

適応的学習と金融政策

むとういちろう
武藤一郎

要 旨

本稿は、近年発展を遂げている「適応的学習 (adaptive learning)」を導入した金融政策分析に関するサーベイを行ったものである。適応的学習とは、合理的期待の仮定の1つである「人々が経済の変動法則 (law of motion) に関して完全な知識を持つ」という仮説を見直し、「人々は現在および過去の実際の経済の動きを観察することによって、経済の変動法則に関する知識を経験的に習得している」と捉え直したものである。適応的学習を導入した金融政策分析では、金融政策ルールがどのような条件を満たせば、人々の期待を合理的期待に収束させられるのか、適応的学習下の最適な金融政策はどのようなものかといった点について理論的な分析が進められてきた。また、近年では、適応的学習を流動性の罫や中央銀行の透明性などの分析に導入した応用研究や、適応的学習を導入したモデルの実証研究も行われるようになってきている。本稿では、これらの研究で得られた主要な結果について紹介する。

キーワード：適応的学習、E-stability、合理的期待、金融政策ルール

本稿は、筆者が過去に作成したサーベイ論文（武藤 [2004]）を、同分野の最近の発展状況を踏まえながら、大幅に加筆・修正したものである。本稿の作成に当たっては、ジョージ・エバンス教授（オレゴン大学）、セボ・ホンカポーヤ氏（フィンランド中央銀行）、ジェームズ・ブラード総裁（セントルイス連邦準備銀行）とのディスカッションから有意義な示唆を得たほか、小林照義准教授（中京大学）、および日本銀行スタッフからも有益な助言を頂戴した。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

武藤一郎 日本銀行金融研究所企画役補佐
(現 国際局企画役補佐、E-mail: ichirou.mutou@boj.or.jp)

1. はじめに

政策当局にとって、インフレ期待が、金融政策の行動 (*actions*)、金融政策のコミュニケーション、およびオイルショックのようなその他の経済現象によって、どのように影響されるかを知ることが極めて有用であろう。近年発展している、マクロ経済モデルにおける学習 (*learning*) の文献は、こうした論点の多くを語るための有用な手段であるように窺われる。伝統的なモデルでは、合理的期待、固定的な経済構造、安定的な政策目標が導入され、民間主体による学習の役割は存在しなかった。(中略) しかし、実際には、民間主体は経済や政策当局の目標——それらは時間を通じて変化しうるものである——について、不完全な情報しか持っていない。民間主体の学習の可能性を考慮することはより現実的であり、インフレ期待がどのように変化するか、特に、インフレ期待が金融政策の行動やコミュニケーションによってどのような影響を受けるか、という点について、より妥当な結論を生み出す傾向がある。

——Bernanke [2008]

1970年代以降、マクロ経済学の分野では、人々の期待形成仮説として、「合理的期待 (*rational expectation*)」が導入されてきた。近年発達を遂げている動学の一般均衡モデル、その中でも特に、金融政策の分析において主として用いられているニューケインジアン・モデルの特徴の1つは、人々の行動が先行きの経済に対するフォワード・ルッキングな期待に基づくということであるが、その期待の具体的な計算方法に関しても、合理的期待が仮定されることが標準的となっている。

しかし、現実の期待形成を考えた場合、合理的期待の仮定は非常に強いと考えられる。Sargent [1993] によれば、合理的期待は2つの仮定に基づいている。1つは、人々が自らの持つ情報集合のもとで、予測誤差の分散が最小となるような最適予測を形成するという仮定である。この仮定は、経済学で通常導入される合理性 (*rationality*) の仮定——経済主体がある制約条件のもとで、目的関数を最適化するという仮定——を、人々の期待形成に適用したものと解釈できる。

もう1つの仮定は、人々の持つ情報集合の中に、経済構造モデルに関する真の知識が含まれているというものである。この仮定は、人々の持つ経済構造に関する認識が、真の経済構造と一致していることを意味するが、これは現実の人々の持つ情報量、ないし情報の正確さを考えた場合、非常に強い仮定と考えられる。例えば、一般の家計や企業が、期待形成に際して、経済構造モデルの知識を用いることは稀である。また、経済構造を専門的に研究している計量経済学者であっても、経済構造モデルの知識を得るためには、計量経済学の技術を用いてモデルのパラメータを推計する必要があり、そこには推定誤差が生じる可能性がある。

本稿では、合理的期待の仮定のうち、主として2つめの仮定——「人々が経済構造に関して先験的に正確な知識を持つ」という仮定——を修正した期待形成仮説とし

て、「適応的学習 (adaptive learning)」に基づく期待形成について紹介する。適応的学習に基づく期待では、経済主体が、現実の経済データを観察することにより、経済の変動法則 (law of motion) を経験的に学習し、その知識をもとに期待形成を行うことが想定される。すなわち、合理的期待においては、経済主体が先験的に真の変動法則を知っていることが仮定されているのに対し、適応的学習では、人々は実際のデータを観察することで初めて、経済の変動法則に関する知識を習得すると捉えられる。

本稿で詳しく述べるように、適応的学習の具体的な特徴は、①人々が、経済の変動法則として、経済構造に関する誘導形のモデルを認識し、②逐次推計のアルゴリズムを用いて誘導形モデルのパラメータを每期アップデートし、③最近期に推計したモデルを外挿することにより期待形成を行うということである。つまり、適応的学習の文献では、人々が経済構造の知識 (structural knowledge) を持たない状況を主として想定しているため、観測データを用いて、VAR (vector auto regression) のような誘導形モデルを逐次推計し、そのモデルをもとに期待形成を行うと仮定している¹。

適応的学習では、推計されたモデルが真の変動法則と整合的でない限り、経済動学は、合理的期待モデルの動学と一致しない。しかし、ある一定の条件が満たされるもとは、適応的学習に基づく期待は、長期的には合理的期待へと収束し、経済動学が合理的期待モデルの動学と一致することが知られている。この条件は一般に「学習可能性 (learnability)」ないし「学習下の安定性 (stability under learning)」と呼ばれるが、Evans and Honkapohja [2001] が詳しく解説しているように、最も標準的な学習アルゴリズムを用いた場合、これらは合理的期待均衡の「E-stability (expectational stability)」と呼ばれる条件によって保証されることが明らかになっている。このため、適応的学習に関する研究では、合理的期待均衡が E-stability 条件を満たすかどうかを確認するものが多くなっている。

近年、金融政策に関する研究においても、適応的学習を導入した研究が活発に行われてきた。これらの研究では、標準的なニューケインジアン・モデルにおける合理的期待均衡の E-stability 条件が、金融政策ルールの形状やパラメータに依存することが明らかにされている。このことは、人々の期待が合理的期待から乖離して不安定化することを、金融政策の運営方法次第で回避することができることを意味する。これは、合理的期待を仮定した伝統的な分析からは導くことができない政策含意であり、注目に値すると考えられる。

また、適応的学習を導入した研究では、合理的期待均衡の E-stability 条件という観点以外でも、金融政策への含意を多数導いている。例えば、ある研究は、経済が合理的期待均衡へ収束する速度 (speed of convergence) が、金融政策ルールのパラメータに依存することを明らかにしている。また、別の研究は、名目金利にゼロ % 制約

1 適応的学習に基づく期待は、経済構造の誘導形を用いて期待形成するという点では、いわゆる「適応的期待 (adaptive expectation)」と似ているが、パラメータのアップデートを行うという点で、適応的期待とは区別される期待形成方法である。

がある場合に、経済が「流動性の罠 (liquidity trap)」に陥る可能性を検討しており、そこでは、流動性の罠に陥るメカニズムが、合理的期待モデルと適応的学習モデルでは異なるため、流動性の罠を回避するための政策処方 が両モデルで異なることを示している。ほかにも、最近では、中央銀行による金融政策の透明性 (transparency) の向上が、民間主体の期待にどのような影響を与え、経済動学にどのような影響を与えるかを分析した研究も存在する。さらに、こうした理論的な分析に加えて、近年では、適応的学習を導入したモデルの実証分析も行われるようになってきている。

以上のような研究の発展状況を踏まえ、本稿では、適応的学習と金融政策に関する研究のサーベイを行い、そこで導かれている主要な研究結果について紹介する。なお、学習を導入した研究は現在では非常に広範に行われており、そのすべてを概観することはできないが、本稿ではそれらの研究の中でも特に、① Evans and Honkapohja [2001] に基づく適応的学習のフレームワークを、②ニューケインジアン・モデルに導入し、③金融政策に関して分析した研究に絞って紹介することとする²。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、Evans and Honkapohja [2001] に基づく適応的学習の分析フレームワークについて、単純なインフレ率決定モデルを例に解説する。3節では、ニューケインジアン・モデルに適応的学習を導入した分析のうち、金融政策に関して、いわゆる「テイラー・ルール」を導入した研究を紹介する。4節では、適応的学習を導入した最適金融政策分析について紹介する。5節では、適応的学習を導入した分析を巡る論点を紹介する。6節では、適応的学習を導入した金融政策分析の応用研究を紹介する。7節では、適応的学習に関する実証研究について紹介する。8節では、本稿のまとめを行う。

2. 適応的学習のフレームワーク

本節では、Evans and Honkapohja [2001] に基づく適応的学習の分析フレームワークに関して、単純なインフレ率決定モデルを例にして紹介する。

いま、インフレ率決定モデルが下記 (1) 式のように与えられたとする。

$$\pi_t = \mu + \theta E_t^* \pi_{t+1} + \varepsilon_t. \quad (1)$$

π_t はインフレ率、 $E_t^* \pi_{t+1}$ は人々のインフレ期待、 ε_t は攪乱ショック (ホワイト・ノイズ) で、 μ 、 θ は構造パラメータである。なお、(1) 式のインフレ期待 ($E_t^* \pi_{t+1}$) は、人々が実際に形成する期待であり、必ずしも合理的期待とは限らない。

適応的学習を導入する前に、このモデルの合理的期待均衡を導出しておこう。合理的期待均衡解の最も単純な形状は、下記のとおりである。

2 適応的学習と金融政策に関する英語のサーベイ論文としては、Evans and Honkapohja [2003a, 2008] が存在する。

$$\pi_t = a + \varepsilon_t. \tag{2}$$

(2) 式は、(1) 式のインフレ率決定モデルの合理的期待均衡解のうち、最も少ない数の状態変数 (state variable) により表される解であり、「MSV (Minimal State Variable) 解」もしくは「ファンダメンタルズ解」と呼ばれている。本節では、合理的期待均衡解のうち、この MSV 解に議論の焦点を絞る。

(2) 式の中のパラメータ a は未知のため、未定係数法により、この値を算出する。そのために、(2) 式を 1 期進めて数学的期待値を取ると、下記ようになる。

$$E_t \pi_{t+1} = a. \tag{3}$$

(1) 式のインフレ期待 ($E_t^* \pi_{t+1}$) が (3) 式によって決定されていると仮定する。このとき、(2)、(3) 式を (1) 式の左辺、右辺におおの代入すると、パラメータ a は下記のように導かれる。

$$a = \frac{\mu}{1 - \theta}. \tag{4}$$

これが、(1) 式のモデルの MSV 解である。(3)、(4) 式より、MSV 解では、人々のインフレ期待が、経済構造の真のパラメータ (μ, θ) に依存することがわかる。このことは、合理的期待均衡において、人々が経済構造に関する正確な知識を持つことを示唆する。

これに対し、適応的学習では、人々が構造パラメータの真の値を先験的には知らないと仮定される。このため、人々は、インフレ率に関する時系列データを用いて、インフレ予測用のモデルを推計する必要がある。

適応的学習では、人々が経済構造に関する誘導形モデルを持ち、その誘導形モデルのパラメータを推計することが仮定される。一例として、人々が下記のような誘導形モデルを持っているとしよう。

$$\pi_t = \tilde{a}_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{5}$$

(5) 式は、(2) 式の MSV 解と同じ形状を取るが、パラメータ \tilde{a}_{t-1} は、人々が $t-1$ 期までの情報をもとにして推計されるものであり、 a とは異なる可能性がある。この (5) 式は、人々が認識する経済の変動法則であり、「PLM (Perceived Law of Motion)」と呼ばれている³。

(5) 式の PLM を前提にすると、インフレ期待は下記のように計算される。

$$E_t^* \pi_{t+1} = \tilde{a}_{t-1}. \tag{6}$$

3 PLM の形状が MSV 解の形状と同一であることは、単純化のために導入している仮定であり、適応的学習に関する文献では、その形状が異なる場合の研究も行われている。

(6) 式のインフレ期待を (3) 式の合理的期待と比較すると、パラメータ \tilde{a}_{t-1} が推計値であり、必ずしも a と一致していない可能性がある。つまり、パラメータ \tilde{a}_{t-1} が推計誤差を含む可能性があることから、PLM に基づく期待は合理的期待と一致しない可能性がある⁴。

次に、(6) 式のインフレ期待を (1) 式のインフレ率決定モデルに導入すると、下記の (7) 式が導かれる。

$$\pi_t = \mu + \theta \cdot \tilde{a}_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (7)$$

この式は、適応的学習下で、インフレ率が実際に決定される変動法則を表しており、これを「ALM (Actual Law of Motion)」と呼ぶ。

このように、適応的学習のフレームワークでは、PLM と ALM という、2 つの変動法則が存在する。この 2 つの変動法則を関連づける写像関数は、下記のように定義される。

$$T(\tilde{a}_{t-1}) = \mu + \theta \cdot \tilde{a}_{t-1}. \quad (8)$$

適応的学習の文献では、この写像関数は「T-map」と呼ばれている。直観的には、T-map は、PLM が与えられたときに、人々の期待形成と経済活動を通じて、それを ALM へと変換する働きをするものである。

(8) 式で注目すべきなのは、T-map の不動点が、(4) 式の合理的期待均衡と一致することである。すなわち、合理的期待均衡では、2 つの変動法則 (PLM と ALM) が合致する。合理的期待がしばしば、「モデル整合的な期待」と呼ばれるのは、このためである。

適応的学習下では、人々がインフレ率の時系列データを用いて、(5) 式の PLM を推計する。この推計に最も標準的に用いられるアルゴリズムは、「再帰的最小 2 乗法 (Recursive Least Squares: 以下、RLS)」である。これは、人々が、每期最新のデータを用いて最小 2 乗法をかけ直すことによって推計パラメータをアップデートする学習方法であり、本節のモデルでは、下記の (9) 式により表される (RLS についての解説は、補論参照)⁵。

$$\tilde{a}_t = \tilde{a}_{t-1} + \gamma_t(\pi_t - \tilde{a}_{t-1}). \quad (9)$$

4 (6) 式が示すように、適応的学習では、人々は各時点で得られた PLM のパラメータをあたかも真の値であると認識し、その値に基づいて将来への期待を形成する。言い換えると、人々は期待形成に際して、将来、PLM のパラメータが改定される可能性は考慮しない。適応的学習による期待形成が「限定合理的 (bounded rational)」であるとみなされる大きな理由は、この点にある。

5 本節のモデルでは、(5) 式の PLM で推計されるパラメータが定数項のみであるが、より一般的なモデルでは、PLM に定数項以外のパラメータが含まれる。その場合、RLS のアルゴリズムはパラメータの遷移過程だけでなく、説明変数のモーメント行列の遷移過程が含まれる。この点については、本稿の補論や Evans and Honkapohja [2001] を参照。

上式の直観的解釈は、以下のとおりである。 $t-1$ 期において、人々が、主観的パラメータ \tilde{a}_{t-1} を持ち、(6)式より、 t 期のインフレ率を \tilde{a}_{t-1} と予想している ($E_{t-1}^* \pi_t = \tilde{a}_{t-1}$) とする。 t 期になると、インフレ率の実現値 (π_t) が観察されるが、その値は、必ずしも \tilde{a}_{t-1} と一致していない。このとき、インフレ率の予測誤差 ($\pi_t - \tilde{a}_{t-1}$) の原因としては、①インフレ率に対する攪乱ショックが生じたこと、②インフレ予測モデルに推計誤差があることの2通りが考えられる。人々は、予測誤差の少なくとも一部は、②の要因に起因すると考え、その情報を用いて PLM の主観的パラメータを \tilde{a}_t にアップデートする。このアップデートのプロセスが、学習に相当する。

(9)式の中の γ_t は、学習の「ゲイン (gain)」と呼ばれており、学習に際し、直近の情報をどの程度重視するかを決めるパラメータであり、予測誤差を一定とすれば、ゲインが大きいほど、パラメータの改定幅は大きくなる。適応的学習において、最も標準的に用いられるゲインの設定は、下記のとおりである。

$$\gamma_t = t^{-1}. \quad (10)$$

(10)式は、データのサンプル数が増加するにつれて、ゲインの値を減衰させることを意味しており、このようなゲインを「減衰型ゲイン (decreasing gain)」と呼んでいる。減衰型ゲインの場合、パラメータの初期値 (\tilde{a}_0) を適切に設定すると、すべてのサンプルを用いて最小2乗法を每期かけ直すことと同値になることが知られており、多くの分析で用いられている。

減衰型ゲイン以外によく用いられるゲインの設定方法は、下記のようにゲインを定数値に設定するものである。

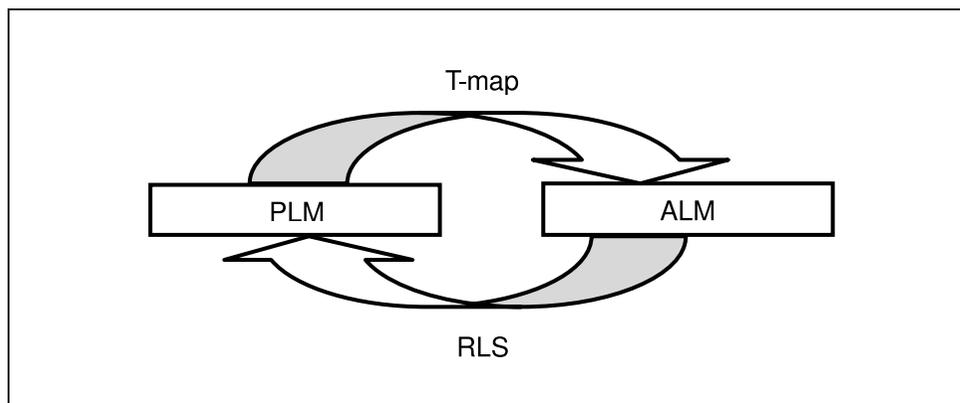
$$\gamma_t = \gamma. \quad (11)$$

(11)式のゲインは「コンスタント・ゲイン」と呼ばれている。コンスタント・ゲインによる学習は、減衰型ゲインの場合と異なり、サンプル数が蓄積しても、直近の予測誤差に対する重視の度合いを減少させない。このような学習方法は、経済構造に常に変化が生じうるような状況下で用いられると考えられている。

以上の説明を纏めると、適応的学習の分析フレームワークでは、PLM と ALM という2つの変動法則が存在し、その間に双方向のフィードバック関係がある。双方向のフィードバック関係とは、①T-map によって表される「PLM から ALM へ」という因果関係と、②RLS により表される「ALM から PLM へ」という因果関係である (図1参照)。

適応的学習を導入した分析の最も主要な関心は、この双方向のフィードバック関係がある場合に、経済が合理的期待均衡へと収束するかということである。すなわち、仮に初期時点で人々が変動法則に関するミス・パーセプションを持つとしても、適応的学習を通じてそのミス・パーセプションが解消され、経済が合理的期待均衡に収束するかどうかという点を分析する研究が多くなっている。適応的学習に關す

図1 適応的学習におけるフィードバック関係



る文献では、この収束条件を、合理的期待均衡の「学習可能性 (learnability)」または「学習下での安定性 (stability under learning)」と呼んでいる⁶。

一般に、ある合理的期待均衡が学習可能性を満たすかどうかは、適応的学習のアルゴリズムに依存する。しかし、減衰型ゲインの RLS を用いた場合、合理的期待均衡の学習可能性は、「E-stability」と呼ばれる条件で保証されることが明らかにされている。E-stability とは、「推計モデルのパラメータ (\tilde{a}) が、RLS のアルゴリズムのもとで、合理的期待均衡でのパラメータ (a) の近傍で、局所的・漸近的に安定であること」と定義される。E-stability が学習可能性の必要十分条件となることは、「E-stability の原則」と呼ばれている^{7,8}。

E-stability 条件を、本節のモデルに即して説明すると、下記のとおりである。まず、推計パラメータ \tilde{a}_t が一定値 \tilde{a} に収束している状況を想定しよう。このとき、確率近似の手法を用いると、 \tilde{a} の近傍において、(9) 式で表される RLS のアルゴリズムは、下記の常微分方程式 (Ordinary Differential Equation: 以下、ODE) に関連づけられる。

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tau} = h(\tilde{a}) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[\pi_t - \tilde{a}_{t-1}] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[\mu + \theta \cdot \tilde{a}_{t-1} + \varepsilon_t - \tilde{a}_{t-1}]$$

6 学習可能性は、合理的期待均衡の選別基準としての役割を備えている。すなわち、ある合理的期待均衡が学習可能性を満たさないならば、経済の変動法則は、時間が経ってもその合理的期待均衡には収束しない。したがって、学習可能性を満たさない合理的期待均衡は、実現する可能性が低いと考えられている。

7 E-stability の原則は、Marcet and Sargent [1989] によって、確率近似 (stochastic approximation) の手法を用いて証明されている。確率近似の手法とその数学的背景については、Evans and Honkapohja [2001] の Chapter 5-7 を参照されたい。

8 E-stability の原則は、減衰型ゲインの RLS のもとで成立するものであり、それ以外の学習アルゴリズムのもとでは、必ずしも成立しない。しかし、例えば (11) 式のようなコンスタント・ゲインを用いた場合には、コンスタント・ゲインの値 (γ) が十分に小さいと、E-stability の原則が近似的には成立することが知られている。すなわち、コンスタント・ゲインの場合には、時間が経ってもゲインが減衰しないので、パラメータの推定値が一点に収束することはないが、ゲインの値が小さいとき、E-stability が満たされていれば、パラメータの推定値は合理的期待均衡近傍の分布に収束することが知られている。

$$= \mu + (\theta - 1)\tilde{a}. \tag{12}$$

(12) 式の τ は、人々が PLM を改定するうえでの、認識上 (notional) あるいは人工的 (artificial) な時間の単位を表す。

一般に、ODE がある合理的期待均衡に関して漸近的・局所的に安定となる必要十分条件は、その均衡で、ODE に関するヤコビアン行列のすべての固有値の実数部分が負であることである。ただし、(12) 式は単一変数の ODE であるため、この条件は単純であり、下記で与えられる。

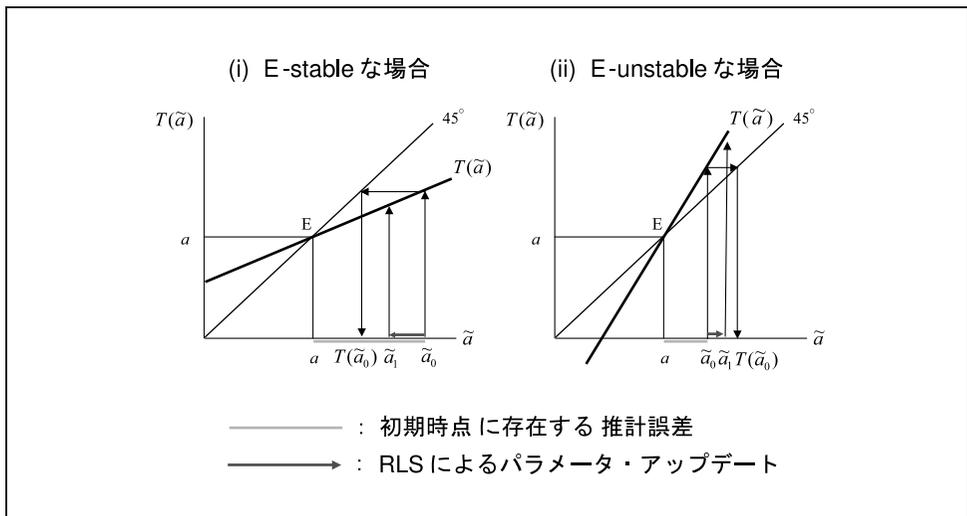
$$Dh(a) = \theta - 1 < 0. \tag{13}$$

このように、本節のインフレ率決定モデルでは、合理的期待均衡解 (MSV 解) の E-stability 条件は、 θ が 1 よりも小さいことである。この結果は、図 2 により視覚的・直観的に把握できる。

図 2 の (i) は、 θ が 1 より小さく、T-map の傾きが 45 度線よりも緩やかなケースを表す。逆に、(ii) は、 θ が 1 より大きく、T-map の傾きが 45 度よりも急なケースを表す。

いま、0 期にモデルの推計誤差が存在し、PLM のパラメータが \tilde{a}_0 であったとする。このとき、ALM のパラメータは T-map を通じて $T(\tilde{a}_0)$ に写像されるが、(i) の場合、写像によって、 $T(\tilde{a}_0)$ は \tilde{a}_0 よりも a に近づく。このため、仮に 1 期に攪乱ショックが生じなければ、学習によって、1 期の PLM のパラメータ \tilde{a}_1 は、0 期のパラメータ \tilde{a}_0 よりも、 a に近づく。このように、T-map の傾きが 45 度線よりも緩やかな場合 (合理的期待均衡が E-stable である場合)、人々が初期時点で推計誤差を持つとしても、適応的学習のフィードバック関係を通じて、推計誤差が解消するメカニズム

図 2 合理的期待均衡の E-stability



が存在する。逆に、(ii) のケースのように、T-map の傾きが 45 度線よりも急な場合（合理的期待均衡が E-unstable である場合）、モデルの推計誤差は学習によっては減少せず、経済は合理的期待均衡に収束しない。

以上、単純なインフレ率決定モデルを用いて、適応的学習のフレームワークを紹介した。本節のモデルはインフレ率のみの単一変数モデルであり、その場合、E-stability 条件は θ というインフレ率決定式に含まれる構造パラメータのみに依存した⁹。しかし、近年の動学的一般均衡モデル、その中でも特に金融政策の分析に最も頻繁に用いられるニューケインジアン・モデルでは、合理的期待均衡解の学習可能性が、金融政策ルールのパラメータに依存することが明らかにされており、多くの政策的含意が導出されている。次節以降では、それらの研究について紹介する。

3. テイラー・ルールと適応的学習

本節以降では、金融政策分析に関する最も標準的なモデルである、ニューケインジアン・モデルに、適応的学習を導入した研究について紹介する。まず、本節では、金融政策について、名目金利をインフレ率と産出ギャップに対して反応させる、いわゆる「テイラー・ルール」を導入した研究について紹介する。

(1) テイラー・ルールと学習可能性：最も単純なケース

はじめに、ニューケインジアン・モデルにテイラー・ルールを導入して合理的期待均衡解の学習可能性を最初に検討した研究として、Bullard and Mitra [2002] を紹介する。同研究で用いているニューケインジアン・モデルは、Woodford [2003] や Galí [2008] などを中心に扱われているものであり、具体的には下記の 2 式で構成される。

$$x_t = E_t^P x_{t+1} - \sigma(i_t - E_t^P \pi_{t+1}) + g_t, \quad (14)$$

$$\pi_t = \beta E_t^P \pi_{t+1} + \kappa x_t. \quad (15)$$

x_t は産出ギャップ、 π_t はインフレ率、 i_t は名目金利、 g_t は需要ショックであり、各変数は定常状態からの乖離幅として定義される。 σ 、 β 、 κ は構造パラメータである。需要ショックは下記の AR(1) モデルに従うと仮定する (ε_t はホワイト・ノイズ)。

$$g_t = \rho g_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (16)$$

⁹ 本節のモデルでは、MSV 解は (4) 式のみであり、複数均衡は存在しなかった。しかし、より一般的なモデルでは、複数の MSV 解が発生する可能性があるうえ、MSV 解以外の形状を持つ合理的期待均衡解が生じる可能性もあり、その場合、学習可能性は、均衡の選別基準として用いられる。なお、複数の均衡が学習可能性を満たす場合に、どの均衡に収束するかは、PLM のパラメータの初期値や、ショックの履歴に依存する。

(14) 式は、消費者の効用最適化問題から導かれるオイラー方程式を、産出ギャップに関して書き直したものであり、「動学的 IS 曲線」と呼ばれている。(15) 式は、価格の粘着性があるもとで、独占的企業の利潤最大化問題から導かれるオイラー方程式を整理したもので、「ニューケインジアン・フィリップス曲線」と呼ばれている。

なお、 E_t^P は民間主体が実際に形成する期待を表し、必ずしも合理的期待とは限らない。すなわち、民間主体は、各時点で実際に持つ知識を用いて期待形成し、その期待を所与としたうえで、オイラー方程式に従った行動を取ると仮定する。

金融政策ルールは、下記のテイラー・ルールを仮定する。

$$i_t = \phi_\pi \pi_t + \phi_x x_t. \quad (17)$$

ϕ_π は金融政策のインフレ反応度、 ϕ_x は産出ギャップ反応度である。

以上より、モデルは動学的 IS 曲線、ニューケインジアン・フィリップス曲線、テイラー・ルールの 3 式により構成されるが、(17) 式のテイラー・ルールを (14) 式に代入すると、このモデルは下記のシステムとして表記できる。

$$z_t = A + BE_t^P z_{t+1} + C g_t. \quad (18)$$

ただし、 $z_t = (x_t, \pi_t)'$ であり、各行列は下記のように定義される。

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{1 + \sigma(\phi_x + \kappa\phi_\pi)} \begin{pmatrix} 1 & \sigma(1 - \beta)\phi_\pi \\ \kappa & \kappa\sigma + \beta(1 + \sigma\phi_x) \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{1}{1 + \sigma(\phi_x + \kappa\phi_\pi)} \begin{pmatrix} 1 \\ \kappa \end{pmatrix}.$$

このモデルの MSV 解は、下記の形状を取る (a と b は 2×1 のベクトル)。

$$z_t = a + b g_t. \quad (19)$$

2 節と同様に、(19) 式の MSV 解の行列を未定係数法により求めると、一意に求まる事が確認できる¹⁰。

適応的学習下で、 t 期の期待形成に際して、民間主体は MSV 解と同一の形状の PLM を持つと仮定する。

$$z_t = \tilde{a}_{t-1} + \tilde{b}_{t-1} g_t. \quad (20)$$

この PLM を前提とすると、民間主体の期待は下式ようになる。

10 具体的には、MSV 解は $a = (0, 0)'$ 、 $b = \frac{1}{(1-\rho+\sigma\phi_x)(1-\beta\rho)+(\phi_x-\rho)\kappa\sigma} (1-\beta\rho, \kappa)'$ である。

$$E_t^P z_{t+1} = \tilde{a}_{t-1} + \tilde{b}_{t-1} \rho g_t. \quad (21)$$

この期待を (18) 式に代入することにより、ALM が下記のように導かれる。

$$z_t = A + B\tilde{a}_{t-1} + (\rho B\tilde{b}_{t-1} + C)g_t. \quad (22)$$

(20) 式の PLM を (22) 式の ALM へと写像する T-map は下記のとおりである。

$$T(\tilde{a}_{t-1}, \tilde{b}_{t-1}) = (A + B\tilde{a}_{t-1}, \rho B\tilde{b}_{t-1} + C). \quad (23)$$

いま、適応的学習のアルゴリズムが減衰型ゲインの RLS であると仮定する。このとき、2 節で説明したように、E-stability の原則が成立するため、MSV 解の学習可能性は、E-stability 条件によって与えられる。(23) 式の T-map を用いると、E-stability 条件を規定する ODE は、下記により与えられる。

$$\frac{d}{d\tau}(\tilde{a}, \tilde{b}) = T(\tilde{a}, \tilde{b}) - (\tilde{a}, \tilde{b}). \quad (24)$$

このとき、(19) 式の MSV 解の E-stability 条件とは、その MSV 解において、(24) 式の ODE に関するヤコビアン行列のすべての固有値の実数部分が負であることである。Bullard and Mitra [2002] は、このことの必要十分条件が、具体的には下式により与えられることを証明した。

$$\phi_\pi + \frac{1-\beta}{\kappa}\phi_x > 1. \quad (25)$$

(25) 式は、テイラー・ルールの反応度 ϕ_π 、 ϕ_x を一定以上に設定することを示している。(25) 式を解釈するうえでは、(15) 式において、インフレ率が恒常的に 1% 上昇すると、産出ギャップが $(1-\beta)/\kappa\%$ 上昇することに注目されたい。すなわち、(25) 式は、「インフレ率が恒常的に 1% 上昇することに対し、名目金利を長期的に 1% 以上引き上げるべき」という、いわゆる「テイラー・プリンシプル」を表している。

テイラー・プリンシプルが学習可能性の必要十分条件となるという結果について、Bullard and Mitra [2002] は以下のように説明している。いま、民間のインフレ期待が合理的期待よりも上振れたとしよう。このとき、テイラー・プリンシプルのもとでは、長期的には、名目金利の上昇幅がインフレ期待の上昇幅を上回るため、実質金利が上昇する。これが動学的 IS 曲線を通じて産出ギャップを低下させ、ニューケインジアン・フィリップス曲線を通じてインフレ率を低下させる。そして、このことを民間主体が学習する結果、インフレ期待の上振れは修正され、合理的期待へと回帰する。一方、テイラー・プリンシプルが満たされない場合、インフレ期待の上振れに対し実質金利が低下するため、インフレ期待は合理的期待よりもさらに上振れ、合理的期待均衡に収束しない。

Bullard and Mitra [2002] はさらに、テイラー・ルールの定式化に関して、幾つかのバリエーションを試している。具体的には、(17) 式の右辺に含まれるインフレ率や産出ギャップのデータを、当期の値 (π_t, x_t) ではなく、1 期先の期待 $(E_t^P \pi_{t+1}, E_t^P x_{t+1})$ や、1 期前のラグ値 (π_{t-1}, x_{t-1}) 、さらには 1 期前に形成した当期の値への期待 $(E_{t-1}^P \pi_t, E_{t-1}^P x_t)$ に置き換えている。その結果、これらのバリエーションを持たせても、テイラー・プリンシプルが MSV 解の E-stability 条件に一致することを確認している。このことは、(14)、(15) 式のニューケインジアン・モデルにおいては、テイラー・プリンシプルと学習可能性の対応関係が、かなり頑健に成立することを意味している。

(2) テイラー・ルールと適応的学習：より複雑なケース

Bullard and Mitra [2002] が示したように、標準的なニューケインジアン・モデルにテイラー・ルールを導入した場合、最も単純なケースでは、合理的期待均衡の学習可能性の必要十分条件は、テイラー・プリンシプルによって与えられた。しかし、最近の研究では、より複雑な状況設定を考えた場合、学習可能性の必要十分条件は、Bullard and Mitra [2002] が示した条件式とは異なるものになることが示されている。以下では、そのような状況設定を幾つか紹介する。

イ. 民間主体と中央銀行の学習アルゴリズムが異質である場合

1 つめの事例は、Honkapohja and Mitra [2005] によって検討された、民間主体と中央銀行の間に学習アルゴリズムの異質性がある場合である。いま、中央銀行が、インフレ率、産出ギャップに関し、民間主体とは異なる予測 $(E_t^{CB} \pi_{t+1}, E_t^{CB} x_{t+1})$ を形成し、下記のテイラー・ルールに従う状況を想定しよう。

$$i_t = \phi_\pi E_t^{CB} \pi_{t+1} + \phi_x E_t^{CB} x_{t+1}. \quad (26)$$

このとき、民間主体と中央銀行の間で、適応的学習に用いるアルゴリズムが異なると仮定しよう。具体的には、民間主体と中央銀行がコンスタント・ゲインの RLS を用いて学習しているが、コンスタント・ゲインの値が、民間主体は γ^P 、中央銀行は γ^{CB} であり、 γ^P と γ^{CB} が異なる可能性があるとして仮定しよう。

この仮定のもとで、Honkapohja and Mitra [2005] は、(14)、(15)、(26) 式のモデルの MSV 解の学習可能性の必要条件が、下記 2 式になることを証明した。

$$\phi_\pi + \frac{1-\beta}{\kappa} \phi_x > 1, \quad (27)$$

$$\phi_\pi + \frac{1}{\kappa} \phi_x > 1 + \frac{\gamma^P}{\gamma^{CB}} \cdot \frac{\sigma\kappa + \beta - 1}{\sigma\kappa}. \quad (28)$$

(27) 式は (25) 式と同じ、テイラー・プリンシプルである。一方、(28) 式は追加的な条件式であり、民間主体と中央銀行のゲインの比 (γ^P/γ^{CB}) に依存する。この結果は、テイラー・プリンシプルが満たされても、(28) 式が満たされなければ、MSV 解は学習可能でないことを意味する。

いま、 $\sigma\kappa + \beta > 1$ が満たされるとしよう¹¹。このとき、仮に民間主体と中央銀行のゲインの比 (γ^P/γ^{CB}) が大きいと、政策反応度 ϕ_π 、 ϕ_x を大きく設定しない限り、(28) 式が満たされない。つまり、ゲイン比が大きいとき、学習可能性を満たすには、政策反応度が、テイラー・プリンシプルよりも大きく設定されなければならない。

この結果を解釈するには、(26) 式の政策ルールを (14)、(15) 式に代入し、下式のインフレ率決定式を導くとわかりやすい。

$$\pi_t = \{(\beta + \kappa\sigma)E_t^P \pi_{t+1} + \kappa E_t^P x_{t+1}\} - \kappa\sigma(\phi_\pi E_t^{CB} \pi_{t+1} + \phi_x E_t^{CB} x_{t+1}) + \kappa g_t. \quad (29)$$

(29) 式は、インフレ率が、民間主体の期待 ($E_t^P \pi_{t+1}$, $E_t^P x_{t+1}$) と中央銀行の期待 ($E_t^{CB} \pi_{t+1}$, $E_t^{CB} x_{t+1}$) の「綱引き」によって決定されることを示す。すなわち、インフレ率に対し、民間主体の期待はプラスに働き、中央銀行の期待はマイナスに働くため、両者の相対的な大きさによって、当期のインフレ率が上昇するか低下するかが決まる。

民間主体のゲインが大きい場合、正の需要ショックに対し、民間主体の推計する PLM のパラメータ (特に定数項) が大きく上昇する。その結果、民間主体のインフレ期待と産出ギャップへの期待が、合理的期待を上回って、大きく上昇する。一方、中央銀行のゲインが小さいと、中央銀行のインフレ期待と産出ギャップへの期待の上昇幅は限定的になる。このとき、政策反応度 ϕ_π 、 ϕ_x があまり大きくないと、民間主体の期待の上昇効果が、中央銀行の期待の上昇効果を凌駕し、インフレ率に上昇圧力がかかる。その結果、民間主体のインフレ期待はさらに上昇し、経済は合理的期待均衡へと収束しない。一方、政策反応度 ϕ_π 、 ϕ_x が大きいと、たとえ中央銀行の期待上昇が民間主体の期待上昇を下回ったとしても、金融政策によるインフレ抑制効果が強く働くため、(29) 式よりインフレ率は低下し、インフレ期待は合理的期待へと回帰する。

ロ. 民間主体が中央銀行の予測を用いて適応的学習を行う場合

2 つめの事例は、民間主体が中央銀行の予測を用いて学習を行う場合である。Bullard and Mitra [2002] や Honkapohja and Mitra [2005] では、民間主体と中央銀行の学習は独立 (ないし同時) に行われることを仮定していたが、現実の学習過程では、中

11 β は割引因子であり、通常は 1 に非常に近い値 (0.99 など) を取るので、この条件は広範なパラメータ・セットのもとで成立する。

中央銀行の公表する経済見通しを参考にして、民間主体が予測を形成する可能性が考えられる¹²。

Muto [2008] は、中央銀行が公表した予測の情報を用いて、民間主体が学習を行うと仮定し、その場合の合理的期待均衡の学習可能性を分析した。モデルは本節(2)イ.同様に、(14)、(15)、(26)式である。なお、解析的な分析結果を示すため、ここでは、(26)式において、中央銀行は産出ギャップと民間主体の期待の変動を完全に相殺している場合 ($\phi_x = \sigma^{-1}$ かつ $E_t^{CB} x_{t+1} = E_t^P x_{t+1}$) を考える¹³。この場合、経済のシステムは、インフレ率に関する一本の方程式に還元される。

$$\pi_t = (\beta + \kappa\sigma)E_t^P \pi_{t+1} - \kappa\sigma\phi_\pi E_t^{CB} \pi_{t+1} + \kappa g_t. \quad (30)$$

(30)式において、民間主体と中央銀行のインフレ期待はともに適応的学習により形成されるが、両者の学習には因果関係が存在すると仮定する。具体的には、まず、中央銀行が減衰型ゲインの RLS を用いて、(30)式の MSV 解と同じ形状を持つ、下記の PLM を推計する。

$$\pi_t = \tilde{c}_{t-1} + \tilde{d}_{t-1} g_t. \quad (31)$$

そして、(31)式をもとに下記の予測を形成し、これを民間主体に対し公表する。

$$E_t^{CB} \pi_{t+1} = \tilde{c}_{t-1} + \tilde{d}_{t-1} \rho g_t. \quad (32)$$

民間主体は、(経済全体に生じる) 需要ショックに関する情報を持ち合わせていないと仮定する。このとき、適応的学習に際して、需要ショックの情報を用いることはできない。しかし、中央銀行の予測の情報は公表されているため、これを用いて自己の予測に際して利用することはできる¹⁴。その際、民間主体は、中央銀行予測の予測精度がどの程度高いかを判断するために、下記(33)式を減衰型ゲインの RLS で推計すると仮定する。

$$\pi_t = \tilde{e}_{t-1} + \tilde{f}_{t-1} E_{t-1}^{CB} \pi_t. \quad (33)$$

民間主体は、(33)式を推計して、中央銀行の予測パフォーマンスを評価する。予測パフォーマンスが良好であれば、 \tilde{e}_{t-1} は 0 に、 \tilde{f}_{t-1} は 1 に近い値を取る。逆に、予

12 Fujiwara [2005] は、日本におけるサーベイ・データを見ると、民間主体の形成する予測は、中央銀行が公表する予測の影響を有意に受けていることが確認されるため、「学習を導入するのであれば、中央銀行が期待形成の先導者 (leader) であり、民間主体が追随者 (follower) である状況を想定することがよいであろう」と述べている。

13 (26)式に制約がない場合も、下記の議論が成立することは数値的に示すことができる。

14 民間主体は中央銀行が予測形成に用いているモデル ((31)式) を知らないと仮定する。

測パフォーマンスが悪ければ、 \tilde{e}_{t-1} はインフレ率のサンプル平均値に近づき、 \tilde{f}_{t-1} は 0 に近づく。

民間主体は過去のデータを用いて (33) 式を推計したうえで、中央銀行の当期の予測を用いることにより、自己の予測を下記のように計算する。

$$E_t^P \pi_{t+1} = \tilde{e}_{t-1} + \tilde{f}_{t-1} E_t^{CB} \pi_{t+1}. \quad (34)$$

Muto [2008] は、中央銀行と民間主体のインフレ期待が (32)、(34) 式で形成される時、このモデルの均衡 (T-map の不動点) は一意に求まり、そこでは中央銀行と民間主体は、ともに合理的期待を形成することを確認した。

そして、この MSV 解の E-stability 条件を求めると、 $\sigma\kappa + \beta > 1$ の場合、E-stability の必要十分条件は以下のようになることを確認した。

$$\phi_\pi > 2 + \frac{2(\beta - 1)}{\kappa\sigma}. \quad (35)$$

上記 (35) 式は、 $\sigma\kappa + \beta > 1$ が成立するもとは、テイラー・プリンシプルよりも厳しい条件である。これは、前掲 (25) 式のテイラー・プリンシプルで、 $\phi_x = \sigma^{-1}$ と置いた場合と比較すると、(35) 式の方が、求められるインフレ反応度 (ϕ_π) の水準が高いことにより、理解できる。このことは、民間主体が中央銀行のインフレ予測を用いて学習する場合には、合理的期待均衡の E-stability を満たすために、中央銀行はテイラー・プリンシプルが求めるよりも強い政策反応を、自己のインフレ予測に対して行う必要があることを示している。

この結果が生じるのは、この状況下では、民間主体の予測誤差 (期待の合理的期待からの乖離) が、中央銀行の予測誤差よりも、大きくなるからである。これは、(34) 式において、民間主体の予測誤差の源泉が、①民間主体の PLM に含まれるパラメータ ($\tilde{e}_{t-1}, \tilde{f}_{t-1}$) の推計誤差と、②中央銀行予測 ($E_t^{CB} \pi_{t+1}$) に含まれる誤差の 2 種類であるためである¹⁵。

中央銀行は、(26) 式のテイラー・ルールの中に、中央銀行自身のインフレ予測 ($E_t^{CB} \pi_{t+1}$) を導入している。このため、テイラー・プリンシプルさえ満たせば、中央銀行のインフレ予測誤差に対し、名目金利が 1 対 1 以上に反応する。しかし、民間主体のインフレ予測誤差が中央銀行のインフレ予測誤差より大きいために、この政策反応は、民間主体のインフレ予測誤差に対し、1 対 1 よりも小さい反応になってしまう。つまり、民間主体からみると、インフレ期待の上昇に対して、実質金利が低下し、金融緩和が行われる結果、民間主体のインフレ期待はさらに上昇し、合理的期待に収束しない。この状況を回避するには、中央銀行は、テイラー・プリンシプルよりも強い政策反応を行わなければならない。

15 このモデルの均衡では民間主体と中央銀行が同質的期待を形成するため、均衡では $\tilde{e} = 0$ 、 $\tilde{f} = 1$ が成立する。 $\tilde{f} = 1$ であることから、均衡近傍では、(34) 式の右辺第 2 項を通じて、中央銀行の予測誤差が民間主体の予測にはほぼ同程度の誤差をもたらす。それに加えて、民間主体は (34) 式の右辺第 1 項のパラメータ (\tilde{e}_{t-1}) に関しても推計誤差を抱えるため、民間主体の予測誤差は中央銀行の予測誤差よりも大幅になる。

ハ. 経済構造がより複雑な場合

3つめの事例は、経済構造が、(14)、(15)式ほど単純なニューケインジアン・モデルでは表されない場合である。この一例として、Kurozumi [2006] は、民間主体の効用関数において、消費とマネーが分離不能 (non-separable) である場合に関して分析している。

(14)、(15)式のニューケインジアン・モデルは、消費者の効用関数において、消費とマネーが分離可能であるという前提下で導出されている。しかし、Woodford [2003] の Chapter 4 では、効用関数において消費とマネーが分離不可能な場合、経済のシステムは下記の3式で表されることを示している。

$$y_t = E_t^P y_{t+1} - \sigma \{i_t - E_t^P \pi_{t+1} + \chi(E_t^P m_{t+1} - m_t)\} + g_t, \quad (36)$$

$$\pi_t = \beta E_t^P \pi_{t+1} + \kappa y_t - \frac{\kappa \chi}{\omega + \sigma^{-1}} m_t + u_t, \quad (37)$$

$$m_t = \eta_y y_t - \eta_i i_t + v_t. \quad (38)$$

y_t は産出量、 m_t は実質マネー残高 (期末値) の定常状態からの対数乖離幅であり、 u_t は効用関数と生産関数へのショックの混合、 v_t はマネー需要へのショックである。また、 ω が実質限界費用の産出量に対する弾力性、 η_y 、 η_i はマネー需要の産出量、名目金利に対する弾力性である。さらに、 χ は下記で定義されるパラメータである。

$$\chi \equiv \frac{\bar{m} U_{cm}}{U_c}.$$

\bar{m} は実質マネー残高の定常値、 U_{cm} は効用関数における消費とマネーの (定常状態での) 交差偏弾力性、 U_c は消費の (定常状態での) 限界効用である。

なお、このモデルにおける自然産出量 (価格粘性がない場合に実現する産出量) は、下記のとおりである。

$$y_t^n = \frac{\kappa \chi v_t - (\omega + \sigma^{-1}) u_t}{\kappa(\omega + \sigma^{-1} - \eta_y \chi)}. \quad (39)$$

中央銀行は、下記のテイラー・ルールを採用する。

$$i_t = \phi_\pi \pi_t + \phi_y (y_t - y_t^n). \quad (40)$$

(36)~(40)式において、 χ がゼロの場合——すなわち、効用関数で消費とマネーが分離可能な場合 ($U_{cm} = 0$) ——には、経済のシステムは、Bullard and Mitra [2002] が分析した標準的ニューケインジアン・モデルに完全に一致する。しかし、消費とマネーが分離不能の場合、経済のシステムは Bullard and Mitra [2002] のモデルとは異なる。

Kurozumi [2006] は、 χ がゼロでない場合の合理的期待均衡の MSV 解の E-stability 条件が下記により与えられることを証明している¹⁶。

$$\phi_{\pi} + \left(\frac{(1 - \beta)(\omega + \sigma^{-1})}{\kappa(\omega + \sigma^{-1} - \eta_y \chi)} - \frac{\eta_i \chi}{\omega + \sigma^{-1} - \eta_y \chi} \right) \phi_y > 1. \quad (41)$$

この E-stability 条件は、 χ がゼロでない場合、Bullard and Mitra [2002] が導いた学習可能性の必要十分条件 ((25) 式) と一致しない。Kurozumi [2006] は、各パラメータをカリブレートしたうえで、(41) 式の条件がどのように (25) 式と異なるかを確認している。その結果、先行研究に基づいて設定したパラメータ・セットのもとでは、 χ がある閾値を超えた場合、産出ギャップへの政策反応度 (ϕ_y) を大きく設定しすぎると、E-stability が満たされないことを示している¹⁷。

この結果が得られるのは、モデルの構造が、Bullard and Mitra [2002] のモデルより複雑であるためである。すなわち、効用関数において消費とマネーが分離不能の場合、(36)、(37) 式の動学的 IS 曲線およびニューケインジアン・フィリップス曲線に、実質マネー残高が直接的な影響をもたらす。このとき、中央銀行が名目金利を操作すると、そのことが (38) 式を通じて実質マネー需要を変動させ、(36)、(37) 式を通じて直接的に産出ギャップとインフレ率に影響するという、Bullard and Mitra [2002] のモデルにはなかった金融政策の波及経路が存在する。この結果、合理的期待均衡の学習可能性をもたらす条件式は、Bullard and Mitra [2002] とは異なることになる。

このように、より複雑なモデルを用いた場合、テイラー・ルールのもとでの合理的期待均衡の学習可能性の必要十分条件は、最も単純なケースにおいて、Bullard and Mitra [2002] が導いた条件式 ((25) 式) とは異なる可能性がある。最近の研究では、どのような経済構造のもとで、このような現象が生じるかについて、研究が進められている¹⁸。

16 この場合の均衡の一意性の必要十分条件は、(41) 式の E-stability 条件と一致する。このため、(41) 式は MSV 解が一意かつ E-stable であるための必要十分条件である。

17 ただし、産出ギャップへの反応度が仮にゼロの場合には、(41) 式は単純に $\phi_{\pi} > 1$ となるため、テイラー・プリンシプルとして解釈できる。

18 幾つかの研究 (Xiao [2008]、Duffy and Xiao [2007a]、Kurozumi and Van Zandweghe [2008] 等) は、ニューケインジアン・モデルに資本ストックを導入し、テイラー・ルールのもとでの均衡の学習可能性を調べている。これらの研究では、単純に資本ストックを導入しただけでは、学習可能性の必要十分条件は Bullard and Mitra [2002] の条件式 ((25) 式) と変わらないが、資本ストックの導入に伴って、①生産関数の収穫増進、②企業特殊な資本、③金融政策のコスト・チャネルなどが導入されると、学習可能性の必要十分条件が (25) 式とは異なるものになることが示されている。また、Kurozumi and Zandweghe [2007] は、労働市場にサーチを導入したモデルでも、(25) 式が学習可能性の十分条件にならないことを発見している。

(3) テイラー・ルールと収束速度

これまでの、テイラー・ルールのもとでの、合理的期待均衡解の学習可能性について説明した。しかし、学習可能性は、経済が最終的に合理的期待均衡へ到達することのみを保証しており、均衡に至るまでの収束速度 (speed of convergence) については何も規定していない。

テイラー・ルール型の政策ルールを導入して合理的期待均衡への収束速度について分析した研究としては、Ferrero [2007] が挙げられる。彼は、(14)、(15) 式の標準的ニューケインジアン・モデルに、下記のルールを導入している。

$$i_t = \phi_\pi E_t^P \pi_{t+1} + \phi_x E_t^P x_{t+1}. \quad (42)$$

このルールは、民間主体のインフレ率、産出ギャップへの予測に反応するタイプのテイラー・ルールである。このルールは (26) 式のルールにおいて、中央銀行の予測が民間主体の予測と一致する場合とみなすことも可能である。

Ferrero [2007] は、分析の焦点を絞るため、(42) 式のルールの中でも特に、 $\phi_x = \sigma^{-1}$ のケースについて分析している。この場合、経済のシステムは下記のインフレ率決定式に集約できる。

$$\pi_t = \{\beta + \kappa\sigma(1 - \phi_\pi)\} E_t^P \pi_{t+1} + \kappa g_t. \quad (43)$$

単純化のため、需要ショックはホワイト・ノイズ ((16) 式で $\rho = 0$) と仮定する。このとき、MSV 解でのインフレ率は下記のとおりになる。

$$\pi_t = a^\pi + \kappa g_t. \quad (44)$$

なお、MSV 解では $a^\pi = 0$ であるが、適応的学習下で、民間主体は $a^\pi = 0$ であると知らないと仮定する¹⁹。民間主体は、期待形成に際して a^π の値を知る必要があり、これを下記の減衰型ゲインの RLS により学習していると仮定する。

$$\tilde{a}_t^\pi = \tilde{a}_{t-1}^\pi + t^{-1}(\pi_{t-1} - \tilde{a}_{t-1}^\pi). \quad (45)$$

いま、民間主体が t 期において、推計パラメータ \tilde{a}_{t-1}^π を持つとすると、民間主体のインフレ期待は下記のとおりになる。

$$E_t^P \pi_{t+1} = \tilde{a}_{t-1}^\pi. \quad (46)$$

(46) 式を (43) 式に代入すると、ALM は下記のとおりになる。

19 これは、民間主体がインフレ率の定常値を知らないことを意味する。

$$\pi_t = (\beta + \kappa\sigma(1 - \phi_\pi))\tilde{a}_{t-1}^\pi + \kappa g_t. \quad (47)$$

PLM のパラメータ \tilde{a}_{t-1}^π を ALM に写像する T-map は下記のとおりである。

$$T(\tilde{a}_{t-1}^\pi) = (\beta + \kappa\sigma(1 - \phi_\pi))\tilde{a}_{t-1}^\pi. \quad (48)$$

この T-map に関連づけられる ODE は、下記のとおりである。

$$\frac{d\tilde{a}^\pi}{d\tau} = T(\tilde{a}^\pi) - \tilde{a}^\pi. \quad (49)$$

MSV 解の E-stability 条件は、上記の ODE が MSV 解のパラメータ a^π の近傍で局所的・漸近的に安定であることであり、下記により与えられる。

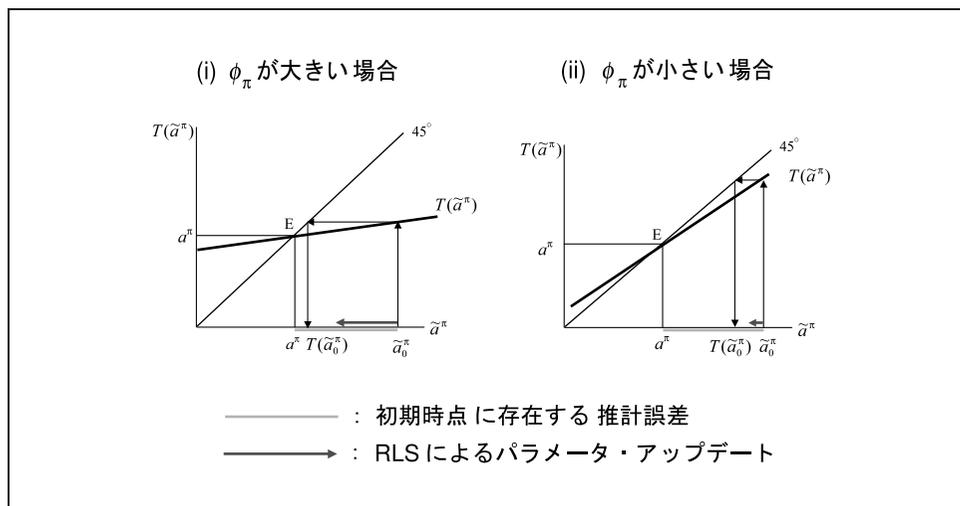
$$\phi_\pi > 1 + \frac{\beta - 1}{\kappa\sigma}. \quad (50)$$

この E-stability 条件は、(25) 式のテイラー・プリンシプルにおいて、 $\phi_x = \sigma^{-1}$ としたケースと同じである。Ferrero [2007] は、(50) 式が満たされるもとの、合理的期待均衡への収束速度が、政策ルールのインフレ反応度 (ϕ_π) が大きい場合に、早くなることを示した。この結果は、図3により理解できる。

図3の (i) は、インフレ反応度 ϕ_π が大きい場合を表し、(ii) は ϕ_π が小さい場合を表す。(i)、(ii) のどちらのケースも T-map の傾きは 45 度線よりも緩やかなため、MSV 解に相当する E 点は、どちらのケースでも E-stability を満たしている。

しかし、(i) の場合には、T-map の傾きが非常に緩やかであり、初期時点で PLM のパラメータ (\tilde{a}_0^π) に推計誤差が生じた場合、T-map を通じて、ALM のパラメータ

図3 政策反応度と収束速度



($T(\tilde{a}_0^\pi)$) が均衡値 (a^π) に向けて大きく戻される。このため、攪乱ショックが生じなければ、学習により、次期の PLM のパラメータは均衡値に近い値を取る。一方、(ii) の場合は、T-map の傾きが 45 度にかなり近いいため、初期時点での PLM の推計誤差が T-map により是正される度合いが小さくなり、均衡値への収束は遅くなる。

この結果は、中央銀行が民間のインフレ期待に強く反応すると、経済が合理的期待均衡に速やかに収束することを意味する。これは、直観的には、民間のインフレ期待が合理的期待から乖離して不安定化したとき、中央銀行が民間のインフレ期待に強く反応すると、実際のインフレ率が定常値に近づき、民間主体がそのことを観察することによって、インフレ期待が合理的期待に近づくということである。

以上のように、金融政策ルールの政策反応度は、合理的期待均衡の学習可能性だけでなく、均衡までの収束速度にも重要な影響を与える。このことは、テイラー・ルールだけではなく、適応的学習下での最適金融政策に対しても、重要な政策含意を持つ。この点については、4 節で後述する。

4. 最適金融政策と適応的学習

本節では、最適金融政策と適応的学習に関する研究を紹介する。適応的学習を導入した最適金融政策分析は 2 種類に分類される。第 1 に、合理的期待の仮定下で導かれた最適金融政策が、学習可能性を満たすかどうかという点を検討したものがあある。第 2 に、民間主体が適応的学習を行うもとの最適金融政策を検討したものがあある。以下ではこの 2 種類の研究について紹介する。

(1) 合理的期待下の最適金融政策と学習可能性

ここでは、合理的期待の仮定のもとで導出された最適金融政策が、学習可能性を満たすか否かを検討した研究を紹介する。ニューケインジアン・モデルに基づく分析の多くでは、合理的期待を仮定したうえで、中央銀行の損失関数（ないし社会の厚生関数）を最適化する最適金融政策を導出しているが、それらの分析では、その金融政策のもとでの合理的期待均衡が学習可能性を満たすかどうかは必ずしも検討されていない。仮にある政策が合理的期待均衡では最適なパフォーマンスを示すとしても、学習可能性を満たさないのであれば、その政策は、人々の期待の合理的期待からのわずかな乖離に対して、非常に脆弱な特性を持つということができる。

Evans and Honkapohja [2003b] は、Woodford [2003] 等により導出されている最適金融政策の学習可能性を検討した。モデルは標準的ニューケインジアン・モデルであり、(14) 式の動学的 IS 曲線と、下記のニューケインジアン・フィリップス曲線で構成される。

$$\pi_t = \beta E_t^P \pi_{t+1} + \kappa x_t + u_t. \quad (51)$$

u_t は下記の AR(1) モデルに従うコスト・プッシュ・ショックであり、これが金融政策のトレードオフを生じさせる。

$$u_t = \mu u_{t-1} + \zeta_t. \quad (52)$$

中央銀行は、合理的期待の仮定下で、下記の損失関数を最小化すると仮定する²⁰。

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (\lambda x_{t+i}^2 + \pi_{t+i}^2). \quad (53)$$

いま、中央銀行は、民間主体の期待を所与としたうえで、(53) 式を最小化する——すなわち、最適裁量政策 (optimal discretionary policy) を実行する——と仮定しよう²¹。このとき、(51) 式の制約のもとで、(53) 式を最小化するための最適性条件は、下記のように導かれる。

$$\kappa \pi_t + \lambda x_t = 0. \quad (54)$$

(14)、(54) 式を用いると、(54) 式の最適性条件のもとの MSV 解は下記のとおりである。

$$x_t = -\frac{\kappa}{\lambda(1 - \beta\mu) + \kappa^2} u_t, \quad (55)$$

$$\pi_t = \frac{\lambda}{\lambda(1 - \beta\mu) + \kappa^2} u_t. \quad (56)$$

Evans and Honkapohja [2003b] は、合理的期待下で MSV 解と整合的になるルールの 1 つとして、下記のルールを挙げ、「ファンダメンタルズに基づく最適ルール」と呼んでいる。

$$i_t = \psi_u u_t + \psi_g g_t. \quad (57)$$

パラメータは $\psi_u = \sigma^{-1}((1 - \mu)\kappa + \lambda\mu\sigma)/(\lambda(1 - \beta\mu) + \kappa^2)$ 、 $\psi_g = \sigma^{-1}$ である。

彼らは、(57) 式のルールを導入したとき、(55)、(56) 式の MSV 解が学習可能性を満たすかどうかを検討した。その結果、このルールは学習可能性を満たさないことを確認した²²。

20 λ に関して適切な値を設定すると、(53) 式を最小化することは、代表的消費者の効用 (社会厚生) を最大化することと等しくなる。

21 最適コミットメント政策 (optimal commitment policy) の場合の学習可能性については、Evans and Honkapohja [2006] を参照。損失関数に金利のボラティリティが含まれる場合については、Duffy and Xiao [2007b] を参照。

22 なお、(57) 式のルールは、MSV 解の学習可能性だけでなく、合理的期待均衡の一意性も満たさない。つまり、(55)、(56) 式の MSV 解は、(57) 式のルールのもとでは、多数存在する合理的期待均衡解の中の 1 つにすぎない。均衡の一意性と学習可能性の関係については、5 節で後述する。

次に、合理的期待下で (55)、(56) 式の MSV 解を実現するもう 1 つのルールとして、下記の「民間期待に基づく最適ルール」が挙げられる。

$$i_t = \delta_\pi E_t^P \pi_{t+1} + \delta_x E_t^P x_{t+1} + \delta_u u_t + \delta_g g_t. \quad (58)$$

パラメータは、 $\delta_\pi = 1 + (\kappa^2 + \lambda)^{-1} \sigma^{-1} \kappa \beta$ 、 $\delta_x = \sigma^{-1}$ 、 $\delta_u = (\kappa^2 + \lambda)^{-1} \sigma^{-1} \kappa$ 、 $\delta_g = \sigma^{-1}$ である。

(58) 式のルールは、合理的期待の仮定下では、(57) 式のルールと同様に、(55)、(56) 式と整合的になる。しかし、Evans and Honkapohja [2003b] は、(57) 式と異なり、(58) 式のルールは、MSV 解の学習可能性を満たすことを示している。

この理由を、彼らは、下記のように説明している。当初、民間主体の持つ PLM が推計誤差を持ち、そのためにインフレ期待 ($E_t^P \pi_{t+1}$) が合理的期待から上振れたとしよう。このとき、(57) 式のルールは、外生ショック (ファンダメンタルズ) のみに依存しているため、期待の上振れに対して名目金利が上昇しない。その一方で、(58) 式のルールは、民間主体のインフレ期待に直接反応しており、しかもインフレ反応度 (δ_π^*) は 1 を超えているため、インフレ期待の上振れ幅を上回って名目金利が上昇する。このため、実質金利が上昇し、これにより産出ギャップとインフレ率が低下し、このことを民間主体が観察して学習するため、インフレ期待の上振れは是正され、合理的期待へと収束する。

このように、合理的期待のもとでの最適性条件から導いた政策ルールの中でも、適応的学習のもとでの学習可能性を満たすルールと満たさないルールが存在する。学習可能性を満たさない政策ルールは、合理的期待からのわずかな乖離に対して非常に脆弱な特性を持つ。Evans and Honkapohja [2003b] の結果は、中央銀行が民間主体の期待に対して適切に反応することで、このような脆弱性を回避できることを示している。

(2) 適応的学習下の最適金融政策

適応的学習を導入した最適金融政策分析のもう 1 つの種類は、民間主体が適応的学習を行うもとでの、最適金融政策を分析した研究である。

Molnár and Santoro [2006] は、本節 (1) と同様のモデル ((14)、(51)、(53) 式) を用い、民間主体が適応的学習を行う場合の最適金融政策について分析している。彼らはまず、需要ショックとコスト・プッシュ・ショックがホワイト・ノイズであると仮定する。その場合、産出ギャップとインフレ率への期待は定数となる。このとき、適応的学習のアルゴリズムが減衰型ゲインの RLS であるとする、民間期待の形成プロセスは下記により与えられる。

$$E_t^P x_{t+1} = a_t^x = a_{t-1}^x + t^{-1}(x_{t-1} - a_{t-1}^x), \quad (59)$$

$$E_t^P \pi_{t+1} = a_t^\pi = a_{t-1}^\pi + t^{-1}(\pi_{t-1} - a_{t-1}^\pi). \quad (60)$$

Molnár and Santoro [2006] は、(14)、(51)、(59)、(60) 式を制約条件として、(53) 式の損失関数を最小化するための最適性条件（最適裁量政策）を解析的に導出した。その最適性条件は、下式により与えられる。

$$\kappa\pi_t + \lambda x_t = \lambda E_t \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{i+1} \frac{1}{t+i} x_{t+i}. \quad (61)$$

この最適性条件は、右辺がゼロでない場合、合理的期待下の最適性条件である (54) 式と異なる。ただし、産出ギャップの将来流列を所与としたとき、 t が非常に大きくなると、(61) 式の右辺はゼロに近づき、(54) 式に近づく。これは、合理的期待均衡の学習可能性が満たされるもとは、 t が非常に大きければ期待が合理的期待へと収束するためである。

Molnár and Santoro [2006] は、(14)、(51)、(61) 式を満たす最適金融政策ルールとして、下記の形状のルールを導出し、そのパラメータ特性について分析した。

$$i_t = \delta_{\pi,t}^* E_t^P \pi_{t+1} + \delta_x^* E_t^P x_{t+1} + \delta_{u,t}^* u_t + \delta_g^* g_t. \quad (62)$$

このルールは、本節 (1) において、Evans and Honkapohja [2003b] が導出した「民間期待に基づく最適ルール」((58) 式) と同じ形状である。

Molnár and Santoro [2006] は、(62) 式のパラメータを (58) 式のパラメータと比較し、以下の特性を報告している。第 1 に、インフレ反応度 ($\delta_{\pi,t}^*$) とコスト・プッシュ反応度 ($\delta_{u,t}^*$) は時間を通じて変動 (time-varying) する。第 2 に、インフレ反応度 ($\delta_{\pi,t}^*$) とコスト・プッシュ反応度 ($\delta_{u,t}^*$) は、 $t < \infty$ の場合、それぞれ δ_{π} 、 δ_u よりも大きい²³。第 3 に、産出ギャップ反応度 (δ_x^*) と需要ショック反応度 (δ_g^*) はともに $\delta_x^* = \delta_g^* = \sigma^{-1}$ であり、それぞれ δ_x 、 δ_g に等しい²⁴。

この分析結果は、下記のように解釈できる。まず、第 1 の特性は、(61) 式的最適性条件が時間依存的事から生じる。つまり、減衰型ゲインの場合、民間主体の利用するゲインの値が時間に依存するため、インフレ期待の分散が時間に依存する。したがって、最適な政策反応は、時間の経過に従って変化させる必要がある。

第 2 の特性は、3 節で説明したように、金融政策ルールの政策反応度が、適応的学習の収束速度に影響することから生じる。すなわち、中央銀行が民間のインフレ期待やコスト・プッシュ・ショックに強く反応すると、実際のインフレ率が安定化し、そのことが民間主体の学習を促進させるため、インフレ期待が合理的期待へと速やかに収束する。この効果があるために、適応的学習下でのインフレ率とコスト・プッシュ・ショックへの最適反応は、(合理的期待均衡までの移行過程では) 合理的期待モデルよりも強くなる。

23 t が無限大に近づくと、 $\delta_{\pi,t}^*$ 、 $\delta_{u,t}^*$ はそれぞれ δ_{π} 、 δ_u に収束する。

24 (62) 式的最適政策ルールは、合理的期待均衡の一意性と E-stability を満たしている。

最後に、第3の特性が生じるのは、中央銀行が $\delta_x^* = \delta_g^* = \sigma^{-1}$ と設定することで、産出ギャップへの期待と需要ショックの変動を完全に相殺できるためである。つまり、これらの要素については、政策のトレードオフがないため、合理的期待下でも、適応的学習下でも、完全にその変動を除去することが最適となる。

以上のように、Molnár and Santoro [2006] の結果は、適応的学習のもとでは、合理的期待均衡までの移行過程においては、中央銀行はインフレ期待の変動を安定化させるようにアグレッシブな政策反応を行うべきことを示している。この結果は、3節(3)で紹介した Ferrero [2007] の分析結果と整合的である²⁵。

5. 適応的学習を導入した分析を巡る論点

前節まででは、標準的なニューケインジアン・モデルに適応的学習を導入して金融政策への含意を導出した研究を幾つか紹介した。しかし、適応的学習を導入した分析を巡っては、伝統的に用いられている合理的期待モデルとの関係において、幾つかの論点が存在する。本節では、その中でも特に、①合理的期待均衡の一意性と学習可能性はどのような関係にあるのか、②適応的学習を導入すると、人々の長期予測が影響を与える可能性があるのかという2つの論点について紹介する。

(1) 合理的期待均衡の一意性と学習可能性の関係

ここでは、合理的期待均衡の一意性と学習可能性の関係についての議論を紹介する。前節までで紹介した研究例の多くでは、少なくともMSV解のみに絞れば、合理的期待均衡が一意に存在した。このため、前節までの説明の多くでは、この解が学習可能性を満たすための条件について解説した。しかし、MSV解以外の形状の解まで考慮すると、合理的期待均衡が複数存在する可能性もある。この点を考えると、合理的期待均衡の一意性と学習可能性がどのような位置関係にあるのかという点を整理することは重要と考えられる。

McCallum [2007] は、経済のシステムが下記の形状で表現できる場合の、合理的期待均衡の一意性と学習可能性の関係について議論している。

$$X_t = AE_t^p X_{t+1} + BX_{t-1} + Cw_t, \quad (63)$$

$$w_t = Dw_{t-1} + \xi_t. \quad (64)$$

25 ただし、Molnár and Santoro [2006] の分析では、中央銀行が合理的期待に基づく(53)式の損失関数を最小化することを前提としているが、適応的学習のもとでは、社会厚生関数は(53)式によっては与えられないと考えられる。適応的学習の仮定のもとでの社会厚生関数を導出し、それを最適化する最適金融政策を分析することは、今後の課題であろう。

X_t は内生変数ベクトル ($m \times 1$)、 w_t は外生変数ベクトル ($n \times 1$)、 ξ_t はホワイト・ノイズ・ベクトル ($n \times 1$)、 A 、 B は $m \times m$ 、 C は $m \times n$ 、 D は $n \times n$ 行列である。合理的期待均衡は、下記の形状を取ると仮定する (Ω 、 Γ は $m \times m$ の行列)。

$$X_t = \Omega X_{t-1} + \Gamma w_t. \quad (65)$$

Blanchard and Kahn [1980] に基づくと、(63)、(64) 式のシステムで、(65) 式の形状を持つ安定的 (stable) な合理的期待均衡解が一意に存在する必要十分条件は、行列 Ω と $F \equiv (I - A\Omega)^{-1}A$ のすべての固有値が単位円 (unit circle) の内側に入ることである。また、Evans and Honkapohja [2001] に基づくと、減衰型ゲインの RLS を仮定した場合、(63)、(64) 式のシステムで、(65) 式の形状を持つ合理的期待均衡の学習可能性の条件 (E-stability 条件) は、行列 F 、 $[(I - A\Omega)^{-1}B]' \otimes F$ 、 $D' \otimes F$ のすべての固有値の実数部分が 1 より小さいこととして与えられる。

このとき、McCallum [2007] は、均衡の一意性が、学習可能性の十分条件となることを指摘した。つまり、(63)、(64) 式のシステムでは、合理的期待均衡が一意に存在するならば、その均衡は必ず学習可能である²⁶。

このことは、金融政策分析においても重要な含意を持つ。一般に、合理的期待モデルを用いた金融政策分析では、均衡の一意性を確保することが、金融政策ルールが満たすべき最低限の基準として捉えられている。適応的学習を導入した分析で特に注目されるのは、学習可能性も満たすために、金融政策ルールが (均衡の一意性以外の) 追加的な条件を満たす必要があるかという点であるが、McCallum [2007] の議論によれば、上記のようなモデル構造の場合、金融政策は追加的な条件を満たす必要がない。実際、3 節 (1) で紹介した Bullard and Mitra [2002] の分析フレームワークなどは、(63)、(64) 式のシステムで表現できるため、均衡の一意性が学習可能性の十分条件となる。このために、「テイラー・プリンシプルを満たせば、均衡の一意性を実現できると同時に、学習可能性も満たすことができる」という結果が生まれている。

しかし、均衡の一意性が学習可能性の十分条件となるという結果は、(63)、(64) 式のシステム以外まで視野に入れると、必ずしも成立しない。Evans and Honkapohja [1999, 2001] は、線形モデルにおいて、内生変数のリード・ラグ構造に関してさまざまな設定を行うと、均衡の一意性は学習可能性の十分条件とは必ずしもならないことを示している。また、Bullard and Eusepi [2008] は、標準的ニューケインジアン・モデルにおいて、人々の期待形成に際して情報収集の遅れがある場合には、均衡の一意性が学習可能性を必ずしも保証しなくなると報告している。これらの点は McCallum [2007] も認めており、彼の議論はあくまで「人々の情報集合の中に、当期の内生変数が含まれる場合」のみに成立すると述べている。

ただし、(63)、(64) 式で示されたシステムであっても、学習を行う際のタイミング設定次第では、均衡の一意性は学習可能性を必ずしも保証しない可能性がある。例

26 ただし、均衡の一意性は必ずしも学習可能性の必要条件ではない。

えば3節(2)ロ.で紹介した Muto [2008] の分析は、民間主体と中央銀行がある期に学習を行う際、その期中において、学習の先導・追従関係がある場合には、合理的期待均衡の一意性は学習可能性の十分条件にならないことを示している。

以上の議論を踏まえると、①モデル構造、②情報集合、③学習のタイミングの設定に関して最も単純な事例を考えると、均衡の一意性は学習可能性の十分条件となるが、これらの点に関してより複雑（ないし現実的）な設定を取り入れると、均衡の一意性は学習可能性を必ずしも保証しないと纏めることができよう。

(2) 長期予測と1期先予測：Preston [2005] の議論

適応的学習を導入した金融政策分析を巡るもう1つの重要な論点は、適応的学習を導入した場合、ニューケインジアン・モデルの構造が、前掲(14)、(15)式で表されるのかどうかという点である。Preston [2005] は、個々の消費者および企業の最適化行動を前提としたとき、ニューケインジアン・モデルは(14)、(15)式のような形で表現されず、産出ギャップとインフレ率が、それらの1期先予測だけでなく、より長期の予測にも依存する形になると議論している。

Preston [2005] の議論は、下記のとおりである。いま、経済に多数の消費者が存在し、単純化のため、個々の消費者の効用関数の形状は同一と仮定する。ただし、各消費者は、自分の効用関数と予算制約式は正確に認識しているが、他の消費者の効用関数の形状が自分と同じであることは知らないと仮定する。

Preston [2005] は、消費者 i が、相対的危険回避度が一定の標準的な効用関数を持ち、無限期間にわたる効用を最大化すると仮定している。その際、消費者が自己の持つ生涯の予算制約を認識していると仮定すると、当期の消費の決定式は、下記のように導かれることを示している²⁷。

$$c_t^i = E_t^i \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} [(1-\beta)y_T^i - \beta\sigma(i_T - \pi_{T+1}) + \beta(q_T - q_{T+1})]. \quad (66)$$

c_t^i は消費者 i の総消費量、 y_t^i は消費者 i の所得、 i_t は名目金利、 π_t はインフレ率で、いずれも定常値からの乖離を表す²⁸。また、 σ は消費における異時点間の代替の弾力性、 β は割引因子、 q_t は消費者の選好に対するショックで、これらはいずれも消費者間で同一である。なお、 E_t^i は消費者 i の形成する期待である。

(66)式は、実質金利が必ずしも一定でなく、選好に対するショックが加わるものの、基本的には恒常所得仮説の一形態とみなせる。(66)式を集計すると、経済全体の消費量は、下記のように決定される。

27 ここでは、消費者の初期保有をゼロと仮定する。

28 総消費量を集計するうえでは、標準的な Dixit-Stiglitz 型集計関数を用いている。

$$c_t = E_t^P \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} [(1-\beta)y_T - \beta\sigma(i_T - \pi_{T+1}) + \beta(q_T - q_{T+1})]. \quad (67)$$

c_t は集計化した消費量、 y_t は集計化した産出量で、いずれも定常値からの乖離であり、 E_t^P は平均化された期待オペレータ ($E_t^P = \int_i E_t^i di$) である。恒等式より $c_t = y_t$ が成立するため、産出量は下記のように決定される。

$$y_t = E_t^P \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} [(1-\beta)y_T - \beta\sigma(i_T - \pi_{T+1}) + \beta(q_T - q_{T+1})]. \quad (68)$$

最後に、価格粘着性が存在しない場合に実現する産出量（自然産出量）を Y_t^n とすると、(68) 式より、産出ギャップ ($x_t \equiv y_t - y_t^n$) が下記のように決定される。

$$x_t = E_t^P \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} [(1-\beta)x_{T+1} - \beta\sigma(i_T - \pi_{T+1}) + g_T]. \quad (69)$$

ただし、 g_t は $g_t \equiv (y_t^n - q_t) - (y_{t+1}^n - q_{t+1})$ で定義される需要ショックである。

(69) 式のように、個々の消費者の最適化問題に基づく、当期の産出ギャップは、産出ギャップ、実質金利、需要ショックに関する長期予測に依存する。ここで問題なのは、適応的学習の場合に、長期予測に基づく (69) 式が、1 期先予測に基づく (14) 式に還元できるかという点である。

Preston [2005] は、各消費者が他人の行動原理を知らなければ、(69) 式を (14) 式に還元できないと議論した。この理由は、(69) 式から (14) 式を導くには、平均化された期待オペレータ (E_t^P) に関して、下記で表される「期待値演算の繰り返し法則 (law of iterated expectations: 以下、LIE)」が成立する必要があるためである。

$$E_t^P E_{t+s}^P x_{t+s+j} = E_t^P x_{t+s+j} \quad \text{for } s, j = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (70)$$

Preston [2005] は、個々の消費者が自分の将来消費を予想するうえでは、LIE の成立を仮定できる ($E_t^i E_{t+s}^i c_{t+s+j}^i = E_t^i c_{t+s+j}^i$) が、他人の将来消費を予想するうえでは LIE が成立することを先験的には仮定できず、この結果、平均化された期待オペレータに関して LIE が成立することを仮定できないと指摘した。この議論が正しければ、(69) 式から (14) 式を導くことができなため、産出ギャップの決定式はあくまで長期予測に基づく (69) 式となる。

Preston [2005] は、企業の価格設定についても、Calvo [1983] の設定の中で、各企業が他者の行動原理を知らないと仮定している。彼は、この場合にも、平均化された期待オペレータについては LIE の成立が仮定できないと議論し、インフレ率は下記のように長期予測に依存することを示している (α は各期に価格改定できない企業の割合を表す)。

$$\pi_t = \kappa x_t + E_t^P \sum_{T=t}^{\infty} (\alpha\beta)^{T-t} [\kappa\alpha\beta x_{T+1} + (1-\alpha)\beta\pi_{T+1}]. \quad (71)$$

以上の議論をもとに、Preston [2005] は、(69)、(71) 式のモデルに、前掲 (17) 式のテイラー・ルールを導入し、合理的期待均衡 (MSV 解) の E-stability 条件を検討した。その結果、(17) 式のもとでは、MSV 解が E-stable となる必要十分条件は、前掲 (25) 式のテイラー・プリンシプルで与えられることを確認した。この結果は、モデルが 1 期先予測ないし長期予測のどちらに基づく場合でも、(17) 式のルールでは、E-stability 条件が同じになってしまうことを意味する。しかし、Preston [2006] では、別のルールとして、前掲 (42) 式の予測に反応するテイラー・ルールを導入すると、長期予測モデルの E-stability 条件が、政策反応度をテイラー・プリンシプルよりも強く反応させることになると発見している。この結果は、モデルが長期予測と 1 期先予測のどちらに依存するかという点が、政策含意に対して重要な影響を与える可能性があることを示唆している。

ただし、Preston [2005] の議論に対しては、Honkapohja, Mitra, and Evans [2003] が反論を行っている。具体的には、Preston [2005] の設定では、各消費者は効用関数と予算制約に関して同一の最適化問題を解いているうえに、彼らの持つ PLM は同じ MSV の形状であり、同じ情報集合を用いて適応的学習を行う結果、消費者間で同一の期待が形成される。この場合には、平均化された期待オペレータについて LIE が成立することを仮定できるため、(69)、(71) 式のモデルは (14)、(15) 式に還元できる²⁹。また、各消費者が市場清算条件 (market clearing condition) として、 $c_t^i = y_t^i = x_t^i$ が成立することを知っているならば、各消費者に関して、 $E_t^i c_{t+1}^i = E_t^i y_{t+1}^i = E_t^i x_{t+1}^i$ を仮定できるため、(66) 式を下式に還元できる。

$$c_t^i = E_t^i x_{t+1}^i - \sigma(i_t - E_t^i \pi_{t+1}) + g_t. \quad (72)$$

この場合、集計化された期待オペレータに関して $E_t^P x_{t+j} = \int_i E_t^i x_{t+j} di$ 、 $E_t^P \pi_{t+j} = \int_i E_t^i \pi_{t+j} di$ が成立するため、(72) 式の両辺を集計することで、(14) 式を導くことができる。これらの点を踏まえ、Honkapohja, Mitra, and Evans [2003] は、Preston [2005] の議論によって、(14)、(15) 式の 1 期先予測に基づくモデルを (69)、(71) 式の長期予測に基づくモデルに置き換える必要はないと主張している。

このように、1 期先予測モデルと長期予測モデルのどちらを用いるべきかという点については、現在の学界では必ずしも決着をみていない。Preston [2005] の研究は、各個人が自分の持つ情報集合のもとで最適化行動を行っている状況をより忠実にモデル化したものであり、その意味で 1 期先予測に基づくモデルよりも厳密なミ

²⁹ Preston [2005] は、初期段階の原稿において、平均化された期待オペレータについて LIE が成立するのは、合理的期待の場合に限られるとの議論を行ったが、Honkapohja, Mitra, and Evans [2003] はこの主張が誤りであり、適応的学習のもとでも、経済主体間で同質的な期待が形成される限り、LIE は成立しうるとを指摘している。

クロの基礎づけを持つものとみなすこともできる。ただし、Preston [2005] のモデルでも、すべての経済主体が同質的という仮定が置かれている点では、依然として課題もある。今後の研究では、経済主体の特性に異質性 (heterogeneity) を導入して、適応的学習を導入することが期待されよう³⁰。

6. 適応的学習と金融政策に関する応用研究

本節では、適応的学習を導入した金融政策の応用研究について紹介する。適応的学習を導入した金融政策の応用研究は豊富に蓄積されているが、本節ではその中でも特に、①名目金利にゼロ% 制約がある場合に、経済が「流動性の罅」に陥る可能性を検討した研究、②金融政策の透明性 (政策目標や政策ルールの公表) の影響について検討した研究を取り上げる。

(1) 適応的学習と流動性の罅

ここでは、適応的学習を導入して、「流動性の罅」の発生について分析した、Evans, Guse, and Honkapohja [2007] の研究を紹介する³¹。

3 節では、標準的ニューケインジアン・モデルにテイラー・ルールを導入した場合、テイラー・プリンシプルが MSV 解の学習可能性の必要十分条件となることをみた。また、5 節で議論したように、この標準的なモデルでは、テイラー・プリンシプルは、合理的期待均衡を一意にするための必要十分条件でもあった。

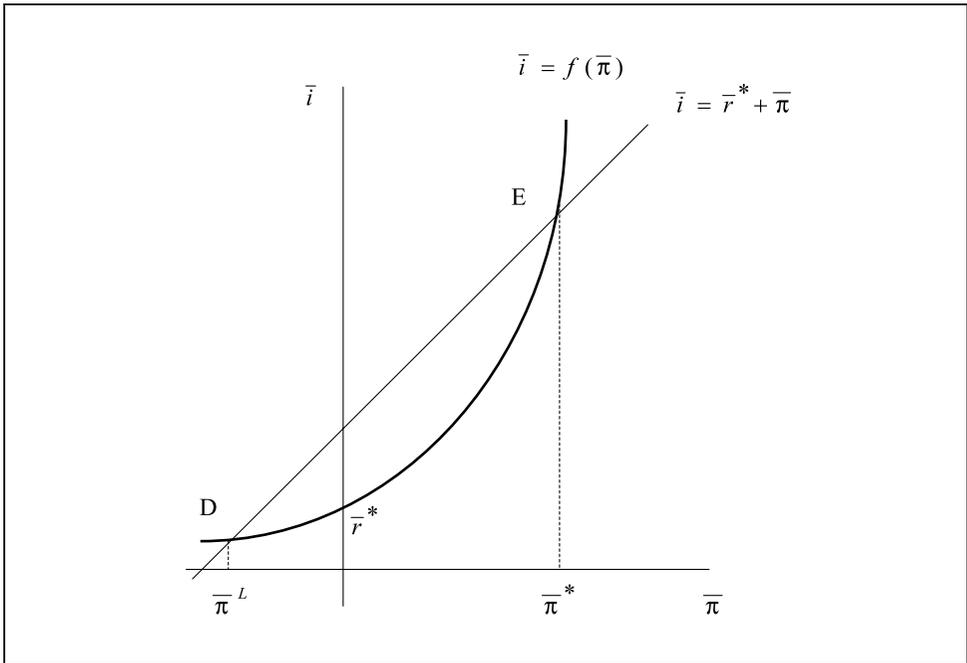
しかし、これらの結果は、前掲 (14)、(15) 式のような線形化されたモデルにおいて、中央銀行の目標インフレ率を実現する、「望ましい定常均衡」の近傍で局所的 (local) に得られる結果にすぎない。Benhabib, Schmitt-Grohe, and Uribe [2001] は、この望ましい定常均衡の近傍だけでなく、より大局的 (global) な動学を考慮した場合、名目金利のゼロ% 制約があるために、テイラー・プリンシプルを満たすと、経済の合理的期待均衡は一意にならないと指摘した。これは、図 4 を見ることで直観的に理解できる。

図 4 の \bar{i} は名目金利、 $\bar{\pi}$ はインフレ率で、変数の上のバーは (定常状態からの乖離ではなく) 水準自体であることを表す。右上りの直線はいわゆるフィッシャー方程式であり、定常状態で名目金利が均衡実質金利 (\bar{r}^*) にインフレ率を加えたものとして決定されることを表す。

30 Branch and McGough [2007] は、ニューケインジアン・モデルにおいて、経済主体の期待形成が異質である場合の期待の集計方法を検討している。ただし、この研究においても、経済主体は期待形成以外の点においては同質であることが仮定されている。

31 この研究に先立って、Evans and Honkapohja [2005] では、伸縮価格モデルにおいて流動性の罅の発生を分析している。また、適応的学習を導入して流動性の罅の発生を別のメカニズムで説明した研究として、Bullard and Cho [2005] が挙げられる。

図4 テイラー・プリンシプルと流動性の罫



図の太線は、(グローバルな) テイラー・ルール下での、定常状態での名目金利とインフレ率の関係を表す。テイラー・プリンシプルが満たされる場合、中央銀行が望ましいと考えるインフレ率 ($\bar{\pi}^*$) の近傍で、太線の傾きは 1 より大きくなる ($f'(\bar{\pi}^*) > 1$)。ただし、名目金利にはゼロ % の制約があるため、定常状態で、フィッシャー方程式とテイラー・ルールの交点として、望ましい均衡 (E 点) 以外に、もう 1 つ別の、意図せざる均衡 (D 点) が存在する。この D 点は、インフレ率 ($\bar{\pi}^L$) が望ましいインフレ率 ($\bar{\pi}^*$) を下回り、仮に \bar{r}^* がゼロより大きければ $\bar{\pi}^L$ が負になることから、「デフレ均衡」と呼ばれている。さらに、このデフレ均衡近傍では、テイラー・プリンシプルが満たされないため、D 点近傍には無数の合理的期待均衡 (サンスポット均衡) が生じる。これが、Benhabib, Schmitt-Grohe, and Uribe [2001] による、流動性の罫の議論である。

ただし、この流動性の罫の議論は、人々の期待が合理的期待 (ないし完全予見) であることを仮定したものである。すなわち、Benhabib, Schmitt-Grohe, and Uribe [2001] の議論は、人々の期待が合理的期待 (ないし完全予見) に収束していることを仮定したものであり、その期待が形成されるまでのプロセスについては何も議論していない。特に、ゼロ金利制約が存在するもとは経済に強い非線形性が生じるが、彼らの議論は、人々がこの非線形性を含めて経済構造を完全に認識していることが前提となっている。

そこで、Evans, Guse, and Honkapohja [2007] は、合理的期待 (ないし完全予見) の仮定を緩めた場合に、経済が流動性の罫に陥るかどうかを分析した。彼らはまず、

標準的ニューケインジアン・モデルは、線形化する前のシステムとしては、下記の2つの非線形の式で表せることを示している。

$$\bar{c}_t = F(E_t^P \bar{c}_{t+1}, E_t^P \bar{\pi}_{t+1}, \bar{i}_t, \varepsilon_t), \quad (73)$$

$$\bar{\pi}_t = G(E_t^P \bar{c}_{t+1}, E_t^P \bar{\pi}_{t+1}, \bar{y}_t, \zeta_t). \quad (74)$$

\bar{c}_t は集計化された消費、 \bar{y}_t は産出量で、いずれも（定常状態からの乖離ではなく）水準を表す。(73) 式と (74) 式は、非線形の IS 曲線、ニューケインジアン・フィリップス曲線、 ε_t と ζ_t は需要ショックとコスト・プッシュ・ショックを表す。

なお、経済には財政当局が存在し、政府支出 \bar{g}_t （水準表示）を行うと仮定する。このとき、下記の市場清算条件が成立する。

$$\bar{y}_t = \bar{c}_t + \bar{g}_t. \quad (75)$$

金融政策は、下記の非線形のテイラー・ルールに従っていると仮定する。

$$\bar{i}_t = f(\bar{\pi}_t). \quad (76)$$

図4でみたように、このテイラー・ルールは、望ましい均衡付近ではテイラー・プリンシプルを満たす ($f'(\bar{\pi}^*) > 1$) が、デフレ均衡付近では名目金利のゼロ% 制約のために、テイラー・プリンシプルを満たさない ($f'(\bar{\pi}^L) < 0$)。

いま、単純化のために、外生ショック (ε_t, ζ_t) は i.i.d. に従うと仮定しよう。この場合には、民間主体が推計するパラメータは、消費とインフレ率の定常値のみとなる。このため、民間主体が RLS による適応的学習を行っているとする、民間主体の消費とインフレ率に関する期待のアップデート・プロセスは、下記のように表せる（ただし、 γ_t は学習のゲイン）。

$$E_t^P \bar{c}_{t+1} = E_{t-1}^P \bar{c}_t + \gamma_t (\bar{c}_{t-1} - E_{t-1}^P \bar{c}_t), \quad (77)$$

$$E_t^P \bar{\pi}_{t+1} = E_{t-1}^P \bar{\pi}_t + \gamma_t (\bar{\pi}_{t-1} - E_{t-1}^P \bar{\pi}_t). \quad (78)$$

Evans, Guse, and Honkapohja [2007] は、(77)、(78) 式において、学習のゲインが減衰型ゲイン ($\gamma_t = t^{-1}$) ないし小さい値のコンスタント・ゲイン ($\gamma_t = \gamma$) である場合に関して、Benhabib, Schmitt-Grohe, and Uribe [2001] が提示した2つの均衡の（局所的な）学習可能性をチェックした。その結果、彼らは、①望ましい均衡 ($\bar{\pi}_t = \bar{\pi}^*$ の均衡) は学習可能性を満たすが、②デフレ均衡 ($\bar{\pi}_t = \bar{\pi}^L$ の均衡) は学習可能性を満たさないことを確認した。

この結果は、3節(1)で紹介した Bullard and Mitra [2002] の研究が示したように、「標準的ニューケインジアン・モデルでは、テイラー・プリンシプルが、学習可

能性の必要十分条件となる」ことを反映したものと解釈できる。すなわち、望ましい均衡近傍では金融政策がテイラー・プリンシプルを満たすため、民間主体の期待が合理的期待から乖離したときに、金融政策がその期待を合理的期待へと押し戻すように機能する。反対に、デフレ均衡の近傍では、テイラー・プリンシプルが満たされないため、人々の期待を合理的期待へと回帰させるメカニズムが働かない。このため、適応的学習下では、Benhabib, Schmitt-Grohe, and Uribe [2001] の発見したデフレ均衡が、安定的に実現することはない。

しかし、Evans, Guse, and Honkapohja [2007] は、適応的学習下では、デフレ均衡が実現する可能性は低いものの、大きな負の需要ショックが発生した場合に、経済がデフレ・スパイラルに陥る危険性があることを指摘した。これは、大きな負の需要ショックが生じると、消費とインフレ率が大きく低下するが、このとき (77) および (78) 式を通じて、将来の消費とインフレ率への期待が大きく低下する。この低下幅が大きいと、テイラー・ルールに従えば名目金利がゼロ% 制約に直面してしまうが、その場合、実質金利の上昇により消費はさらに減少し、インフレ率もさらに低下し、これがさらに将来の消費とインフレ率への期待を押し下げるといふスパイラルを生むことになる。

Evans, Guse, and Honkapohja [2007] は、このデフレ・スパイラルを阻止するための政策を提案している。具体的には、まず、金融政策に関しては、インフレ率が低下してある下限値 ($\bar{\pi}^T$ 、ただし $\bar{\pi}^* > \bar{\pi}^T > \bar{\pi}^L$) に達した場合に、テイラー・ルールを放棄し、名目金利の水準を大幅に引き下げるといふものである。具体的には、図5の太線の政策がそれに相当する。

図5 デフレ・スパイラルを防ぐための金融政策

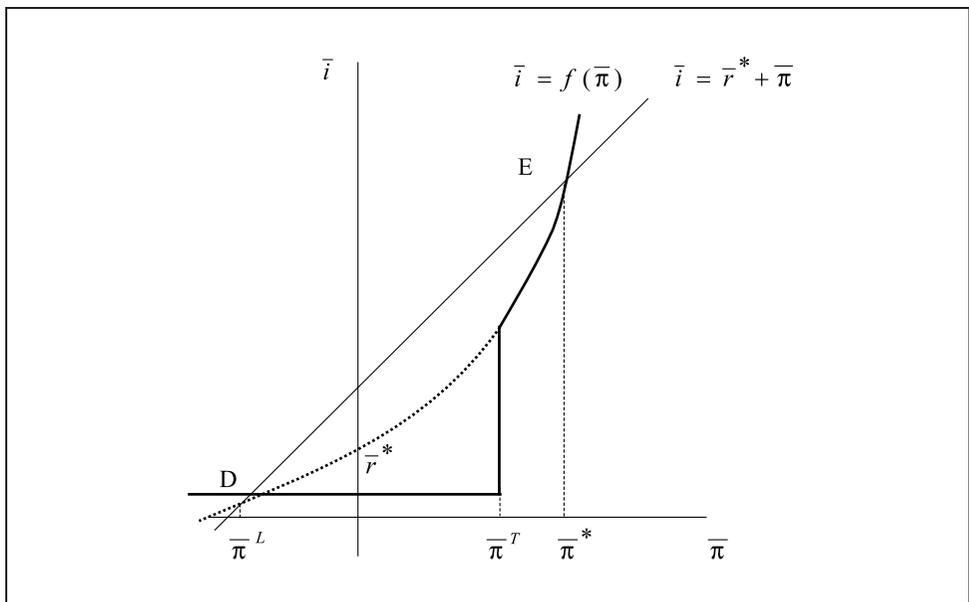


図5のように、インフレ率が低下してある閾値 (threshold) に達した段階で、名目金利を、テイラー・ルールを大幅に下回る水準に引き下げる政策を取ったとしよう。このとき、大きな負の需要ショックによってインフレ率が $\bar{\pi}^T$ の水準を下回って低下しようとしたとしても、その段階で実質金利が (テイラー・ルールに従った場合よりも) 大幅に引き下がるため、経済がデフレ・スパイラルに陥る可能性を低めることができる。

ただし、彼らは、経済に加わる負の需要ショックが極めて大きい場合には、上記の金融政策でも、デフレ・スパイラルを阻止できない可能性があることも指摘している。これは、上記の政策であっても、名目金利のゼロ% 制約がある以上、大きな負の需要ショックに対する実質金利の低下幅には、限りがあるためである。そこで、彼らは、上記の金融政策を補完する政策として、インフレ率の水準が $\bar{\pi}^T$ まで低下した段階で、財政政策についても大きな正の財政支出 (\bar{g}_t) を行うことを提唱している。大幅な財政支出を行うことで、(75) 式より産出量が増大し、(74) 式よりインフレ率を押し上げることが可能となり、これと名目金利の大幅な低下が加わることで、インフレ率は望ましい定常均衡へと収束する。このように、経済がデフレ・スパイラルに陥るリスクがある場合には、金融政策だけでなく、財政政策も積極的に発動する必要があるというのが、Evans, Guse, and Honkapohja [2007] の議論である。

(2) 適応的学習と金融政策の透明性

ここでは、適応的学習を導入して、金融政策の透明性について分析した研究を紹介する。合理的期待モデルに基づく金融政策分析では、民間主体が経済の変動法則を正確に知っていることが仮定されたが、このことは、民間主体が金融政策の行動様式 (政策目標や政策ルール) を完全に知っていることを意味した。一方、適応的学習の文献では、民間主体が経済の変動法則に関し不完全な知識しか持たないことを仮定している。このため、金融政策に関する情報提供 (透明性向上) が、民間主体の期待にどのように影響するのかを分析するのに、適応的学習のフレームワークは適していると考えられる。

Eusepi and Preston [2007] は、ニューケインジアン・モデルに適応的学習を導入して、金融政策の透明性の影響について分析している。彼らの分析は、5 節 (2) で紹介した、Preston [2005] の長期予測モデルを基礎としている。すなわち、産出ギャップとインフレ率が、1 期先の予測だけでなく、より長期の予測にも依存するモデルを用いている。

彼らのモデルにおける IS 曲線とニューケインジアン・フィリップス曲線は下記のように表される。

$$x_t = E_{t-1}^P \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} [(1-\beta)x_{T+1} - \beta\sigma(i_T - \pi_{T+1}) + g_T], \quad (79)$$

$$\pi_t = E_{t-1}^P \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \delta x_T. \quad (80)$$

(79) 式は、5 節 (2) で紹介した、長期予測に基づく動学的 IS 曲線 (前掲 (69) 式) を基礎としている。ただし、彼らは、この長期予測モデルに「情報の遅れ (information delay)」の要素を追加的に導入している。これは、McCallum [1999] が議論したように、統計データの作成にはラグが伴うため、人々がその情報を入手するタイミングが遅れることを踏まえたものである。(80) 式は、長期予測に基づくニューケインジアン・フィリップス曲線に、情報の遅れを導入したものである。なお、 $\delta > 0$ は価格粘性性の度合い (の逆数) などにより規定されるパラメータである。

金融政策には、下記のバージョンのテイラー・ルールを用いる。

$$i_t = \phi_\pi E_{t-1}^{CB} \pi_t + \phi_x E_{t-1}^{CB} x_t. \quad (81)$$

中央銀行も、 t 期の名目金利の設定に際して t 期の内生変数のデータを利用できないため、 $t-1$ 期に形成した t 期のインフレ率と産出ギャップへの期待に反応する。なお、Eusepi and Preston [2007] は、単純化のために、中央銀行が民間主体と同じ期待 ($E_{t-1}^{CB} \pi_t = E_{t-1}^P \pi_t$, $E_{t-1}^{CB} x_t = E_{t-1}^P x_t$) を形成していると仮定しており、以下の議論もこの仮定に従う。

Eusepi and Preston [2007] は、(79)~(81) 式のモデルの合理的期待均衡の一意性を検討したところ、任意の $\phi_x > 0$ のもとで、 $\phi_\pi > 1$ が成立することが、合理的期待均衡の一意性の十分条件となることを確認した。このことは、上記モデルでも、テイラー・プリンシプルが均衡の一意性の十分条件となることを意味する。

次に、彼らは、適応的学習に関して、民間主体と中央銀行が下記の誘導形の式を、減衰ゲイン (ないし小さい値のコンスタント・ゲイン) の RLS により逐次推計し、この式をもとに期待形成していると仮定している³²。

$$z_t = \tilde{a}_{t-1} + \tilde{b}_{t-1} z_{t-1} + \zeta_t. \quad (82)$$

ただし、 $z_t = (x_t, \pi_t, i_t, g_t)'$ であり、 ζ_t は i.i.d. の誤差項である³³。

Eusepi and Preston [2007] は、最初に、金融政策の透明性が全くない場合について分析した。具体的には、民間主体が期待形成に際して、金融政策の行動様式 (政策目標および政策ルールの形状) に関する情報を用いず、観察された時系列データのみから (82) 式を推計し、これを外挿して期待形成を行うと仮定し、合理的期待均衡の学習可能性の条件を検討した³⁴。その結果、彼らは、産出ギャップ反応度 (ϕ_x) が

32 $t-1$ 期における z_T への期待は、 $E_{t-1}^P z_T = (I - \tilde{b}_{t-1})^{-1} (I - \tilde{b}_{t-1}^{T-t+1}) \tilde{a}_{t-1} + \tilde{b}_{t-1}^{T-t+1} z_{t-1}$ として算出される (ただし、 I は 4×4 の単位行列である)。

33 なお、民間主体は需要ショックを観察できると仮定する。また、需要ショックの定常値はゼロであることを民間主体は知っているため、定数値推計ベクトル \tilde{a}_{t-1} の第 4 要素は常にゼロであることを制約とする。

34 なお、ここではテイラー・プリンシプルは満たされており、均衡の一意性は満たされていると仮定する。

正で、かつ割引因子 (β) が1に近いという通常のパラメータ設定のもとでは、インフレ反応度 (ϕ_π) を非現実的なほどに大きくしない限り、合理的期待均衡は学習可能にならないことを確認した。この結果は、金融政策の透明性がない場合には、テイラー・プリンシプルは、学習可能性の十分条件にならないことを意味する。

この結果は、直観的には下記のとおり説明される。いま、民間主体の来期のインフレ率に対する期待が上昇し、ニューケインジアン・フィリップス曲線を通じてインフレ率が上昇したとする。このとき、中央銀行は情報の遅れを持つため、当期のインフレ率の上昇に対して当期の名目金利を十分に引き上げない。民間主体は、このことを観察することにより、インフレ期待の上昇に対して実質金利が上昇しないことを学習する。その結果、インフレ期待は定常値へと収束せず、経済は合理的期待均衡へと収束しない³⁵。

Eusepi and Preston [2007] は、上記のような問題が生じることを前提としたときに、中央銀行による金融政策の透明性向上が、経済の安定性にどのように影響するかを検討した。具体的には、透明性向上の方法として、①金融政策ルールをすべて公表する、②政策ルールの中に含まれる変数のリストを公表し、政策ルールのパラメータは公表しない、③中央銀行のインフレ目標値のみを公表するという3つの選択肢を示し、これらによって、合理的期待均衡の学習可能性が保証されるようになるかどうかを分析した。

まず、①のように、中央銀行が(81)式の政策ルールの形状を、(政策反応度の値も含めて)完全に公表したとする。このとき、民間主体は名目金利が(81)式で決定されることを知ることができる。このとき、民間主体は、名目金利の将来経路を、産出ギャップやインフレ率の経路と独立に予想する必要はなくなる。その理由は、産出ギャップとインフレ率への期待が計算できれば、(81)式より自動的に将来の名目金利の経路を計算できるからである。この状況下では、民間主体が適応的学習に際して推計する式は、前掲(82)式ではなく、以下の式になる。

$$\hat{z}_t = \tilde{a}_{t-1} + \tilde{b}_{t-1} \hat{z}_{t-1} + \zeta_t. \quad (83)$$

ただし、 \hat{z}_t は $\hat{z}_t = (x_t, \pi_t, g_t)'$ であり、名目金利が入っていない点で、 z_t と異なる。民間主体は、(83)式を推計し、その推計結果を用いることで、将来の産出ギャップとインフレ率への長期期待を形成できる。

民間主体が(81)式の政策ルールを知っていることは、産出ギャップの決定式が、(79)式に(81)式の政策ルールを代入して得られる、下式になることを意味する。

$$x_t = E_{t-1}^P \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} [(1-\beta)x_{T+1} - \beta\sigma(\phi_\pi \pi_T + \phi_x x_T - \pi_{T+1}) + g_T]. \quad (84)$$

35 Eusepi and Preston [2007] は、中央銀行が当期のインフレ率と産出ギャップに反応できる場合、テイラー・プリンシプルが学習可能性の十分条件になることを示している。このことは、彼らの理論において、金融政策の透明性が本質的な意味を持つ原因が、中央銀行の持つ情報の遅れにあることを意味する。

Eusepi and Preston [2007] は、(83) 式の適応的学習下で、(80)、(84) 式で構成されるモデルの合理的期待均衡の学習可能性を分析したところ、テイラー・プリンシプルが学習可能性の十分条件となることを確認した。この結果は、金融政策ルールの公表によって、経済が合理的期待均衡へと収束しやすくなることを示唆している。

この結果は、直観的には、政策ルールを公表することにより、民間主体が金融政策のインフレ反応度を正しく認識できることによりもたらされている。情報の遅れがある場合、中央銀行はインフレ期待の上昇に対して即座に名目金利を十分に引き上げられない。しかし、政策ルールが公表され、しかもそのルールがテイラー・プリンシプルを満たしているならば、民間主体は、中央銀行がいずれ十分に名目金利を大きく引き上げるであろうことを予想できる。この結果、長期のインフレ期待は低下し、合理的期待均衡へと収束する。

次に、上記②のように、中央銀行が政策ルールに含まれる変数のリストのみを公表し、政策ルールのパラメータは公表しないとする³⁶。このとき、民間主体は、下記の政策ルールを減衰ゲイン（または小さい値のコンスタント・ゲイン）の RLS で逐次推計する。

$$i_t = \tilde{\phi}_{0,t-1} + \tilde{\phi}_{\pi,t-1} E_{t-1}^P \pi_t + \tilde{\phi}_{x,t-1} E_{t-1}^P x_t + e_t. \quad (85)$$

$\tilde{\phi}_{0,t-1}$ 、 $\tilde{\phi}_{\pi,t-1}$ 、 $\tilde{\phi}_{x,t-1}$ は推計パラメータであり、 e_t は i.i.d. の誤差項である。

民間主体は (85) 式の推計パラメータを得ている場合、産出ギャップの決定式は、(85) 式を (79) 式に代入した、下式になる。

$$x_t = E_{t-1}^P \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \left[(1-\beta)x_{T+1} - \beta\sigma(\tilde{\phi}_{0,t-1} + \tilde{\phi}_{\pi,t-1}\pi_T + \tilde{\phi}_{x,t-1}x_T - \pi_{T+1}) + g_T \right]. \quad (86)$$

Eusepi and Preston [2007] は、(83)、(85) 式が適応的学習により推計されるもとの、(80)、(86) 式のモデルの合理的期待均衡の学習可能性を分析すると、①の場合と同様に、テイラー・プリンシプルが学習可能性の十分条件となることを確認した。この結果は、中央銀行が政策ルールの形状を完全に公表しなくても、政策ルールに含まれる変数のリストを公表すれば、合理的期待の学習可能性は満たすことができることを意味する³⁷。これは、政策ルールに含まれる変数のリストを公表すれば、(85) 式を推計することで、インフレ率の上昇に対し実質金利が上昇することを、民間主体が学習できるためである。

36 ただし、民間主体は、金融政策ルールが、公表された変数の線形関数となっていることは知っているとは仮定する。

37 ただし、ここでの議論はあくまで学習可能性の観点のみであり、均衡に至るまでの経済動学は、①の場合と②の場合では異なりうる。

最後に、上記③のように、中央銀行が目標インフレ率のみを公表し、政策ルールの詳細な形状を公表しないとす。このとき、民間主体は、各内生変数（の定常値からの乖離）が、長期的に $\pi = x = i = 0$ となることを知ることになる。その場合、民間主体は (82) 式を推計するが、定数項に関する学習は行わないため、定数項推計値ベクトル \tilde{a}_{t-1} は常にゼロに制約される。

Eusepi and Preston [2007] は、この場合、テイラー・プリンシプルは合理的期待均衡の学習可能性の十分条件にならないことを示した³⁸。このことは、中央銀行が目標インフレ率を示しただけでは、適応的学習下で、経済が合理的期待均衡に収束しない可能性があることを意味する。この結果が生じる直観的な理由は、目標インフレ率を示しただけでは、インフレ期待の上昇に対して、名目金利が十分に引き上げられるか（実質金利が上昇するか）、民間主体がわからないからである。上記①、②のような透明性向上では、中央銀行のインフレ反応度に関する情報が十分に民間主体に伝達されているが、③のような目標インフレ率の公表だけでは、どのようにしてその目標を実現するのかという点に関する情報提供が不十分であり、この差が、学習可能性が満たされるか否かという点の違いを生み出しているのである。

7. 適応的学習に関する実証研究

本節では、適応的学習に関する実証研究を紹介する。ニューケインジアン・モデルを含め、マクロ経済モデルに関する従来の実証研究の多くでは、人々の期待形成に合理的期待を仮定していた。しかし、前節までで紹介したような適応的学習に関する理論的發展を踏まえて、最近では、適応的学習に基づく期待を導入した実証研究が現れてきている。本節では、こうした実証研究のうち、①サーベイ・データを用いて適応的学習に基づく期待の実証を行った研究、②適応的学習を仮定してニューケインジアン・モデルを推計した研究の2種類について紹介する。

(1) サーベイ・データに基づく適応的学習の実証研究

まず、人々の期待を直接的に表すサーベイ・データを用いて、適応的学習による期待形成のアルゴリズムについて実証的に検討した分析を紹介する。

Orphanides and Williams [2005a, 2007] は、米国におけるエコノミスト予測 (Survey of Professional Forecasters: 以下、SPF) を近似するような適応的学習のアルゴリズムについて検討している。具体的には、 t 期において、エコノミストが、GDP デフレーター (π_t)、失業率 (v_t)、FF レート (i_t) の3変数（いずれも四半期データ）で構成される制約つき VAR モデルを推計していると仮定する。

38 例えば、需要ショックの慣性 (ρ) が1に近い場合には、政策ルールの係数がどのような値であっても、学習可能性は満たされないことが示されている。

$$Y_t = \Theta_{t-1} X_{t-1} + \xi_t. \quad (87)$$

ただし、 $Y_t = (\pi_t, v_t, i_t)'$ 、 $X_t = (1, \pi_t, v_t, i_t - \pi_t)'$ であり、 Θ_{t-1} は 3×4 の係数行列、 ξ_t は 3×1 の攪乱項ベクトルである。

Orphanides and Williams [2005a, 2007]は、この制約つき VAR モデルを、彼らが提示した構造形ニューケインジアン・モデルの誘導形としてみなしている。そのうえで、エコノミストが、下記のコンスタント・ゲインの RLS によって制約つき VAR モデルを逐次推計していると仮定している。

$$\Theta_t = \Theta_{t-1} + \gamma R_t^{-1} X_{t-1} (Y_t - \Theta_{t-1} X_{t-1}), \quad (88)$$

$$R_t = R_{t-1} + \gamma (X_{t-1} X_{t-1}' - R_{t-1}). \quad (89)$$

Orphanides and Williams [2005a, 2007]は、この制約つき VAR モデルに基づく予測と SPF の乖離が最も小さくなるコンスタント・ゲイン (γ) をカリブレーションにより求めると、その値は $\gamma = 0.01 \sim 0.04$ の範囲にあると報告している³⁹。

Branch and Evans [2006]も、コンスタント・ゲインの RLS が SPF の特性を適切にモデル化できるかどうかを実証的に検討した。彼らは、期待形成のモデルとして、①合理的期待、②カルマン・フィルター、③減衰型ゲインの RLS、④コンスタント・ゲインの RLS の 4 種類を提示している⁴⁰。そのうえで、これらのモデルに基づく期待が、SPF における実質 GDP 成長率と GDP デフレーターをどの程度近似しているかを、平均 2 乗誤差 (mean squared error) の観点から比較した。その結果、1981 年第 3 四半期～2002 年第 4 四半期の SPF を最も近似するのは、コンスタント・ゲインの RLS において、ゲインの値を 0.0345 としたときであることを発見している⁴¹。

このように、Branch and Evans [2006] の実証結果は、適応的学習のアルゴリズムが、サーベイ・データで観察される人々の期待をかなりの程度モデル化できていることを示唆している。また、減衰型ゲインの RLS よりもコンスタント・ゲインの RLS の方が、サーベイ・データへの当てはまりが良いという結果をみると、現実には、人々が経済の構造変化を意識して、直近のデータを重視した学習方法を行っていることも示唆される。

39 サンプル期間は、Orphanides and Williams [2005a] が 1966～2002 年、Orphanides and Williams [2007] が 1948～2004 年。なお、ゲインの逆数は、近似的に、ローリング・リグレッションにおけるウィンドウの長さ に等しいことが知られている。ゲインが 0.01～0.04 という結果は、エコノミストが過去 6～25 年程度のデータを用いてローリング・リグレッションを行っていることに近似的に等しい。

40 合理的期待は、RLS においてゲインの値がゼロのケースとしてみなすことができる。これは、合理的期待では人々の期待は常に収束しており、パラメータのアップデートが行われなためである。

41 Branch and Evans [2006] は、Orphanides and Williams [2005a, 2007] と異なり、サンプル期間中 (in-sample) ではなく、サンプル期間外 (out-of-sample) の予測パフォーマンスの検討を行っている。すなわち、彼らは、1981 年以前のデータを用いてコンスタント・ゲインの値を求めてサンプル期間外の予測値を算出し、それを SPF と比較している。なお、0.0345 というコンスタント・ゲインの値は、実質 GDP 成長率とインフレ率のそれぞれに関して、1981 年以前の予測誤差を最小化するゲインの値を求め、その平均値を計算したものである。

(2) 適応的学習に基づくニューケインジアン・モデルの推計：Milani [2007a]

ここでは、適応的学習を仮定してニューケインジアン・モデルの推計を行った Milani [2007a] の研究について紹介する。ニューケインジアン・モデルに関する実証研究（例えば、Christiano, Eichenbaum, and Evans [2005] および Smets and Wouters [2007]）では、民間主体のフォワード・ルッキングな期待の形成方法として、合理的期待を仮定していた。その際、前掲 (14)、(15) 式のように、産出ギャップとインフレ率が純粋にフォワード・ルッキングな期待によって決定されると仮定すると、現実の経済で観察される、産出ギャップとインフレ率の慣性（persistence）を再現できないことから、多くの研究では、消費に関するハビット・フォーメーションや価格決定に関するインデグゼーションのように、経済動学に慣性を生み出す要素をニューケインジアン・モデルに追加して推計を行っている。

これに対し、Milani [2007a] は、産出ギャップやインフレ率の慣性が観察される理由として、人々の期待が合理的期待ではなく、適応的学習に基づいて行われている可能性を検討している。すなわち、彼は、経済動学の慣性を生み出している要因が、消費のハビット・フォーメーションや価格決定のインデグゼーションなどのような、人々の行動様式に関係する要因ではなく、人々の期待の形成方法にある可能性について、検討を行っている。

具体的には、標準的ニューケインジアン・モデルに対して、①消費のハビット・フォーメーション、②価格決定のインデグゼーション、③適応的学習に基づく期待の3種類の要素を追加し、下記のモデルを推計している。

$$\tilde{x}_t = E_t^P \tilde{x}_{t+1} - (1 - \beta\eta)\sigma(i_t - E_t^P \pi_{t+1}) + g_t, \quad (90)$$

$$\tilde{\pi}_t = \beta E_t^P \tilde{\pi}_{t+1} + \kappa(\omega x_t + ((1 - \eta\beta)\sigma)^{-1} \tilde{x}_t) + u_t, \quad (91)$$

$$i_t = \varphi i_{t-1} + (1 - \varphi)(\chi_\pi \pi_t + \chi_x x_t) + \vartheta_t. \quad (92)$$

$\tilde{x}_t \equiv (x_t - \eta x_{t-1}) - \beta\eta E_t^P (x_{t+1} - \eta x_t)$ 、 $\tilde{\pi}_t \equiv \pi_t - \lambda \pi_{t-1}$ であり、 η は消費のハビット・フォーメーション、 λ は価格決定のインデグゼーションの程度を表す ($0 \leq \eta \leq 1$ 、 $0 \leq \lambda \leq 1$)。 φ は金融政策ルール of 慣性 (inertia) の程度を表す。 g_t 、 u_t は前掲 (16)、(52) 式の AR(1) モデルに従う攪乱ショックであり、 ϑ_t はホワイト・ノイズである。

(90) 式は、消費のハビット・フォーメーションを導入した動学的 IS 曲線、(91) 式は、価格のインデグゼーションを導入したニューケインジアン・フィリップス曲線、(92) 式は、慣性つきのテイラー・ルールである。このモデルは、人々の期待が合理的期待により形成される場合には、Christiano, Eichenbaum, and Evans [2005] や Smets and Wouters [2007] などの先行研究で推計されたモデルとほぼ同様である。

Milani [2007a] は、先行研究と同様に、合理的期待を仮定して、上記モデルを、マルコフ連鎖モンテカルロ法というベイジアンの手法を用いて推計すると、表 1 のよ

表 1 Milani [2007a] の推計結果（合理的期待を仮定した場合）

	点推計値	95% 信頼区間
η	0.911	0.717~0.998
β	0.9897	0.971~0.999
σ	0.818	
λ	0.885	0.812~0.957
κ	0.001	0.0001~0.002
ω	0.837	0.01~1.63
φ	0.89	0.849~0.93
χ_π	1.433	1.06~1.81
χ_x	0.792	0.425~1.165

備考：推計期間は 1960Q1~2004Q2。ただし、 σ の推計値は、Milani [2007a] が (90) 式の IS 曲線の金利弾性値として推計した値を、 β と η の推計値を用いて σ に換算したものを表す。

うな推計結果となったことを報告している⁴²。

表 1 をみると、 η の値は統計的に有意にゼロから乖離しているうえに、0.911 と大きい。また、 λ も統計的に有意であり、しかも 0.885 とかなり大きな値を取っている。この結果は、人々の期待が合理的期待であるとすれば、産出ギャップやインフレ率の慣性を説明するうえで、ハビット・フォーメーションやインデグゼーションなどの要素が重要な役割を果たすことを示唆している。

次に、Milani [2007a] は、民間主体の期待が合理的期待ではなく、コンスタント・ゲインの RLS により形成されていると仮定し、上記モデルを再びベイジアン推計した。具体的には、民間主体が、上記モデルの MSV 解と同じ構造を持つ下記の PLM を推計していると仮定する。

$$Y_t = a_{t-1} + b_{t-1}Y_{t-1} + c_{t-1}g_t + d_{t-1}u_t + \vartheta_t. \tag{93}$$

ただし、 $Y_t = (\pi_t, x_t, i_t)$ であり、各パラメータ・ベクトル (a_t, b_t, c_t, d_t) は、下記の RLS により推計される。

$$\Phi_t = \Phi_{t-1} + \gamma_t R_t^{-1} X_{t-1} (Y_t - X_t' \Phi_{t-1}), \tag{94}$$

$$R_t = R_{t-1} + \gamma_t (X_{t-1} X_{t-1}' - R_{t-1}). \tag{95}$$

$\Phi_t = (a_t', b_t', c_t', d_t')$ 、 $X_t = (1, Y_{t-1}', g_t, u_t)$ である。なお、コンスタント・ゲインを用いるため、 $\gamma_t = \gamma$ と置く。このとき、民間主体の期待は下記のように形成される。

$$E_t^P Y_{t+1} = a_{t-1} + b_{t-1} Y_t + c_{t-1} \rho g_t + d_{t-1} \mu u_t. \tag{96}$$

42 データは、インフレ率が GDP デフレーター、名目金利は FF レートであり、産出ギャップは CBO (Congressional Budget Office) が公表している潜在 GDP と実質 GDP の乖離率を用いている。なお、外生ショックの決定プロセス (AR(1) パラメータおよびショック分散) の推計結果は、表示を割愛する。

表2 Milani [2007a] の推計結果 (適応的学習を仮定した場合)

	点推計値	95% 信頼区間
η	0.117	0.006~0.289
β	0.99	0.974~0.998
σ	0.748	0.587~0.996
λ	0.032	0~0.11
κ	0.016	0.002~0.04
ω	0.865	0.03~1.61
φ	0.914	0.875~0.947
χ_{π}	1.484	1.08~1.90
χ_{λ}	0.801	0.433~1.18
γ	0.0183	0.0133~0.0231

備考：推計期間は1960Q1~2004Q2。

Milani [2007a] は、(90)~(92) 式および前掲 (16)、(52) 式で構成されるモデルのパラメータ、およびコンスタント・ゲイン (γ) の値を、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いて一括推計した。その結果、表2の推計結果が得られたことを報告している⁴³。

表2で注目すべきは、 η と λ の推計値である。まず、 η の点推計値は0.117と非常に小さいうえ、95%の信頼区間をみても、 η は0.3を超えていない。一方、 λ の点推計値は0.032と極めて小さいうえ、統計的に有意にゼロと異なることが確認される⁴⁴。この結果は、表1の推計結果とは全く異なっている。すなわち、人々の期待形成が合理的期待ではなく、適応的学習に基づいて行われていると仮定すると、消費のハビット・フォーメーションと価格決定のインデグゼーションの定量的重要性は大幅に低下するか、または消滅してしまうことがわかる。

Milani [2007a] は、合理的期待モデルと適応的学習モデルの当てはまりを、バイズ推計の際に計算される周辺尤度 (marginal likelihood) の観点から比較すると、適応的学習モデルの方が、遥かに当てはまりが良いことを確認している。また、彼は別の研究 (Milani [2006]) において、5節(2)で紹介したPreston [2005]の長期予測モデルも推計しているが、そこでも、適応的学習を導入することで、特にインフレ率の慣性はほぼすべて説明されるため、価格改定のインデグゼーションをモデルに導入する必要はないと報告している⁴⁵。

これらの実証結果は、ニューケインジアン・モデルを用いた金融政策の理論的分析に対して、重要な意味を持つ。合理的期待を仮定した従来の分析では、経済動学の慣性を生み出すために、消費のハビット・フォーメーションや価格改定のインデグゼーションなど、慣性を直接的に生み出す要素をモデルに導入していた。これらの要素

43 Milani [2007a] は、推計に際して、適応的学習の初期時点の推計値を、1960年代以前のデータをもとにカリプレートした値に設定している。なお、Murray [2008] は、適応的学習モデルの実証分析における、初期推計値の設定の重要性を検証している。

44 コンスタント・ゲイン (γ) の推計値は0.0183であり、この推計値は先に紹介したサーベイ・データに基づく実証結果と整合的である。

45 ただし、長期予測モデルでは、消費のハビット・フォーメーションを導入する必要があるかどうかという点に関しては、必ずしも明瞭な結果が得られていない。

は、経済構造の中に外生的に組み込まれたものであり、金融政策はその存在を所与として、最適な金融政策ルールを取る必要があった。しかし、Milani [2007a] が示したように、経済動学の慣性が人々の適応的学習に基づく期待によって内生的に生じているならば、4節で説明したように、金融政策はアグレッシブな政策行動を取ることで、人々の学習速度にも影響を与えることができる。その意味で、Milani [2007a] の実証結果は政策含意を考えるうえでも注目に値すると考えられる。

(3) 適応的学習と「大いなる安定」：Milani [2007b]

最後に、適応的学習を導入して、いわゆる「大いなる安定 (Great Moderation)」と呼ばれる現象を説明した、Milani [2007b] の実証研究を紹介する。

大いなる安定とは、米国において、1980年代を境に、産出量などのマクロ変数の分散が大幅に低下した現象を指す。この原因に関して、Sims and Zha [2006]、Primiceri [2005] 等の VAR モデルの実証研究や、Justiniano and Primiceri [2008] 等の動学的一般均衡モデルの実証研究では、外生ショックの分散を確率的に扱ってモデルを推計することで、外生ショックの分散の低下によって、大いなる安定が生じた可能性を指摘している。

これに対して、Milani [2007b] は、民間主体の期待形成メカニズムが内生的に変化したために、大いなる安定が生じた可能性を検討している。具体的には、民間主体が適応的学習の際に用いるゲインの値が、経済状況の変化により内生的にシフトする可能性を考慮し、ニューケインジアン・モデルの推計を行っている。推計したモデルは下記の3式である。

$$x_t = E_t^P x_{t+1} - \sigma(i_t - E_t^P \pi_{t+1}) + g_t, \quad (97)$$

$$\pi_t = \beta E_t^P \pi_{t+1} + \kappa x_t + u_t, \quad (98)$$

$$i_t = \varphi_t i_{t-1} + (1 - \varphi_t)(\chi_{\pi,t} \pi_{t-1} + \chi_{x,t} x_{t-1}) + \vartheta_t. \quad (99)$$

このモデルは、本節(2)のMilani [2007a]のモデルをもとにしているが、①本節(2)での推計結果を踏まえ、消費のハビット・フォーメーションや価格決定のインデグゼーションを含まない定式化にしていること、②McCallum [1999]の議論に基づき、名目金利を1期前の産出ギャップとインフレ率に反応させていること、③大いなる安定が金融政策反応の増大にもたらされた可能性を考慮し、政策ルールのパラメータ($\varphi_t, \chi_{\pi,t}, \chi_{x,t}$)を1980年代以前と以後で異なる値になることを許容していることの3点で異なる。

このモデルのPLMは前掲(93)式と同一である。また、適応的学習のアルゴリズムも前掲(94)、(95)式で表されるが、ゲインの値が変数ごとに異なる($\gamma_t^n, n = x, \pi, i$)ことを許容し、その設定が下記に従うと仮定している⁴⁶。

46 Milani [2007b] は、(94)、(95)式に相当するPLMを、変数ごとに1本ずつ推計している。

$$\gamma_t^n = \begin{cases} t^{-1} & \text{if } \frac{1}{J} \sum_{j=0}^J |n_{t-j} - E_{t-j-1} n_{t-j}| < \Delta_t^n, \\ \gamma^n & \text{if } \frac{1}{J} \sum_{j=0}^J |n_{t-j} - E_{t-j-1} n_{t-j}| \geq \Delta_t^n. \end{cases} \quad (100)$$

このゲインの設定は、過去の予測誤差の大きさに応じて、民間主体が減衰ゲインとコンスタント・ゲインのどちらを用いるかを選択することを表す。すなわち、変数 $n = x, \pi, i$ に関して、過去 J 期間の予測誤差の絶対平均がある閾値 (Δ_t^n) 以下である場合には、民間主体は経済構造に大きな変化は生じていないと考え、減衰ゲインを選択する。しかし、過去の予測誤差の絶対平均が Δ_t^n を超えると、予測誤差の背景には経済の構造変化があると考え、民間主体はコンスタント・ゲインを選択する。なお、Milani [2007b] は、(100) 式において、 Δ_t^n の値をサンプル期間中の予測誤差の絶対平均に設定している。このことは、直近 J 期間中の予測誤差の絶対平均が、歴史的な平均値と比較して高い値を取った場合に、民間主体は、経済構造変化が生じたと考えて、コンスタント・ゲインを選択することを意味する。

Milani [2007b] は、以上の設定のもとで、上記 (97)~(99) 式のモデルの構造パラメータ、(100) 式に含まれるコンスタント・ゲイン (γ^n) の値、ゲインのスイッチの際に参照する期間数 (J) を一括してベイズアン推計した。その推計結果は、表 3 のとおりである。

推計結果をみると、ゲインのスイッチの際に参照される期間数 (J) は 4 である。このことは、民間主体が過去 1 年分の予測誤差を参照して、ゲインの値をスイッチし

表 3 Milani [2007b] の推計結果

	点推計値	95% 信頼区間
σ^{-1}	6.37	4.43~9.13
β	0.99	
κ	0.02	0.003~0.054
φ_{pre79}	0.94	0.87~0.99
$\chi_{\pi,pre79}$	1.37	0.91~1.82
$\chi_{x,pre79}$	0.63	0.26~1.11
φ_{post79}	0.93	0.88~0.97
$\chi_{\pi,post79}$	1.57	1.04~2.04
$\chi_{x,post79}$	0.49	0.04~0.88
γ^π	0.078	0.062~0.097
γ^x	0.073	0.06~0.084
γ^i	0.001	0~0.01
J	4	1~6

備考：推計期間は 1960Q1~2006Q1。推計に際しては、適応的学習の初期時点の推計値に、サンプル期間以前 (1954Q3~1959Q1) のデータを用いた推計値を用いている。政策ルールのパラメータの添え字「pre79」は 1979Q2 以前の推計値を、「post79」は 1979Q3 以降の推計値を表す。なお、 β の値は先行研究に基づきカリブレートしている。

ていることを意味する。コンスタント・ゲインの値 (γ^n) をみると、インフレ率については 0.078、産出ギャップについては 0.073 であり、本節 (2) で紹介した Milani [2007a] の推計値 (0.0183) よりもかなり大きい。これは、Milani [2007b] のモデルでは、民間主体が、予測誤差が大きいときのみコンスタント・ゲインを用いるという設定を行っているためと考えられる。金融政策ルールの反応度は、金利の慣性 (φ_t) は 0.93~0.94 と期間を通じてほぼ一定であり、インフレ反応度 ($\chi_{\pi,t}$) が 1980 年代以降若干増大 (1.37→1.57)、産出ギャップ反応度 ($\chi_{x,t}$) の点推計値は若干低下 (0.63 → 0.49) している。その他の構造パラメータや外生ショックのプロセスについては、先行研究と概ね整合的な推計値である。

Milani [2007b] は、ゲインの値が時系列的にどのように変化してきたかについて確認した。その結果、インフレ率に関するゲイン (γ_t^π) は、① 1970 年代から 1980 年代初頭にかけて、頻繁にコンスタント・ゲインへとスイッチしたこと、② 1985 年代以降は多くの期間において減衰型ゲインが用いられるようになったことを発見した。また、産出ギャップに関するゲイン (γ_t^x) も、① 1985 年以前は頻繁にコンスタント・ゲインにスイッチしていること、② その後の約 20 年間はほとんどの時期について、減衰型ゲインが用いられていることを確認した。

この結果は、民間主体の学習のアルゴリズムが、予測誤差の大きさに応じて、内生的に変化したものと解釈できる。すなわち、この結果によれば、1970 年代以前は、産出ギャップとインフレ率の予測誤差が大きかったため、民間主体が、経済構造に変化が生じている可能性が高いと考えて学習を行っていたが、1980 年代以降になると、予測誤差が縮小したことから、経済構造変化の可能性は小さくなったと考えて学習を行うようになったとの解釈を行うことができる。

さらに、Milani [2007b] は、上記の推計結果を用いてシミュレーションを行った。彼は、インフレ率と産出ギャップの分散を、サンプルの前半期 (1960~84 年) と後半期 (1985~2006 年) で比較すると、インフレ率については後半期が前半期の 1/3 程度、産出ギャップは約半分程度になっているが、彼が推計した内生的なゲインのスイッチのメカニズムを導入してシミュレーションを行うと、この結果をほぼ再現できると報告した。この結果は、民間主体が、予測誤差の大きさに応じて、期待形成方法を内生的にシフトしたために、期待の分散が縮小し、その結果として、米国の大いなる安定がもたらされたことを示唆している⁴⁷。

8. おわりに

本稿では、近年発展を遂げている、適応的学習を導入した金融政策分析に関するサーベイを行った。適応的学習とは、合理的期待の仮定の 1 つである「人々が経済

47 なお、Milani [2007b] は、金融政策ルールの変化は、民間主体の期待形成との相互作用を通じて、大いなる安定に寄与した可能性があるが、その変化だけで大いなる安定をすべて説明できるほどの政策反応度のシフトは観察されなかったとしている。

の変動法則に関して完全な知識を持つ」という仮説を見直し、「人々は現在および過去の実際の経済の動きを観察することによって、経済の変動法則に関する知識を経験的に習得している」と捉え直したものである。

本稿で説明したように、適応的学習を導入した金融政策分析の最も主要な関心は、「どのような金融政策を行えば、適応的学習に基づく期待を合理的期待へと収束させられるのか」という点にあり、このための条件として、合理的期待均衡の学習可能性を検討した研究が多数存在している。それらの研究では、標準的なニューケインジアン・モデルを用いて、最も単純なケースを分析すると、学習可能性はテイラー・プリンシプルによって保証されると報告されているが、より複雑なケースでは、学習可能性の必要十分条件は、状況設定やモデル構造によって変わりうることも明らかにされている。

また、適応的学習を導入した最適金融政策分析に関する文献では、中央銀行は、民間主体が合理的期待を形成していることを先験的に仮定するのではなく、民間主体が現実の経済変動から学習することを考慮して政策を実行する必要があると指摘している。これらの研究は、中央銀行が民間主体のインフレ期待の変動に対して積極的な政策反応を行うことで、民間主体の学習速度を速め、合理的期待均衡への収束速度を速められることを明らかにしている。その結果として、これらの文献は、適応的学習下の最適金融政策が、合理的期待下での最適金融政策よりも、インフレ期待の変動に対して強い政策反応を行うものとなるという結果を導いている。

さらに、本稿では、適応的学習と金融政策に関する応用分析として、流動性の罍に関する研究や、金融政策の透明性に関する研究を紹介した。流動性の罍に関する従来の研究は、流動性の罍の発生メカニズムやその発生を防ぐ政策処方に関して、合理的期待の仮定に強く依拠するものが多かったが、適応的学習を導入した分析では、これらの合理的期待モデルに基づく分析とは異なるメカニズムおよび政策含意を提示している。また、従来の合理的期待モデルに基づく分析では、民間主体が金融政策の行動様式（政策目標や政策ルールの形状）を知っていることを仮定していたが、適応的学習下では、これらの知識は中央銀行が情報提供しない限り、民間主体は不完全にしか知ることができない。このため、適応的学習のフレームワークは、金融政策の透明性を分析するのに適していると考えられる。

このような理論的な分析に加えて、最近では、適応的学習を導入したモデルの実証分析も行われるようになってきている。ニューケインジアン・モデルも含め、動学的一般均衡モデルに関する実証分析の多くでは、モデルの推計に際して合理的期待を仮定している。しかし、適応的学習に関する理論的分析が想定しているように、人々の期待が必ずしも常に合理的期待に収束しているとは限らないとすると、モデルの推計に際しても、合理的期待を先験的に仮定することは適切でない。本稿で紹介した実証分析でも、民間主体の期待形成に合理的期待を仮定するのか適応的学習を仮定するのかで、推計結果が大きく異なることが報告されており、これは実証分析における期待の取扱いの重要性を明らかにしたものといえよう。

なお、本稿では、適応的学習と金融政策に関する研究のうち、特に重要と思われる

る文献を紹介したが、これ以外にも同分野に関する研究は数多く存在している。例えば、本稿では主として民間主体の期待形成に関して適応的学習を導入した研究を扱ったが、幾つかの文献（例えば、Aoki and Nikolov [2004]）では、中央銀行が経済構造を学習しながら最適金融政策を実行する場合について分析を行っている⁴⁸。また、本稿で紹介した文献の多くでは、民間主体は経済の変動法則を規定する誘導形モデルのパラメータは知らないが、関数形は知っているとして仮定した。しかし、幾つかの研究（例えば、Guse [2008]、Berardi [2006] 等）では、民間主体が関数形の特定化の誤り（ミス・スペシフィケーション）を行っている場合についても分析している⁴⁹。また、本稿で紹介した文献はニューケインジアン・モデルに基づくものであったが、これ以外のモデルにおいても適応的学習と金融政策に関する重要な研究は多数存在する（例えば、Sargent [1999]、Sargent, Williams, and Zha [2006]、Orphanides and Williams [2005b] 等）。さらに、最近では、適応的学習と金融政策に関する分析を、開放経済モデルに応用した研究も存在する（例えば、Bullard and Singh [2006]、Llosa and Tuesta [2008] 等）。

このように、適応的学習を導入した金融政策分析は、近年大きな発展を遂げた。この発展の理由は、適応的学習が、現代のマクロ経済モデルの中核をなしている、合理的期待の仮定を見直したものであることに起因していると考えられる。合理的期待モデルに基づく分析では、人々が合理的期待を形成できることを先験的に仮定しているが、そこでは、人々がどのようにして合理的期待を形成できるようになるのか、という点の分析が捨象されている。これに対し、適応的学習に関する文献は、合理的期待に至るまでの経路がどのようなものになるのか、という点を明示的に分析することを主眼としている。この問題意識が、金融政策分析に用いられる現代のマクロ経済モデルのほとんどに対して応用可能なものである以上、適応的学習に基づく金融政策分析は、今後もさらに発展を続けていくものと予想される。

48 Evans and Honkapohja [2003a] も、中央銀行が適応的学習を行うケースを考察している。

49 民間主体が関数形の特定化を誤り、経済変動を規定する変数の一部を推計式から落としている場合、経済は合理的期待均衡とは別の均衡に到達する可能性がある（詳細は Evans and Honkapohja [1999]、Branch [2006] 等を参照）。

補論. RLS のアルゴリズムについて

本稿で紹介したように、適応的学習の文献で標準的に用いられる学習のアルゴリズムは RLS である。ここでは、本論で示した RLS のアルゴリズムが、最小 2 乗法を逐次的にかけ直すことと整合的になることを示す。

いま、PLM として下記のモデルが与えられたとする。

$$Y_t = X_t \Lambda + \xi_t. \quad (\text{A-1})$$

ただし、 $Y_t = (y_1, \dots, y_t)'$ 、 $X_t = (x_1, \dots, x_t)'$ 、 $x_j = (x_{1,j}, \dots, x_{k,j})$ であり、 Λ は $k \times 1$ の係数行列、 ξ_t は $t \times 1$ の攪乱項ベクトルである。

(A-1) 式に関する RLS のアルゴリズムは、下記のとおりである。

$$\Lambda_t = \Lambda_{t-1} + \gamma_t R_t^{-1} x_t'(y_t - x_t' \Lambda_{t-1}), \quad (\text{A-2})$$

$$R_t = R_{t-1} + \gamma_t (X_t X_t' - R_{t-1}). \quad (\text{A-3})$$

一方、 t 期における、係数行列 Λ の最小 2 乗推定量は、下記により与えられる。

$$\Lambda_t = (X_t' X_t)^{-1} X_t' Y_t. \quad (\text{A-4})$$

(A-4) 式は、下記のように展開できる。

$$\begin{aligned} \Lambda_t &= (X_t' X_t)^{-1} X_t' Y_t \\ &= (X_t' X_t)^{-1} (X_{t-1}' Y_{t-1}) + (X_t' X_t)^{-1} x_t y_t \\ &= (X_t' X_t)^{-1} (X_{t-1}' X_{t-1}) (X_{t-1}' X_{t-1})^{-1} (X_{t-1}' Y_{t-1}) + (X_t' X_t)^{-1} x_t y_t \\ &= (X_t' X_t)^{-1} (X_{t-1}' X_{t-1}) \Lambda_{t-1} + (X_t' X_t)^{-1} x_t y_t \\ &= (X_t' X_t)^{-1} (X_t' X_t - x_t x_t') \Lambda_{t-1} + (X_t' X_t)^{-1} x_t y_t \\ &= \Lambda_{t-1} + \gamma_t (\gamma_t X_t' X_t)^{-1} x_t'(y_t - x_t' \Lambda_{t-1}). \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

上式で $R_t = \gamma_t X_t' X_t$ とすれば、(A-5) 式から (A-2) 式が得られる。また、(A-2)、(A-3) 式において、ゲイン (γ_t) はどのような値を入れても、(A-5) 式とは矛盾しない。このため、(A-2)、(A-3) 式の RLS は最小 2 乗法と整合的である。

参考文献

- 武藤一郎、「学習行動を導入した最近の金融政策ルール分析——経済構造に関する知識が不完全な下での期待形成と政策運営」、日本銀行ワーキング・ペーパー 04-J-4、日本銀行、2004年
- Aoki, Kosuke, and Kalin Nikolov, “Rule-Based Monetary Policy under Central Bank Learning,” in Clarida, Frankel, Giavazzi and West eds, *NBER International Seminar on Macroeconomics 2004*, 2004, pp. 145–181.
- Benhabib, Jess, Stephanie Schmitt-Grohe, and Martin Uribe, “The Perils of Taylor Rules,” *Journal of Economic Theory*, 96 (1-2), 2001, pp. 40–69.
- Berardi, Michele, “Monetary Policy with Heterogeneous and Misspecified Expectations,” Centre for Growth and Business Cycle Research Discussion Paper 81, 2006.
- Bernanke, Ben, “Outstanding Issues in the Analysis of Inflation,” remarks at the Federal Reserve Bank of Boston’s 53rd Annual Economic Conference, June 9, 2008.
- Blanchard, Olivier, and Charles Kahn, “The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations,” *Econometrica*, 48 (5), 1980, pp. 1305–1311.
- Branch, William, “Restricted Perceptions Equilibria and Learning in Macroeconomics,” in David Colander, eds. *Post Walrasian Macroeconomics: Beyond the Dynamic Stochastic General Equilibrium Model*, 2006, pp. 135–160.
- , and George Evans, “A Simple Recursive Forecasting Model,” *Economics Letters*, 91 (2), 2006, pp. 158–166.
- , and Bruce McGough, “A New Keynesian Model with Heterogeneous Expectations,” mimeo, 2007.
- Bullard, James, and In-Koo Cho, “Escapist Policy Rules,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29 (11), 2005, pp. 1841–1865.
- , and Stefano Eusepi, “When Does Determinacy Imply Expectational Stability?” Federal Reserve Bank of St. Louis Working Paper 2008-007A, 2008.
- , and Kaushik Mitra, “Learning about Monetary Policy Rules,” *Journal of Monetary Economics*, 49 (6), 2002, pp. 1105–1129.
- , and Aarti Singh, “Worldwide Macroeconomic Stability and Monetary Policy Rules” Federal Reserve Bank of St. Louis Working Paper 2006-040b, 2006.
- Calvo, Guillermo, “Staggered Prices in a Utility-maximizing Framework,” *Journal of Monetary Economics*, 12 (3), 1983, pp. 383–398.
- Christiano, Lawrence, Martin Eichenbaum, and Charles Evans, “Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy,” *Journal of Political Economy*, 113 (1), 2005, pp. 1–45.
- Duffy, John, and Wei Xiao, “Investment and Monetary Policy: Learning and Determinacy of Equilibrium,” University of Pittsburgh Working Paper 324, 2007a.

- , and ———, “The Value of Interest Rate Stabilization Policies When Agents are Learning,” *Journal of Money, Credit, and Banking*, 39 (8), 2007b, pp. 2041–2056.
- Eusepi, Stefano, and Bruce Preston, “Central Bank Communication and Expectations Stabilization,” NBER Working Paper No. 13259, 2007.
- Evans, George, and Seppo Honkapohja, “Learning Dynamics”, in John Taylor and Michael Woodford, eds. *Handbook of Macroeconomics*, Chapter 7, 1999, pp. 449–542.
- , and ———, *Learning and Expectations in Macroeconomics*, Princeton: Princeton University Press, 2001.
- , and ———, “Adaptive Learning and Monetary Policy Design,” *Journal of Money, Credit, and Banking*, 35 (6), 2003a, pp. 1045–1072.
- , and ———, “Expectations and the Stability Problem for Optimal Monetary Policy,” *Review of Economic Studies*, 70 (4), 2003b, pp. 807–824.
- , and ———, “Policy Interaction, Expectations and the Liquidity Trap,” *Review of Economic Dynamics*, 8 (2), 2005, pp. 303–323.
- , and ———, “Monetary Policy, Expectations and Commitment,” *Scandinavian Journal of Economics*, 108 (1), 2006, pp. 15–38.
- , and ———, “Expectations, Learning and Monetary Policy: An Overview of Recent Research,” Cambridge for Dynamic Macroeconomic Analysis Working Paper 0802, 2008.
- , Eran Guse, and Seppo Honkapohja, “Liquidity Traps, Learning and Stagnation,” University of Oregon Economics Department Working Paper 2007-9, 2007.
- Ferrero, Giuseppe, “Monetary policy, Learning and the Speed of Convergence,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31 (9), 2007, pp. 3006–3041.
- Fujiwara, Ippei, “Is the Central Bank’s Publication of Economic Forecasts Influential?” *Economics Letters*, 89 (3), 2005, pp. 255–261.
- Galí, Jordi, *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*, Princeton: Princeton University Press, 2008.
- Guse, Eran, “Learning in a Misspecified Multivariate Self-referential Linear Stochastic Model,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32 (5), 2008, pp. 1517–1542.
- Honkapohja, Seppo, and Kaushik Mitra, “Performance of Monetary Policy with Internal Central Bank Forecasting,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29 (4), 2005, pp. 627–658.
- , ———, and George Evans, “Notes on Agents’ Behavioral Rules under Adaptive Learning and Recent Studies of Monetary Policy,” mimeo, 2003.
- Justiniano, Alejandro, and Giorgio Primiceri, “The Time Varying Volatility of Macroeconomic Fluctuations,” *American Economic Review*, 2008, pp. 604–641.

- Kurozumi, Takushi, “Determinacy and Expectational Stability of Equilibrium in a Monetary Sticky-Price Model with Taylor Rule,” *Journal of Monetary Economics*, 53 (4), 2006, pp. 827–846.
- , and Willem Van Zandweghe, “Labor Market Search and Interest Rate Policy,” Research Working Paper 08-03, Federal Reserve Bank of Kansas City, 2008.
- , and ———, “Investment, Interest rate Policy, and Equilibrium Stability,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32 (5), 2008, pp. 1489–1516.
- Llosa, Luis-Gonzalo, and Vincente Tuesta, “Determinacy and Learnability of Monetary Policy Rules in Small Open Economies,” *Journal of Money, Credit, and Banking*, 40 (5), 2008, pp. 1033–1063.
- Marcet, Albert, and Thomas Sargent, “Convergence of Least Squares Learning Mechanisms in Self-referential Linear Stochastic Models,” *Journal of Economic Theory*, 48 (2), 1989, pp. 337–368.
- McCallum, Bennett, “Recent Developments in Monetary Policy Analysis: The Roles of Theory and Evidence,” *Journal of Economic Methodology*, 6 (2), 1999, pp. 171–198.
- , “E-Stability vis-a-vis Determinacy Results for a Broad Class of Linear Rational Expectations Models,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31 (4), 2007, pp. 1376–1391.
- Milani, Fabio, “A Bayesian DSGE Model with Infinite-Horizon Learning: Do “Mechanical” Sources of Persistence Become Superfluous?” *International Journal of Central Banking*, 2 (3), 2006, pp. 87–106.
- , “Expectations, Learning and Macroeconomic Persistence,” *Journal of Monetary Economics*, 54(7), 2007a, pp. 2065–2082.
- , “Learning and Time-Varying Macroeconomic Volatility,” UC Irvine Department of Economics Working Paper 070802, 2007b.
- Molnár, Krisztina, and Sergio Santoro, “Optimal Monetary Policy When Agents Are Learning,” Institute of Economics Hungarian Academy of Sciences Discussion Paper 0601, 2006.
- Murray, James, “Initial Expectations in New Keynesian Models with Learning,” Indiana University Caep Working Paper 2008-017, 2008.
- Muto, Ichiro, “Monetary Policy and Learning from the Central Bank’s Forecast,” IMES Discussion Paper 08-E-01, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2008.
- Orphanides, Athanasios, and John Williams, “The Decline of Activist Stabilization Policy: Natural Rate Misperceptions, Learning, and Expectations,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29 (11), 2005a, pp. 1927–1950.

- , and ———, “Imperfect Knowledge, Inflation Expectations, and Monetary Policy,” in Ben Bernanke and Michael Woodford, eds. *The Inflation-Targeting Debate*, The University of Chicago Press, 2005b, pp. 201–248.
- , and ———, “Robust Monetary Policy with Imperfect Knowledge,” *Journal of Monetary Economics*, 54 (5), 2007, pp. 1406–1435.
- Preston, Bruce, “Learning about Monetary Policy Rules when Long-Horizon Expectations Matter,” *International Journal of Central Banking*, 2 (1), 2005, pp. 81–126.
- , “Adaptive Learning, Forecast-based Instrument Rules and Monetary Policy,” *Journal of Monetary Economics*, 53 (3), 2006, pp. 507–535.
- Primiceri, Giorgio, “Time Varying Structural Vector Autoregressions and Monetary Policy,” *Review of Economic Studies*, 72 (3), 2005, pp. 821–852.
- Sargent, Thomas, *Bounded Rationality in Macroeconomics*, New York: Oxford University Press, 1993.
- , *The Conquest of American Inflation*, Princeton: Princeton University Press, 1999.
- , Noah Williams, and Tao Zha, “Shocks and Government Beliefs: The Rise and Fall of American Inflation,” *American Economic Review*, 96 (4), 2006, pp. 1193–1224.
- Sims, Christopher, and Tao Zha, “Were There Regime Switches in U.S. Monetary Policy?” *American Economic Review*, 96 (1), 2006, pp. 54–81.
- Smets, Frank, and Rafael Wouters, “Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach,” *American Economic Review*, 97 (3), 2007, pp. 586–606.
- Woodford, Michael, *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton: Princeton University Press, 2003.
- Xiao, Wei, “Increasing Returns and the Design of Interest Rate Rules,” *Macroeconomic Dynamics*, 12 (1), 2008, pp. 22–49.