

CDOプライシングの 離散高速アプローチ(1): ツリーを用いた準解析的プライシングの 1ファクター・モデルへの適用

よこやしんや
横谷進弥

要 旨

日本のクレジット市場ではCDS (Credit Default Swap) 取引やインデックス取引 (iTraxx Japan) の拡充とともに、CDO (Collateralized Debt Obligation) 取引も年々取引量が増しており、プライシングの高速化が実務上の重要な課題となっている。本稿では、CDOのプライシングの高速化を可能とする新しい計算手法を提示し、そのパフォーマンスを示す。この手法は、準解析的手法の枠組みの中で、条件付同時デフォルト確率をツリーを用いて正確かつ効率的に計算する手法である。ツリー・メソッドはオプション理論等で既に多くの実務家に親しまれており、本稿の手法は理論面のみならず実装面での平易さからみても実用的である。また、本稿で証明した離散特性関数とツリー・メソッドの同値性は、CDOのプライシングだけにとどまらず、一般的なオプション・プライシングにおいても応用可能である。

キーワード：CDO、離散特性関数、高速フーリエ変換、ツリー・メソッド、不均等プール、オプション・プライシング

本稿は、2007年3月に日本銀行金融研究所で開催された「信用リスク評価の高速化手法」をテーマとするファイナンス研究会への提出論文に加筆・修正を施したものである。同研究会の参加者からは、貴重なコメントを多数頂戴した。記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りは、すべて筆者個人に属する。

横谷進弥 日本銀行金融研究所 (現 みずほ証券クレジットトレーディング部、
E-mail: shinya.yokoya@mizuho-sc.com)

1 . はじめに

これまで、CDO (Collateralized Debt Obligation) のプライシング手法がさまざまな形で考案されてきた。CDOのプライシングで最大の問題となるのは、ポートフォリオの中に含まれる参照銘柄間の資産相関構造を考慮に入れたときの同時デフォルト確率をいかに捉えるかという問題であり、現在ではLi [2000] が提唱したコピュラの応用法が定着している。コピュラとは相関構造を持つ多次元確率分布の表現法であり、これをCDOのプライシングに応用したモデルでは、(1)確率分布の与え方(正規分布、t分布など)、(2)相関の表現手法(ファクター・モデル、相関行列のコレツキー分解法)などによりさまざまな分類の仕方がある。現在、クレジット市場では、(1)に関しては正規分布(正規コピュラ)を用いることが定着しており、(2)に関しては、CDOの参照銘柄間に任意の相関行列を想定する場合は、コレツキー分解によるモンテカルロ法が用いられ¹⁾、単一相関を想定する場合は、1ファクター・モデルに対して数値積分を用いる手法(以下、準解析的手法)が定着している。コレツキー分解を用いた手法は、所与の相関構造を正確に反映させるため、精緻な評価が可能となる反面、計算に時間を要するという問題を抱えている。そこで、所与の相関構造をマルチ・ファクター・モデルで表現し、それに対してモンテカルロ法の分散減少法(加重サンプリング法や分割化法等)を応用する研究がなされている(Glasserman and Li [2005], Chen and Glasserman [2006])。もっとも、実務において標準的手法としての地位を確立したものは未だない。

本稿では、近年CDOの高速計算手法として定着化している正規コピュラと1ファクター・モデルの組合せに対して、オプションのプライシングなどに用いられているツリー・メソッドを活用した新しい手法を提示する。ツリー・メソッドはさまざまな準解析的手法に応用できるが、本稿ではまず単一相関を想定した1ファクター・モデルに適用し、プライシングの計算を大幅に高速化させる効率的な手法であることを示す。

準解析的手法に基づくプライシングは、(A)共通ファクターの確率変数を所与とした条件付デフォルト確率を考えることで各参照銘柄のデフォルト事象を独立なものとして捉え、(B)その条件付確率のもとでプール全体の条件付デフォルト確率を求め、(C)共通ファクターの確率変数に対して数値積分を用いて期待値を求めるという手順を踏む。現在、この分野で注目されているのは(B)に関した「互いに独立なデフォルト事象のもとでプール全体の条件付同時デフォルト確率をいかに求めるか」という技術であり、本稿もこれを扱ったものである。(B)の問題は、もし単一相関、均一デフォルト時エクスポージャー、均一デフォルト率を仮定すれば、2項分布で計算することができるが、3つの仮定のうち1つでも成立しない場合、2項分布では正確に計算できない。そこで、近年の多くの研究では、大数の法則や中心

1 相関を持った正規乱数をコレツキー分解法を用いて発生させる手法は、湯前・鈴木 [2000] に詳しい。

極限定理に基づき近似的に同時確率を求める手法の開発に関心が集まっている (Richard and Ordovas [2006]、安藤 [2005])。近似手法は参照銘柄数が大きいほど近似精度が高いという性質を持っているため、銀行のポートフォリオ分析など参照銘柄が多い分析では、計算速度の面で有益である。一方、CDO、FtD (First-to-Default) 等のクレジット商品の参照銘柄は銀行のポートフォリオと比べ圧倒的に少なく (日本のクレジット市場では、CDOは平均100銘柄、FtDは平均10~20銘柄)、近似手法では近似誤差が問題となりうる。特に、エクイティの近似誤差が大きい傾向がある。これに対して、Laurent and Gregory [2005] は、厳密な条件付同時確率を算出できる手法として、条件付同時確率分布と1対1に対応している離散特性関数 (離散フーリエ変換) に対して離散逆フーリエ変換を行う手法を推奨している。その際、高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform: FFT) を用いているが、FFTは条件付同時デフォルト確率の計算手法として速くはなく、特に、デフォルト時エクスポージャーが不均等なプールでは計算負荷が大きくなるという批判がある (Richard and Ordovas [2006])。

そこで、本稿では、均等・不均等の区別なく条件付同時確率を高速に計算する手法として、ツリー・メソッドを用いた手法を提案し、そのパフォーマンスを比較、評価する。このツリー・メソッドは、離散特性関数に対して離散逆フーリエ変換を行った手法と理論的に同値であり、厳密な条件付同時確率を求めることができ、かつ計算速度が速いという優れた特性を保っている。また、この手法はAndersen, Sidenius, and Basu [2003] が提示した格子を使った手法 “Recursive Method” の効率化と捉えることもできる。彼らの手法は、全ての格子点を計算するものであったが、ツリー・メソッドではこれを大幅に効率化することができる。

さらに、このツリー・メソッドはこれまでの準解析的手法におけるさまざまな研究成果に対してほとんどそのまま応用することができる。その一例として、Andersen, Sidenius, and Basu [2003] に提示されている感応度計算²のツリー・メソッドによる応用を説明する。

以下、2節では、CDOの1ファクター・モデルにおけるプライシング手法の概要を説明し、3節では2節を踏まえ、離散特性関数を利用したCDOトランシェの期待損失率の求め方を説明する。4節では本稿の主要論点であるツリー・メソッドによるCDOトランシェの期待損失率の求め方を説明するとともに、同手法が3節で説明した特性関数を用いた解法との同値性を有していることを証明する。5節では応用例として感応度の計算法を示す。6節では1ファクター・モデルの計算速度について従来の手法と比較し、大幅な高速化が可能となることを示す。7節はまとめと本稿のプライシング法の応用例を述べる。

2 感応度とは、CDOのヘッジやリスク管理に用いる指標で、CDOの理論価格を任意のパラメータ (CDS <Credit Default Swap> スプレッドや資産相関など) について微分もしくは差分したものを指す。

2. 準解析的CDOプライシング

本節では、1ファクター・モデルと条件付確率の設定を行ったうえで、準解析的なCDOのプライシング手法を説明する。

(1) 1ファクター・モデルと条件付確率の設定

各参照銘柄間の資産相関を ρ ($0 \leq \rho \leq 1$)で表すことができると仮定すると、1ファクター・モデルは、参照銘柄数を m として、以下のように定義することができる。

$$v_i = \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\epsilon_i, i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

ここで、 Y, ϵ_i は互いに独立な標準正規分布に従うとする。

v_i を各参照企業の資産価値を決定付ける確率変数であるとする、資産価値は共通のファクター項（共通ファクター） Y と、独自の要因（固有ファクター） ϵ_i によって決まる。

ここで、各参照企業の時点 t でのデフォルト確率を \hat{p}_i とする（以下の議論は任意の t について成立するため、 t を省いて表記する）、(1)式で v_i は標準正規分布に従うことから、

$$\hat{p}_i = \Pr [v_i < \Phi^{-1}(\hat{p}_i)], \quad (2)$$

が成り立つ。ここで、(1)式の共通ファクター Y が与えられたもとの条件付デフォルト確率を p_i とすると、

$$\begin{aligned} p_i &= \Pr [v_i < \Phi^{-1}(\hat{p}_i) | Y=y] \\ &= \Pr [\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\epsilon_i < \Phi^{-1}(\hat{p}_i) | Y=y] \\ &= \Pr \left[\epsilon_i < \frac{\Phi^{-1}(\hat{p}_i) - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}} \mid Y=y \right] \\ &= \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\hat{p}_i) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

となり、任意の i, j ($i \neq j$) に対して p_i, p_j は独立な事象に対する確率となる。参照銘柄全体（以下、プール）の条件付同時デフォルト確率は、この条件付デフォルト確率を用いて解くことができる。

(2) デフォルト時損失率について

デフォルト時損失額とデフォルト時損失率について記号を定義する。まず、参照銘柄のデフォルト時損失額（額面 \times (1 - 回収率)）について考える。CDOをプライ

シングする際、(3)式によって求められる条件付デフォルト確率を用いて、プールの条件付同時デフォルト確率を計算する。そのときデフォルト時損失額が同じであれば、同時デフォルト確率は「 i 銘柄のデフォルトする確率 (i は銘柄数の合計を最大とする自然数)」と定義できる。一方、デフォルト時損失額が銘柄間で異なれば、銘柄を単位として考えることは難しい³。そこで、本稿ではデフォルトを数える単位を細かくし、デフォルト時損失額の最大公約数を単位とする。このように設定することにより、各銘柄のデフォルトを「最大公約数を単位として k 単位デフォルトする (k は自然数)」事象として捉えることができ、同時デフォルト確率もこの単位で表現できる。ここで、デフォルト時損失額を自然数で表せるとして⁴、それぞれの損失額を $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ とする。このとき、 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ の最大公約数を H とし、

$$b_i = \frac{a_i}{H}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

を要素とするベクトル $\mathbf{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}^T$ を定義する。 b_i は各銘柄のデフォルト時損失額が H を単位として何単位分かを示す自然数である。以下では、この \mathbf{B} を用いて同時デフォルト確率を考えていく。総単位数 n は $n = \sum_{i=1}^m b_i$ で与えられる。

また、トランシェの損失率を表すベクトルをサイズ $n+1$ のベクトル \mathbf{L} とし、その要素 l_k ($k = 0, 1, \dots, n$) はプールが k 単位毀損されたときの、トランシェの損失率を表すものとする。

(3) CDOプライシング手法

CDOトランシェのプライシングは満期までの任意時点の期待損失率を計算することができればプロテクション・レグ(デフォルト発生時の支払額)の価値は額面を掛ければよく、プレミアム・レグ(期中プレミアムの支払額)の価値は期待損失率の関数として考えることができる⁵。したがって、ここでは基礎となる期待損失率の求め方を説明する。

まず、時点 t までに n 単位中 k 単位だけプールが毀損する条件付同時デフォルト確率を

$$cp(t, k, n|Y), \quad (5)$$

時点 t までに n 単位中 k 単位以上プールが毀損する条件付同時デフォルト確率を

$$CP(t, k, n|Y), \quad (6)$$

3 例えば、全ての銘柄間でデフォルト時損失額が違うのであれば、同時デフォルトの場合の数が2の銘柄数乗となる。

4 クレジット商品は各参照銘柄を億円単位で取引することが普通であり、回収率もパーセント表示で小数点以下まで細かく規定することは稀であるので、ほとんどの場合この仮定は成り立つ。

5 Laurent and Gregory [2005] または小宮 [2003] が詳しい。

とする。また、アタッチメント（トランシェの下限の総額面に対する比率）を α 、デタッチメント（トランシェの上限の総額面に対する比率）を β とし、プール全体の損失率が $[0, 1]$ に収まる単位数を $[d, u]$ （ d, u は自然数）⁶とすると、時点 t のトランシェの瞬間期待損失率 $G(t)$ は次のように求められる。

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{j=d}^{u-1} l_j \frac{\partial cp(t, j, n|Y)}{\partial t} + l_u \frac{\partial CP(t, u, n|Y)}{\partial t} \right\} d\Phi(Y). \quad (7)$$

ここで t 時点の割引率を $D(t)$ で表し、時点0でのトランシェの割引期待損失率は、満期を T とすると以下のように求めることができる。

$$\int_0^T G(t)D(t)dt. \quad (8)$$

(7)式、(8)式の積分を解析的に解くことは通常困難であり、数値積分により計算することになる。上記の手法はモンテカルロ法ではなく数値積分を用いる解法であることから、「準解析的手法」と呼ばれている。

3. 特性関数を用いた期待損失率の求め方

前節では、CDOの割引期待損失率を求める準解析的な手法を説明した。ここからは、 \hat{p}_i （各参照銘柄の無条件デフォルト確率）は所与とし⁷、 $D(t)$ （割引率）を確定的な関数として、(5)式と(6)式の条件付同時デフォルト確率の求め方のみに限定して議論を進める。本節ではLaurent and Gregory [2005] が提示している離散特性関数を用いた手法を説明する。よく知られているように特性関数を逆フーリエ変換することで確率密度関数が得られる。これを条件付デフォルト確率の算出に応用する。以下、まず離散フーリエ変換、離散逆フーリエ変換を定義したうえで、それを用いてCDOプールのデフォルト事象に対する離散特性関数を定義し、その離散逆フーリエ変換として同時デフォルト確率を求めていく。

(1) 離散フーリエ変換、離散逆フーリエ変換の定義

本節で用いる離散フーリエ変換、離散逆フーリエ変換を定義する。ここで、求めたい単位ごとの条件付同時デフォルト確率を $x_j (j = 0, 1, \dots, n)$ とし、それらを要素とするベクトルを \mathbf{X} とする。

6 総額面をTNとすると、以下の通り。 $d = \min(k | 0 < \frac{kH}{TN}, k \in \{1, \dots, n\})$, $u = \min(k | 0 < \frac{kH}{TN}, k \in \{1, \dots, n\})$

7 通常、何らかのモデルを仮定してCDSもしくは社債のスプレッドから逆算して求める。Schönbucher [2003] が詳しい。

このとき、離散フーリエ変換は以下のように定義される。起こりうる事象の数、すなわち合計単位のデフォルトが発生する事象の数と全くデフォルトしない事象の数の和を $N(=n+1)$ とすると、 $k=0, 1, \dots, N-1$ に対して、

$$f_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-\frac{2\pi i}{N}jk} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j W^{jk} = \mathbf{X}^T \mathbf{W}_k. \quad (9)$$

ただし、 i は虚数単位、 $W = \exp(-2\pi i/N)$ 、 $\mathbf{W}_k = \{W^{0k}, W^{1k}, \dots, W^{(N-1)k}\}^T$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) とし、 f_k を要素とするベクトルを \mathbf{F} とする。また、 $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ を \mathbf{X} のフーリエ変換を表す関数とする ($\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{X})$)。

離散逆フーリエ変換は以下のように定義される。

$$x_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{\frac{2\pi i}{N}kj} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{-kj} = \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{W}_j^{-1}}{N}. \quad (10)$$

ここで、 $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{F})$ を \mathbf{F} の離散逆フーリエ変換を表す関数とする ($\mathbf{X} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{F})$)。

(2) 評価手法

3節(1)の定義により、求めたい条件付同時デフォルト確率 \mathbf{X} は、プール全体の特性関数 \mathbf{F} が求まれば(10)式によって求められることがわかる。以下で、 \mathbf{F} の求め方を示す。

\mathbf{q}_i ($i=1, 2, \dots, m$) をサイズ $n+1$ のベクトルとして、第1要素を $1-p_i$ 、第 (b_i+1) 要素を p_i とし、それ以外の要素を0とする。このとき、 $\mathcal{F}(\mathbf{q}_i)$ ($i=1, 2, \dots, m$) は各参照銘柄のデフォルト事象に対する離散特性関数(離散フーリエ変換)となる。 p_i ($i=1, 2, \dots, m$) は条件付独立事象の確率なので、プール全体の離散特性関数 \mathbf{F} は以下のよう求めることができる。

$$\mathbf{F} = \prod_{i=1}^m \mathcal{F}(\mathbf{q}_i). \quad (11)$$

\mathbf{F} の各要素 f_k ($k=0, 1, \dots, n$) は

$$\begin{aligned} f_k &= \prod_{i=1}^m \{(1-p_i)W^{0k} + p_i W^{b_i k}\} \\ &= \prod_{i=1}^m \left\{ 1-p_i + p_i \exp\left(-2\pi \frac{ib_i k}{N}\right) \right\} \\ &= \prod_{i=1}^m \left[1-p_i + p_i \left\{ \cos\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) + i \sin\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) \right\} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

と計算できるので⁸、FFTを使わずにすむ。

⁸ 最後の等式は $\cos x + i \sin x = \exp(ix)$ を用いた。

(11)式、(12)式によりプール全体の離散フーリエ変換が求められれば、離散逆フーリエ変換の定義式(10)式により \mathbf{X} を求めることができる。以上より、トランシェの期待損失率(TI)は、

$$TI = \sum_{k=0}^n l_k x_k = \mathbf{L}^T \mathcal{F}^{-1} \left(\prod_{i=1}^m \mathcal{F}(\mathbf{q}_i) \right) = \mathbf{L}^T \mathbf{X}, \quad (13)$$

と表すことができ、FFTを使って計算することができる。

(3) 時間微分について

前述したように、最終的にCDOを評価する際、(7)式において(13)式の時間微分を求める必要がある。もし何も工夫しないと、(13)式を数値微分しなくては行けないが、それでは離散逆フーリエ変換を2度行わないといけないため、時間が必要以上にかかる。そこで、ここでは解析的に時間微分を行い、離散逆フーリエ変換を1回ですませる手法を示す。

まず、(13)式において時間依存する変数は条件付デフォルト確率 p_i のみであることより、(13)式の時間微分は以下のように表すことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{L}^T \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{L}^T \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right). \quad (14)$$

(14)式の最後の括弧の中の微分の要素は(12)式の時間微分であり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial t} &= \frac{\partial \exp(\ln(f_k))}{\partial t} \\ &= \exp(\ln(f_k)) \frac{\partial \ln(f_k)}{\partial t} \\ &= f_k \frac{\partial \ln(f_k)}{\partial t} \\ &= f_k \sum_{i=1}^m \frac{\partial \ln(1+p_i(W^{b_i,k}-1))}{\partial t} \\ &= f_k \sum_{i=1}^m \frac{W^{b_i,k}-1}{1+p_i(W^{b_i,k}-1)} \frac{\partial p_i}{\partial t}, \end{aligned} \quad (15)$$

となる。 $\partial p_i / \partial t$ については、 $p_i(t)$ が t に関して解析的な微分が不可能であれば数値微分で $(p_i(t) - p_i(t - \Delta t)) / \Delta t$ とすればよい。また、 $(W^{b_i,k} - 1) / (1 + p_i(W^{b_i,k} - 1))$ は分子分母ともに複素数であるので、以下のように解析的に解くことができる。ここで、

$$W^{b_i,k} - 1 = \lambda_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad (16)$$

$$1 + p_i(W^{b_i k} - 1) = \lambda_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2), \quad (17)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \frac{W^{b_i k} - 1}{1 + p_i(W^{b_i k} - 1)} &= \frac{\lambda_1 e^{i\theta_1}}{\lambda_2 e^{i\theta_2}} \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)), \end{aligned} \quad (18)$$

と表すことができる。ただし、

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\left[\cos\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) - 1 \right]^2 + \sin\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right)^2}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{\left[1 + p_i \left\{ \cos\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) - 1 \right\} \right]^2 + \left[p_i \sin\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) \right]^2}, \\ \theta_1 &= \arctan\left(\frac{\sin\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right)}{\cos\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) - 1} \right) = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{b_i k}{N} \right), \\ \theta_2 &= \arctan\left(\frac{p_i \sin\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right)}{1 + p_i \left\{ \cos\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) - 1 \right\}} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

となる⁹。

4. ツリーを用いた期待損失率の求め方

本節では、まず本稿の主要論点であるツリー・メソッドによるCDOトランシェの期待損失率の計算手法を示したのち、Černý [2004] に基づいてツリーによる解法を離散フーリエ変換を用いて表現し、それと(13)式との同値性を示す。最後に、ツリー・メソッドにおける計算上の工夫について議論する。

⁹ θ_1 の2つ目の等式は $\arctan \theta = \pi/2 - \operatorname{arccot} \theta$ を使う。

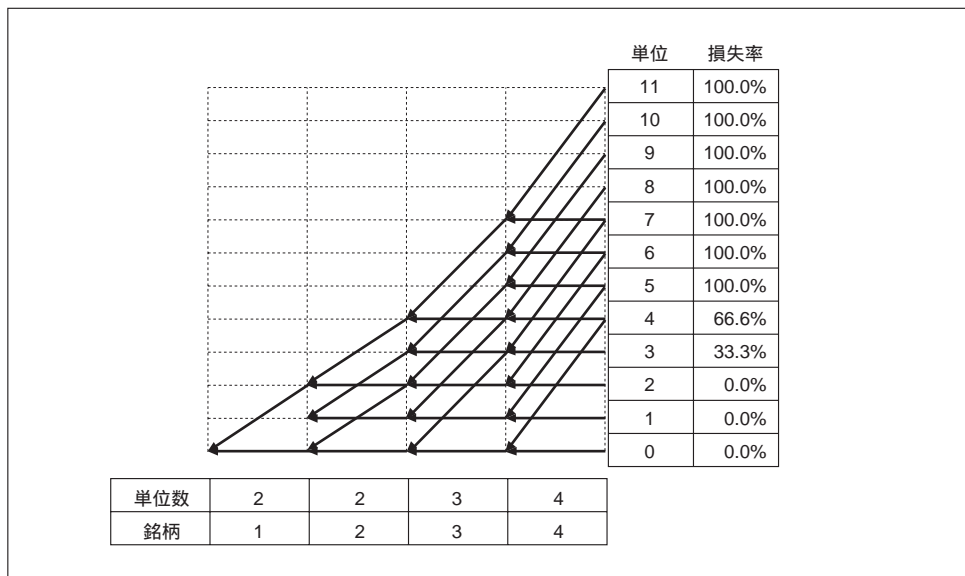
(1) ツリーによる解法

ファクター・モデルのもとでは、共通ファクターの確率変数を条件とすると、参照銘柄のデフォルト事象の独立性が成り立つことから、トランシェの条件付期待損失率はツリーを用いて以下のようにバックワード（1銘柄ごとの逐次期待損失率計算）で計算することができる。

1. ベクトル L をツリーの最後に並べる（サイズは $n+1$ 。要素は2節で定義した $l_k(k=0, 1, \dots, n)$ ）
2. サイズ $(n+1-b_m)$ のベクトル C_m を用意し、その要素を $c_m(k) = (1-p_m)l_k + p_m l_{k+b_m}$, $k=0, \dots, n-b_m$ とする。
3. $i=m-1$ から $i=0$ までバックワードにベクトル C_i を計算する。ここで、 C_i はサイズ $(n+1-\sum_{j=i}^m b_j)$ のベクトルであり、その要素を $c_i(k) = (1-p_i)c_{i+1}(k) + p_i c_{i+1}(k+b_i)$, $k=0, \dots, n-\sum_{j=i}^m b_j$ で求める。
4. 最後に求められる $c_0(0)$ がトランシェの条件付期待損失率となる。

図1は4銘柄、11単位のプールについて、アタッチメント（トランシェの下限）が2単位、デタッチメント（トランシェの上限）が5単位に設定されたトランシェの期待損失率の解法を図示したものである。矢印は上記アルゴリズムの2.や3.の和の計算を表している。ここでは、離散特性関数を用いた手法(3節)との同値性を示すためにバックワード・アルゴリズムを示したが、さらに効率的に計算できるフォワード・アルゴリズムが存在し、これは4節(5)で示す。

図1 バックワード・アルゴリズムの例



(2) 演算記号の設定

ここで、後で必要となる関数 $\text{rev}(\cdot)$ と演算記号 $*$ を設定しておく。

$\text{rev}(\cdot)$ は、 $\mathbf{g} = \{g_0, g_1, \dots, g_{N-1}\}$ として、以下のように定義される関数である。

$$\text{rev}(\mathbf{g}) = \{g_0, g_{N-1}, g_{N-2}, \dots, g_1\}.$$

また、 $*$ はコンボリュージョン(畳込み)を表す記号であり、 $\mathbf{g} = \{g_0, g_1, \dots, g_{N-1}\}$ 、 $\mathbf{h} = \{h_0, h_1, \dots, h_{N-1}\}$ とすると、 $\mathbf{g} * \mathbf{h}$ はサイズ N のベクトルで、第 $(1+j)$ 要素($j=0, \dots, N-1$)は次のように定義される。

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_{j-k} h_k. \quad (20)$$

上式では、 g の要素記号 $j-k$ が負になることがあるが、そのときは $j-k$ に N を加えて g の要素とする。

(3) 離散フーリエ変換によるツリーの表現

4節(1)で示したツリーによる解法の離散フーリエ変換による表現をČerný [2004]に沿って説明する。ちなみに、Černý [2004]は2項ツリーのバックワードによる解を離散フーリエ変換で表現したが、以下はその一般化である。

3節(2)で定義した $\mathbf{q}_i (i=1, 2, \dots, m)$ を用いて、 \mathbf{TL} を

$$\mathbf{TL} = \mathbf{L} * \text{rev}(\mathbf{q}_1) * \dots * \text{rev}(\mathbf{q}_m), \quad (21)$$

と定義すると、 \mathbf{TL} の第1要素 TL_0 が4節(1)のツリーによる解 $c_0(0)$ と一致する¹⁰。ちなみに、均等プール(全ての銘柄に対して $b_i = b_j (i \neq j)$)であれば2項ツリーを表現していることになる。

また、上記の \mathbf{g} 、 \mathbf{h} の設定を用いると以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{g} * \mathbf{h}) &= \mathcal{F}(\mathbf{g}) \mathcal{F}(\mathbf{h}), \\ \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{g} * \mathbf{h}) &= N \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{g}) \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{h}), \\ \mathcal{F}(\text{rev}(\mathbf{g})) &= N \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{g}), \\ \mathcal{F}^{-1}(\text{rev}(\mathbf{g})) &= \frac{\mathcal{F}(\mathbf{g})}{N}, \\ \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{g})) &= \mathbf{g}, \\ \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathbf{g})) &= \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (22)$$

(22)式より、(21)式は離散フーリエ変換を用いて以下のように表すことができる。

10 (21)式の導出法はČerný [2004]を参照。

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{TL}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{L}) N^m \prod_{i=1}^m \mathcal{F}^{-1}(\text{rev}(\mathbf{q}_i)), \quad (23)$$

$$\mathbf{TL} = \mathcal{F} \left(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{L}) \prod_{i=1}^m \mathcal{F}(\mathbf{q}_i) \right). \quad (24)$$

(4) 特性関数を使った解法との同値性

Černý [2004] はツリーを用いた解が(24)式により求められるTLの第1要素と一致することを示したが、(11)式、(22)式より、以下のように式を展開することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{TL} &= \mathcal{F} \left(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{L}) \mathcal{F}(\mathbf{X}) \right) \\ &= \mathcal{F} \left(N \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{L}) \mathcal{F}^{-1}(\text{rev}(\mathbf{X})) \right) \\ &= \mathcal{F} \left(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{L} * \text{rev}(\mathbf{X})) \right) \\ &= \mathbf{L} * \text{rev}(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (25)$$

このTLの第1要素 TL_0 は $\mathbf{L}^T \mathbf{X}$ と等しいので、(13)式によりTLの第1要素 TL_0 は

$$TL_0 = Tl, \quad (26)$$

が成り立つ。つまり、4節(1)のツリーを用いた手法により、特性関数を用いた期待損失率と厳密に一致する解が求められたことになる。

以上のことを一般化して定理としてまとめると、以下のようになる。

定理 (ツリー・メソッドと離散特性関数を用いた手法のデフォルト同値性)

トランシェの損失率ベクトルを \mathbf{L} 、各銘柄の条件付確率ベクトルを $\mathbf{q}_i (i=1, \dots, m)$ とする。ただし、各 \mathbf{q}_i は $N (= \sum_{j=1}^m b_j + 1)$ 次ベクトルで、第1要素から第 $1+b_i$ 要素までを $\tilde{p}_i(k) (k=1, \dots, 1+b_i)$ 、ただし、 $0 \leq \tilde{p}_i(k) \leq 1$ 、 $\sum_{k=1}^{1+b_i} \tilde{p}_i(k) = 1$ 、それ以外の要素は0とし、 \mathbf{L} も N 次ベクトルとする。このとき、ツリー・メソッドにより求められる条件付期待損失率は

$$\mathbf{L}^T \mathcal{F}^{-1} \left(\prod_{i=1}^m \mathcal{F}(\mathbf{q}_i) \right), \quad (27)$$

と同値である。

3節以降の説明は、定理において $\tilde{p}_i(k) (k=1, \dots, 1+b_i)$ を $\tilde{p}_i(1) = 1 - p_i$ (p_i は i 銘柄の条件付デフォルト確率)、 $\tilde{p}_i(1+b_i) = p_i$ 、それ以外は $\tilde{p}_i(k) = 0 (k=2, \dots, b_i)$ としたものに相当する。定理のように $\mathbf{q}_i (i=1, \dots, m)$ を一般化した設定からも(26)式を導き出すことができる¹¹。

.....
11 この定理の応用については、7節のまとめで言及する。

(5) ツリー・メソッドの工夫

4節(1)では、離散特性関数を用いた手法との同値性を表現するためにバックワードのツリー・メソッド・アルゴリズムを示したが、CDOをプライシングする場合は更なる工夫を施したフォワード・アルゴリズムを構成することができる。

工夫のための着眼点は2点あり、第1点は4節(1)の計算はフォワード・アルゴリズムでも計算でき、その結果ツリーの最後の列がプールの条件付同時デフォルト確率になる¹²という点である。もう1つの着眼点は、CDOではプール全体の損失率がデタッチメント(トランシェの上限)を超えた場合、トランシェの損失率は1となり、トランシェの損失率が1となる確率は1から「デタッチメント・ポイントより低い単位まで毀損する確率」を引けばよいという点である。

したがって、必要なツリーの高さはデタッチメント・ポイントより1単位低い単位までであり、ツリーをフォワードで計算し、最後の列の条件付同時デフォルト確率とそれに相応するトランシェの損失率を掛け合わせ、さらに1から条件付同時デフォルト率の和を引いた値を足し合わせれば、トランシェの条件付期待損失率が求められる。

上記の計算を数式で表すと以下のようなになる。 $l_k(k=0, \dots, n)$ をトランシェの損失率、 $x_k(k=0, \dots, n)$ をツリーから求められる条件付同時デフォルト確率、デタッチメントより小さい最大の(前述した最大公約数 H を単位とした)単位数を $detach-$ とすると、トランシェの条件付期待損失率 TI は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} TI &= \sum_{k=0}^{detach-} l_k x_k + \left(1 - \sum_{k=0}^{detach-} x_k\right) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{detach-} (l_k - 1) x_k \end{aligned} \quad (28)$$

また、3節(3)と同様に(7)式を利用するに当たって(28)式の時間微分を用意する必要があるが、

$$\frac{\partial TI(t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{detach-} (l_k - 1) \frac{\partial x_k}{\partial t}, \quad (29)$$

を計算すればよい。ただ、 $\partial x_k / \partial t$ は数値微分をする必要がある。

以上より、ツリーのフォワード・アルゴリズムは次のように与えられる。

1. $c_0(0)=1$ とする。
2. $i=1, \dots, m$ の順序で、サイズ $(1 + \sum_{j=1}^i b_j)$ のベクトル C_i を用意し(ただし、

12 離散逆フーリエ変換とツリー・メソッドから得られる結果が同値であることから明らか。

$1 + \sum_{j=1}^i b_j > detach-$ のときは、サイズを $(detach-)+1$ とする。各要素は $c_i(k) = p_i c_{i-1}(k - b_i) + (1 - p_i) c_{i-1}(k)$, $k=0, \dots$, (Size of C_{i-1}) と計算する。ただし、 $k - b_i < 0$ のときは第1項を0とする。逆に、 $c_{i-1}(k)$ が無い場合は第2項を0とする。

3. 最後の C_m の要素が $c_m(k) = x_k$ (条件付同時デフォルト確率) となるので、(29) 式により条件付期待損失率の時間微分が求められる。

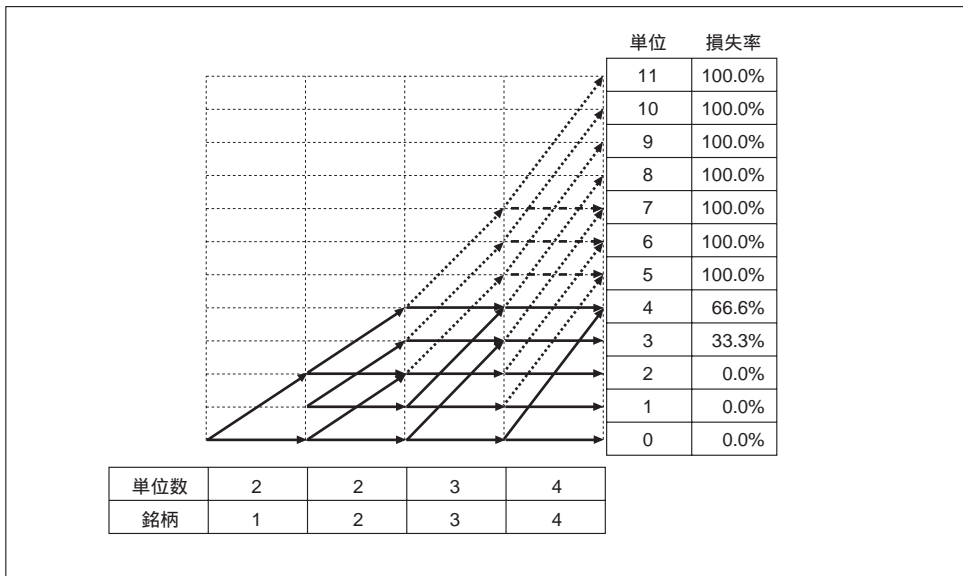
上記のアルゴリズムでは、デタッチメントを考慮しなければ、格子の総計は

$$\sum_{i=1}^m \left(1 + \sum_{j=1}^i b_j \right), \quad (30)$$

となる。この格子の総計がツリーの計算量と比例するので、これを最小化させた方が計算負荷が少なくすむ。そのためには、上記のアルゴリズムの前に、銘柄をデフォルト時エクスポージャー (b_i) の小さい順に並べておくとよい。ちなみに、上記の計算結果は並べ方に関して無差別になることが (21) 式の畳み込みの性質により保証されている。なお、Andersen, Sidenius, and Basu [2003] の“Recursive Method”は、全ての過程で $C_i (i=1, \dots, m)$ のサイズを $1 + \sum_{j=1}^i b_j$ として計算する手法を提示しているが、本稿のアルゴリズムの方がより効率的である。

図2は図1と同じCDOについてフォワード・アルゴリズムを図示したものである。実線の矢印が実際に計算が必要な和の計算を表しており、点線はAndersen, Sidenius, and Basu [2003] の“Recursive Method”においてさらに付加される和の計算を表し

図2 フォワード・アルゴリズムの例



ている¹³。図1、図2の2つの図を比べるとフォワード・アルゴリズムによる計算手法の効率性を視覚的に理解することができる。

また、同じプール内で複数のトランシェを同時にプライシングする場合¹⁴、この手法を用いることで計算が非常に効率的になる。つまり、同じプールであれば、条件付同時確率(X)は同一なので、まず計算するトランシェのうち最上位(シニア)のトランシェを計算し、そのツリーの結果(条件付同時確率)をメモリに記録しておき、他のトランシェに用いればよいのである。このようにすることで、最上位のトランシェ以外はツリーを構築することなく計算することができる。

5. 感応度の計算

4節の手法は、感応度の計算にも活用できる。CDOを評価する場合、プレミアムと同時に各参照銘柄のCDSのスプレッドの変化に対する感応度を計算することが実務上必要となる。本節ではその計算で用いる条件付期待損失率の「無条件」デフォルト確率に対する感応度の解法についてAndersen, Sidenius, and Basu [2003]に倣って説明する。

(28)式により、条件付期待損失率の各参照銘柄の無条件デフォルト確率 \hat{p}_i による微分は $i=1, \dots, m$ に対して、

$$\frac{\partial TI}{\partial \hat{p}_i} = \frac{\partial p_i}{\partial \hat{p}_i} \frac{\partial TI}{\partial p_i} = \frac{\partial p_i}{\partial \hat{p}_i} \sum_{k=0}^{detach-} (l_k - 1) \frac{\partial x_k}{\partial p_i}, \quad (31)$$

となる。

まず、(31)式の $\partial p_i / \partial \hat{p}_i$ は、(3)式により以下のように計算することができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial \hat{p}_i} &= \partial \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\hat{p}_i) - \sqrt{\rho} y}{\sqrt{1-\rho}} \right) / \partial \hat{p}_i \\ &= \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\hat{p}_i) - \sqrt{\rho} y}{\sqrt{1-\rho}} \right) \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(\hat{p}_i)) \sqrt{1-\rho}}. \end{aligned} \quad (32)$$

ただし、 $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数である。

次に、 $\partial x_k / \partial p_i$ の計算について考える。条件付同時デフォルト確率(X)は、4節(5)のフォワード・アルゴリズムを用いて求めればよいが、その解は(21)式の畳込みの性質により銘柄の並べ方に関して無差別であった。したがって、第*i*銘柄のみ対象銘柄から除いたプールの条件付デフォルト確率を $X^{(i)}$ とすると、

13 CDOトランシェのデタッチメントは低い(高くても30%)ので、本稿のフォワード・アルゴリズムは“Recursive Method”と比べ計算の相当部分を省略することができる。

14 全てのトランシェに対する資産相関(ρ)が同じであることを仮定する。

$$x_k = x_k^{(i)}(1-p_i) + x_{k-b_i}^{(i)}p_i, k=0, \dots, n, i=1, \dots, m, \quad (33)$$

が成り立つ。これにより、

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_i} = x_{k-b_i}^{(i)} - x_k^{(i)}, \text{ if } k < b_i \text{ then } x_{k-b_i}^{(i)} = 0, \quad (34)$$

が求められる。ちなみに、(33)式より、 $x_k^{(i)}$ は x_k が既知であれば求めることができる。つまり、一度トランシェの理論価格を計算した際に用いた同時デフォルト確率をメモリに記録しておけば、それを用いて $x_k^{(i)}$ を計算することができるため、感応度の計算用に新たにツリーを構築する必要はない。

6.1ファクター・モデルの計算事例

本節では、1ファクター・モデルにおけるモンテカルロ法（以下、MC法）を使った結果とツリー・メソッド、FFTを用いた手法、Andersen, Sidenius, and Basu [2003]による“Recursive Method”の比較を行う。また、5節で説明した感応度の計算速度の例を示す。

計算を行うに当たり、均等プールと不均等プールでのパフォーマンスを比較するため額面構成のみが異なる想定プールを2つ用意した。計算対象とするCDOは50銘柄のCDSを原資産とするシンセティックCDOであり、満期は5年、クーポンの支払いは年4回とし、デフォルト時に経過利子分を受け渡す契約とする。割引率は固定ショートレート関数（ $\exp(-rt)$ ）を仮定し、 $r=1.34\%$ とする。各参照銘柄のCDSも満期は5年、クーポン支払いは年4回とし、デフォルト時に経過利子分を受け渡す契約とする。全銘柄のデフォルト時回収率は40%とする。2つのプールのうち1番目（プール1）はおのおの1億円の同額面とし（したがって、デフォルト時損失額の単位数は全て1単位）、2番目（プール2）は表1に示したように、10銘柄ごと違う額面のプールとした。満期5年のCDSスプレッドは1銘柄目が2bp（1bp = 0.01%）、2銘柄

表1 プール2の額面と単位数

銘柄	額面（億円）	単位
1～10	1.0	2
11～20	1.5	3
21～30	2.0	4
31～40	2.5	5
41～50	3.0	6

目が4bp、と2bpずつ上昇し、50銘柄目が100bpとする¹⁵。全ての銘柄のデフォルト確率に対して固定ハザード・レート関数 ($1 - \exp(-ht)$) を仮定し、各 h はCDSスプレッドから逆算した。また、単一相関係数 ((1)式の ρ) は20%に設定した。ちなみに、数値積分はガウス求積法を用いており、その中で(7)式に対してはガウス=エルミート (Gauss-Hermite) 法を、(8)式に対する積分はガウス=ルジャンドル (Gauss-Legendre) 法を適用し、(7)式は10分割、(8)式は40分割¹⁶して計算した。

上記の設定のもとで、まずトランシェの計算時間を比較してみる¹⁷。計算時間は使用するPCによって異なるため、プール1のツリー・メソッドを1に基準化し、他の手法がツリー・メソッドの何倍要したかを示した。表2は左がプール1、右がプール2の結果である。どちらもアタッチメント6%、デタッチメント9%のトランシェの理論価格 (スプレッド) を計算している。「MC法」はLi [2000] の手法により100万回のシミュレーションによって計算した結果を示しており、「ツリー」は4節(5)のツリー・メソッド、「FFT」は3節のFFTを使った手法¹⁸、「Recursive」はAndersen, Sidenius, and Basu [2003] による“Recursive Method”をおのおの用いて計算した結果である。表2をみると、プール1においてもプール2においてもトランシェのスプレッドは全ての手法でほぼ同じであるが、計算時間はツリー・メソッドが他の手法に比べ明らかに速いことがわかる¹⁹。既存の研究成果である「Recursive」と比べても、プール1、プール2のどちらも約2倍の差がある²⁰。また「FFT」や「Recursive」に比べて不均等プールでも計算速度が大きく悪化しないことがうかがえる。

表2 1ファクター・モデルの計算時間：プール1のツリー・メソッドの計算時間を1に基準化 (トランシェ：6~9%)

	プール1		プール2	
	スプレッド [bp]	時間	スプレッド [bp]	時間
MC法	147.0	1,535.0	222.2	1,538.0
ツリー	146.9	1	222.2	2.0
FFT	146.9	51.1	222.2	193.2
Recursive	146.9	2.0	222.2	5.3

15 プール2の設定は、あえて数値積分の収束が悪くなるケースを想定した。CDSのスプレッドが大きい銘柄ほど額面を大きくすると、数値積分の収束が遅くなる。

16 各クーポン期間内 (今回は0.25年を想定) ごとに2分割の積分を行った。

17 プログラム言語はC++で、コンパイラーはMicrosoft Visual C++.Net 2003を用いた。使用したPCのスペックは、CPUがIntel(R) Celeron(R) 2.66GHzで、メモリは512MBである。

18 FFTには“FFTW”のライブラリを用いた。http://www.fftw.org/参照。

19 筆者のPCではプール1 (均等プール) に対するツリー・メソッドの計算時間は約0.05秒であった。

20 この比率は数の増加にともない大きくなる。

4節(5)で、同一プールの複数トランシェをプライシングするときは上位のトランシェの計算のときに使う条件付同時デフォルト確率を記録して、他のトランシェに再利用すると効率的であることを述べたが、実際の効果を表3と表4に示した。表3がプール1を、表4がプール2を計算した結果である。「メモリなし」列はメモリを用いないで計算したときの各トランシェにかかる計算時間とその合計である。「メモリあり」の「合計」の行はメモリを使った場合の計算時間である。プール1の12%をアタッチメント・ポイントとするトランシェにかかる計算時間を1として比較した²¹。メモリの活用によりプール1、プール2のどちらも約3倍弱の差が生じており、メモリを使った方が効率的であることがわかる。また、表中の「MC法」と「ツリー」の列のスプレッド格差は1bp以内である。ちなみに、「メモリなし」の列でトランシェごとの計算時間が異なるのは、フォワード・アルゴリズムを適用した場合、低いトランシェほど計算が必要な同時デフォルト確率の数が少なくなるからである。

最後に、5節で説明した感応度の計算の応用事例として、CDSスプレッド感応度の計算例を示す。具体的には、CDSスプレッドが1bp上昇したときのCDOトランシェ

表3 メモリーを使った手法の効果(プール1): 12%をアタッチメントとするトランシェにかかる計算時間を1としたときの比較

アタッチメント	デタッチメント	スプレッド [bp]		時間	
		MC法	ツリー	メモリなし	メモリあり
0%	3%	1,466.2	1,466.3	0.50	
3%	6%	423.2	423.3	0.65	
6%	9%	147.0	146.9	0.67	
9%	12%	60.4	60.0	0.67	
12%	22%	11.5	11.3	1	
合計				3.35	1.18

表4 メモリーを使った手法の効果(プール2): プール1の12%をアタッチメントとするトランシェにかかる計算時間を1としたときの比較

アタッチメント	デタッチメント	スプレッド [bp]		時間	
		MC法	ツリー	メモリなし	メモリあり
0%	3%	1,651.5	1,651.5	0.82	
3%	6%	544.9	545.2	1.16	
6%	9%	222.2	222.2	1.33	
9%	12%	97.0	96.7	1.67	
12%	22%	21.9	21.7	2.49	
合計				7.37	2.68

21 使用したPCではこの計算時間は0.09秒であった。

表5 全銘柄のCDSスプレッド感応度の計算時間：トランシェの現在価値の計算時間(これを1とする)+全50銘柄の感応度の計算時間

プール	プール1		プール2	
	0%~3%	6%~9%	0%~3%	6%~9%
トランシェ 時間	44.2	35.0	27.67	19.50

の理論価格の変化幅を求めた。5節のような解析的な手法を用いなくとも、数値差分を行うことで同様な結果が得られるが、全ての銘柄に対して計算する場合は、CDSスプレッドを変化させない場合のトランシェの価格計算に加え、銘柄数回分だけCDSスプレッドを上昇させた際のトランシェの価格計算を行う必要がある。表5はトランシェの価格の計算時間に50銘柄の感応度の計算時間を加えたものを示しており、各トランシェごと価格を1回計算する時間を1に基準化して表している。プールやトランシェによって結果はさまざまであるが、いずれも51を下回っており、数値差分より速く計算できることがわかる²²。

7. まとめ

本稿では、CDOトランシェのプライシングを高速化する手法として、ツリー・メソッドと計算アルゴリズム上の工夫を提示した。1ファクター・モデルに正規コピュラを用いた準解析的手法に、ツリー・メソッドを応用する手法を示し、その高速化の効果をCDO価格の計算速度比較によって確認した。この手法は、トランシェの真の条件付同時デフォルト確率を計算する手法であるという点で他の近似手法と比べ優れており、しかも一般的なバスケット商品の銘柄数であれば高速に計算でき、かつ理論面、実装面での平易さから実用的であるといえる。

本稿で示した手法はさまざまな応用可能性を有している。考えうる応用例として以下のような活用事例が挙げられる。

1. 近年、日本のクレジット市場にもCDOのインデックスであるトランチド・インデックス(iTraxx Japan)が普及し始めてきたが、同取引で指標となるベース・コリレーションやコンパウンド・コリレーション²³の計算には本稿で説明した1ファクター・モデルが用いられており、ツリー・メソッドを使うことで、効率的に計算することができる。
2. プライシングのみならずデフォルト率に関する感応度の計算も平易かつ高速に

22 この比率は銘柄数の増加にともなって小さくなる。

23 Willemann [2005] に、これらの指標の解法、特徴、注意点が詳しく示してある。

計算することができる。

3. 本稿では正規コピュラを用いたが、t-コピュラ (Andersen, Sidenius, and Basu [2003]) や他のコピュラについてもツリー・メソッドにより効率的な計算が可能となる。
4. 本稿では回収率を一定とする仮定を置いたが、回収率に何らかの分布を想定することもできる²⁴。ただし、ツリーでは計算負荷が増大するため、FFTを用いたプライシングの方が高速となる可能性がある。
5. 3節の離散フーリエ変換による解と4節のツリー・メソッドによる解の同値性の証明 (4節(4)) は、Černý [2004] の2項ツリーと離散特性関数の同値性の証明の一般化であり、この結果はツリーを用いた一般的なオプション・プライシングに応用可能である。例えば、今回はデフォルト事象を扱うため2項事象のみ考察したが、多項事象を扱う場合にもツリー・メソッドは応用できる²⁵。この場合、FFTを用いた離散フーリエ変換の方が速く計算できる可能性があり、どちらか計算速度が速い方を使えばよい。また、3項ツリー・モデルなど既存の多項ツリー・モデルでは各時点における項数を一定とすることが多かったが、本稿で示した定理により一定である必要性はないことが示された。したがって、これらに応用するとさまざまなモデルをツリーまたはFFTによって計算することができる。

また、本稿では、1ファクター・モデルにツリー・メソッドを適用したが、任意の相関行列に対応したマルチ・ファクター・モデルに対しても、ツリー・メソッドはプライシングを高速化させるメリットが大きい。マルチ・ファクター・モデルでの効率的な計算手法については、横谷 [2007] で検証する。

24 回収率に分布を導入する手法として、1銘柄のデフォルト時エクスポージャーを b 単位に固定せず、 $b-1$ 単位や $b-2$ 単位にもある確率で起こりうると考え、これにより回収率の不確実性を近似表現するアプローチが考えられる。ただし、計算量は増大する。

25 本稿では各銘柄に対して b_k 単位デフォルトが起こる事象とデフォルトが生じない事象の2つの事象の確率のみを考えたが、各 k 単位 ($0 \leq k \leq b_k$) すべての事象に対して確率がある多項事象の場合も成り立つことは定理1に示したとおりである。その一例が4.に示した回収率が不確定な場合への応用である。

参考文献

- 安藤美孝、「与信ポートフォリオの信用リスクの解析的な評価方法：極限損失分布およびグラニュラリティ調整を軸に」、『金融研究』第24巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2005年、39～120頁
- 小宮清孝、「CDOのプライシング・モデルとそれを用いたCDOの特性等の考察：CDOの商品性、国内市場の概説とともに」、『金融研究』第22巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2003年、89～130頁
- 湯前祥二・鈴木輝好、『モンテカルロ法の金融工学への適用』、朝倉書店、2000年
- 横谷進弥、「CDOプライシングの離散高速アプローチ(2)：ツリーを用いた準解析的プライシングのマルチ・ファクター・モデルへの適用」、『金融研究』第26巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2007年、45～78頁(本号所収)
- Andersen, L., J. Sidenius, and S. Basu, “All your hedges in one basket,” *Risk*, 16 (11), 2003, pp. 67-72.
- Černý, A., “Introduction to Fast Fourier Transform in Finance,” *Journal of Derivatives*, 12 (1), 2004, pp. 73-88.
- Chen, Z., and P. Glasserman, “Fast Pricing of Basket Default Swaps,” Working paper, 2006. (<http://www2.gsb.columbia.edu/faculty/pglasserman/Other/FPBDS.pdf>)
- Glasserman, P., and J. Li, “Importance sampling for portfolio credit risk,” *Management Science*, 51 (11), 2005, pp. 1643-1656.
- Laurent, J. P., and J. Gregory, “Basket default swaps, CDOs and factor copulas,” *Journal of Risk*, 7 (4), 2005, pp. 103-122.
- Li, D. X., “On default correlation: a copula function approach,” *Journal of Fixed Income*, 9 (4), 2000, pp. 43-54.
- Richard, M., and R. Ordovas, “An indirect view from the saddle,” *Risk*, 19 (10), 2006, pp. 94-99.
- Schönbucher, P. J., *Credit derivatives pricing models: models, pricing and implementation*, Wiley, 2003.
- Willemann, S., “An Evaluation of the Base Correlation Framework for Synthetic CDOs,” *Journal of Credit risk*, 1 (4), 2005, pp. 180-190.

