

# 低金利環境下での フィット向上を目指した 最近のイールド・カーブ・モデル群

ふじわらしげあき  
藤原茂章

## 要 旨

本稿では、低金利環境下でのフィット向上を目指して開発された最近のイールド・カーブ・モデルについて、サーベイを行う。本邦に代表されるような低金利環境下では、バシチェック・モデルなどの古典的なイールド・カーブ・モデルはうまくフィットしないことが広く指摘されている。このため、最近では、低金利でのフィッティングを目指したモデルの研究が多くなされている。代表的なものに、Black [1995] が提唱した金利を一種のオプションととらえる潜在金利モデルや、金利の状態を2つに分けて考えたスイッチング・モデルがある。本稿では、これら2つのモデル、および、その派生モデル群について、そのエッセンスを紹介するとともに、各モデルの特徴点を比較・整理する。

キーワード：イールド・カーブ・モデル、潜在金利モデル、スイッチング・モデル

---

本稿を作成するに当たっては、森田洋教授（横浜国立大学大学院国際社会科学研究所）に有益なコメントを頂いた。本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

藤原茂章 日本銀行金融研究所企画役補佐 (E-mail: shigeaki.fujiwara@boj.or.jp)

## 1. はじめに

---

イールド・カーブを記述するモデルとして、これまで多くのモデルが提案されてきた。しかしながら、従来のモデルを日本のように低金利下でのイールド・カーブに適用しようとする、うまくフィットしないことが、よく知られている。従来の代表的な金利モデルとして、瞬間短期金利（以下、スポット・レート）をモデル化したバシチェック・モデル (Vasicek [1977]) が挙げられる。このモデルは、割引債価格が平易な形で表現できるなど、取扱いが比較的容易であることから、実務や金利デリバティブの研究分野で幅広く用いられてきた。ところが、バシチェック・モデルは簡便である一方で、スポット・レートが負となる可能性を排除していないという欠点を持つ。短期金利がある一定水準以上にある場合には、バシチェック・モデルを用いても、スポット・レートが負となる確率は十分に小さいため、非負性が排除されていないとしても、さほど大きな問題とはならなかった。しかし、ゼロ金利政策下の日本のように短期金利が極めて低い場合、バシチェック・モデルを当てはめようすると、この問題が顕現化し、割引債価格や金利デリバティブのミス・プライシングにつながる可能性がある。例えば、Rogers [1996] は、スポット・レートにバシチェック・モデルを仮定して、ストライクが0%のフロアーや、ノック・アウト債<sup>1</sup>の価格を計算し、これらの価格が、スポット・レートが負となる確率に対して感応度が高く、不適当なイールド・カーブ・モデルの選択がミスプライスにつながることを示している。

こうした問題に対応するため、Black [1995] は、低金利環境下でのイールド・カーブのフィッティングを目指し、金利を一種のオプションとみなす潜在金利 (shadow interest) という考え方を導入した。これは、名目金利は非負である一方で、潜在金利には負となることを許容するものである。近年では、この潜在金利を用いたイールド・カーブのモデリングに関する派生研究 (Gorovoi and Linetsky [2003, 2004]、Miller and Platen [2004]、Bomfim [2003]) が行われている。

このほか、低金利でのフィッティングに対応するモデルとして、金利がゼロの期間と、確率過程に従う期間に分けたモデル (以下、スイッチング・モデルと呼ぶ) の研究も広く行われている。

本稿では、潜在金利モデルと、スイッチング・モデルに属する論文について、そのエッセンスを解説していくが、予め個々の論文の特徴点を簡単にまとめると、表1のとおりである。

---

<sup>1</sup> 金利がゼロ以下になれば、価格がゼロとなるような債券。

表 1 名目金利が非負となるようなモデル

潜在金利モデル (潜在金利には負の金利を許容)	スイッチング・モデル (負の金利を許容しない)
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Black [1995]: 名目金利は潜在金利の正の部分とする。</li> <li>● Gorovoi and Linetsky [2003, 2004]: Black [1995] の概念を基に割引債価格の解析解を導出。</li> <li>● Miller and Platen [2004]: GOP (後述) を用いた 2 ファクター・モデル。</li> <li>● Bomfim [2003]: 名目金利の長期均衡水準の変動の可能性にも対応。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 丸茂・中山・西岡・吉田 [2003]、山分 [2005]: ゼロ金利政策下では、名目金利はゼロ、ゼロ金利政策解除後は、バシチェック・モデルに従う。ゼロ金利政策解除のタイミングをモデル化。</li> <li>● Kabanov, Kijima, and Rinaz [2005]: 名目金利にバシチェック・モデルを仮定。ゼロにヒットすると、当面、ゼロの期間が継続し、あるタイミングで正に復帰。</li> </ul>

## 2. 潜在金利モデル

### (1) Black [1995] が提唱した潜在金利のアイディア

金利が負値をとらないスポット・レート・モデルとしては、CIR モデル (Cox, Ingersoll, and Ross [1985])、対数正規 (幾何ブラウン運動) モデルなどがある<sup>2</sup>。対数正規モデルでは、金利はゼロ以下にはならないが、1930 年代の米国や近年の日本にみられるように、金利は負にはならなくてもゼロとはなり得るので、対数正規モデルでは、この点を十分に表すことはできない。また、同モデルでは、金利低下時にはボラティリティが急速に小さくなるが、この点も、実際の金利の動きとは必ずしも合致しない。

CIR モデルでも平均回帰性が強いときには、金利がゼロにはなり難い<sup>3</sup>。また、仮に、金利が非常に低い水準になったとしても、ボラティリティが小さくなってしまう。

このように、対数正規モデルや CIR モデルでは、低金利下でのスポット・レートの挙動をうまく表すことができず、その結果、イールド・カーブのフィットも悪くなる。こうした問題を解決するために、ブラックは、金利を一種のオプションとみ

2 代表的なスポット・レート・モデルである定弾性値モデル (拡散係数がスポット・レートだけに依存し、時間には無関係) は、 $dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$  と書ける。ここで、 $\gamma = 0.5$  に対応するのが、それぞれ、バシチェック・モデル、CIR モデルである。また、 $\gamma = 1$  とすると対数正規モデルになる。金利モデル全般については、木島 [1999] が詳しい。

3 具体的には、 $2\kappa\theta \geq \sigma^2$  であれば、スポット・レートはゼロにはならないことが知られている (Feller [1951])。

なす潜在金利の概念を導入し、名目金利は、潜在金利を原資産とするストライクが0%のコール・オプションであるとした。これは、通貨自体がオプション性を備えている、すなわち、金融商品の金利が正であれば、金融商品を保有することで、正のリターンが得られるが、金融商品の金利が負の場合には、キャッシュを保有することで、負のリターンを避けることができるという考えによるものである。潜在金利が負の値をとり得る確率モデルを想定すると、スポット・レートは、潜在金利とゼロの大きいほうの値をとる。数学的には、潜在金利を  $X_t$ 、スポット・レートを  $r_t$  とすると、

$$r_t = X_t^+ = \max[X_t, 0], \quad (1)$$

と書ける。潜在金利に対数正規モデルや CIR モデルを用いる場合には、潜在金利が負の値に到達可能となるように、モデルに若干の変更を加える必要がある<sup>4</sup>。

ブラックは、潜在金利にツリー<sup>5</sup>を用いることで、割引債や金利デリバティブの評価が可能であるが、解析解の算出は困難ではないかと指摘した。

## (2) 固有関数展開を用いた解析解

こうしたブラックの指摘に対し、ゴロボイら (Gorovoi and Linetsky [2003, 2004]) は、潜在金利モデルに固有関数展開を適用すると、割引債価格の解析解が得られることを示した。彼らは実際に、日本国債の価格データを用いて、イールド・カーブ・モデルのパラメータを推計している。

まず、潜在金利  $X_t$  として、以下のバシチェック・モデルを仮定する<sup>6</sup>。

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t) dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x. \quad (2)$$

このとき、リスク中立確率のもとで、満期  $\tau$  の割引債価格  $P(x, \tau)$  は、

$$P(x, \tau) = E \left[ \exp \left( - \int_0^\tau X_u^+ du \right) \right], \quad (3)$$

と書ける。ここで、 $P(x, \tau)$  は、初期条件が  $P(x, 0) = 1$  である、次の基本偏微分方程式 (fundamental partial differential equation) を満たす<sup>7</sup>。

4 例えば、潜在金利に CIR モデルを想定する場合、 $dX_t = \kappa(\theta - X_t) dt + \sigma \sqrt{X_t + l} dW_t$ ,  $l > 0$  とボラティリティの項に変更を加えてやればよい。

5 潜在金利が負になった場合に、金利をゼロに置き換えたものが、スポット・レートのツリーとなり、これを用いて価格評価を行う。

6 ゴロボイらは、シフト型 CIR モデルについても、解析解が得られることを示している。なお、本稿における標記に一貫性を持たせるため、各原論文とは若干異なる標記を用いている場合がある。

7 無裁定条件から導くことができる。

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_{xx} + \kappa(\theta - x)P_x - x^+P = P_\tau. \quad (4)$$

$P_x$  は割引債価格  $P$  を変数  $x$  で偏微分したものであり、 $x^+$  は潜在金利の初期値  $x$  に関して、 $x^+ = \max[x, 0]$  で定義したものである。偏微分方程式 (4) の解は、固有関数展開で表すことができ、

$$P(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n \tau} \varphi_n(x), \quad (5)$$

となる。 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$  は、固有値 ( $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ ) であり、 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  は、 $\lambda_n$  に対応する固有関数である。固有関数展開は、 $e^{-\lambda_n \tau}$  の項があるため、 $n$  の増加とともにゼロに収束する（満期  $\tau$  が長くなるにつれて、収束も速い）。このため、実務においては、適当な  $n$  で計算を打ち切っても、十分な精度が得られる。次に、固有値  $\lambda_n$ 、固有関数  $\varphi_n$ 、係数  $c_n$  の具体的な値について説明を行う。まず、標記を簡単にするために、以下の定数を定義する。

$$c = \frac{\sqrt{2\kappa}}{\sigma}, \quad \alpha = \sigma \sqrt{\frac{2}{\kappa^3}}, \quad \beta = c\theta, \quad \gamma = \theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}. \quad (6)$$

固有値は、

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \frac{c\lambda}{\kappa} D_{\frac{\lambda-\gamma}{\kappa}}(\alpha - \beta) D_{\frac{\lambda}{\kappa}-1}(\beta) \\ &\quad + c D_{\frac{\lambda}{\kappa}}(\beta) \left[ \frac{\lambda - \gamma}{\kappa} D_{\frac{\lambda-\gamma}{\kappa}-1}(\alpha - \beta) - \frac{\alpha}{2} D_{\frac{\lambda-\gamma}{\kappa}}(\alpha - \beta) \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

の解として与えられる。 $D_\nu(z)$  は、ウェーバー＝エルミートの放物柱関数 (parabolic cylinder function) と呼ばれる関数で、

$$D_\nu(z) = 2^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} H_\nu(2^{-\frac{1}{2}}z), \quad (8)$$

である。ここで、 $H_\nu(z)$  は、エルミート関数で、

$$H_\nu(z) = (-1)^\nu e^{z^2} \frac{d^\nu e^{-z^2}}{dz^\nu}, \quad (9)$$

である。固有関数については、

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{D_{\frac{\lambda_n - \gamma}{\kappa}}(\alpha - \beta)}{w'(\lambda_n) D_{\frac{\lambda_n}{\kappa}}(\beta)}} e^{\frac{1}{4}(\beta - cx)^2} D_{\frac{\lambda_n}{\kappa}}(\beta - cx), & \text{if } x \leq 0 \\ \sqrt{\frac{D_{\frac{\lambda_n}{\kappa}}(\beta)}{w'(\lambda_n) D_{\frac{\lambda_n - \gamma}{\kappa}}(\alpha - \beta)}} e^{\frac{1}{4}(\beta - cx)^2} D_{\frac{\lambda_n - \gamma}{\kappa}}(\alpha - \beta + cx), & \text{if } x \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

ただし、 $w'(\lambda_n) = dw(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=\lambda_n}$  である。

また、係数は、

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \frac{2}{\sigma^2} e^{-\frac{\kappa(\theta - x)^2}{\sigma^2}} dx, \quad (11)$$

により計算される。

最終利回りを  $R(x, \tau)$  とすると、

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(x, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln P(x, \tau)}{\tau} \right) = \lambda_0 > 0, \quad (12)$$

であることから、ゴロボイらのモデルで表されるイールド・カーブは、満期が大きくなるにつれ、徐々にフラット化し、 $\lambda_0$  が長期的な均衡値となることがわかる。

ゴロボイらは、日本国債のデータを用いて、イールド・カーブのフィッティングを行っている。具体的には、モデルから得られるイールドと実際のイールドの二乗誤差の和が最小となるように、バシチェック・モデルのパラメータ  $\theta, \kappa, \sigma$  と潜在金利の初期値  $x$  (ゼロ金利下では負値をとる) を推計する。その結果、イールドの誤差が、30年までの全ゾーンでみて最大でも 4 bp と、極めて良好なフィッティングを得ている。ゼロ金利政策期の日本のイールド・カーブは、中短期ゾーンが下に凸になっているため、フィッティングが困難であると一般にはいわれているが、この点もうまくフィットしている。

固有関数展開を用いた潜在金利モデルの研究としては、Linetsky [2004] および馬場 [2006] が挙げられる。リネツキーは、潜在金利 (初期値は負) が初めてゼロとなるまでの期待時間 (first hitting time of zero) を固有関数を用いて計算している。馬場の実証分析では、日本のゼロ金利政策期の国債市場のデータを用いて潜在金利モデルのパラメータを推計し、潜在金利がゼロになる初期到達時間から、ゼロ金利政策の予想終了時期を求めている。モデルから得られたゼロ金利政策の予想終了時点は、ユーロ円金利先物からインプライされるものと、概ね同様の動きとなっている。

### (3) GOP を用いた現実確率のもとでの価格評価

ミラーら (Miller and Platen [2004]) は、低金利下でのイールド・カーブのフィッティングを高めるため、2 ファクターのモデルを提案している。1 つ目のファクターはイールドの短期ゾーンに作用するファクターで、ブラックの潜在金利のアイデアを用いている。もう 1 つは、イールドの長期ゾーンに作用するファクターで、分散を所与として期待収益率を最大にするグロース・オプティマル・ポートフォリオ (Growth Optimal Portfolio : 以下、GOP)<sup>8</sup> と呼ばれる、市場インデックスの代理変数を用いる。割引債の理論価格に関しては、現実確率のもとで観測可能な GOP をニューメレールとして算出していることが特徴的である<sup>9</sup>。デリバティブの価格付けにおいて一般的に用いられるリスク中立確率測度は用いられない。以下に、ミラーらの手法の概要を説明する。

#### 1. GOP

まず、時刻  $t$  での銀行預金の価値を  $B_t$  とすると、

$$dB_t = B_t r_t dt, \quad (13)$$

と書ける。 $r_t$  は短期金利である。市場には、 $d$  種類の原証券<sup>10</sup> (primary securities) が存在すると仮定し、各証券価格  $X_t^j$  ( $j = 1, \dots, d$ ) は、 $d$  個のウィーナー過程からなる、確率過程

$$dX_t^j = X_t^j \left\{ a_t^j dt + \sum_{k=1}^d b_t^{j,k} dW_t^k \right\}, \quad j = 1, \dots, d, \quad (14)$$

を満たすとする。ここで、 $a_t = [a_t^j]_{j=1}^d$  はドリフトを表す  $d$  次元ベクトル、 $b_t = [b_t^{j,k}]_{j,k=1}^d$  は、逆行列が存在する  $d \times d$  のボラティリティ行列とする。この条件は市場が完備であることを意味する。

このとき、リスクの市場価格を表すベクトルは、

8 1 種類の安全資産と複数のリスク資産から構成され、かつ、外部との資本のやりとりがない自己充足的 (self-financing) なポートフォリオを考える。リスク資産価格は確率過程に従うとする。ポートフォリオのボラティリティを所与としたとき、ドリフトを最大化させる、すなわち期待収益率を最大化させるリスク資産の投資比率の組合せは、安全資産への投資比率の関数となることが知られている (分離定理)。ここでさらに、安全資産の投資比率の関数として表されたポートフォリオのドリフトの対数値を最大にするように、安全資産の投資比率を選択したポートフォリオのことを GOP という。詳細については、Platen [2002] を参照。

9 現実確率測度とリスク中立確率測度の変換の際に必要なラドン・ニコディム微分に GOP を用いるといい換えることもできる。ただし、後述するとおり、観測可能な市場データを利用するために、GOP 成分と短期金利成分の独立性などの仮定をいくつかおいている。

10 実際に市場に存在する証券のことであり、市場の完備性の議論で用いられるアロー = ドブリュー (Arrow-Debreu) 証券とは異なる。

$$\begin{aligned}\eta_t &= (\eta_t^{(1)}, \eta_t^{(2)}, \dots, \eta_t^{(d)})^T \\ &= b_t^{-1}[a_t - r_t \mathbf{1}],\end{aligned}\quad (15)$$

となる。ただし、 $\mathbf{1}$  は各要素が 1 の  $d$  次元ベクトルである。

今、原証券  $i$  への投資比率が  $\delta_i^j$  であるポートフォリオ  $S_t$  の確率過程は、

$$dS_t = S_t r_t dt + \sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^d \delta_i^j X_t^j b_t^{j,k} (\eta_t^{(k)} dt + dW_t^k), \quad (16)$$

となる。ただし、 $X_t^0$  は銀行預金を表す。

ここで、ポートフォリオ  $S_t$  が GOP であるとき、 $\eta_t^{(k)} = \sum_{j=0}^d \delta_i^j X_t^j b_t^{j,k}$  となることを用いると、(16) 式は、

$$dS_t = S_t \left\{ r_t dt + \sum_{k=1}^d \eta_t^{(k)} (\eta_t^{(k)} dt + dW_t^k) \right\}, \quad (17)$$

となり、GOP のボラティリティはリスクの市場価格で書き表せる。

ここからは、ミラーらの手法に則り、2 ファクター・モデル ( $d = 2$  のケース) で議論を進めていくこととする。

まず、GOP の価値  $S_t$  は、2 種類のウィーナー過程により、(18) 式のように記述される。

$$dS_t = S_t \left\{ r_t dt + \sum_{k=1}^2 \eta_t^{(k)} (\eta_t^{(k)} dt + dW_t^k) \right\}. \quad (18)$$

ここで、 $\eta_t^{(1)}$  は、ウィーナー過程  $W^1$  に対するリスクの市場価格であり、短期金利の変動を記述する。 $\eta_t^{(2)}$  は、GOP の変動を記述するウィーナー過程  $W^2$  に対するリスクの市場価格であり、短期金利とは独立である。

GOP の代理変数としては、実務上、グローバルに分散投資されたインデックス、例えば、MSCI 世界株式指数などが利用できるとしている。実際、円ベースの世界株式指数と円短期金利の共変動 (covariation) を長期時系列で検証した結果、ほぼゼロに近い値であったことから、ウィーナー過程  $W^1$  と  $W^2$  は独立であると仮定している。さらに、短期金利に関するリスクの市場価格についてはゼロ、すなわち、 $\eta_t^{(1)} = 0$  と仮定する。これは、割引債価格のうち短期金利の寄与分については、投資家はリスク・プレミアムを要求しないことを意味する。

今、GOP を銀行預金で除した割引 GOP ( $\bar{S}_t$ ) を、

$$\bar{S}_t = \frac{S_t}{B_t}, \quad (19)$$



と定義する。このとき、(13)、(18)、(19)式より、割引 GOP の確率過程は、

$$d\bar{S}_t = \bar{S}_t \eta_t^{(2)} (\eta_t^{(2)} dt + dW_t^2), \quad (20)$$

と表される。割引 GOP の確率過程には、短期金利  $r_t$  および、その変動を記述する  $W^1$  は現れない。

## ロ. マルチンゲールと割引債価格

GOP をニューメレールとすると、デリバティブの価格は、現実確率のもとで評価することが可能である<sup>11</sup>。満期  $T$  に 1 が支払われる割引債の時刻  $t$  における価格を  $P(t, T)$  とすると、割引債価格を GOP で除した相対価格が、マルチンゲールとなることから、

$$P(t, T) = S_t E \left[ \frac{1}{S_T} \middle| A_t \right] = E \left[ \frac{\bar{S}_t B_t}{\bar{S}_T B_T} \middle| A_t \right], \quad (21)$$

が成立する。ただし、 $A_t$  は時刻  $t$  までに得られた情報セットである。

GOP は短期金利とは独立という仮定から、 $P(t, T)$  は以下のように分解される。

$$P(t, T) = M_T(t, \bar{S}_t) G_T(t, r_t). \quad (22)$$

ここで、

$$M_T(t, \bar{S}_t) = E \left[ \frac{\bar{S}_t}{\bar{S}_T} \middle| A_t \right], \quad (23)$$

は、リスクの市場価格の寄与分であり、

$$G_T(t, r_t) = E \left[ \frac{B_t}{B_T} \middle| A_t \right], \quad (24)$$

は、短期金利の寄与分である。

## ハ. 割引 GOP のダイナミクス

割引 GOP ( $\bar{S}_t$ ) のドリフト項  $\alpha_t$  は、(20)式から

$$\alpha_t = \bar{S}_t (\eta_t^{(2)})^2, \quad (25)$$

11 GOP をニューメレールとすると、任意の自己充足的なポートフォリオは、マルチンゲールとなる。詳細は、補論を参照。

と書ける。(20)、(25)式から、割引 GOP の確率過程は、以下のように書ける。

$$d\bar{S}_t = \alpha_t dt + \sqrt{\alpha_t \bar{S}_t} dW_t^2. \quad (26)$$

ここで、時間変換を行い、 $\xi$  を以下のように定義する (Platen [2004])。

$$\xi(t) = \frac{1}{4} \int_0^t \alpha_s ds. \quad (27)$$

さらに、

$$Y(\xi(t)) = \bar{S}_t, \quad (28)$$

とおくと、(26)式から、

$$dY(\xi) = 4d\xi + \sqrt{4Y(\xi)} dW_\xi, \quad (29)$$

が得られる。ただし、

$$dW_\xi = \sqrt{\frac{\alpha(t)}{4}} dW_t^2, \quad (30)$$

である。(29)式から、 $Y$  は、 $\xi$  時間で、4 次の平方根ベッセル過程 (squared Bessel process) に従う (Revuz and Yor [1999])。これは、 $\bar{S}_t$  が、時間変換後の4 次の平方根ベッセル過程に従うことを意味する。このとき、 $\bar{S}_t$  の2次変分は、

$$\langle \sqrt{\bar{S}} \rangle_t = \frac{1}{4} \int_0^t \alpha_s ds, \quad (31)$$

となる。

この2次変分を、時系列で分析したところ、指数関数的に増加していることから、割引 GOP のドリフトに関して、確定的な関数を仮定したうえで、

$$\alpha_t = \alpha_0 \exp(\omega t), \quad (32)$$

とおき、実際のデータから、 $\alpha_0, \omega$  をフィットさせる。

## ニ. リスクの市場価格寄与分

(23)、(26) 式および、4 次の平方根ベッセル過程の性質を用いると、リスクの市場価格寄与分は、以下のように書き表すことができる。

$$M_T(t, \bar{S}_t) = 1 - \exp\left(-\frac{2\omega\bar{S}_t}{\alpha_T - \alpha_t}\right). \quad (33)$$

$M_T$  と満期  $T$  (年) の関係をプロットしたものが、図 1 である (各種パラメータ値は原論文と同一のものを使用している)。

図 1 からわかるように、 $M_T$  は、満期 10 年あたりまでは、ほぼ一定であるが、その後、急速に減少している。すなわち、中短期のゾーンについては、リスクの市場価格は、割引債価格にほとんど影響を与えない。

## ホ. 短期金利の寄与分

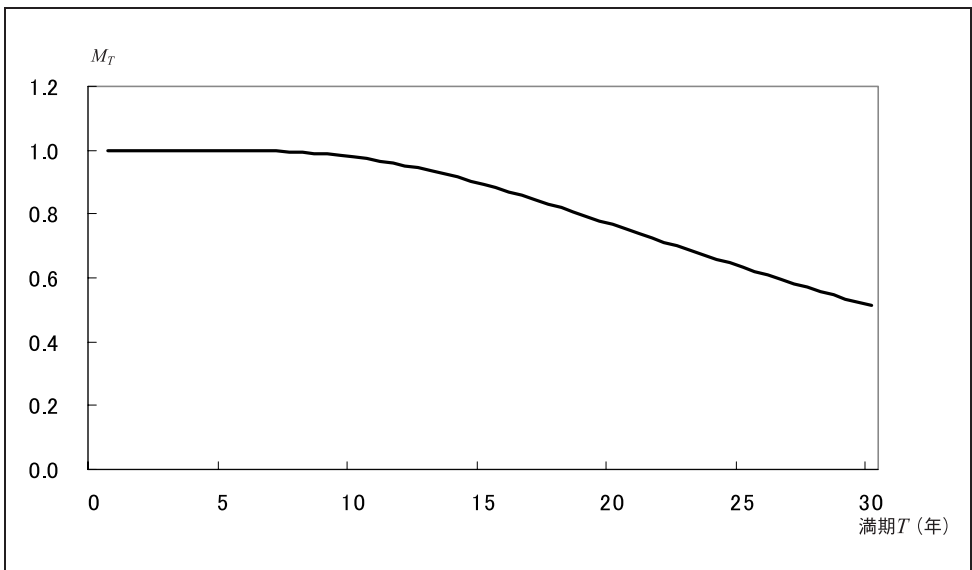
次に、短期金利の寄与分を検討する。短期金利には、潜在金利を用いる。すなわち、短期金利を  $r_t$ 、潜在金利を  $X_t$  とすると、

$$r_t = X_t^+ = \max[X_t, 0], \quad (34)$$

となり、短期金利の寄与分は、

$$G_T(t, X_t) = E\left[\exp\left(-\int_t^T \max(X_u, 0) du\right) \middle| A_t\right], \quad (35)$$

図 1 リスクの市場価格寄与分 ( $\alpha_0 = 0.02$ 、 $\omega = 0.05$ 、 $\eta_0^{(2)} = 0.2$ )



と表される。(24)式の期待値は、現実確率のもとでの期待値であり、(35)式においても同様である。実際に観測される割引債価格  $P(t, T)$  と、(33)式により求められた  $M_T(t, \bar{S}_t)$  から、

$$G_T(t, X_t) = \frac{P(t, T)}{M_T(t, \bar{S}_t)}, \quad (36)$$

という関係が求められ、これより、 $G_T(t, X_t)$  のパラメータを推計できる。

ミラーらによると、バシチェック・モデル、CIRモデルともに、パラメータが時間に依存しないために、ゴロボイらの固有関数展開による手法は、とりわけデリバティブの価格付けに用いる場合、フィットが安定しないと指摘している。このため、バシチェック・モデル、ないしは、CIRモデルに時間に依存する確定的な関数を加えたものを潜在金利と定義し、金利ツリーを用いるのが固有関数展開による手法よりも効率的であるとしている。

#### (4) 名目金利の長期均衡水準が変動し得るモデル

ボンフィム (Bomfim [2003]) は、潜在金利の長期均衡値をファクターに加えた2ファクター・モデルを提案した。米国市場のデータを用いて、イールド・カーブのフィッティングを行ったうえで、米国経済が流動性の罅に陥る確率を、リスク中立確率、現実確率のもとで、おのおの計算している。流動性の罅に陥る確率は、短期金利が一定の期間内にゼロに達する確率と定義する。

短期金利は、ブラックの潜在金利  $X_t$  を用い、潜在金利には、現実確率のもとで、以下の平均回帰性を持つ確率過程を考える。

$$dX_t = \kappa(\theta_t - X_t) dt + \sigma^X dW_t^X. \quad (37)$$

この式は、バシチェック・モデルに類似しているが、潜在金利の平均回帰水準  $\theta_t$  が確率変動するという点で、バシチェック・モデルとは異なる。 $\theta_t$  についても、現実確率のもとで、平均回帰性を持つ確率過程を考え、

$$d\theta_t = \alpha(\beta - \theta_t) dt + \sigma^\theta dW_t^\theta, \quad (38)$$

とおく。また、2つのウィーナー過程、 $dW_t^X, dW_t^\theta$  は無相関であり、 $X_t, \theta_t$  に係るリスクの市場価格は一定であると仮定する。

モデルのパラメータについては、金利のゼロ制約を考慮に入れると、推計が困難になることから、米国金利がゼロより十分に高い期間のデータを用いることで、潜在金利と名目金利が一致すると仮定し、カルマン・フィルターに基づいた最尤法に

よりパラメータを得、これを低金利下の LIBOR・スワップ市場のイールド・カーブにもフィッティングさせている<sup>12</sup>。

ボンフィムは、有限差分法により偏微分方程式を解くことで、流動性の罅に陥る確率を計測している。その結果によると、2003年初の時点で、米国経済が1年以内、5年以内に流動性の罅に陥る確率（現実確率）は、それぞれ、約3%、5%となっている。

### 3. スイッチング・モデル

#### (1) ゼロ金利政策解除時間に注目したモデル

丸茂・中山・西岡・吉田 [2003] では、スイッチング・モデルの発想に基づき、ゼロ金利政策下での日本のイールド・カーブに対応するスポット・レート・モデルを提案し、ゼロ金利政策解除の時期に関する市場参加者の見通しを抽出することを試みている。

ゼロ金利政策期が継続されている期間はスポット・レートはゼロに固定され、ゼロ金利政策解除後はバシチェック・モデルに従うと仮定する<sup>13</sup>。ゼロ金利政策が解除されるまでの時期  $\tau$  は、特定の確率分布（後述）に従い、その密度関数、分布関数を、それぞれ  $\psi$ 、 $\Psi$  とする。このとき、スポット・レートは、リスク中立測度のもとで、

$$dr_t = 1_{\{\tau \leq t\}} \{ \kappa(\mu - r_t) dt + \sigma dW_t^* \}, \quad (39)$$

と書ける。このとき、時刻  $t$  における満期  $T$  の割引債価格  $P(t, T)$  は、

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \int_t^T \frac{\psi(s)}{1 - \Psi(t)} H_1(T - s) ds + \frac{1 - \Psi(T)}{1 - \Psi(t)}, \\ H_1(t) &= \exp \left\{ \frac{(H_2(t) - t)(\kappa^2 \mu - \sigma^2/2)}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2 H_2^2(t)}{4\kappa} \right\}, \\ H_2(t) &= \frac{1 - \exp(-\kappa t)}{\kappa}, \end{aligned} \quad (40)$$

となる。

12 イールド・カーブのフィッティングは良好な結果が得られているが、 $\theta_t$  の確率変動を表すパラメータ  $\beta$  がやや非現実な値を示している。そこで、流動性の罅に陥る確率について、 $\beta$  を変化させながら感度分析を行ってみたが、結果に大きな変化はみられなかったとしている。

13 厳密には、ゼロ金利政策解除後の名目金利にバシチェック・モデルを使用しているため、それ以降の期間において、名目金利が負となる可能性は残されている（次に述べる、山分 [2005] でも同様の問題が残る）。すなわち、一度限りのゼロ金利は表現できるものの、将来再びゼロ金利になる状態は扱えないモデルである。ガオ・ウー [2006] は、ゼロ金利解除後にバシチェック・モデルを用いると、「50% 近い確率で金利がマイナスに転じる」ことを指摘し、丸茂らのモデルに、ゼロ金利解除後は CIR モデルに従うように修正を加え、日本のスワップ・レートにフィッティングさせている。

パラメータの推計については、まずスポット・レートの時系列データを用いて、ゼロ金利政策解除後のバシチェック・モデルについて、現実確率でのパラメータを推計する。そのうえで、イールド・カーブにフィットさせることで、ゼロ金利政策解除時期の分布のパラメータ（標準ガンマ分布、対数正規分布、ワイブル分布など多くの分布について実証している）、および、リスクの市場価格を推計している。この結果、従来のバシチェック・モデルと比較して、イールド・カーブのフィッティングが、とりわけ中短期ゾーンにおいて、大きく向上したことを示している。

また、ゼロ金利政策解除時期の分布の統計量（期待値、最頻値、パーセンタイル値）から、市場参加者の見通しの抽出を試みている。

山分 [2005] は、丸茂らと同様なスイッチング・モデルの発想に基づき、割引債価格をモデル化しているが、以下の点で丸茂らの手法と異なっている。

まず、ゼロ金利政策解除のハザード率がワイブル分布に従うと仮定する。このとき、リスク中立化における、ハザード率を  $h^*(t)$  とすると、割引債価格は、

$$\begin{aligned}
 P(t, T) &= \int_t^T H_1(T-s) h^*(s) \exp(-\Phi_s^* + \Phi_t^*) ds + \exp(-\Phi_T^* + \Phi_t^*), \\
 H_1(t) &= \exp\left(\frac{(H_2(t) - t)(\kappa^2 \mu - \sigma^2/2)}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2 H_2^2(t)}{4\kappa}\right), \\
 H_2(t) &= \frac{1 - \exp(-\kappa t)}{\kappa},
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

と表現される。ここで、 $\Phi_t^* = \int_0^t h^*(u) du$  である。

パラメータの推計については、丸茂らは、ゼロ金利政策期以外のデータを用いてバシチェック・モデルのパラメータを推計した後、イールド・カーブにフィットするように、ゼロ金利政策解除時点を表す分布のパラメータやリスクの市場価格を推計しているが、山分は、イールド・カーブにフィットさせることで、すべてのパラメータを同時に推計している。この結果、フィッティングの精度が丸茂らのものよりも向上したことを報告している。

## (2) ゼロ金利への回帰を許容するモデル

カバノフら (Kabanov, Kijima, and Rinaz [2005]) は、スポット・レート・モデルとして金利ゼロを吸収壁とする、次のようなスイッチング・モデルを提案した<sup>14</sup>。

- ① スポット・レートが正のときは、バシチェック・モデルに従う。

14 金利ゼロを反射壁とするモデルも考えられるが、金利がゼロになった瞬間、再び正に戻る反射壁は、現実の金利の振舞いを的確に表しているとはいえない。一方、吸収壁を採用する場合には、どの時点で金利が正に復帰するかをモデル化する必要があるため、モデル自体は、より複雑化することになる。

- ② いったん、スポット・レートがゼロになると、しばらくの間、その状態が継続される。
- ③ その後、ポアソン過程に従うイベントが発生すると、スポット・レートは正に復帰する。

以上を定式化すると、以下のように書ける。

$$\begin{aligned} dr_t &= 1_{\{r_{t-} > 0\}}[\kappa(\theta - r_t) dt + \sigma dW_t] + 1_{\{r_{t-} = 0\}} dJ_t, \quad r_0 = \bar{r}, \\ dZ_t &= 1_{\{r_{t-} = 0\}} \left[ dt - Z_t \frac{dJ_t}{|dJ_t|} \right], \quad Z_0 = \bar{Z}. \end{aligned} \tag{42}$$

ただし、 $\bar{r}$  と  $\bar{Z}$  のうち一方はゼロ、 $W_t$  と  $J_t$  は独立とする。 $Z_t$  は、金利ゼロの状態の継続時間 (latency) を表す変数である。

(42) 式では、スポット・レートがゼロに達すると、 $r_t$  の過程から、 $Z_t$  の過程にスイッチする。 $Z_t$  は  $dJ_t$  でジャンプが発生するまで増加を続け、いったん、ジャンプが発生すると、 $Z_t$  はゼロに戻り、名目金利は正に回復した  $r_t$  の過程にスイッチする。ここで、ジャンプ発生ハザード率は、ゼロ金利継続期間の長さ  $Z_t$  に依存するよう、 $h(z) = \alpha + \beta\gamma z^{\gamma-1}$  で与えている。

時刻ゼロにおける満期  $T$  の割引債価格  $P(\bar{r}, \bar{Z}, T)$  の導出には、 $P(\bar{r}, \bar{Z}, T) = E[\exp(-\int_0^T r_s ds) \mid r_0 = \bar{r}, Z_0 = \bar{Z}]$  の期待値を計算する必要があるが、カバノフらは、ファイマン=カッツの定理により、積分偏微分方程式 (partial integro-differential equation) を導出し、有限差分法の一つであるクランク=ニコルソン法を適用して、計算を行っている。

バシチェック・モデルのパラメータ、およびジャンプ幅を固定し、ハザード率、および変数の初期値  $\bar{r}, \bar{Z}$  を変化させることで、さまざまなイールド・カーブを構築したところ、以下のような点を指摘している。

- ① ハザード率を定数とすると、イールド・カーブの形状は常に凹となり、ゼロ金利政策期の日本の S 字状のイールド・カーブをうまく記述できない。
- ② ハザード率を線形にすると (ワイブル分布)、S 字状のイールド・カーブを表現できる。もっとも、 $\bar{Z}$  が大きくなるにつれ (これまでのゼロ金利政策継続期間が長くなるにつれ)、変曲点がゼロに近づき、中短期ゾーンがゼロ近傍に張り付いた S 字状のイールド・カーブを表すことができない。
- ③  $\bar{Z}$  の増加に従い、イールド・カーブ全体の水準は、概ね比例的に上方にシフトする<sup>15</sup>。

15 これは、 $Z$  が時刻の経過とともに増加するため、初期値  $\bar{Z}$  がすでに十分長いと、ジャンプが早い段階で発生するためである。しかしながら、これまでのゼロ金利政策継続期間が長いほど、中長期金利水準が高くなるというのは、現実にも必ずしも適合しないため、カバノフらは、 $dZ$  の過程に、確率項を加えたモデルも提案している。

## 4. おわりに

本稿では、日本のような低金利環境下でのイールド・カーブをうまく表現できるようなモデルについて、近年の研究成果を紹介した。これらは、潜在金利モデルとスイッチング・モデルに大別され、いずれのモデル群でも一定の成果を上げている。各モデルの長所・短所を簡潔にまとめると次のとおりである（△印が長所、▼印が短所）。

### 潜在金利モデル

- △ 「名目金利は、潜在金利を原資産とするオプションである」と考えることで、モデルがシンプルとなる。
- ▼ 負の値をとり得る潜在金利は直接的な観測が不可能なうえに、経済学的な解釈が今のところ定着していない<sup>16</sup>。

### Gorovoi and Linetsky [2003, 2004]

- △ 無限級数の形ではあるが、解析解を求めることができる<sup>17</sup>。
- ▼ ツリーによるプライシングと比較して、長期債の価格導出では効率的である一方、短期債の場合には、効率的であるとはいえない (Miller and Platen [2004])。

### Miller and Platen [2004]

- △ GOP を用いることで、価格付けにおいて測度変換の必要がない（現実確率が見える）。
- △ GOP に確定的な関数を想定しているため、ツリーを用いることで、比較的容易に価格付けが行える。
- ▼ GOP の代理変数として、マーケット・ポートフォリオを用いることの是非や、さらに代用するマーケット・ポートフォリオとしてどのようなインデックスを用いるかという問題があり、必ずしも、実務に適しているとはいえない。

### スイッチング・モデル

- △ ゼロ金利政策期はスポット・レートがゼロ、それ以外は確率モデルに従うというスイッチングの発想がわかりやすい。

16 Black [1995] は、潜在金利の解釈として、金利に非負制約が存在しない場合の貯蓄と投資を均衡させる金利であるとしている。Gorovoi and Linetsky [2003] では、2003年4月9日の日本の潜在金利は-5.6%であると報告しているため、ブラックの解釈に従うとI-Sバランスを満たす金利は負値であったことになる。

17 ただし、ゴロボイらが解析解を導出しているのは、潜在金利がバシチェック・モデル、CIRモデルに従うときのみである。



- ▼ 金利がスイッチするタイミングをモデル化する必要があり、パラメータが増えることで、モデルが複雑となり、推計も困難となる。
- ▼ 実証分析を行った初期のモデルでは、金利がゼロの状態から、非ゼロの状態へのスイッチングを考えているが、その逆については、考慮されていない。

このように、潜在金利モデル、スイッチング・モデルのいずれにも、一長一短があり、どのモデルが優れているかは一概にはいえない。実装する際には、こうした点を踏まえつつ、状況に応じてモデルを選択する必要がある。

## 補論. GOP をニューメレールとした場合の確率過程

原証券が、GOP をニューメレールとすると、マルチンゲールとなることを示す。  
 (14)、(17) 式に伊藤の補題を適用すると、

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{X_t^j}{S_t}\right) &= \frac{X_t^j}{S_t} \left\{ a_t^j - r_t - \sum_{k=1}^d (\eta_t^{(k)})^2 - \sum_{k=1}^d \eta_t^{(k)} b_t^{j,k} + \sum_{k=1}^d (\eta_t^{(k)})^2 \right\} dt \\
 &\quad + \frac{X_t^j}{S_t} \sum_{k=1}^d (b_t^{j,k} - \eta_t^{(k)}) dW_t^k \\
 &= \frac{X_t^j}{S_t} \left\{ a_t^j - r_t - \sum_{k=1}^d \eta_t^{(k)} b_t^{j,k} \right\} dt + \frac{X_t^j}{S_t} \sum_{k=1}^d (b_t^{j,k} - \eta_t^{(k)}) dW_t^k,
 \end{aligned}
 \tag{A-1}$$

となる。ここで、 $\eta_t = b_t^{-1}[a_t - r_t 1]$  から、 $\sum_{k=1}^d b_t^{j,k} \eta_t^{(k)} = a_t^j - r_t$  が成立し、これを (A-1) に代入すると、

$$d\left(\frac{X_t^j}{S_t}\right) = \frac{X_t^j}{S_t} \sum_{k=1}^d (b_t^{j,k} - \eta_t^{(k)}) dW_t^k,
 \tag{A-2}$$

が得られ、原証券を GOP で除した過程は、マルチンゲールとなることがわかる。このことから、原証券で構成される任意のポートフォリオも、GOP で除すと、マルチンゲールとなることがわかる。

## 参考文献

- ガオ, B.・L. ウー、「日本のイールドカーブ取引 金利の期間構造に基づくアプローチ」、Merrill Lynch Fixed Income Strategy、2006年2月
- 木島正明、『期間構造モデルと金利デリバティブ』、朝倉書店、1999年
- 馬場直彦、「金融市場の価格機能と金融政策—ゼロ金利下における日本の経験—」、金融研究所ディスカッションペーパー No. 2006-J-20、日本銀行金融研究所、2006年
- 丸茂幸平・中山貴司・西岡慎一・吉田敏弘、「ゼロ金利政策下における金利の期間構造モデル」、金融市場局ワーキングペーパー No. 2003-J-1、日本銀行金融市場局、2003年
- 山分俊幸、「ゼロ金利政策下における金利の期間構造に関する考察」、日本ファイナンス学会第13回大会予稿集、2005年、298~312頁
- Black, F., “Interest as options,” *Journal of Finance*, 50 (7), 1995, pp. 1371–1376.
- Bomfim, A., “Interest rate as options: Assessing the markets’ view of the liquidity trap,” Finance and Economics Discussion Series, The Federal Reserve Board, No. 2003-45, 2003.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica*, 53, 1985, pp. 385–407.
- Feller, W., “Two singular diffusion problems,” *Annals of Mathematics*, 54, 1951, pp. 173–182.
- Gorovoi, V., and V. Linetsky, “Shadow Interest,” *Risk*, 16 (12), 2003, pp. 81–84.
- , and ———, “Black’s Model of Interest Rates as Options, Eigenfunction Expansions and Japanese Interest Rates,” *Mathematical Finance*, 14, 2004, pp. 49–78.
- Kabanov, Y., M. Kijima, and S. Rinaz, “A Positive Interest Rate Model with Sticky Barrier,” Discussion Paper No. 070, Kyoto University, 2005.
- Linetsky, V., “The Spectral Decomposition of the Option Value,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7 (3), 2004, pp. 337–384.
- , “Computing hitting time densities for CIR and OU diffusions: applications to mean-reverting models,” *Journal of Computational Finance*, 7 (4), 2004, pp. 1–21.
- Miller, S., and E. Platen, “A Two-Factor Model for Low Interest Rate Regimes,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 11 (1), 2004, pp. 107–133.
- Platen, E., “Arbitrage in continuous complete markets,” *Advances in Applied Probability*, 34 (3), 2002, pp. 540–558.
- , “Modeling the volatility and expected value of a diversified world index,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7 (4), 2004, pp. 511–529.
- Revuz, D., and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1999.
- Rogers, L., “Gaussian errors,” *Risk*, 9 (1), 1996, pp. 42–45.
- Vasicek, O., “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics*, 5, 1977, pp. 177–188.

