5 (2) 倒産と回収のタイミング



(3) メイン寄せを考慮した貸出債権価値の評価

本項では、均衡解として得られた x^P を用いて、メイン寄せ発生の可能性を考慮した貸出債権の評価を行う。4節(2)では、相手側の行動を固定してリーダー・フォロワー銀行にとっての貸出債権価値を求めたが、ゲームの状況を考察した結果、均衡値がメインバンクに不利になるように変化した。この点から予想されるように、メインバンクにとっての貸出債権価値は、4節(2)の結果より低下し、逆に、非メインバンクにとっては増加することが以下で示される。

まず、メインバンク A 銀行の貸出債権価値を $D_A^{\text{main}}(x)$ 、非メインバンク B 銀行のそれを $D_B^{\text{sub}}(x)$ と表す。メインバンクは時刻 τ^P でフォロワーになるため、 $D_A^{\text{main}}(x)$ は、フォロワーの最適化問題(10)式において、 τ_m^* (肩代わりを行う時刻)の代わりに τ^P (メイン寄せが起こる時刻)を代入したものに等しくなる。同様に、非メインバンクは τ^P でリーダーとなるため、 $D_B^{\text{sub}}(x)$ は、リーダーの最適化問題(9)式において、 τ_m^* の代わりに τ^P を代入したものに等しくなる。ただし、(9)式と(10)式は、 $\tau_b < \tau_m^*$ の場合のみの表記になっているため、企業が倒産した後にメイン寄せが起こる場合 ($\tau_b < \tau^P$) には直接適用可能だが、企業が倒産する前にメイン寄せが起こ

る場合 ($\tau^P < \tau_b$) には、別途、最適化問題の導出が必要となる。以下では、それぞれのケースについて解析解を示す。

イ. 倒産後にメイン寄せが起こる場合： $\tau_b < \tau^P$

非メインバンク B 銀行の貸出債権価値 $D_B^{\text{main}}(x)$ は、(9) 式より

$$D_B^{\text{sub}}(X_t) = \mathbb{E}_t \left(\int_t^{\tau_b^*} e^{-r(s-t)} m_B b M ds + \int_{\tau_b^*}^{\tau^P} e^{-r(s-t)} m_B (X_s - w) ds + e^{-r(\tau^P-t)} m_B M \right), \quad (19)$$

となる。各項の意味は (9) 式と同一であり、積分区間のみが異なる。この評価式には解析解

$$D_B^{\text{sub}}(x) = \frac{m_B b M}{r} + \left(D_B^{\text{sub}}|_{x \leq x_b}(x_b) - \frac{m_B b M}{r} \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma, \quad x_b < x, \quad (20)$$

ここで、

$$D_B^{\text{sub}}|_{x \leq x_b}(x) = m_B \left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{w}{r} \right) + m_B \left(M - \frac{x^P}{r - \mu} + \frac{w}{r} \right) \left(\frac{x}{x_b^P} \right)^\gamma, \quad (21)$$

が存在する。(20) 式の第 2 項が倒産オプションを株主に行使される負のオプション価値であり、同項に含まれる $D_B^{\text{sub}}|_{x \leq x_b}(x)$ が倒産後の貸出債権価値となる。その内容を示した (21) 式の第 2 項は、メイン寄せオプションが行使できる価値を示している。

次に、メインバンク A 銀行の貸出債権価値 $D_A^{\text{main}}(x)$ は、最適化問題

$$D_A^{\text{main}}(X_t) = \max_{\tau_c \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}_t \left(\int_t^{\tau_b^*} e^{-r(s-t)} m_A b M ds + \int_{\tau_b^*}^{\tau^P} e^{-r(s-t)} m_A (X_s - w) ds - e^{-r(\tau^P-t)} m_B M + \int_{\tau^P}^{\tau_c} e^{-r(s-t)} (X_s - w) ds + e^{-r(\tau_c-t)} c M \right), \quad (22)$$

の解と定義される。各項の意味は (10) 式と同様であり、積分区間が τ_m^* から τ^P になっている点是非メインバンクと同様であるが、清算時刻 τ_c は不変である。この最適化問題には解析解

$$D_A^{\text{main}}(x) = \frac{m_A b M}{r} + \left(D_A^{\text{main}}|_{x \leq x_b}(x_b) - \frac{m_A b M}{r} \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma, \quad x_b < x, \quad (23)$$

ここで、

$$D_A^{\text{main}}|_{x \leq x_b} = m_A \left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{w}{r} \right) + \left(D_A^{\text{main}}|_{x \leq x^P}(x^P) - m_A \left(\frac{x^P}{r - \mu} - \frac{w}{r} \right) \right) \left(\frac{x}{x^P} \right)^\gamma, \quad (24)$$

$$D_A^{\text{main}}|_{x \leq x^P} = \left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{w}{r} - m_B M \right) + \left(c M - \frac{x_c}{r - \mu} + \frac{w}{r} \right) \left(\frac{x}{x_c} \right)^\gamma, \quad (25)$$

が存在する。(25) 式の $D_A^{\text{main}}|_{x \leq x^P}$ は、メイン寄せされた後の貸出債権価値であり、右辺第 2 項が清算オプションを有することに伴う価値である。

ロ. 倒産前にメイン寄せが起こる場合： $\tau^P < \tau_b$

非メインバンク B 銀行の貸出債権価値 $D_B^{\text{main}}(x)$ は、(9) 式と同様の考え方で

$$D_B^{\text{sub}}(X_t) = \mathbb{E}_t \left(\int_t^{\tau^P} e^{-r(s-t)} m_B b M ds + e^{-r(\tau^P-t)} m_B M \right), \quad (26)$$

となる。この評価式にはイ. の場合と同様に解析解

$$D_B^{\text{sub}}(x) = \frac{m_B b M}{r} + \left(m_B M - \frac{m_B b M}{r} \right) \left(\frac{x}{x^P} \right)^\gamma, \quad x^P < x, \quad (27)$$

が存在する。

次に、メインバンク A 銀行の貸出債権価値 $D_A^{\text{main}}(x)$ は、最適化問題

$$\begin{aligned} D_A^{\text{main}}(X_t) = \max_{\tau_c \in \mathcal{I}_t} \mathbb{E}_t \left(\int_t^{\tau^P} e^{-r(s-t)} m_A b M ds \right. \\ \left. - e^{-r(\tau^P-t)} m_B M + \int_{\tau^P}^{\tau_b} e^{-r(s-t)} b M ds \right. \\ \left. + \int_{\tau_b}^{\tau_c} e^{-r(s-t)} (X_s - w) ds + e^{-r(\tau_c-t)} c M \right), \quad (28) \end{aligned}$$

となる。この最適化問題もイ.の場合と同様に解析解

$$D_A^{\text{main}}(x) = \frac{m_A b M}{r} + \left(D_A^{\text{main}}|_{x \leq x^P}(x^P) - \frac{m_A b M}{r} \right) \left(\frac{x}{x^P} \right)^\gamma, \quad x^P < x, \quad (29)$$

ただし、

$$D_A^{\text{main}}|_{x \leq x^P} = \frac{bM}{r} - m_B M + \left(D_A^{\text{main}}|_{x \leq x_b}(x_b) - \frac{bM}{r} + m_B M \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma, \quad (30)$$

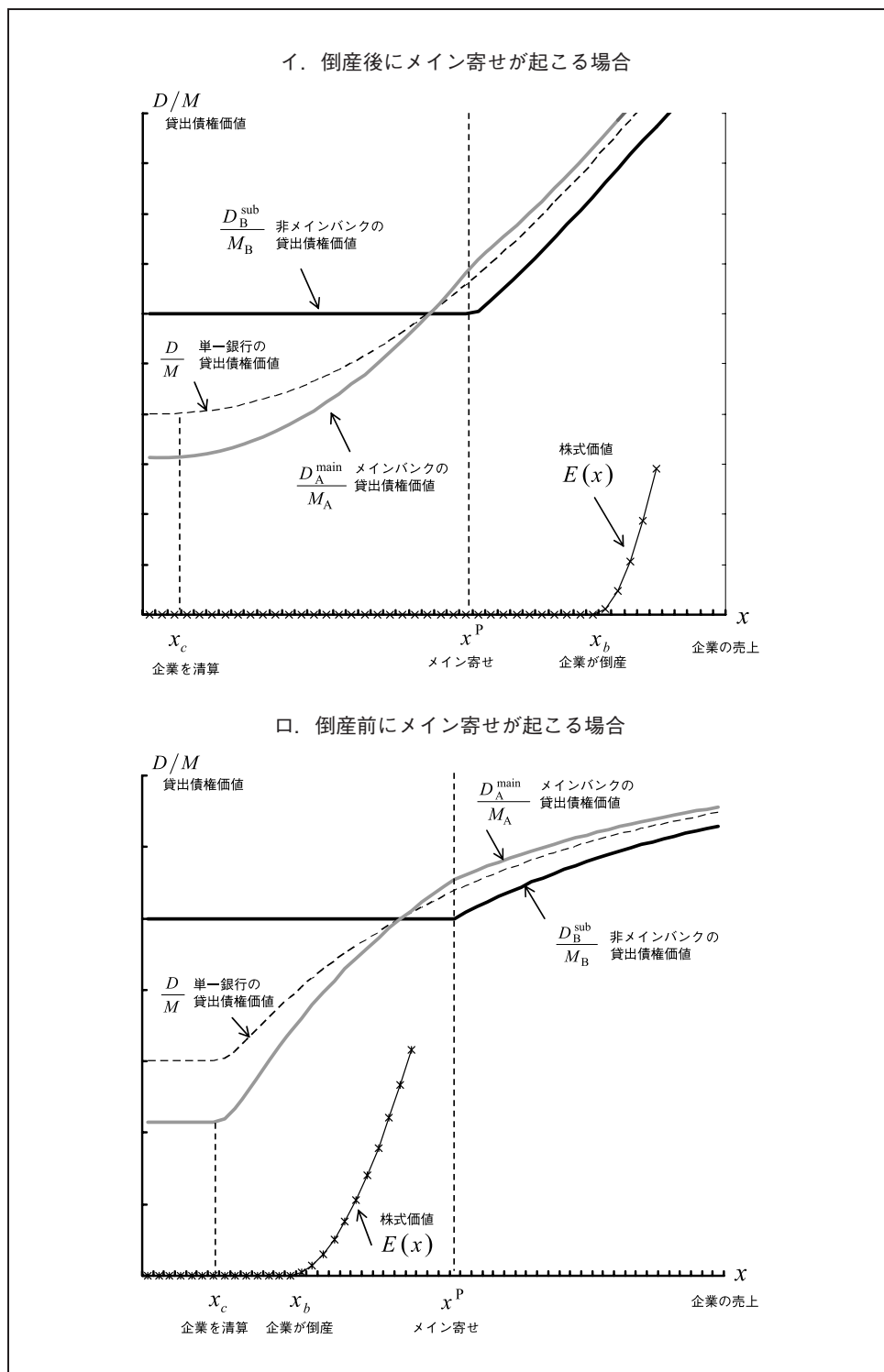
$$D_A^{\text{main}}|_{x \leq x_b} = \frac{x}{r - \mu} - \frac{w}{r} - m_B M + \left(cM - \frac{x_c}{r - \mu} + \frac{w}{r} \right) \left(\frac{x}{x_c} \right)^\gamma, \quad (31)$$

が存在する。

上記イ・ロの2ケースについて、メインバンク、非メインバンクの貸出債権価値関数を図6に示した。メインバンクの債権価値を単一銀行が貸出を行っている場合と比較すると、売上 x が高水準のときにはメインバンクの債権価値が高くなっているが、売上が低迷すると逆になる。一方、非メインバンクの債権価値は、売上が高水準のときに相対的に低くなるものの、売上低迷時には貸出額をフロアとして価値下落が抑制されている。このように、メインバンクにとって、企業の業績が良いときは高いリターンが期待できる一方で、業績が悪化した場合は債権価値が大きく毀損するため、単一銀行の貸出時に比べ、よりハイリスク・ハイリターンの貸出債権となっていることがわかる。回収を巡る非メインバンクとの競争が、メインバンクにリスクの集中をもたらしやすくなっているといえる。こうした議論は、イ・ロのいずれのケースでも成立している。

なお、メイン・非メイン、単一銀行貸出の債権価値曲線は1点で交わっており、この交点の x はメイン寄せが生じる売上水準 x^P より低くなっている。メインバンクにとってはメイン寄せが生じてもおお肩代わりして貸出を継続する価値があることを示しているが、これは、①業績が回復した場合の将来事業収益に期待できること、および②回復しなかった場合の損失の拡大は非メインバンクほど大きくないことに起因するものである。ただし、 x^P からその交点までの距離は近く、その後、売上 x が低下して交点を下回るようなことが起これば、 x^P となった時点ではメイン寄せを受けることが合理的であったとしても、結果的には債権価値を毀損させることになる。

図6 メインバンク・非メインバンクの貸出債権価値



6. 比較静学とインプリケーション

本節では、「メイン寄せが起こる売上閾値 x^P 」が、外生変数の変化によりどのような影響を受けるかを考察する。具体的には、①企業の清算価値、②銀行の貸出金利、③売上のボラティリティを変化させることで、企業や銀行がどのような環境に置かれるとメイン寄せが発生しやすくなるかを検証し、そのインプリケーションを示す。

数値計算に当たって基準となるパラメータを以下のように設定した。以下では、企業の清算価値などをこの基準値から変化させて比較静学を行う。

確率変数 X_t のトレンド μ	0%	X_t のボラティリティ σ	10%
評価時点（期初）の x	0.5~1.5	事業コスト w	1
貸出金利 b	5%	リスクフリー・レート r	2%
貸出額 M	10	うちメインバンク貸出 M_A	7
企業の清算価値 C	6	担保カバー率	60%

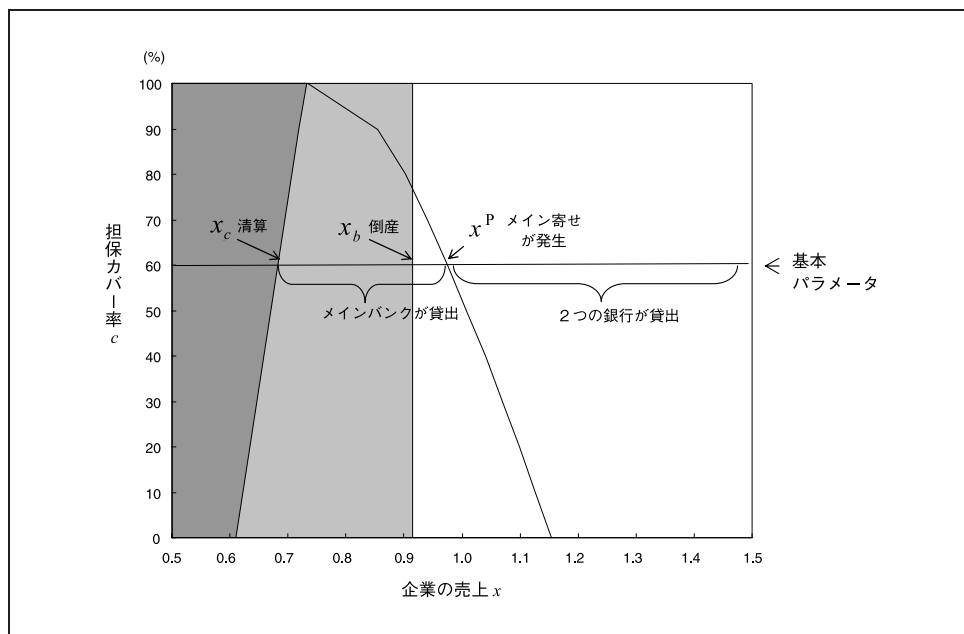
(1) 企業の清算価値の変化

企業の清算価値 C を変化させた場合に、メイン寄せが起こる閾値がどのように変化するかを図7に示した。縦軸が担保カバー率 c であり、基本ケース $c = 60\%$ の場合を横線で示している²⁴。主な検証結果を以下に示す。

- i) x^P を示す曲線が右下がりである。すなわち、企業の清算価値が低いほどメイン寄せは起こりやすくなる。これは、図6の左縦軸切片が小さいほど x^P が右側にシフトすることからも確認される。メインバンクにとっては清算価値が低いほど図6中の貸出債権価値が低下するため、先行して全額回収する非メインバンクは清算価値に直接影響されないにもかかわらず、回収競争を通じて間接的に回収閾値（メイン寄せ発生時の閾値 x^P ）が高まってしまい、メイン寄せ発生タイミングが早期化する。
- ii) x_c の値を示す曲線が左下がりである。すなわち、企業の清算価値が低い場合、メインバンクは企業の清算を先送りしやすくなる。これは、清算価値が低いほど清算オプションの価値が高まる（清算を先送りして売上回復に賭け、これに成功したときの利得が大きくなる）ことによる。

²⁴ 本稿のモデルは清算価値を固定したうえで銀行の最適反応を導出しているため、売上 x が変化していく過程で清算価値が変化するようなケースは想定していない。したがって、図7の見方は、 c を固定したうえで横軸方向の相違をみるものであり、比較静学として c が異なったときの影響の現れ方を考察するものである。現実的には、売上が低迷するに従って生産設備など実物資産の価値が低下するといった事例が考えられるが、こうした x と c の同時変化を考える場合は、モデルの再構築が必要となる。

図7 企業の清算価値とメイン寄せ



iii) x_b の値は c に依存しない。すなわち、企業の清算価値にかかわらず、株主が企業を倒産させる閾値は変化しない。これは、株主が所有権を放棄するタイミングの意思決定において銀行担保に供している資産価値が影響しないことを考えれば自明である。

メインバンクにとっては、企業の清算価値が低いほどメイン寄せが生じる可能性が高まるとともに、いったんメイン寄せされた後は、清算を先送りする合理性が強まってしまう。日本企業のデッドファイナンスでは、一般に複数の銀行から借入が行われ、なかでもメインバンクが最も高いシェアを有しているケースが少なくない。こうした現状において、メインバンクにとっては上述のような危険性が潜んでいることがモデル考察から示唆される。

また、図7においては、企業の清算価値の水準次第で倒産時期とメイン寄せの発生時期が逆転する現象が観察されている。清算価値が高い場合 ($c = 80 \sim 100\%$) は、企業の倒産後も2行で貸出を継続する状態が続く。これは、企業の清算価値が高く、フォロワーとなるメインバンクにとっての損失の下限が高いことが、メインバンクの最適回収時点を後ずれさせ、これが非メインバンクの先行回収時期をも後ずれさせる効果を持つためである。こうした他行が回収しないなら自行も回収しないというロジックは5節(1)で解説したとおりである。

本稿では、売上 x を連続変数と想定したため、図7の右側の2行融資の状態からメイン寄せを経て清算に移行していった。しかし、 x は銀行にとって離散的にしか観察できない変数だとすると、前期には2行融資の状態にあったものが、今期には突

然、メインバンクが肩代わりに応じたくない水準まで低下することもありうる。このとき、非メインバンクは先行回収のタイミングを逸するため、清算直前まで2行融資の状態が継続する。相手が肩代わりしてくれるものなら回収したいが、互いにその意図はないため、2節で紹介したチキンゲーム状態に陥る。図6を再考すると、3線の交点と x^P の距離が近いほど、こうした状態に陥ってしまう可能性が高いことがわかる。

(2) 貸出金利の変化

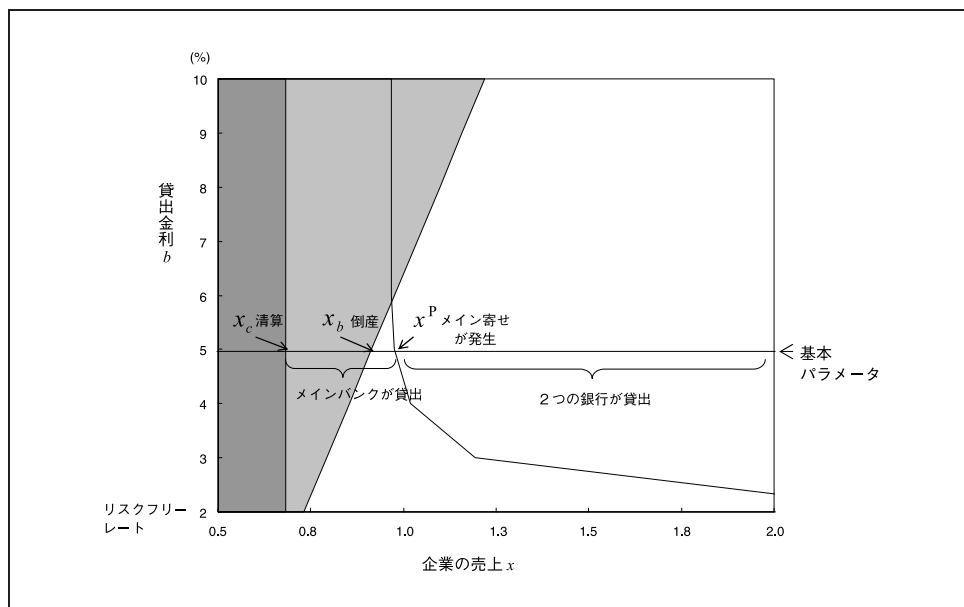
銀行の貸出金利 b を変化させた場合に、メイン寄せが起こる閾値 x^P がどのように変化するか図8を用いて考察する。主な検証結果を以下に示す。

- i) 貸出金利が低いとメイン寄せが起こりやすくなる。これは、貸出金利が高いと支払金利の現在価値が上昇するため、将来利子収入を放棄してまで貸出の早期回収を計る合理性が薄れるためである。逆に、リスクフリー・レートに近づくと同レートで割引かれた支払金利の現在価値が急速に低下するため、メイン寄せの発生閾値 x^P が急激に大きくなる。
- ii) 貸出金利が高まると、利払い後の事業収益が低下するため株主が倒産オプションを行使しやすくなる。数値例では6%以上となると、メイン寄せ発生以前に倒産が生じるため、貸出金利を引き上げてもメイン寄せ発生タイミングを後ずれさせることができなくなる (x^P の曲線が垂直となる)。これは、企業が倒産すると、両行は貸出金利でなく事業収益により回収を行うため、貸出金利の水準自身に意味がなくなるためである。
- iii) 貸出金利が変化しても、企業を清算する閾値は変化しない。これは、倒産時点で事業収益の所有権がすべて銀行に移っているため、清算の意思決定には貸出金利が無関係となるためである。

貸出市場における銀行間競争が貸出金利を低位にとどめており、とりわけ、信用リスクが貸出金利に十分に反映されておらず発生する信用コストをカバーできていないことが銀行の収益性を圧迫していると指摘されている(日本銀行 [2002, 2006])。上記の検証結果は、貸出金利と市場金利のスプレッドが低水準にあると、単純に収益性が低下するのみならず、メイン寄せの発生を通じて貸出ポートフォリオの集中リスクが高まる可能性を示唆している²⁵。また、こうした集中リスクの高まりは、企業の信用状況が悪化したときほど進展しやすく、信用リスクの加速度的上昇をもたらす可能性を示唆している。邦銀が不良債権問題に苦しんだ背景には、上述のようなメカニクスが存在していたと解釈できよう。

25 銀行の貸出ポートフォリオが抱える集中リスクや、同リスクの計測法については、菊池 [2007a, b]、安藤 [2005] を参照。

図8 貸出金利とメイン寄せ



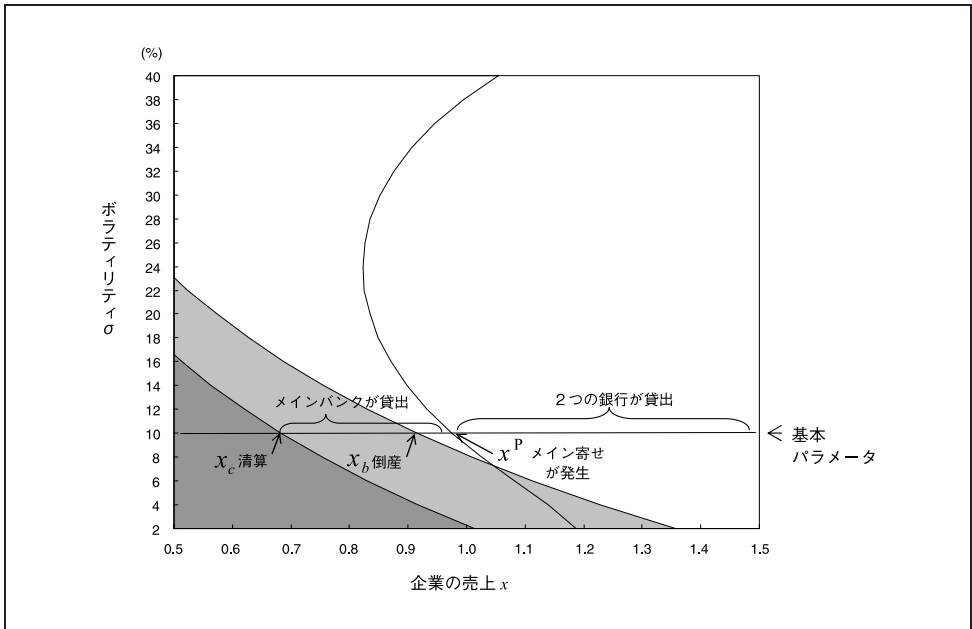
(3) 売上変動のボラティリティ変化

最後に、売上変動のボラティリティ σ の水準がメイン寄せ閾値 x^P に対してどのような影響を及ぼすか、図9を用いて考察する。主な検証結果を以下に示す。

- i) ボラティリティが小さいほどメイン寄せは起こりやすいが、ある値以上にボラティリティが大きくなると、逆にメイン寄せは起こりやすくなる(図9の x^P 曲線がバックワードベンドしている)。
- ii) ボラティリティが大きいほど、倒産や清算のタイミングは後ずれし、 x^P は小さくなる。これは、株主にとっての倒産オプション価値やメインバンクにとっての清算オプション価値がボラティリティの増大に伴って高まるためである。株主やメインバンクにとって事業収益の回復に賭ける合理性が高まり、倒産や清算のタイミングを先送りするようになる。
- iii) 上記2つの特徴の結果、ボラティリティが大きいほど、倒産より早い時期にメイン寄せが起こりやすくなる。

通常のリアルオプション理論では、ボラティリティと閾値の関係は単調増加であり、この関係は頑強であることが知られている (Shibata [2005])。一方、ゲーム論的リアルオプションでは、ボラティリティと閾値の関係は単調増加でないことが知られている (Kijima and Shibata [2005])。上記 i) の特徴は、先行研究と整合的な結果となっている。以下では i) のような現象が生じる理由について解説する。

図9 ボラティリティと「メイン寄せ」の関係



メイン寄せ閾値の算出では、フォロアーになった場合の貸出債権価値が重要となる。(15)~(17)式で示したとおり、フォロアーの価値は「正のオプション価値」と「負のオプション価値」の合成となっており、これを概念的に示すと次のようになる。

フォロアーが持つオプション価値

- = ①株主が企業を倒産させることで損失を被る「負のオプション価値」
- + ②リーダーに貸出を回収されることによる「負のオプション価値」
- + ③企業の清算オプションを保有することによる「正のオプション価値」

ボラティリティが大きい場合、③の正のオプション価値は高まるが、①②の負のオプション価値は低下するというトレードオフの関係が存在し、どちらの効果が勝るかによりメイン寄せの起こりやすさが決まる。図9において、 σ が概ね25%より大きい領域では、ボラティリティが大きいほどメイン寄せが早い時期に起こりやすくなっている。これは、上記①②の負のオプション価値が増大するためフォロアーに回った銀行がより不利となり、メイン・非メインバンクともに閾値 x^P が大きくなることによるものである。

一方、 σ が25%以下ではボラティリティが小さくなるほどメイン寄せが起こりやすくなっている。これは、上記③の正のオプション価値が低下してくることによるものである。ボラティリティが低いと、将来、売上 x が低下してメイン寄せを受け、最終的に清算を考えなければならないような事態に追い込まれた際に、清算を先延

ばししても売上回復の可能性は低く、メインバンクが持つ清算オプションの価値はよりゼロに近くなる。

本稿のモデルは、先延ばしすることの合理性を定量的に評価しているが、見方を変えると、先行回収や肩代わり、清算といった銀行の意思決定がどのような前提のもとに合理性を持つのかを検証する手段としても活用できる。例えば、売上が相当落ち込み、他行が貸出を回収するときに、自行が肩代わりして企業支援を行うという意思決定を行ったとしよう。その決定を支持する売上回復の見込み（パラメータ μ ）や見込みの幅（パラメータ σ ）、あるいは清算時の回収予想（パラメータ c ）が「どのような値でなければならないか」を逆算することで、企業支援の合理性を検証することができる。清算を先送りするために判断にバイアスが掛けられることへのチェック機能にもなりえよう²⁶。

別の視点として、情報の非対称性ももたらす影響を考察することもできる。本稿では、確率過程として与えられた売上変動のパラメータについて、メイン・非メインバンクが同一の情報を有していると仮定した。仮に、非メインバンクが誤って低い μ や低い σ を想定していた場合、先行回収のタイミングはさらに早くなる（ σ の水準は図9の x^P 曲線が右下がりの領域にあると想定）。また、メインバンクが非メインバンクの誤認を知っているか知らないかで、ゲームにおけるメインバンクの最適反応が異なってくるため、回収早期化の程度も左右されてくる²⁷。こうした情報の非対称性は、貸出ポートフォリオの集中リスクを高める方向に働くと考えられよう。

7. おわりに

本稿では、信用リスクを踏まえた貸出債権価値の評価にメイン寄せのリスクを織り込む手法を提案した。ゲーム論的リアルオプションの手法により2つの銀行が貸出の早期回収を巡って競争する状況を考え、その均衡としてメイン寄せを表現した。またモデルに基づく比較静学分析により、i) 企業の清算価値が低いとメイン寄せが生じる可能性が高まるとともに、いったんメイン寄せされた後は、清算を先送りする合理性が強まってしまうこと、ii) 貸出金利スプレッドが低いと、単純に収益性が低下するのみならず、メイン寄せの発生を通じて貸出ポートフォリオの集中リスクが高まる可能性があり、特に、企業の信用状況が悪化したときほど信用リスクの加速度的上昇をもたらしてしまうこと、iii) 銀行間の貸出回収を巡るゲーム的状况は、上記オプション価値がもたらす先送り効果とは逆に、回収タイミングを早める効果を持ち、これを回収オプション価値として評価すると、上記オプション価値とのトレードオフ関係が読み取れることなどが確認された。

26 当然、モデルが現実を記述するのにどれほど適切であるかというモデルの妥当性リスクが存在し、この点は別個に検証が必要となる。

27 非メインバンクにとってボラティリティ等のパラメータが不確実にしかわからないという不確実性も存在するが、これをモデル考察しようとするボラティリティを確率変数として扱う必要が出てくる。

本稿で焦点を当てた分析対象はメイン寄せであるが、本稿のモデルは、貸出を巡るより一般的な事象の分析手段に拡張できる可能性を有している。より直接的には、銀行間での貸出競争が存在するもとの最適貸出・退出戦略として本モデルを応用することが考えられるほか、新規貸出先への貸出金利設定においては、信用リスク評価において貸出額が増減する可能性を勘案するモデル、とりわけ信用リスク増加時にエクスポージャーが加速的に増加してしまうリスクを検証するモデルにも展開できよう。

もっとも、こうした応用を行う際には、本稿で提案したモデルの限界点や拡張を要する点を認識しておく必要がある。最後に、これらの論点を述べる。

第1に、2節(2)で指摘したようにメイン寄せの発生原因を「銀行間の貸出額の差」に限定している点である。ただし、本モデルを拡張することで、2節(2)で挙げたその他の発生要因に関してもある程度の接近が可能である。例えば、貸出以外の収益源の存在がメインバンクとして貸出を継続する合理性があるという論点に関しては、メインバンクの貸出金利が高いと想定する（上乘せ分はその他業務サービスに伴う利益率と解釈する）ことで対応可能である。また、レピュテーションコストに起因するメイン寄せに関しては、「メインバンクが貸出を回収する場合にはレピュテーションコストがかかる」と想定し、その分だけ減価された貸出額が返済されるとモデル設定を変更すればよい。情報の非対称性によるメイン寄せについては、例えば「非メインバンクが想定するボラティリティのほうがメインバンクより大きい」と仮定してモデルを構築し直すことが考えられる。

第2に、各種パラメータを評価時点で固定することにより、現実をある程度単純化してしまっている点が挙げられる。例えば、売上の確率過程における μ や σ は、ゲームの途中で評価し直されると考えたほうがより現実的であろう。売上の期待成長率に関するパラメータ μ をゼロと想定していたにもかかわらず、売上の低下が長期的にとまらない場合は、 μ が下方修正され、そのもとで銀行の最適行動が再考察されると考えたほうが自然である。また、事業費用 w を定数にしているが、実際に業況が悪化した企業では固定費の削減を行うことも考えられる。特に、企業の倒産により経営権が銀行に移った際には、銀行団の指導のもとにリストラクチャリングが行われ、事業費用が圧縮されることが多い。また、このリストラクチャリングを通じて μ が上方修正されるとも考えられる。これらの点は、より現実的なモデル構築に向けての今後の課題であろう。

補論 1. 単純なメイン寄せゲーム

(1) ゲームの設定

メインバンク A 銀行と非メインバンク B 銀行がある企業へ貸出を行っているとする。貸出額は A 銀行のほうが多く、この条件のみでメインバンクと非メインバンクを区別し、他の条件はすべて同一とする。各銀行の貸出額を M_A 、 M_B で表し、総貸出額を M とする。担保カバー率を c 、貸出金利を b 、企業のデフォルト確率を p 、リスクフリー・レートを r で表す。

以上の想定のもとで、非協力ゲームとしてメイン寄せゲームを定義する。まず、各銀行は、以下で定義する貸出採算を利得関数とし、これを評価基準にして貸出継続か貸出回収を選択する（表 A-1）。ただし、片方の銀行が貸出を回収する場合には、他方の銀行は、企業を存続させるために貸出を肩代わりしなければならない。両方の銀行が貸出回収を決定すると、企業は清算され、それぞれの銀行が担保権を実行する。

両行が貸出を続けている場合の各銀行の利得を $A_{00}(p)$ 、 $B_{00}(p)$ と表す。1 期間後に企業が $1 - p$ の確率で生存している場合には貸出元本と貸出金利が返済され、銀行は $M_A(1 + b)$ を受け取る。 p の確率でデフォルトした場合には、企業は清算され $M_A c$ を受け取る。1 期間後の期待値 $M_A((1 - p)(1 + b) + pc)$ をリスクフリー・レートで割り引いた現在価値から元本 M_A を控除したものが貸出採算 $A_{00}(p)$ となり、これらは

$$A_{00}(p) = M_A((1 - p)(1 + b) + pc)/(1 + r) - M_A,$$

$$B_{00}(p) = M_B((1 - p)(1 + b) + pc)/(1 + r) - M_B,$$

(A-1)

となる。

次に、B 銀行が貸出を回収し、A 銀行は貸出を継続した場合のそれぞれの利得を計算する。A 銀行は B 銀行の貸出を肩代わりするため、貸出額が M_A から M へ変わる。利得の計算方法は $A_{00}(p)$ と同様であるが元本が M となる。一方、貸出を回収する B 銀行は、元本が返済されるため採算はゼロとなる。

表 A-1 ゲームとその利得表

		非メイン	
		継続	回収
メイン	継続	$(A_{00}(p), B_{00}(p))$	$(A_{01}(p), B_{01}(p))$
	回収	$(A_{10}(p), B_{10}(p))$	$(A_{11}(p), B_{11}(p))$

$$A_{01}(p) = M((1-p)(1+b) + pc)/(1+r) - M, \quad B_{01}(p) = 0. \quad (\text{A-2})$$

逆に、A 銀行が貸出を回収し B 銀行が貸出を続ける場合は、

$$A_{10} = 0, \quad B_{10}(p) = M((1-p)(1+b) + pc)/(1+r) - M, \quad (\text{A-3})$$

となる。両方の銀行が回収する場合には、企業は清算され、担保権が実行されるため、採算は担保 cM_A から貸出元本 M_A を控除したものとなる。

$$A_{11}(p) = cM_A - M_A, \quad B_{11}(p) = cM_B - M_B. \quad (\text{A-4})$$

(2) ゲームの解

以上で定義したメイン寄せゲームは、企業のデフォルト確率 p により変化するため場合分けして解を求める。ゲームの解は、 p が以下で定義される 3 つの閾値 P_0 、 P_1 、 P_2 を境に変化する。ここで、 $0 < M_B < M_A$ という仮定から $P_0 < P_1 < P_2$ が導かれる。

$$P_0 \equiv \frac{b-r}{1-c+b}, \quad (\text{A-5})$$

$$P_1 \equiv \frac{b-r}{1-c+b} + \frac{M_B}{M} \cdot \frac{(1+r)(1-c)}{1-c+b}, \quad (\text{A-6})$$

$$P_2 \equiv \frac{b-r}{1-c+b} + \frac{M_A}{M} \cdot \frac{(1+r)(1-c)}{1-c+b}. \quad (\text{A-7})$$

イ. $p < P_0$ の場合

利得表の大小関係は $A_{00} > A_{10}$ 、 $A_{01} > A_{11}$ 、 $B_{00} > B_{10}$ 、 $B_{01} > B_{11}$ となる。企業のデフォルト率が十分に低いため貸出の採算は良好で、A 銀行、B 銀行ともに、相手がどのような行動をとろうが貸出を続けることが最適反応となる。したがって(継続, 継続)が解となる。

ロ. $P_0 < p < P_1$ の場合

利得表の大小関係は $A_{00} < A_{10}$ 、 $A_{01} > A_{11}$ 、 $B_{00} < B_{10}$ 、 $B_{01} > B_{11}$ となる。企業のデフォルト率が高くなっているため貸出の採算は悪化しているが、企業を清算して担保権を実行するよりは貸出を続けたほうが損失は少ない。このため、A 銀行、B 銀行ともに、相手が自分の貸出を肩代わりしてくれるのであれば、貸出をやめたほうが最適となるが、相手が貸出を回収するのであれば、自分は肩代わりをしてでも企業を存続させたほうが、清算するよりは良い。このため、(回収, 継続)もしくは(継続, 回収)が解となる。いずれの解が実現するかは決定されない。

ハ. $P_1 < p < P_2$ の場合

利得表の大小関係は $A_{00} < A_{10}$ 、 $A_{01} > A_{11}$ 、 $B_{00} < B_{10}$ 、 $B_{01} < B_{11}$ となる。企業のデフォルト率が高く貸出採算が悪化しているため、貸出額が相対的に少ない B 銀行は、A 銀行の貸出を肩代わりするぐらいであれば、企業を清算し担保権を実行したほうが損失は少なくなる。このため、B 銀行は、A 銀行の反応いかんにかかわらず貸出を回収したほうが最適となる。一方、A 銀行は、B 銀行が貸出を回収するのであれば、肩代わりする金額が少ないため、肩代わり貸出を行うほうが企業を清算するより損失が少ない。このため、(継続, 回収) が解となる。

ニ. $P_2 < p$ の場合

利得表の大小関係は $A_{00} < A_{10}$ 、 $A_{01} < A_{11}$ 、 $B_{00} < B_{10}$ 、 $B_{01} < B_{11}$ となる。企業のデフォルト率は最も高く、A 銀行、B 銀行ともに、相手がどのような行動をとろうが貸出を回収することが最適となる。したがって、(回収, 回収) が解となる。

このように、企業のデフォルト率がある程度高くなると、ハ. のように、非メインバンクはメインバンクの行動にかかわらず貸出をやめることが最適となり、メインバンクは貸出を肩代わりしてでも企業を存続させたほうが最適となって、その結果としてメイン寄せに相当する均衡が現れる。

補論 2. 株主の最適化問題の解法

株主の最適化問題の解を導出することにより、株式価値の評価を行う。(2)式は以下のようなベルマン方程式に変形可能であり、これより $E(X_t)$ と $E(X_{t+dt})$ の関係が明らかになる。

$$E(X_t) = e^{-rdt} \max\{(X_t - w - bM) dt + \mathbb{E}_t[E(X_{t+dt})], 0\}. \quad (\text{A-8})$$

伊藤の公式を応用することで、 $E(x)$ が満たす微分方程式

$$rE(x) = x - w - bM + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 E''(x) + \mu x E'(x), \quad (\text{A-9})$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} E(x \rightarrow \infty) \rightarrow x/(r - \mu) - (w + b)/r, \\ E(x_b) = 0, \\ E'(x_b) = 0, \end{cases} \quad (\text{A-10})$$

が得られる。ここで、境界条件 (A-10) の意味を簡単に述べておく。第 1 番目の条件式は、企業の売上が大きくなったとき、株価は「企業収益の割引現在価値」に近づくことを仮定するものであり、いわゆる「バブル解」を排除するための条件である。第 2 番目と第 3 番目の条件式は、倒産して経営権を銀行に引き渡す最適な閾値 x_b を決定するための条件式であり、 x_b において株価はゼロになるだけでなく、滑らかにゼロに接続することを要求している。このため、それぞれ「バリュースペーシング条件」「スムーズペースティング条件」と呼ばれている。

この方程式には解析解が存在する。倒産の閾値 x_b も方程式の境界条件 (A-10) から以下のように求められる。

$$E(x) = \begin{cases} \frac{x}{r - \mu} - \frac{w + bM}{r} + \left(-\frac{x_b}{r - \mu} + \frac{w + bM}{r}\right) \left(\frac{x}{x_b}\right)^\gamma, & x_b < x, \\ 0, & x \leq x_b, \end{cases} \quad (\text{A-11})$$

$$x_b = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{w + bM}{r}\right) (r - \mu). \quad (\text{A-12})$$

ただし、 γ は方程式 (6) を解くための特性方程式 $\sigma^2/2 \cdot \gamma(\gamma - 1) + \mu\gamma = r$ の負の解であり、 $\gamma = 1/2 - \mu/\sigma^2 - \sqrt{(\mu/\sigma^2 - 1/2)^2 + 2r/\sigma^2}$ で表される。

補論 3. 銀行の最適化問題の解法

補論 2 で株主が銀行へ経営権を引き渡すタイミング x_b が得られた。これをもとに貸出債権価値の評価を行う。補論 1 の株式の議論と同様に (3) 式はベルマン方程式

$$D(X_t) = \begin{cases} e^{-rdt}(bM dt + \mathbb{E}_t[D(X_{t+dt})]), & t < \tau_b^*, \\ e^{-rdt} \max \{(X_t - w) dt + \mathbb{E}_t[D(X_{t+dt})], C\}, & \tau_b^* \leq t, \end{cases} \quad (\text{A-13})$$

に変形される。これに伊藤の公式を応用することで、 $D(x)$ が満たす微分方程式

$$rD(x) = bM + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D''(x) + \mu x D'(x), \quad x_b < x, \quad (\text{A-14})$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} D(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \\ D(x_b) = D|_{x \leq x_b}(x_b), \end{cases} \quad (\text{A-15})$$

$$rD(x) = (x - w) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D''(x) + \mu x D'(x), \quad x \leq x_b, \quad (\text{A-16})$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} D(x \rightarrow \infty) \rightarrow x/(r - \mu) - w/r, \\ D(x_c) = C, \\ D'(x_c) = 0, \end{cases} \quad (\text{A-17})$$

が得られる。これらの方程式には解析解が存在する。まず方程式 (A-16) の解を求め、それを用いて方程式 (A-14) をバックワードに解く。銀行が企業を清算する最適な閾値 x_c も方程式の境界条件 (A-17) から以下のように求められる。

$$D(x) = \begin{cases} \frac{bM}{r} + \left(D|_{x \leq x_b}(x_b) - \frac{bM}{r} \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma, & x_b < x, \\ \frac{x}{r - \mu} - \frac{w}{r} + \left(C - \frac{x_c}{r - \mu} + \frac{w}{r} \right) \left(\frac{x}{x_c} \right)^\gamma, & x_c < x \leq x_b, \\ C, & x \leq x_c, \end{cases} \quad (\text{A-18})$$

$$x_c = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(cM + \frac{w}{r} \right) (r - \mu). \quad (\text{A-19})$$

補論 4. リーダー銀行の最適化問題の解法

リーダーとなった場合の貸出債権価値 $D_i^L(x)$ を求める。(17) 式は以下のようなベルマン方程式に変形可能で $D_i^L(X_t)$ と $D_i^L(X_{t+dt})$ の関係が明らかになる。

$$D_i^L(X_t) = \begin{cases} e^{-rdt}(m_i b M dt + \mathbb{E}_t[D_i^L(X_{t+dt})]), & t < \tau_b^*, \\ e^{-rdt} \max\{m_i(X_t - w) dt + \mathbb{E}_t[D_i^L(X_{t+dt})], m_i M\}, & \tau_b^* \leq t. \end{cases} \quad (\text{A-20})$$

これに伊藤の公式を応用することで、 $D_i^L(x)$ が満たす微分方程式

$$rD_i^L(x) = m_i b M + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D_i^{L'}(x) + \mu x D_i^{L''}(x), \quad x_b < x, \quad (\text{A-21})$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} D_i^L(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \\ D_i^L(x_b) = D_i^L|_{x \leq x_b}(x_b), \end{cases} \quad (\text{A-22})$$

$$rD_i^L(x) = m_i(x - w) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D_i^{L'}(x) + \mu x D_i^{L''}(x), \quad x \leq x_b, \quad (\text{A-23})$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} D_i^L(x \rightarrow \infty) \rightarrow m_i(x/(r - \mu) - w/r), \\ D_i^L(x_m) = m_i M, \\ D_i^{L'}(x_m) = 0, \end{cases} \quad (\text{A-24})$$

が得られる。これらの方程式には解析解が存在し、銀行 i が貸出を回収する最適な閾値 x_m も方程式の境界条件 (A-24) から以下のように求められる。

$$D_i^L(x) = \begin{cases} \frac{m_i b M}{r} + \left(D_i^L|_{x_m < x \leq x_b}(x_b) - \frac{m_i b M}{r} \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma, & x_b < x, \\ m_i \left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{w}{r} \right) + m_i \left(M - \frac{x_m}{r - \mu} + \frac{w}{r} \right) \left(\frac{x}{x_m} \right)^\gamma, & x_m < x \leq x_b, \\ m_i M, & x \leq x_m, \end{cases} \quad (\text{A-25})$$

$$x_m = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(M + \frac{w}{r} \right) (r - \mu). \quad (\text{A-26})$$

補論 5. フォロアー銀行の最適化問題の解法

フォロアーとなった場合の貸出債権価値 $D_j^F(x)$ を求める。(18) 式は以下のようなベルマン方程式に変形できる。

$$D_j^F(X_t) = \begin{cases} e^{-rt}(m_i b M dt + \mathbb{E}_t[D_j^F(X_{t+dt})]), & t < \tau_b^*, \\ e^{-rt}(m_j(X_t - w) dt + \mathbb{E}_t[D_j^F(X_{t+dt})]), & \tau_b^* \leq t < \tau_m^*, \\ e^{-rt} \max\{(X_t - w - r m_i M) dt + \mathbb{E}_t[D_j^F(X_{t+dt})], C - m_i M\}, & \tau_m^* \leq t. \end{cases} \quad (\text{A-27})$$

これに伊藤の公式を応用することで、 $D_j^F(x)$ が満たす微分方程式

$$r D_j^F(x) = m_j b M + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 D_j^{F''}(x) + \mu x D_j^{F'}(x), \quad x_b < x, \quad (\text{A-28})$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} D_j^F(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \\ D_j^F(x_b) = D_j^F|_{x \leq x_b}(x_b), \end{cases} \quad (\text{A-29})$$

$$r D_j^F(x) = m_j(x - w) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 D_j^{F''}(x) + \mu x D_j^{F'}(x), \quad x_m < x \leq x_b, \quad (\text{A-30})$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} D_j^F(x \rightarrow \infty) \rightarrow m_j(x/(r - \mu) - w/r), \\ D_j^F(x_m) = D_j^F|_{x \leq x_m}(x_m), \end{cases} \quad (\text{A-31})$$

$$r D_j^F(x) = (x - w - r m_i M) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 D_j^{F''}(x) + \mu x D_j^{F'}(x), \quad x \leq x_m, \quad (\text{A-32})$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} D_j^F(x \rightarrow \infty) \rightarrow (x/(r - \mu) - w/r) - m_i M, \\ D_j^F(x_c) = c M - m_i M, \\ D_j^{F'}(x_c) = 0, \end{cases} \quad (\text{A-33})$$

が得られる。これらの方程式には解析解が存在し、銀行 j が企業を清算する最適な閾値 x_c も方程式の境界条件 (A-33) から以下のように求められる。

$$D_j^F(x) = \begin{cases} \frac{m_i b M}{r} + \left(D_j^F|_{x_m < x \leq x_b}(x_b) - \frac{m_i b M}{r} \right) \left(\frac{x}{x_b} \right)^\gamma, & x_b < x, \\ m_j \left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{w}{r} \right) + \left(D_j^F|_{x_c < x \leq x_m}(x_m) - m_j \left(\frac{x_m}{r - \mu} - \frac{w}{r} \right) \right) \left(\frac{x}{x_m} \right)^\gamma, & x_m < x \leq x_b, \\ \frac{x}{r - \mu} - \frac{w}{r} - m_i M + \left(c M - \frac{x_c}{r - \mu} + \frac{w}{r} \right) \left(\frac{x}{x_m} \right)^\gamma, & x_c < x \leq x_m, \\ c M - m_i M, & x \leq x_c, \end{cases} \quad (\text{A-34})$$

$$x_c = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(c M + \frac{w}{r} \right) (r - \mu). \quad (\text{A-35})$$

参考文献

- 安藤美孝、「与信ポートフォリオの信用リスクの解析的な評価法：極限損失分布およびグラニユリティ調整を軸に」、『金融研究』第24巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、2005年
- 小幡 績・坂井功治、「メインバンク・ガバナンスと「追い貸し」」、『経済研究』第56巻第2号、一橋大学経済研究所、2005年
- 菊池健太郎、「与信ポートフォリオ VaR の解析的な評価法：条件付鞍点法による近似計算の理論と数値検証」、『金融研究』第26巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2007年 a
- 、「信用 VaR の債務者別分解とパラメータ感応度：条件付鞍点法による VaR 解析表現法の応用」、『金融研究』第26巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2007年 b
- 経済産業省、「事業再生に関するアンケート調査」、2005年
- 、「事業再生の円滑化のための対応策」、2006年
- 総合研究開発機構、「産業再生機構の経験から—日本企業の弱みと強み」、2006年内閣府、『平成15年版経済財政白書』、2003年
- 日本銀行、「不良債権問題の基本的な考え方」、2002年
- 日本銀行、「金融システムレポート」、2006年
- 福田慎一・鯉淵 賢、「主力行の債権放棄比率：誰が多く負担するのか?」、『経済学論集』第70巻2号、東京大学経済学会、2004年
- ・——、「不良債権と債務超過メインバンクの超過負債」、CARF ワーキングペーパー CARF-J-022、東京大学金融教育研究センター、2006年
- 山田哲也、「「メイン寄せ」のゲーム論的考察」、『経済論叢』、京都大学経済学会、2007年（掲載予定）
- Dixit, A., and R. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.
- Fudenberg, D., and J. Tirole, “Pre-emption and Rent Equalisation in the Adoption of New Technology,” *Review of Economic Studies*, 55, 1985, pp. 383–401.
- Grenadier, R., “The Strategic Exercise of Options: Development Cascades and Overbuilding in Real Estate Markets,” *Journal of Finance*, 51, 1996, pp. 1653–1679.
- Huisman, K., and P. Kort, “Effect of strategic interactions of the option value of waiting,” CentER Discussion Paper 9922, 1999.
- , *Technology Investment: The game theoretic Real Option Approach*, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- Kijima, M., and T. Shibata, “Real Options in An Oligopoly Market,” *Kyoto Economic Review*, 74, 2005, pp. 47–64.
- Leland, H., “Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure,” *Journal of Finance*, 49, 1994, pp. 1213–1252.

- Mella-Barral, P., and W. Perraudin, “Strategic Debt Services,” *Journal of Finance*, 52, 1997, pp. 531–556.
- Shibata, T., “On the Value-Volatility Relationship in a Real Options Model,” *Kyoto Economic Review*, 74, 2005, pp. 205–213.
- Weeds, H., “Strategic Delay in a Real Options Model of R&D Competition,” *Review of Economic Studies*, 69, 2002, pp. 729–747.

