

デフォルト境界が不確実な場合の損失率： 優先劣後構造を持つ債権への応用

つるがともひろ やましたきとし
敦賀智裕 / 山下智志

要 旨

信用リスク分析では、資産価値が一定のデフォルト境界に到達するとデフォルトが発生するという構造型モデルがよく知られている。こうしたモデルでは、デフォルト境界を既知の定数とみなしているが、実際にはデフォルト境界は必ずしも一定とは限らず、幅を伴って分布していると想定した方がより現実的である。本稿では、デフォルト境界が不確実性を持つもとでの構造型モデルを提案し、デフォルト確率やデフォルト時損失率の推計方法を提示する。これを優先劣後構造を持つ債権に応用し、デフォルト境界の分布がデフォルト時損失率に強い影響を与えることを具体的な数値例を用いて示す。

キーワード：信用リスク、デフォルト時損失率、不完全情報、優先劣後構造、
構造型モデル、リスク管理

.....
本稿の作成に当たっては、楠岡成雄教授（東京大学、日本銀行金融研究所客員研究員）、矢野浩一氏（金融庁）、尾張圭太氏（一橋大学大学院）の各氏から有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りは、すべて筆者たち個人に属する。

敦賀智裕 日本銀行金融研究所（E-mail: tomohiro.tsuruga@boj.or.jp）
山下智志 統計数理研究所（E-mail: yamasita@ism.ac.jp）

1 . はじめに

信用リスクモデルの発展に伴い、デフォルト確率 (Probability of Default: PD) だけではなく、デフォルト時損失率 (Loss Given Default: LGD) を推計するさまざまな手法が考案されてきている。新パーゼル合意においても、先進的内部格付け手法を用いた信用リスク資産の算出が認められ、そこではLGD推計のためのデータ蓄積やストレス時LGDの推計などが新たに求められることになった (Basel Committee on Banking Supervision [2006])。LGDの推計方法にはさまざまなモデルが存在するが、大別すると誘導型モデルと構造型モデルの2種類に分けることができる。誘導型モデルとしては、Duffie and Singleton [1999] の社債価格決定モデルを利用し、社債利回りと株価収益率から回収率とデフォルトが起こる頻度を表すハザード過程を同時推計する方法がある (山下・木原 [2004])。もっとも、こうした方法では、LGDを左右する担保保全状況や優先劣後構造といった情報をモデルに織り込みにくく、これらの要因がLGDに及ぼす影響を検証する目的には適さない。

他方、Merton [1974] によって提案された構造型モデルでは、資産価値の変動を確率過程として与え、評価期間の最終時点における資産価値がある一定のデフォルト境界を下回っているか否かでデフォルトの有無を判断する。デフォルト時点における残存資産から回収可能額を算出し、LGDを推計することができる (Altman, Resti, and Sironi [2001])。このようなアプローチでは、担保や優先劣後構造をモデルに反映させることにより、 $LGD = 1 - \text{回収率}$ の推計にこれらの影響を明示的に織り込むことができる (Guha [2002]、Guha and Sbuely [2004]、敦賀 [2005])。一方、Merton 型のモデルは、デフォルトの判断が所与の1時点のみに依存しているという問題を抱えており、この点を改善するために、初到達時刻型モデルが考案されている (Longstaff and Schwartz [1995])。同モデルでは、資産価値がデフォルト境界に最初に到達する時点をデフォルト発生時点と定義する。

ところが、こうした初到達時刻型モデルによってLGDを推計する際の問題点として、デフォルト境界を既知の定数と仮定していることが挙げられる。残存資産を瞬時に時価で売却できる単純な場合を考えると、デフォルト発生時点ではデフォルト境界と資産価値が等しくなるため、債権の元本とデフォルト境界の関係からLGDが既知のものとして事前に確定してしまうことになる。例えば、負債総額がデフォルト境界であると設定した一般的なケースでは、デフォルト時点の企業の残存資産と負債総額が一致し、債権が全額回収可能となるため、LGDは必ずゼロとなる。

このような問題への対応法として、デフォルト境界を不確実なものとするアプローチが考えられる。一般に、デフォルトの定義・判断には幅があるため、デフォルト境界は必ずしも一定とは限らず、幅を伴って分布していると想定する方がより現実的である。

例えば、資産価値が一時的にわずかに負債総額を下回っても、回復の可能性があれば、債権者はデフォルトを猶予する可能性がある。また、財務データなどの企

業情報はラグを伴って離散的にしか観察されないため、真の資産価値を即時に認識することは困難であり、このためデフォルト境界を確定し難いとも考えられよう¹。実際、資金繰りに問題が生じない限り、資産価値が負債総額を下回っても企業がデフォルトしないことは十分に想定しうることであり、逆に資産価値が負債総額を上回っていても資金繰りに問題が生じたときにはデフォルトする可能性がある。このようにデフォルト境界を分布として捉えた場合、デフォルト時の残存資産は不確定となり、LGDに不確実性が発生する。

デフォルト境界の不確実性を確率的に表現した信用リスク商品の価格決定モデルは、Giesecke [2006] やGiesecke and Goldberg [2004] により提案されている。これらのモデルでは、ペイオフを外生的に与えており、LGDについては考慮されていない。そこで、本稿では、これらの定式化を参考にして、確率的なデフォルト境界のもとでLGDを推計する枠組みを示す。そのうえで、デフォルト境界の確率分布を明示的に与えることでLGDを簡便に推計できる計算式を、測度変換の手法を用いて導出する。

このようにデフォルト境界に確率分布を与えることで、既存研究で観察されたLGDのさまざまな特性を表現することが可能となる。例えば、実績データに基づくLGD分布は好況時と不況時で大きく異なっているという実証分析が報告されている (Frye [2000], Düllmann and Trapp [2004])。デフォルト境界の分布を双峰型の分布として与えると、こうした事象を表現することが可能となる。また、銀行が一部の企業についてデフォルトを回避する支援策を採っている場合、こうした双峰型の分布が現実データの分析に有効かもしれない。単峰型でも分布が歪んでいたり、急尖的であるなど、さまざまなバリエーションが考えられるが、このようにモデルの設定を自由に变化させることができる柔軟性の高さは、モデルの表現力を高めるのみならず、推計結果の背景にある経済現象についての考察の手がかりを与えるであろう。

本稿で提示するモデルは、優先劣後構造を持つ貸出債権の分析にも有益な視点を提供すると考えられる。構造型モデルでは、企業の資産価値とデフォルト境界との関係でPDが決定されるため、貸出債権の優先度はPDには影響を及ぼさないが、LGDについては、優先度の違いが大きな影響を及ぼす。デフォルト境界が確定的であり、かつ回収に不確実性が存在しない場合、優先劣後構造が設定された時点で各債権のLGDが確定する。一方、本稿のように、デフォルト境界が確率的な分布に従うものとする、こうした債権に対するLGDも確率的な分布に従う。したがって、優先度が異なる各債権のLGDが、デフォルト境界の確率分布に応じてどのように変化するかを把握しておくことが重要となる。本稿では、具体的な数値例

1 ここでのデフォルト境界の不確実性は、正確には、資産価値に関する情報の不完全性に起因するものであると考えられる。具体的には、資産価値が連続的に変化する一方で、その観測は離散的にしかできない、あるいは、資産価値がノイズを含んで観察されるといった場合には、資産価値に関する情報の不完全性がLGDの不確実性の発生源となる。これをモデル化するアプローチも考案されており、2節でその着想点を簡単に紹介する。

を用いた試算の結果、デフォルト境界の分布の形状が、各債権のLGDにさまざまな影響を及ぼすことを示す。

今後、金融機関やデータベンダーでデフォルト・回収事例のデータ蓄積が進めば、本稿で示したモデルを用いることで、デフォルト境界の分布を推計することが可能となる²。こうした実証分析は、デフォルト境界の不確実性のもとで、PDやLGD、とりわけ優先劣後構造を持つ貸出債権のLGDがどのように捉え直されるべきか、今後、検討を深めていく材料を提供しよう。また、デフォルトの認定が実際どのように行われているかを検証していく手がかりにもなろう。

本稿の構成は、以下のとおりである。まず2節において、デフォルト境界に不確実性がある場合の構造型モデルの枠組みを概説する。次に、3節でPDやLGDの具体的な構造型モデルや推計式を導く。そのうえで、デフォルト境界の分布を特定の分布形で与えた場合、それらがどのように表現されるかを例示する。4節においては、債権の優先劣後構造を反映したLGDの推計方法を提示する。5節では、上記モデルを利用した数値計算例を示す。6節では、以上の議論をふまえた結論を述べる。

2. デフォルトの定義と情報集合

確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 、フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ とする。企業の資産の大きさを表す確率過程（以下、資産過程） $\{A(t), t \geq 0\}$ とデフォルト境界 \bar{D} に対し、デフォルト時刻 τ を次で定義する。

$$\tau := \inf_{t \in [0, \infty)} \{t : A(t) \leq \bar{D}\}. \quad (2.1)$$

すなわち、デフォルト事象 $\{\tau \leq t\}$ を以下のように定義する。

$$\{\tau \leq t\} = \bigcup_{s \in [0, t]} \{A(s) \leq \bar{D}\} = \{\min_{s \in [0, t]} A(s) \leq \bar{D}\} = \{m(0, t) \leq \bar{D}\}. \quad (2.2)$$

ただし、 $0 \leq u < u'$ のとき、 $m(u, u') := \min_{s \in [u, u']} A(s)$ と定義する。また、デフォルト過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ を以下のように定義する。

$$N(t) := 1_{\{\tau \leq t\}} = \begin{cases} 1 & \tau \leq t, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.3)$$

完全情報 \mathcal{F}_t は次で定義される。

2 実データを用いた推計においては、残余資産の回収に伴う不確実性やタイムラグ等も考慮しなければならない。将来的には、LGDを不確実なものとする要因（デフォルト境界の不確実性、資産価値に関する情報の不完全性、回収の不確実性）を統一的に扱えるようなモデルの展開が必要となろう。

$$\mathcal{F}_t := \sigma(A(s), s \leq t) \vee \sigma(\tilde{D}). \quad (2.4)$$

ただし、

$\sigma(A(s), s \leq t) : \{A(s), s \leq t\}$ によって生成された最小の σ 加法族
 $\sigma(\tilde{D}) : \tilde{D}$ によって生成された最小の σ 加法族

この場合、デフォルト事象は (\mathcal{F}_t) -可予測となる。すなわち、以下のような停止時刻の列を作ることができる。

$$\begin{cases} \tau_n := \inf \{t > 0 \mid A(t) \leq \tilde{D} + \frac{1}{n}\}, n = 1, 2, \dots, \\ \tau_n \rightarrow \tau. \end{cases} \quad (2.5)$$

実際には、デフォルト境界 \tilde{D} は観測することが難しい。また、資産過程 $\{A(t), t \geq 0\}$ も容易には観測されない。こうした不完全情報モデルは、Duffie and Lando [2001]、Çetin, Jarrow, Protter, and Yildirim [2004]、Giesecke [2006]、Giesecke and Goldberg [2004] らによって提案されている。ここでは、代表的な例を示す。

例2.1 (資産過程のみ観測可能なモデル) 資産過程のみが観測できる場合のモデルは次のように定式化される。

$$\mathcal{A}_t = \sigma(A(s), s \leq t).$$

(2.4)式によって定義された完全情報に対し、このモデルではデフォルト境界 \tilde{D} の情報が含まれない形で情報 \mathcal{A}_t が与えられる。

例2.2 (ノイズ付き離散観測モデル) ノイズ付きの離散観測モデルは次のように定式化される。時点 $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ に対し、 $Y(t_k) = A(t_k) + \epsilon_{t_k}$ 、 $k = 1, 2, \dots, m$ 、 ϵ_{t_k} は観測ノイズを表す*i.i.d*な確率過程とする。また、 $k, j = 1, 2, \dots, m$ に対し、 $A(t_k)$ と ϵ_{t_j} は独立であると仮定する。そのうえで、 \mathcal{A}_t は次のように定義される。

$$\mathcal{A}_t = \sigma(Y(s), s \leq t, s \in \{t_1 < t_2, \dots, t_m\}).$$

実務上は、資産価値は四半期ごとの財務諸表等によって観測され、財務諸表は無形資産や時価で評価することが困難な資産の会計上の処理等により、真の資産価値 $A(t)$ に対して誤差が生じている可能性がある。これは、そのような場合に対応したモデルである。

例2.3 (情報のないモデル) 全く情報がない状態は、次のようにモデル化される。

$$\mathcal{A}_t = \{\phi, \Omega\}.$$

企業によっては情報の入手がほとんど不可能であるケースが考えられるため、そのような場合に対応したモデルである。

本稿では一般に入手できる情報を次で定義する。

定義2.1 (入手可能な情報集合) 一般に入手可能な情報集合 \mathcal{G}_t として、過去のデフォルト発生については公開情報となっていると考え、次を仮定する。

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{A}_t \cup \sigma(N(s), s \leq t). \quad (2.6)$$

ここではデフォルト境界 \tilde{D} の情報は明示されていない。また、 \mathcal{A}_t については前述のようなさまざまな類型が考えられるが、本稿では $\mathcal{A}_t = \sigma(A(s), s \leq t)$ を仮定する。

注意2.1 デフォルト境界 \tilde{D} は (\mathcal{A}_t) -可測ではないため、 τ は (\mathcal{A}_t) -停止時刻ではない。ただし、 $\{\tau \leq t\} \in \sigma(N(s), s \leq t) \subset \mathcal{G}_t$ であるため、 (\mathcal{G}_t) -停止時刻としては定義できる。

3 . デフォルト確率とデフォルト時損失率

以下では、前節で定義した情報 \mathcal{G}_t のもとで、デフォルト確率とデフォルト時損失率を推計する方法を示す。まず、デフォルト境界 \tilde{D} について、次を仮定する。

仮定3.1 デフォルト境界 \tilde{D} は区間 $(0, A(0))$ を台とする確率密度関数 $g(\cdot)$ を持ち、資産過程 $\{A(t), t \geq 0\}$ と独立である。

(1) デフォルト確率 (PD)

仮定3.1のもとで、デフォルト確率は、次の命題により求められる。

命題3.1

$$P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t] = N(t) + (1 - N(t)) \int_0^{m(0,t)} P[m(t, T) \leq b | \mathcal{A}_t] g(b | \mathcal{G}_t) db. \quad (3.1)$$

証明

$$\begin{aligned} P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t] &= P[m(0, T) \leq \tilde{D} | \mathcal{G}_t] = E[P[m(0, T) \leq \tilde{D} | \mathcal{A}_t, \tilde{D}] | \mathcal{G}_t] \\ &= 1_{\{\tau \leq t\}} E[P[m(0, T) \leq \tilde{D} | \mathcal{A}_t, \tilde{D}] | \tau \leq t, \mathcal{G}_t] \\ &\quad + 1_{\{\tau > t\}} E[P[m(0, T) \leq \tilde{D} | \mathcal{A}_t, \tilde{D}] | \tau > t, \mathcal{G}_t]. \end{aligned}$$

ここで、第2項に関し次が成立する。

$$\begin{aligned}
& 1_{\{\tau > t\}} E [P [m(0, T) \leq \tilde{D} | \mathcal{A}_t, \tilde{D}] | \tau > t, \mathcal{G}_t] \\
&= 1_{\{\tau > t\}} \frac{E [1_{\{\tau > t\}} P [m(0, T) \leq \tilde{D} | \mathcal{A}_t, \tilde{D}] | \mathcal{G}_t]}{P [\tau > t | \mathcal{G}_t]} \\
&= 1_{\{\tau > t\}} \frac{P [\tau > t | \mathcal{G}_t] E [P [m(t, T) \leq \tilde{D} | \mathcal{A}_t, \tilde{D}] | \mathcal{G}_t]}{P [\tau > t | \mathcal{G}_t]} \\
&= 1_{\{\tau > t\}} E [P [m(t, T) \leq \tilde{D} | \mathcal{A}_t, \tilde{D}] | \mathcal{G}_t].
\end{aligned}$$

$\{\tau > t\}$ 上で $\tilde{D} < m(0, t)$ であることに注意すると、命題が導かれる。

仮定3.2 資産過程 $\{A(s), s \geq 0\}$ は次の幾何ブラウン運動に従う。

$$dA(s) = \mu_A A(s) ds + \sigma_A A(s) dW_A(s), \quad s \geq 0. \quad (3.2)$$

ただし、 $A(0) > 0$ 、 $W_A(s)$ は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の標準ブラウン運動である。

このとき、次の命題が成立する。

命題3.2 ($m(t, T)$ の (\mathcal{A}_t) -条件付分布関数) $F: (0, A(t)] \rightarrow (0, 1)$ に関して、次が成立する。

$$F(b) := P \left[\min_{s \in [t, T]} A(s) \leq b \mid \mathcal{A}_t \right] \quad (3.3)$$

$$= \Phi(d_1) + \exp \left\{ \frac{2(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2)}{\sigma_A^2} \log \left(\frac{b}{A(t)} \right) \right\} \Phi(d_2), \quad (3.4)$$

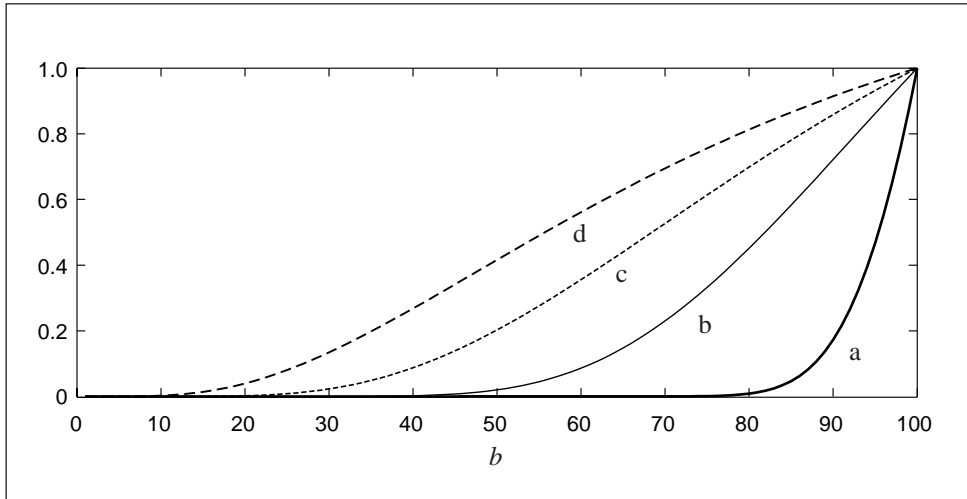
$$d_1 = \frac{\log \left(\frac{b}{A(t)} \right) - (\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2)(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}}, \quad (3.5)$$

$$d_2 = \frac{\log \left(\frac{b}{A(t)} \right) + (\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2)(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}}. \quad (3.6)$$

証明は、楠岡・中川・青沼 [2001] を参照。これは、資産価値が現時点 t から将来時点 T までの期間に一定値 b に到達する確率を表す。図1は資産過程のボラティリティ σ_A が異なるもとで、 b の変化に対する到達確率の推移をプロットしたものである。 b が高いほど、もしくは資産過程のボラティリティ σ_A が高いほど、確率が高くなっている。

図1 $m(t, T)$ の (\mathcal{A}_t) -条件付分布関数

($\mu_A = 0.05$ 、 $A(t) = 100$ 、 $T - t = 1$ 、 **a:** $\sigma_A = 0.1$ 、 **b:** $\sigma_A = 0.3$ 、 **c:** $\sigma_A = 0.5$ 、 **d:** $\sigma_A = 0.7$)



次に、デフォルト境界 \tilde{D} にある確率分布を与えたとき、 \tilde{D} の (\mathcal{G}_t) -条件付確率密度関数 $g(\cdot | \mathcal{G}_t)$ がどのように表されるか、3つの事例を示す。

例3.1 (一様分布) $\mathbb{P}^{|\mathcal{G}_t}$ のもとで、 $\tilde{D} \sim U(0, m(0, t))$ を仮定する。 \tilde{D} について全く情報がない状況では、有力な選択肢の1つである。このとき、 \tilde{D} の条件付確率密度関数は次のように与えられる。

$$g(b | \mathcal{G}_t) = \frac{1}{m(0, t)}, \quad 0 < b < m(0, t). \quad (3.7)$$

また、デフォルト確率は次のように求められる。

$$P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t] = N(t) + (1 - N(t)) \frac{\int_0^{m(0, t)} P[m(t, T) \leq b | \mathcal{A}_t] db}{m(0, t)}. \quad (3.8)$$

例3.2 (ベータ分布) $\tilde{D} = \eta m(0, t)$ 、 $\eta \in (0, 1)$ として、 η が $\mathbb{P}^{|\mathcal{G}_t}$ のもとでベータ分布 $Beta(\alpha, \beta)$ に従うとする。このとき、 \tilde{D} の条件付確率密度関数は次のように与えられる。

$$g(b | \mathcal{G}_t) = \frac{1}{m(0, t) B(\alpha, \beta)} \left(\frac{b}{m(0, t)} \right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{b}{m(0, t)} \right)^{\beta-1}, \quad 0 < b < m(0, t). \quad (3.9)$$

ここで、パラメータ空間 Θ は次のように定義される。

$$\Theta := \{\theta = (\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in (0, \infty)\}.$$

$B(\alpha, \beta)$ はベータ関数であり、 $\alpha = \beta = 1$ とすれば $Beta(1, 1)$ は $U(0, 1)$ に等しくなる。

例3.3 (ロジット変換正規分布) 確率変数 $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を、 \mathbb{P}^{G_t} のもとで正規分布 $N(\mu_z, \sigma_z^2)$ に従い、資産過程 $A(t)$ と独立な変数として定義する。 $\tilde{D} = \eta m(0, t)$ として、確率変数 η を Z に関する次のようなロジット変換 $L : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ でモデル化する。

$$\eta := L(Z) = \frac{\exp(Z)}{1 + \exp(Z)} = \frac{1}{1 + \exp(-Z)}. \quad (3.10)$$

ここで、パラメータ空間 Θ は次のように定義される。

$$\Theta := \{\theta = (\mu_z, \sigma_z^2) : \mu_z \in (-\infty, \infty), \sigma_z^2 \in (0, \infty)\}.$$

逆変換により、 Z は次のように表される。

$$Z = L^{-1}(\eta) = -\log\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right) = \log \eta - \log(1-\eta). \quad (3.11)$$

ここで、 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ は、 \mathbb{P}^{G_t} のもとでの Z の確率密度関数であるとする、 \tilde{D} の条件付確率密度関数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} g(b|G_t) &= \left| \frac{dz}{db} \right| f(L^{-1}(b/m(0, t))) \\ &= \frac{1}{m(0, t) \frac{b}{m(0, t)} \left(1 - \left(\frac{b}{m(0, t)}\right)\right)} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left\{-\frac{\log\left(\frac{b}{m(0, t)}\right) - \log\left(1 - \frac{b}{m(0, t)}\right) - \mu_z}{2\sigma_z^2}\right\}, \\ &\quad 0 < b < m(0, t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

この分布は、 σ_z が大きいとき双峰型の分布となり、 σ_z が小さいとき単峰型の分布となる。

例3.1~3.3のモデルにおおのこのパラメータ値を与えることにより、数値的にデフォルト確率を求めることができる。

(2) デフォルト時損失率 (LGD)

債権の回収は、デフォルト時点 τ において残余資産 $A(\tau)$ を原資として行われる

とする。時点 τ は資産価値 $A(t)$ がデフォルト境界 \tilde{D} に到達する時刻であるから、 $A(\tau) = \tilde{D}$ が成立する。

定義3.1 (デフォルト時損失率) 債権者はデフォルト時点において回収額 V を回収できるとする。デフォルト時損失率 L は、元本を $D' < m(0, t)$ として、次式のとおりデフォルト時の損失率の期待値として定義する。

$$L(t, T) := E \left[1 - \frac{V}{D'} \mid \tau \leq T, \mathcal{G}_t \right]. \quad (3.13)$$

これを簡便に計算するために、Schönbucher [1999]、Collin-Dufresne, Goldstein, and Hugonnier [2004] 等で用いられているサバイバル測度にならって、次のような確率測度を導入する。

定義3.2 (デフォルト測度) デフォルト測度 \tilde{P} を次のラドン・ニコディム過程 $Z_N(t)$ により定義する。

$$Z_N(t) := \frac{P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t]}{P[\tau \leq T]}. \quad (3.14)$$

このデフォルト測度を用いると、以下の命題が成立する。

命題3.3 (デフォルト測度のもとでのデフォルト時損失率)

$$E \left[1 - \frac{V}{D'} \mid \tau \leq T, \mathcal{G}_t \right] = \tilde{E} \left[1 - \frac{V}{D'} \mid \mathcal{G}_t \right]. \quad (3.15)$$

ただし、 $\tilde{E}[\cdot]$ はデフォルト測度 \tilde{P} のもとでの期待値を表す。

証明

$$\begin{aligned} E \left[1_{\{\tau \leq T\}} \left(1 - \frac{V}{D'} \right) \mid \mathcal{G}_t \right] &= Z_N(t) \tilde{E} \left[\frac{1}{Z_N(T)} 1_{\{\tau \leq T\}} \left(1 - \frac{V}{D'} \right) \mid \mathcal{G}_t \right] \\ &= P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t] \tilde{E} \left[1 - \frac{V}{D'} \mid \mathcal{G}_t \right]. \end{aligned}$$

したがって、以下が成立する。

$$E \left[1 - \frac{V}{D'} \mid \tau \leq T, \mathcal{G}_t \right] = \frac{E \left[1_{\{\tau \leq T\}} \left(1 - \frac{V}{D'} \right) \mid \mathcal{G}_t \right]}{P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t]} = \tilde{E} \left[1 - \frac{V}{D'} \mid \mathcal{G}_t \right]. \quad \blacksquare$$

債権が1種類の場合は、元本 D' は負債総額 D に一致する。また、デフォルト時には D を上限として残余資産を回収することができる。このとき回収額は、 $V = \min(D, \tilde{D})$ と表すことができる。したがってデフォルト時損失率は、以下のように表現できる。

$$L(t, T) = E \left[1 - \frac{\min(D, \tilde{D})}{D} \mid \tau \leq T, \mathcal{G}_t \right] = \tilde{E} \left[1 - \frac{\min(D, \tilde{D})}{D} \mid \mathcal{G}_t \right]. \quad (3.16)$$

これを評価するためには、 \tilde{D} の $\mathbb{P}^{\mid \mathcal{G}_t}$ のもとでの条件付確率密度関数 $\tilde{g}(\cdot \mid \mathcal{G}_t)$ を特定化すればよい。

例3.4 (一様分布) $\tilde{\mathbb{P}}^{\mid \mathcal{G}_t}$ のもとで、 $\tilde{D} \sim U(0, m(0, t))$ とすると、デフォルト時損失率は、次で求まる。

$$\begin{aligned} & \tilde{E} \left[1 - \frac{\min(D, \tilde{D})}{D} \mid \mathcal{G}_t \right] \\ &= N(t) \left(\frac{\min(D, \tilde{D})}{D} \right) + (1 - N(t)) \frac{D}{2m(0, t)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

このほか、 \tilde{D} の分布として、例3.2や例3.3で示したベータ分布やロジット変換正規分布等のモデルを利用することもできる。その場合は、数値積分が必要となる。

4 . 優先劣後構造とデフォルト時損失率

ここまでは債務者企業が単一の負債を保有しているという前提で議論してきた。したがって債権者は当該企業の最優先債権を保有しており、デフォルト時には全資産を回収できる権利がある。

実際には、債務者企業には複数の負債があり、優先度や担保の設定状況によって回収可能性は異なるため、これらの要素を考慮したモデルが必要となる。Guha [2002]、Guha and Sbuelz [2004] らの構造型モデルによる既存の方法では、デフォルト時の回収率をデフォルト時の資産価値の分布とは別に外生的に与えている。これは、優先度や担保等の設定によって異なる回収率の分布を簡便に扱うための措置であるが、優先劣後関係を明示的に取り込んだものではないため、その影響を分析することは難しい。本稿では、優先劣後構造がデフォルト時損失率に与える影響を、構造型モデルの枠組みに導入することで、こうした問題を解決する。

一般に、負債を優先部分と劣後部分に分割することで、劣後部分にデフォルト損失を吸収させ、優先部分のデフォルト損失を抑制することができる。こうした効果をデット・クッションと呼ぶ。回収率に関する既存の実証分析でも、デット・クッションは回収率に対し大きな影響を与えるという指摘がなされている(三次・砂田 [2002]、ボス [2003])。

以下では、債務者企業の負債が、優先・メザニン・劣後の3種類から成ると想定する。ある債権のデフォルト時損失率を推計する場合には、当該債権より相対的に優先する部分と、相対的に劣後する部分のみを考慮すればよい。そのため、優先・メザニ

ン・劣後の3種類の優先劣後構造を考慮すれば、4種類以上のより複雑な負債構造を持つ場合にも対応できる。

$i=1, 2, 3$: 優先度のインデックス。 $i=3$: 優先、 $i=2$: メザニン、 $i=1$: 劣後。

β_i : 優先度 i の債権の元本が、負債総額に占める割合。

D_i : 優先度 i の債権の元本 ($D_i = \beta_i D$)

ここで、 $\sum_{i=1}^3 \beta_i = 1$ 、すなわち $D = \sum_{i=1}^3 D_i$ である。

各債務 i ($i=1, 2, 3$) の債権者が回収可能な残余資産の金額は、資産価値がデフォルト時点においてどの程度低下しているかによって異なる。以下では、4つのケースに場合分けし、それぞれの場合における回収可能額を考察する。優先度 i の債権のケース j ($j=0, 1, 2, 3$) のときの回収額を $V_i^{(j)}$ とおく。

ケース0 : ($D < A(\tau)$) デフォルトしたものの、残余資産 $A(\tau)$ が負債総額を上回っている場合は、優先部分の元本 D_3 、メザニン部分の元本 D_2 、劣後部分の元本 D_1 は完全に回収できる。すなわち、以下のような回収額となる。

$$V_3^{(0)} = D_3, \quad (4.1)$$

$$V_2^{(0)} = D_2, \quad (4.2)$$

$$V_1^{(0)} = D_1, \quad (4.3)$$

ケース1 : ($\sum_{i=2}^3 D_i < A(\tau) \leq D$) 残余資産 $A(\tau)$ が優先部分およびメザニン部分の元本の合計を上回っている場合(図2)は、優先部分の元本 D_3 とメザニン部分の元本 D_2 を完全に回収できる。劣後部分は一部損失を被り、残余資産のうち優先部分の元本 D_3 とメザニン部分の元本 D_2 を弁済してなお残存している部分が劣後部分に割り当てられる。すなわち、以下のような回収額となる。

$$V_3^{(1)} = D_3, \quad (4.4)$$

$$V_2^{(1)} = D_2, \quad (4.5)$$

$$V_1^{(1)} = A(\tau) - \sum_{i=2}^3 D_i. \quad (4.6)$$

ケース2 : ($D_3 < A(\tau) \leq \sum_{i=2}^3 D_i$) 残余資産 $A(\tau)$ が優先部分の元本のみを上回っている場合(図3)は、優先部分の元本 D_3 を完全に回収できる。メザニン部分は一部損失を被り、資産のうち優先部分の元本 D_3 を支払った残存部分が回収額となる。劣後部分に関しては、完全に毀損してしまう。すなわち、以下のような回収額となる。

図2 ケース1 : $(\sum_{i=2}^3 D_i < A(\tau) \leq D)$

残余資産 $(A(\tau))$	優先 (D_3)	$V_3^{(1)} = D_3$
	メザニン (D_2)	$V_2^{(1)} = D_2$
	劣後 (D_1)	$V_1^{(1)} = A(\tau) - \sum_{i=2}^3 D_i$ デフォルト損失

図3 ケース2 : $(D_3 < A(\tau) \leq \sum_{i=2}^3 D_i)$

残余資産 $(A(\tau))$	優先 (D_3)	$V_3^{(2)} = D_3$
	メザニン (D_2)	$V_2^{(2)} = A(\tau) - D_3$
	劣後 (D_1)	デフォルト損失

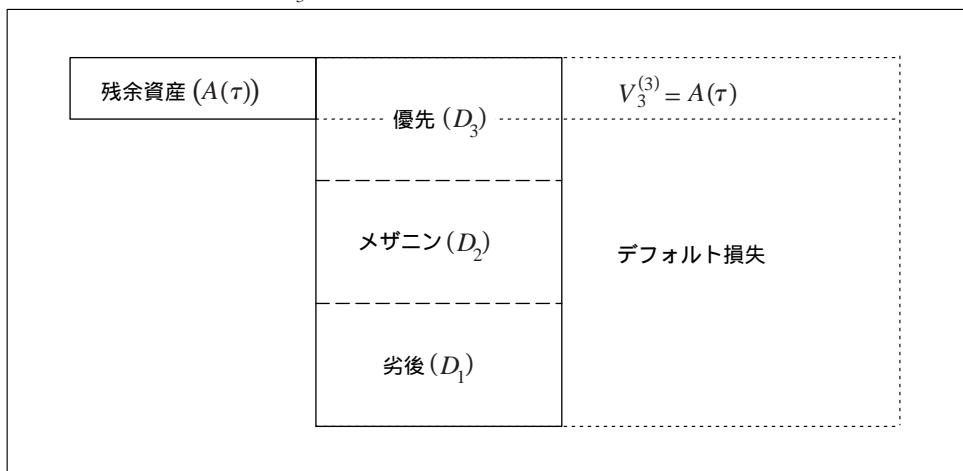
$$V_3^{(2)} = D_3, \tag{4.7}$$

$$V_2^{(2)} = A(\tau) - D_3, \tag{4.8}$$

$$V_1^{(2)} = 0. \tag{4.9}$$

ケース3 : $(A(\tau) \leq D_3)$ 残余資産 $A(\tau)$ が優先部分の元本を下回っている場合 (図4) は、優先部分も一部損失を被り、残余資産が全て回収される。メザニン部分、劣後部分に関しては、完全に毀損してしまう。すなわち、以下のような回収額となる。

図4 ケース3 : $(A(\tau) \leq D_3)$



$$V_3^{(3)} = A(\tau), \quad (4.10)$$

$$V_2^{(3)} = 0, \quad (4.11)$$

$$V_1^{(3)} = 0. \quad (4.12)$$

これらをまとめると、次のようになる。

$$V_3 = 1_{\{D_3 < A(\tau)\}} D_3 + 1_{\{A(\tau) \leq D_3\}} A(\tau),$$

$$V_2 = 1_{\{\sum_{i=2}^3 D_i < A(\tau)\}} D_2 + 1_{\{D_3 < A(\tau) \leq \sum_{i=2}^3 D_i\}} (A(\tau) - D_3),$$

$$V_1 = 1_{\{D < A(\tau)\}} D_1 + 1_{\{\sum_{i=2}^3 D_i < A(\tau) \leq D\}} \left(A(\tau) - \sum_{i=2}^3 D_i \right).$$

以下、デフォルト時損失率を求めていくが、優先部分および劣後部分は、構成比 β_i ($i=1, 2, 3$) の組合せ方を工夫すると、メザニン部分で表現できる (例えば、優先部分の構成比 β_3 をゼロとするとメザニンは優先部分となる)。そこで、以下では V_2 についてのみデフォルト時損失率を求め、次式を得た。

$$\begin{aligned} & \tilde{E} \left[1 - \frac{V_2}{D_2} \mid \mathcal{G}_t \right] \\ &= \tilde{P} \left[\tilde{D} \leq \sum_{i=2}^3 D_i \mid \mathcal{G}_t \right] + \frac{D_3}{D_2} \tilde{P} \left[D_3 < \tilde{D} \leq \sum_{i=2}^3 D_i \mid \mathcal{G}_t \right] - \frac{\int_{D_3}^{\sum_{i=2}^3 D_i} b \tilde{g}(b \mid \mathcal{G}_t) db}{D_2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

これは、 $\tilde{\mathbb{P}}|G_t$ のもとでの条件付確率密度関数 $\tilde{g}(b|G_t)$ を与えれば具体的に計算することができる。もっとも、解析解を得ることができるのは一様分布などの場合に限られており、一般には数値積分を必要とする。その方法の1つとして、モンテカルロ積分が挙げられる。モンテカルロ積分を行う場合は、 $\tilde{\mathbb{P}}|G_t$ のもとでの \tilde{D} の標本 $(\tilde{D}_m)_{m \leq M}$ を発生させ、これを次式に適用することにより、デフォルト時損失率を求める。

$$\tilde{E} \left[1 - \frac{V_2}{D_2} \mid G_t \right] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[1_{\{\tilde{D}_m \leq \sum_{i=2}^3 D_i\}}^{-1} 1_{\{D_3 < \tilde{D}_m \leq \sum_{i=2}^3 D_i\}} \frac{\tilde{D}_m - D_3}{D_2} \right].$$

例4.1 (一様分布) ちなみに、一様分布の場合、(4.13)式の計算は以下のように大幅に簡略化される。

$$\tilde{E} \left[1 - \frac{V_2}{D_2} \mid G_t \right] = \frac{\sum_{i=2}^3 D_i + D_3}{2m(0, t)}. \quad (4.14)$$

5 . 数値計算

本稿では、デフォルト確率(3.1)式およびデフォルト時損失率(4.13)式を数値積分によって求める。なお、数値積分には適応Lobatto求積法を用いている³。

(1) デフォルト確率の期間構造

まず、デフォルト確率が残存期間 $T-t$ に応じてどう変化するか、すなわちデフォルト確率の期間構造を検証する。 \tilde{D} が、(1)一様分布 $U(0, m(0, t))$ に従う場合、(2)ベータ分布 $Beta(\alpha, \beta)$ に従う場合、(3)ロジット変換正規分布 $Logit(\mu_z, \sigma_z^2)$ に従う場合の3通りをとりあげた。ほかのパラメータは、 $A(t) = 100$ 、 $m(0, t) = 75$ 、 $\mu_A = 0.05$ 、 $\sigma_A = 0.1$ とした。 $A(t)$ と $m(0, t)$ の設定は、現時点 t での資産価値が100、過去に資産価値がとった最小値が75であることを意味する。現時点 t でデフォルトしていないことから、デフォルト境界 \tilde{D} は少なくとも75より低いことになる⁴。したがって、 \tilde{D} の条件付密度関数は0から75までの範囲で与える。観測期間は $T-t = 1, 2, 3, 5, 10$ とした。

以上の条件のもとで推計した結果を表1に示す。ベータ分布とロジット変換正規分布は複数の分布型をパラメータを変えて試しており、各パラメータのもとでの確率密度関数を図5に、デフォルト確率の期間構造を図6に示した。

³ 具体的には、Matlabのquad関数により計算した。

⁴ 本稿でのデフォルト境界の不確実性は、資産価値が \tilde{D} に達しても必ずしもデフォルトするとは限らないという意味ではなく、必ずデフォルトする境界 \tilde{D} が存在しているが、その値が事前には不確実であるという意味である。

表1 デフォルト確率の期間構造 ($A(t)=100$ 、 $m(0, t)=75$)

		(%)				
		$T-t=1$	$T-t=2$	$T-t=3$	$T-t=5$	$T-t=10$
(1)	$U(0, A(0))$	0.0026	0.0583	0.2229	0.8038	2.8047
(2)-a	$Beta(1.2, 2)$	0.0001	0.0060	0.0309	0.1563	0.8188
(2)-b	$Beta(0.9, 1.2)$	0.0003	0.0303	0.1234	0.4802	1.8400
(2)-c	$Beta(0.9, 0.9)$	0.0033	0.0702	0.2601	0.9059	3.0357
(2)-d	$Beta(2, 1.2)$	0.0007	0.0713	0.2846	1.0731	3.8859
(3)-a	$Logit(0.5, 1^2)$	0.0003	0.0189	0.1035	0.5319	2.5836
(3)-b	$Logit(0.5, 2.5^2)$	0.0092	0.1758	0.5972	1.8532	5.3029
(3)-c	$Logit(-0.5, 1^2)$	0.0000	0.0017	0.0122	0.0839	0.5891
(3)-d	$Logit(-0.5, 2.5^2)$	0.0045	0.0912	0.3231	1.0546	3.2212

図5 デフォルト境界 \bar{D} の (\mathcal{G}_t) -条件付確率密度関数 ($m(0, t)=75$)

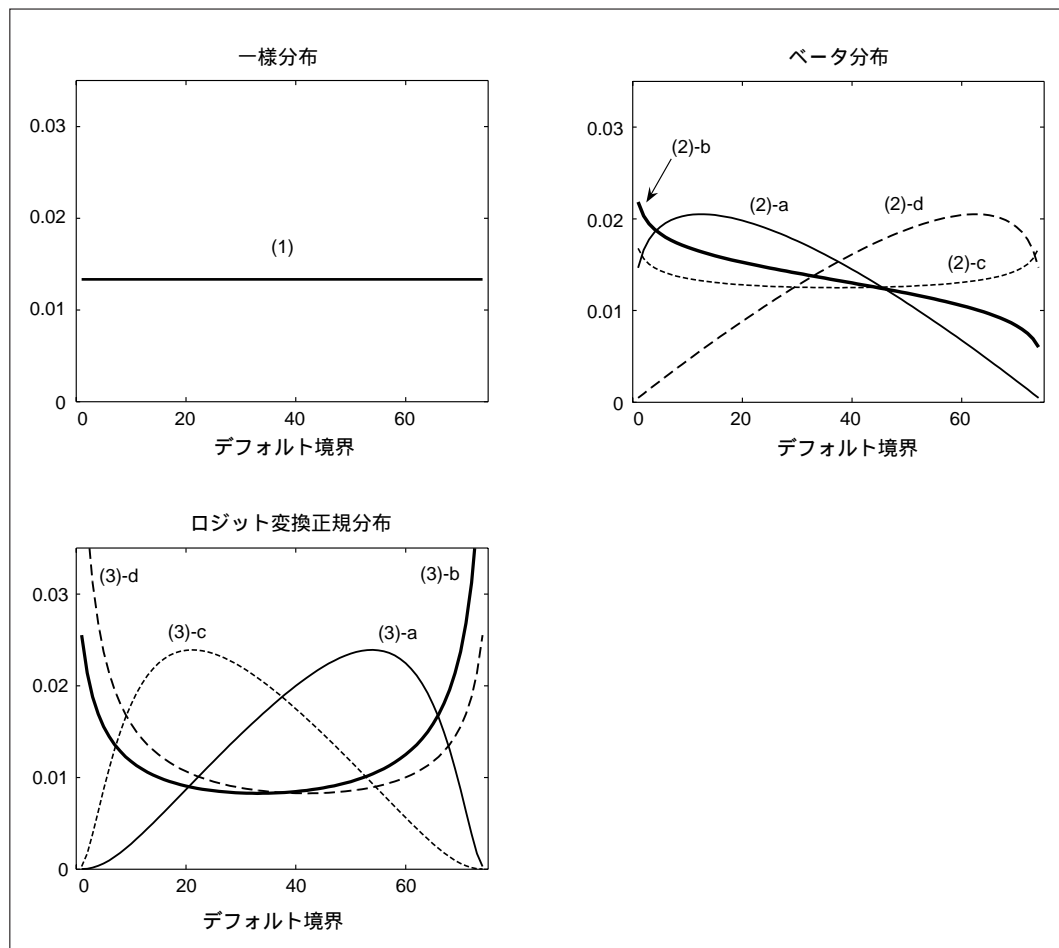
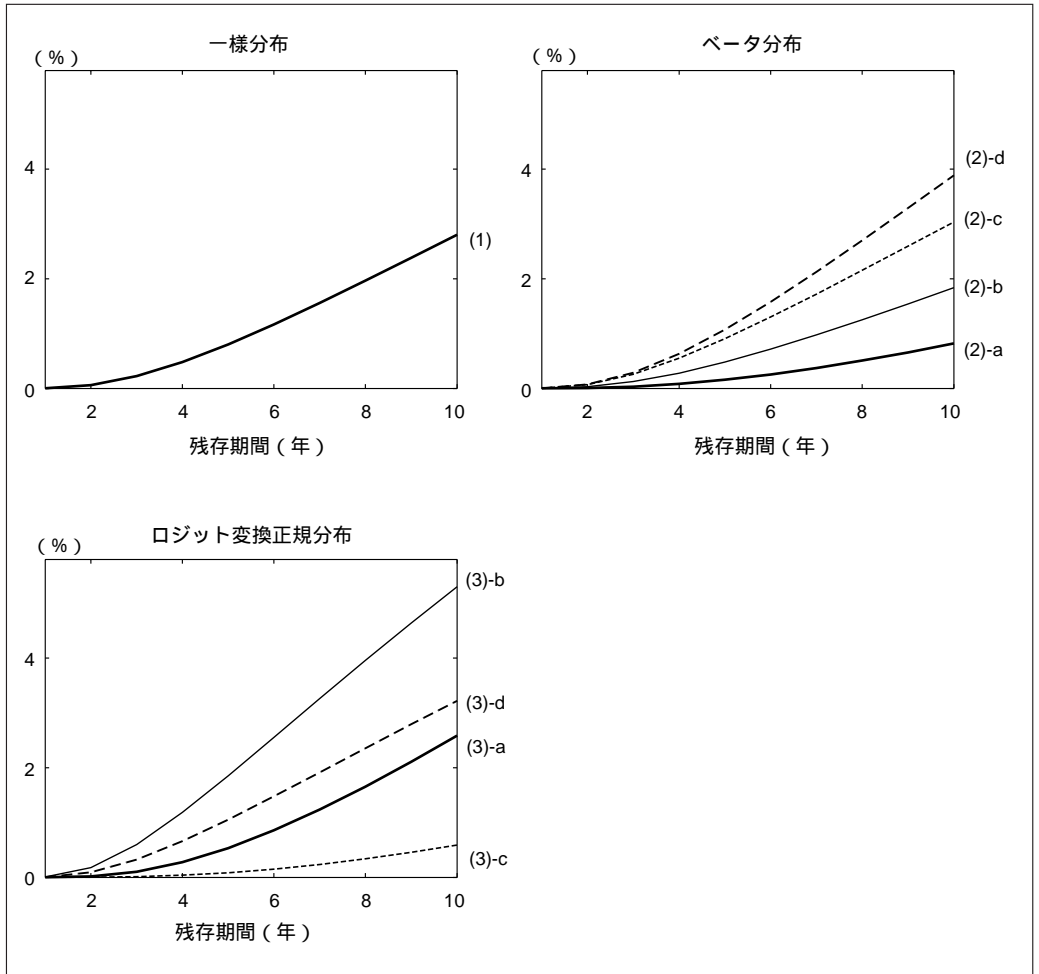


図6 デフォルト確率の期間構造 ($A(t)=100$ 、 $m(0, t)=75$)

デフォルト確率は全てのケースで残存期間 $T-t$ の増加に伴い単調に増加するが、その形状はデフォルト境界の分布によって大きく異なっている。例えば、図5の(2)-dや(3)-bのようにデフォルト境界が分布領域 $0 \sim 75$ 内の右側に高い密度で分布する場合は、将来のデフォルト確率が高くなる傾向がある。このように、デフォルト境界について不完全な情報しか持ちえない場合には、その不確実性をどのような分布でモデル化するかによってデフォルト確率およびその期間構造は大きく異なってくる。

(2) デフォルト時損失率と優先劣後構造

次に、優先劣後構造がデフォルト時損失率に及ぼす影響について考察する。前述の(1)一様分布、(2)ベータ分布、(3)ロジット変換正規分布の各分布に対応する場合をとりあげ、パラメータ設定も同様とする。負債総額 D を75とし、優先劣後関係

を表すパラメータ $\beta = (\beta_1 \beta_2 \beta_3)'$ を変えて β の違いがデフォルト時損失率にどう影響を与えるかを検証する。ただし、 $\beta' \mathbf{1} = 1$ より、 β の自由度は2である。すなわち β が張る空間は、以下の S のように表される。

$$S := \left\{ (\beta_1 \beta_2 \beta_3)' \mid \sum_{i=1}^3 \beta_i = 1, \beta_i \in [0, 1], i = 1, 2, 3 \right\}. \quad (5.1)$$

したがって、 S は \mathbb{R}_+^3 内の単体 (simplex) である。そこで、 β_1 (劣後部分の割合) および β_3 (優先部分の割合) について、この単体上の点から選択する。具体的には、次の3つの組合せを検証した。

- (i) $\beta = (0 \ 1 \ 0)'$ 負債は1種類で優先劣後関係が存在しない。
- (ii) $\beta = (0.6 \ 0.4 \ 0)'$ 優先部分がなく、メザニンがこれに相当。その構成比は40%。
- (iii) $\beta = (0 \ 0.4 \ 0.6)'$ 劣後部分がなく、メザニンがこれに相当。その構成比は40%。

これらについて、前述の(1)一様分布、(2)ベータ分布、(3)ロジット変換正規分布に対応するデフォルト時損失率を推計した結果が表2である。いずれもメザニンのデフォルト時損失率を示したものであるが、(ii)では優先部分に相当し、(iii)では劣後部分に相当している。

まず、優先劣後関係とデフォルト時損失率の関係を考察する。表2をみると、優先部分に相当する(ii)が最も損失率が低く、逆に(i)、(iii)の順に損失率が高くなる。また、優先部分の大きさにも影響を受けている。表には示さなかったが、(iii)において優先部分の割合を上げていくと、回収額の大部分が優先部分の返済に充てられ、相対的に劣後する債権の損失率が更に高くなっていく。

次に、デフォルト境界の分布とデフォルト時損失率との関係について考察する。(2)のベータ分布に着目すると、原点側にデフォルト境界の分布が寄っている(2)-a、(2)-b、(2)-c、(2)-dの順に損失率が高くなっている。デフォルト境界の

表2 メザニンのデフォルト時損失率

	$\beta = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)'$	(i) $(0 \ 1 \ 0)'$	(ii) $(0.6 \ 0.4 \ 0)'$	(iii) $(0 \ 0.4 \ 0.6)'$
		(優先劣後なし)	(メザニンは優先部分)	(メザニンは劣後部分)
(1)	$U(0, A \ 0)$	0.5000	0.2000	0.8000
(2)-a	$Beta(1.2, 2)$	0.6250	0.2831	0.9327
(2)-b	$Beta(0.9, 1.2)$	0.5714	0.2660	0.8632
(2)-c	$Beta(0.9, 0.9)$	0.5000	0.2120	0.7880
(2)-d	$Beta(2, 1.2)$	0.3750	0.0673	0.7169
(3)-a	$Logit(0.5, 1^2)$	0.3980	0.0510	0.7873
(3)-b	$Logit(0.5, 2.5^2)$	0.4348	0.2131	0.6633
(3)-c	$Logit(-0.5, 1^2)$	0.6020	0.2127	0.9490
(3)-d	$Logit(-0.5, 2.5^2)$	0.5652	0.3367	0.7869

分布が原点付近に偏った場合、デフォルト確率は低くなるものの、デフォルトが生じた場合の損失は当然高くなる。本稿のモデルを用いると、その程度を定量的に評価することが可能となる。例えば(ii)の優先部分では、分布が(2)-dから(2)-cに変化したときのデフォルト時損失率の上昇幅が最も大きい。一方、(iii)の劣後部分では、こうした傾向は観察されない。

(3)のロジット変換正規分布については、(3)-aが単峰型分布、(3)-bが双峰型分布を表している。両者を比べると、(ii)優先部分では、双峰型の(3)-bが単峰型の(3)-aより損失率が高く、(iii)劣後部分では、逆に双峰型の(3)-bが単峰型の(3)-aより損失率が低くなっている。双峰分布型の(3)-bの場合、資産価値が \tilde{D} の上限75を下回るとすぐにデフォルトの可能性が高まる。ここでデフォルトした場合、残存資産が十分あり、優先部分は損失を出しにくい。一方、この分布では、資産価値がかなり低下してもデフォルトしない可能性も高い。デフォルト時の残存資産がわずかとなるようなデフォルトケースも少なくなく、このときには劣後部分のみならず優先部分も大幅な損失を被る。実際、(ii)の優先部分では、後者の影響が表れる分、単峰分布型の(3)-aに比べ、デフォルト時損失率が上昇している(0.0510 0.2131)。これに比べて、(iii)の劣後部分では、(3)-a、(3)-bいずれにおいてもデフォルト時損失率の水準は高いものの、(3)-bの双峰分布型のケースが相対的に低くなっている。これは、劣後部分の債権者にとっては、デフォルトするならば残存資産が高いうちにデフォルトした方が回収額の割当ての期待値が高まるため、双峰型の右側のピークでデフォルトする可能性が高い(3)-bの方が損失を抑えられるものと理解できる。(3)-bとは逆に分布の右側が薄くなっている(2)-a、(3)-cでは、デフォルト時損失率が非常に高く、上述の特徴が逆方向に強く表れている。ちなみに、(3)-aでは40~60の領域でデフォルトの可能性が高まるが、このとき、劣後部分に割り当てられる残存資産はほとんど残っていないため、劣後部分のデフォルト時損失率は(3)-bに比べて高くなっている。

以上は、構成比 β の3例をみたものであったが、理解を容易にするため3つの債権のうち1つの構成比をゼロとしていた。より一般的に、3つの債権が存在し、かつ、それらの構成比が連続的に変化する場合について、メザニンのデフォルト時損失率をみたものが図7~9である。これらは、デフォルト境界の分布がそれぞれ単峰型分布(図7)、一様分布(図8)、双峰型分布(図9)の場合において、劣後部分と優先部分の厚みがデフォルト時損失率にどのように影響を与えているか、3次元プロットを示したものである。単峰型分布の場合、優先部分や劣後部分の厚みが増すにつれ、デフォルト時損失率への影響度が遞減している(劣後部分の軸方向に断面図をみると下に凸、優先部分のそれは上に凸)。一方、双峰型分布では、全く逆のパターンが表れていることが読み取れる。また、一様分布では、構成比が及ぼす影響は線形であることがわかる。

図7 単峰型分布に従うデフォルト境界のもとでのデフォルト時損失率

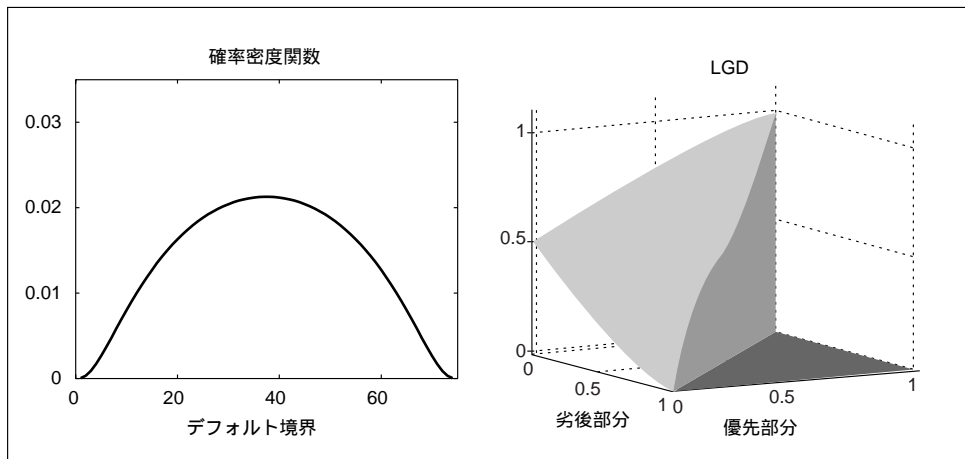


図8 一様分布に従うデフォルト境界のもとでのデフォルト時損失率

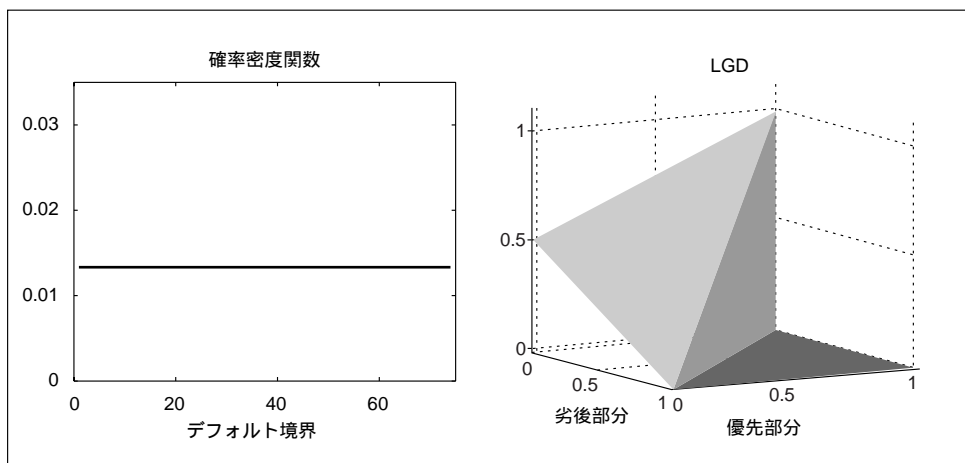
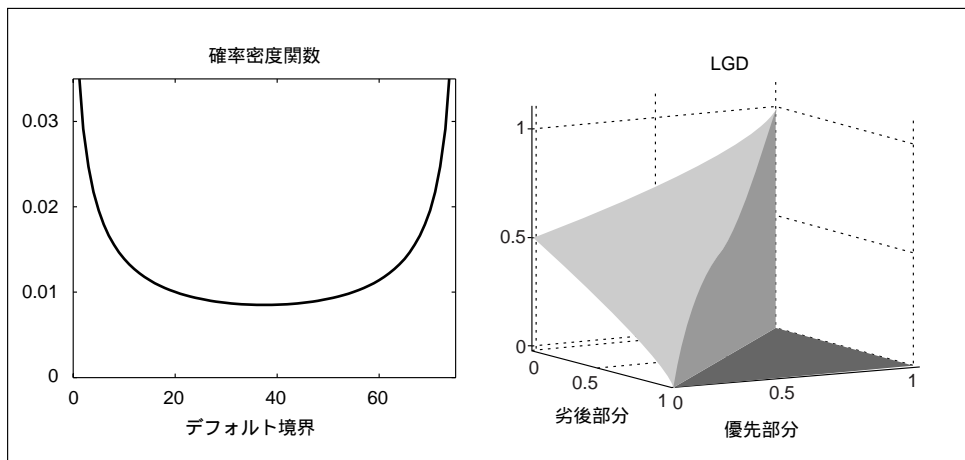


図9 双峰型分布に従うデフォルト境界のもとでのデフォルト時損失率



6 . 結論

本稿では、デフォルト境界が不確実である点に注目し、デフォルト境界が確率分布しているもとでの構造型モデルを考案した。デフォルト境界の一般的な分布型表現のもとでデフォルト確率やデフォルト時損失率の推計式を提示し、代表的な分布型を与えた場合の推計方法を紹介した。デフォルト時損失率の不確実性は、回収の不確実性に起因する部分もあるが、現実のデフォルト発生状況を考えると、デフォルトの境界の不確実性も重要と考えられる。本稿は、こうした視点からデフォルト確率やデフォルト時損失率を捉え直すモデルを示したものと位置付けられる。

デフォルト時損失率の不確実性の影響を強く受ける債権として、優先劣後構造を持つ貸出債権がある。本稿のモデルをこれら債権に応用し、デフォルト時損失率の期待値を比較したところ、優先劣後構造の設定によって同期待値は大きく影響を受けること、同じ優先劣後構造でもデフォルト境界の分布の形状に左右されることが判明した。特に後者の点は、既存の研究では注目されていなかった現象である。これらの結果から、優先劣後構造を持つ貸出債権の分析においては、デフォルトの認定がどのような定義・判断のもとで行われているか、その不確実性がどのように認識されているかが、こうした債権の評価に重要であることが確認された。

今後、デフォルト・回収事例のデータ蓄積が進み、デフォルト境界の分布に関する実証分析が進展すれば、推計結果の背景にある経済現象、とりわけ、デフォルトの認定が実際どのように行われているかを検証していく手がかりが得られよう。本稿は、こうした分析のための理論的な枠組みと推計方法を提供している。

参考文献

- 楠岡成雄・中川秀敏・青沼君明、『クレジット・リスク・モデル』、金融財政事情研究会、2001年
- 敦賀智裕、「構造モデルによるデフォルト時損失率の推計」、一橋大学大学院経済学研究科修士論文、2005年
- 三次啓之・砂田麻衣子、「深刻なデフォルト時代における回収率」、Standard & Poor's、2002年
- ボス・R、「デフォルト直後の取引価格は不良債権の最終的な回収率指標として不十分」、Standard & Poor's、2003年
- 山下智志・木原隆夫、「Reduced-Form アプローチを用いたPD、LGD同時推定」、*ISM Research Memorandum* 911、統計数理研究所、2004年
- Altman, E., A. Resti, and A. Sironi, "Analyzing and Explaining Default Recovery Rates," ISDA Research Report, London, December, 2001.
- Basel Committee on Banking Supervision, "Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework - Comprehensive Version," June, 2006.
- Çetin, U., R. Jarrow, P. Protter, and Y. Yildirim, "Modeling Credit Risk with Partial Information," *Annals of Applied Probability*, 14, 2004, pp. 1167-1178.
- Collin-Dufresne, P., R. Goldstein, and J. Hugonnier, "A General Formula for Valuing Defaultable Securities," *Econometrica*, 72, 2004, pp. 1377-1407.
- Duffie, D., and D. Lando, "Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information," *Econometrica*, 69, 2001, pp. 633-664.
- , and K. Singleton, "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds," *Review of Financial Studies*, 12, 1999, pp. 687-720.
- Düllmann, K., and M. Trapp, "Systematic Risk in Recovery Rates - An Empirical Analysis of US Corporate Credit Exposures," Discussion paper, No.2, Deutsche Bundesbank, 2004.
- Frye, J., "Depressing Recoveries," *Risk*, November, 2000, pp. 108-111.
- Giesecke, K., "Default and Information," *Journal of Economic Dynamics & Control*, 30, 2006, pp. 2281-2303.
- , and L. Goldberg, "Forecasting Default in the Face of Uncertainty," *Journal of Derivatives*, 12, 2004, pp. 11-25.
- Guha, R., "Recovery of Face Value at Default: Theory and Empirical Evidence," Working paper, LBS, 2002.
- , and A. Sbuelz, "Structural RFV: Recovery Form and Defaultable Debt Analysis," *Proceedings of C.R.E.D.I.T. 2004, Workshop on Validation of Credit Risk Models, GRETA, Venice*, September, 2004.
- Longstaff, F., and E. Schwartz, "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt," *Journal of Finance*, 50, 1995, pp. 789-819.

Merton, R., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29, 1974, pp. 449-470.

Schönbucher, P., "A Libor Market Model with Default Risk," Working paper, University of Bonn, 1999.

