

与信ポートフォリオの 信用リスクの解析的な評価方法： 極限損失分布および グラニュラリティ調整を軸に

あんどうよしたか
安藤美孝

要 旨

与信ポートフォリオの信用リスクの計量は、計算負荷の高いモンテカルロ・シミュレーションに頼ることが一般的であるが、近年、その近似的な解析表現を得る方法が幾つか提案されている。特に、極限損失分布およびグラニュラリティ調整を用いる方法は、幅広い水準のパラメータで精度の高い近似を与える有力な方法である。本稿では、多くの信用リスク計量モデルを含む一般的なモデルの枠組みで、同手法を用いた信用リスクの解析的な計算手法を解説する。また、実務での利用を前提に、1ファクターのマートン型モデルの枠組みでの信用リスクの具体的な近似解析表現を導出し、近似精度を数値検証する。さらに、マルチ・ファクター・モデルの枠組みでの信用リスクの評価、証券化商品の経済的資本の解析表現も解説する。

キーワード：信用リスク、与信ポートフォリオ、極限損失分布、グラニュラリティ調整、マートン型モデル、証券化商品

.....
本稿の作成に当たっては、小暮厚之教授（慶應義塾大学）ならびに日本銀行金融機構局スタッフから多数の有益なコメントを頂戴した。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。また、あり得べき誤りはすべて筆者個人に属する。

安藤美孝 日本銀行金融研究所
（現 三井住友銀行 E-mail：Ando_Yoshitaka@rk.smbc.co.jp）

1 . はじめに

与信ポートフォリオの信用リスク（あるいは、それをカバーするための経済的資本）は、バリュー・アット・リスク（VaR）の枠組みにより、損失分布の分位点として求められることが一般的である¹。損失分布の決定にはさまざまなモデルが用いられるが、実務では、単純かつ拡張が容易であるマートン型モデル²が利用されることが多い。マートン型モデルでは、損失分布の分位点の推定には、従来、モンテカルロ・シミュレーションを用いることが一般的であった。しかし、近年、分位点の近似的な解析表現を与える手法が幾つか提案されている³。提案された手法の中でも、極限損失分布およびグラニュラリティ調整を用いる手法は、簡便で、幅広い水準のパラメータで精度の高い近似解を与えるとして、数多くの関連研究がなされている。

極限損失分布は、Vasicek [1991] が、1ファクターのマートン型モデルの枠組みで、均一ポートフォリオの損失分布の近似として導出したものである。極限損失分布の考え方は、債務者数が多く、ポートフォリオが十分に分散化されている場合には、各債務者に個別の要因は打ち消し合い、全債務者に共通なファクターのみで、損失分布が表現されることに基づいている。Gordy [2003] は、これを拡張し、多くの信用リスク計量モデルを含む一般的なモデルの枠組みで、極限損失分布を適用するために各債務者のエクスポージャーが満たすべき条件を特定し、モデルの適用範囲を不均一ポートフォリオに広げた。また、Vasicek [2002] は、1ファクターのマートン型モデルの枠組みでの各債務者のエクスポージャーが満たすべき条件を示し、極限損失分布の具体的な表現を導いた。さらに、Pykhtin and Dev [2002a]、Pykhtin [2003]、Tasche [2004] は、デフォルト率とデフォルト時の損失率（LGD）が相関を持つモデルで極限損失分布の具体的な表現を導出している。

極限損失分布による近似では、債務者数が少ない場合や、特定の債務者に与信が集中している場合には、真の損失分布から大きく乖離する可能性がある。この両者の差異を評価するために、Gordy [2003] はグラニュラリティ調整の手法を提案し⁴、Wilde [2001]、Martin and Wilde [2002] がその数学的定式化を行った。マートン型モデルの枠組みでの具体的なグラニュラリティ調整の表現は、1ファクター・

1 損失分布の分位点（99.9%点等）から期待損失を控除した、非期待損失部分を信用リスクと呼び、これを経済的資本でカバーすると考えるのが一般的であるが、本稿では簡単化のため、信用リスクおよび（必要な）経済的資本を、期待損失控除前の損失分布の分位点で定義する。

2 各債務者の資産を表象する変数がある閾値を下回ったときに、債務者がデフォルトすると考えるモデルで、全債務者に共通なファクターを通じて債務者間の依存性を表現する。共通なファクターの数が単一（複数）のとき1（マルチ）ファクター・モデルと呼ぶ。

3 本稿で説明する極限損失分布およびグラニュラリティ調整を利用する手法以外の近似手法としては、按点法による近似（Martin, Thompson and Browne [2001]）や、大偏差原理を利用した近似（Dembo, Deuschel and Duffie [2004]）等がある。

4 Gordy [2003] については、その前身となるワーキング・ペーパーは2001年に発表された。

モデルで、Wilde [2001]、Pykhtin and Dev [2002a]、Emmer and Tasche [2003] が示した。また、Pykhtin [2004] は、マルチ・ファクター・モデルで、極限損失分布およびグラニュラリティ調整を適用する方法を提案した。

極限損失分布とグラニュラリティ調整の手法は、このほかにも、さまざまなケースで利用されている。例えば、Canabarro, Picoult and Wilde [2003] は、カウンターパーティー・リスクの評価にグラニュラリティ調整の手法を応用している。また、Pykhtin and Dev [2002b]、Pykhtin and Dev [2003]、Gordy and Jones [2002] は、極限損失分布を利用して、証券化商品の経済的資本の解析表現を導いた。このほか、Gordy [2003, 2004a] は、リスク指標の1つである期待ショートフォールの近似解析表現を、1ファクター・モデルの枠組みで導出した。また、Pykhtin [2004] は、同近似解析表現をマルチ・ファクター・モデルの枠組みで導出した。

極限損失分布およびグラニュラリティ調整の手法は、与信ポートフォリオの信用リスクの計量で比較的精度の高い近似解析表現を与えるという点でリスク管理実務上の有用性は高い。また、新バーゼル合意最終案（Basel Committee on Banking Supervision [2004]、以下バーゼル）では、内部格付手法のリスク・ウエイト関数が、Gordy [2003a] の極限損失分布の考え方を援用しているほか、証券化商品の取扱いにおける内部格付手法の指定関数方式（supervisory formula）は、Gordy and Jones [2002] による証券化商品の経済的資本の解析表現を利用している。こうした観点からも、極限損失分布およびグラニュラリティ調整の手法への理解を深めることは有益である。しかし、これらの手法については、複数の関連論文を集めた論文集（Gordy [2003b]）はあるが、理論的なバックグラウンド等を網羅的・統一的に整理した文献は見当たらない。そこで、本稿では、極限損失分布およびグラニュラリティ調整の基本的な考え方の解説から始め、実務での利用を前提に、数値例を交えて各種モデルによる信用リスクの解析表現の解説を行う。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2、3節は基礎編である。2節では、極限損失分布およびグラニュラリティ調整の基本的な考え方を解説し、一般的なモデルの枠組みでの信用リスクの解析表現の導出を行う。3節では、1ファクターのマートン型モデルの枠組みで、デフォルト率とLGDが独立である場合と、相関を持つ場合に分けて、極限損失およびグラニュラリティ調整の具体的な表現を導出し、複数のポートフォリオ例を用いた近似精度の検証を行う。以上が基礎編であるが、続く4、5節は応用編である。4節では、マルチ・ファクターのマートン型モデルの枠組みでの信用リスクの解析表現、5節では、証券化商品の経済的資本の解析表現を説明する。最後に6節で、本稿のまとめを述べる。なお、必要な数式展開の詳細を補論にまとめた。

2. 基礎編：極限損失分布とグラニュラリティ調整

極限損失分布およびグラニュラリティ調整は、与信ポートフォリオに対する信用リスクの近似解析表現を与える非常に便利な手法である。本節では、極限損失分布およびグラニュラリティ調整の考え方を解説し、一般的な信用リスク計量モデルの枠組みで解析表現を導出する。

(1) モデルの設定

最初に、極限損失分布およびグラニュラリティ調整を導出する前提となる、与信ポートフォリオの設定および損失分布のモデル化を行う。

まず、与信ポートフォリオに含まれる債務者数を M とし、各債務者に元本 A_i （定数）⁵の貸出を行っているものとする。与信ポートフォリオの損失は、一定期間内（例えば1年）に債務者がデフォルトした場合にのみ発生すると考え（デフォルト・モード方式）、信用度の変動による時価の変動は考えない⁶。

ここで、全債務者のデフォルトに影響を与える共通の確率変数 X を考える。 X はシステムティック・リスク・ファクターと呼ばれる変数で、景気変動や業態別の動向を表す何らかの経済指標であってもよいし、主成分分析等により決定される変数であっても構わない。また、 X は単変量である必要はなく、多変量であってもよい。このとき、債務者間のデフォルト事象の相関（デフォルト相関）は、全て X への依存性から生じ、 X を所与とすると、各債務者のデフォルトは互いに独立であると仮定する。

次に、ポートフォリオ全体の損失率 L を考える。なお、本稿では、議論の見通しをよくするため、損失額ではなく損失率を用いて解説を進める。まずは、債務者 i の損失率を表す確率変数 L_i （ $\in [0, 1]$ ）を、その債務者のデフォルト時の損失率LGD（loss given default）を用いて、次式で定義する。

$$L_i = \begin{cases} \text{債権者 } i \text{ の LGD (デフォルト時),} \\ 0 & \text{(上記以外).} \end{cases} \quad (1)$$

LGDは X に依存しても構わないが、 X を所与とすると L_i は互いに独立であると仮定する。デフォルト事象およびLGDは、それぞれ別の変数としてモデル化されることが多いが、ここでは、 L_i にデフォルトの有無およびLGDの情報の双方が含まれる。ポートフォリオ全体の損失率 L は、次式で与えられる。

5 債務者の信用状態を所与とすると、 A_i をモデルに含まれるほかの変数とは独立な確率変数としても、分散が有限であれば以下の議論は同様に成立する。このとき A_i にはデフォルト時の期待エクスポージャーを用いる。

6 信用度の変動による時価変動を勘案することも可能であるが、本稿では省略する。興味のある読者はGordy [2003]を参照。

$$L = \frac{\sum_{i=1}^M L_i A_i}{\sum_{i=1}^M A_i} . \quad (2)$$

以上で、損失分布のモデル化が完了した⁷。

(2) 極限損失分布

極限損失分布の考え方は、債務者数が多く、各債務者へのエクスポージャーが十分に分散化されている場合には、各債務者の個別の要因が打ち消し合うため、損失分布は、全債務者に共通の要因であるシステムティック・リスク・ファクターのみによって表現されるという事実に基づいている。Gordy [2003] は、本節(1)のモデルの枠組みで、極限損失分布を適用するために各債務者のエクスポージャーが満たすべき条件、さらに極限損失分布の分位点を解析的に得るためにモデルが満たすべき条件を与え、十分に分散化されているポートフォリオの信用リスクを導出した。以下、Gordy [2003] に基づいて、極限損失分布を用いた、十分に分散化されているポートフォリオの信用リスクの導出方法を解説する⁸。

まず、債務者数が無限大となる極限 ($M \rightarrow \infty$) を考える。ただし、各債務者へのエクスポージャーが、以下の仮定1を満たしているとする。

仮定1 (エクスポージャーに関する仮定)

$$(a) \sum_{i=1}^M A_i \rightarrow \infty,$$

$$(b) A_M / \sum_{i=1}^M A_i = O(M^{-(1/2+\zeta)}) \text{ を満たす } \zeta > 0 \text{ が存在する。}$$

仮定1は、ポートフォリオが十分に分散化されており、どの債務者のエクスポージャーも、ポートフォリオ全体に比べると無視し得るほど小さいということを意味している。例えば、各債務者に対するエクスポージャーが均一である場合には、仮定1が満たされる。仮定1を満たすポートフォリオを、「無限に細分化された (infinitely fine-grained) ポートフォリオ」と呼ぶことにする。このとき、以下の定理1が成立する。

7 ここで導入したモデルの枠組みは非常に一般的なものであり、信用リスク計量モデルであるリスク・メトリクス・グループ社のCreditMetrics (Gupton, Finger and Bhatia [1997]) やクレディスイス・ファイナンシャル・プロダクト社のCreditRisk+(Credit Suisse Financial Products [1997]) 等のモデルも、このモデルの枠組みに含まれる。

8 家田・丸茂 [2002] は、Gordy [2003] のドラフト版 (2001年のワーキング・ペーパー) の解説を行っている。

定理1 (極限損失分布)

無限に細分化されたポートフォリオの損失率分布は、極限損失分布 (limiting loss distribution) と呼ばれ、 X を所与とするときの条件付期待損失率 $E [L|X]$ で与えられる。すなわち、 $X = x$ のとき、以下が成立する。

$$L - E [L|x] \rightarrow 0(a.s.) . \quad (3)$$

定理1は、無限に細分化されたポートフォリオでは、債務者固有の要因は完全に消滅し、全債務者共通の要因である X の値のみによって損失が決定されることを示している。

例として、各債務者のエクスポージャーが均一である場合は、 $L_i \in [0, 1]$ より L_i の分散は有限であるので、大数の強法則から、 $X = x$ のとき、次式が得られる⁹。

$$\lim_{M \rightarrow \infty} L - E[L|x] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (L_i - E[L_i|x]) \rightarrow 0(a.s.) . \quad (4)$$

現実のポートフォリオに含まれる債務者数は有限であり、仮定1や定理1は厳密には成立しない。しかし、債務者数が多く、エクスポージャーが十分に分散化されているポートフォリオでは、損失率 L の分布を $E[L|X]$ で近似することが可能であろう。本稿では、定理1が近似的に成立するとみなせるポートフォリオを「十分に細分化されたポートフォリオ」と呼ぶことにする。

次に、与信ポートフォリオの信用リスクを計算するために、損失率分布の分位点を求める。損失率 L の α 分位点 $q_\alpha(L)$ (すなわち、VaR) は、

$$q_\alpha(L) \equiv \inf \{y | \Pr(L \leq y) \geq \alpha\} , \quad (5)$$

で定義される。このとき、定理1から、無限に (もしくは十分に) 細分化されたポートフォリオでは、次式が成立する¹⁰。

$$q_\alpha(L) - q_\alpha(E[L|X]) \rightarrow 0 . \quad (6)$$

つまり、損失分布 L の α 分位点は、極限損失分布 $E[L|X]$ の α 分位点により求めることができる。一般的に、 L の α 分位点の計算よりも、 $E[L|X]$ の α 分位点の計算の

9 仮定1を満たすポートフォリオについての定理1の証明は、補論1を参照。

10 厳密には、極限損失分布 $E[L|X]$ が $q_\alpha(E[L|X])$ で不連続となる場合には成立しない。詳細は、Gordy [2003] を参照。

方が容易である。さらに、以下の仮定2および仮定3が成立する場合には、 $E[L|X]$ の α 分位点をより簡単に求めることができる。

仮定2 (1ファクター・モデルの仮定)

システマティック・リスク・ファクター X は単変量である。

仮定3 (条件付期待損失の単調性の仮定)

全ての債務者 i について、システマティック・リスク・ファクター X の条件付期待損失率 $E[L_i|X]$ は、 X の単調減少関数である。ただし、 $E[L_i|X]$ は連続かつ微分可能であるとする¹¹。

仮定2、3の下で、次の定理2が成立する。

定理2 (極限損失分布の分位点)

極限損失分布 $E[L|X]$ の α 分位点 $q_\alpha(E[L|X])$ は、 X の $1-\alpha$ 分位点 $x_{1-\alpha}$ を所与とするときの条件付期待損失率により、次式で計算される¹²。

$$q_\alpha(E[L|X]) = E[L|x_{1-\alpha}] = \frac{\sum_{i=1}^M E[L_i|x_{1-\alpha}]A_i}{\sum_{i=1}^M A_i} \quad (7)$$

仮定2は、 $x_{1-\alpha}$ が一点に定まることを保証し、仮定3は、 $E[L|X]$ の α 分位点を、 $x_{1-\alpha}$ と対応付けるための仮定である。(7)式から、債務者 i の単位エクスポージャー当たりの信用リスクを $E[L_i|x_{1-\alpha}]$ とすれば、これに債務者 i がポートフォリオ全体に占める割合 $A_i / \sum_{i=1}^M A_i$ を乗じて足し合わせることにより、ポートフォリオ全体の信用リスク $E[L|x_{1-\alpha}]$ が得られることがわかる。このとき、債務者 i の単位エクスポージャー当たりの信用リスク $E[L_i|x_{1-\alpha}]$ は、債務者 i の性質のみに依存し、ポートフォリオの構成には依存しない。この性質は、信用リスクのポートフォリオ不変性 (portfolio-invariance) と呼ばれ、バーゼル の内部格付手法において、各資産のリスク・ウェイトが、ポートフォリオの構成によらず、資産の性質のみにより決定されることの根拠となっている。もっとも、ポートフォリオ不変性は、ポートフォリオが十分に細分化されていること (仮定1)、損失分布が単一のリスク・ファク

11 仮定3では、わかりやすさを優先したため Gordy [2003] より強い仮定である。なお、Gordy [2003] は、分位点近傍で $E[L|X]$ の単調非減少性を仮定しているが、分位点を定めるためには $E[L|X]$ の X に対する単調性が重要であり、単調減少関数であるか単調増加関数であるかは問題ではない。

12 仮定3で単調増加性を仮定すると、極限損失分布 $E[L|X]$ の α 分位点は、 X の α 分位点 x_α を所与とするときの条件付期待損失率で与えられる。

ターに依存すること（仮定2）の2つの仮定に強く依存していることに留意しなければならない。ポートフォリオが十分に細分化されていない場合には、債務者個別の要因による影響を受け、各債務者の信用リスクは、ポートフォリオの構成に依存する。

(3) グラニュラリティ調整

本節(2)では、債務者数が多く、ポートフォリオが十分に細分化されている場合には、極限損失分布 $E[L|X]$ により損失率 L の分布が近似されることを説明した。しかし、ポートフォリオに含まれる債務者数が少ない場合や、特定の債務者に与信が集中している場合には、債務者個別の要因によるリスクが無視し得ず、真の損失分布と極限損失分布の乖離が大きくなる可能性がある。そこで、損失分布の分位点を求める際に、債務者固有の要因を勘案し、両者の差異を調整するために用いられるのが、グラニュラリティ調整である。グラニュラリティ調整は、Gordy [2003] が提案したものであり、Wilde [2001] で数学的な定式化が行われた。また、Martin and Wilde [2002] は、Gouriéroux, Laurent and Scaillet [2000] によるVaRの微分を利用し、より簡単にグラニュラリティ調整が得られることを示した。グラニュラリティ調整は、 $q_\alpha(E[L|X])$ まわりでの $q_\alpha(L)$ のテーラー展開の2次項で与えられる。ここでは、Martin and Wilde [2002]、Canabarro, Picoult and Wilde [2003] に基づいてグラニュラリティ調整の導出を解説する。

モデルの設定は本節(1)と同じとし、さらに仮定2、3が成立しているとする。ポートフォリオの損失率 L を、 $L = E[L|X] + U$ と分解すると、 $E[L|X]$ は L のシステムティックな要素で、 U は債務者個別のリスクによるアンシステムティックな要素を表していると考えることができる。ここで、新たな確率変数 $L_\epsilon = E[L|X] + \epsilon U$ を導入する。 $q_\alpha(L_\epsilon)$ を $q_\alpha(E[L|X])$ まわりの ϵ のべき乗展開により表現すると、

$$q_\alpha(L_\epsilon) = q_\alpha(E[L|X]) + \epsilon \left. \frac{dq_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \frac{\epsilon^2}{2} \left. \frac{d^2q_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} + \dots, \quad (8)$$

となる。ここで、 L は L_ϵ で $\epsilon = 1$ の場合に対応することから、3次以上の項を無視すると¹³、

$$q_\alpha(L) \approx q_\alpha(E[L|X]) + \left. \frac{dq_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2q_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0}, \quad (9)$$

という近似式が得られる。このとき、グラニュラリティ調整項は、真の損失分布の分位点 $q_\alpha(L)$ と極限損失分布の分位点 $q_\alpha(E[L|X])$ の差として、

13 後述の脚注15にあるように、現実的なポートフォリオを想定すれば、高次の微分項は小さくなるため、2次項までの近似が可能である。なお、関数空間における微分演算については、例えばLuenberger [1969] を参照。

$$\Delta q_\alpha(L) = \left. \frac{dq_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2q_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0}, \quad (10)$$

で与えられる。ここで、VaRの1次微分は、補論2の(A-7)式より、

$$\begin{aligned} \left. \frac{dq_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= E[U|E[L|X] = q_\alpha(E[L|X])] \\ &= E[L - E[L|X]|X = x_{1-\alpha}] = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

となる。なお、(11)式2行目への式変形では、定理2を利用した。また、VaRの2次微分は、補論2の(A-8)式より、

$$\left. \frac{d^2q_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = - \frac{1}{f_L(l)} \left. \frac{d}{dl} [\text{var}(U|E[L|X] = l) f_L(l)] \right|_{l=q_\alpha(E[L|X])}, \quad (12)$$

で与えられる。ここで、 $f_L(l)$ は $E[L|X]$ の密度関数で、 $\text{var}[U|E[L|X] = l]$ は $E[L|X] = l$ のときの U の条件付分散である。 $l(x) \equiv E[L|X = x]$ とおき、 X の密度関数を $f_X(x)$ とする。このとき、 $l(x)$ は x の減少関数であるから、 $l = l(x)$ に対して、 $f_L(l) dl = -f_X(x) dx$ が成立する。また、 $L = E[L|X] + U$ であるから、 $\text{var}(U|E[L|X] = l) = \text{var}(L|E[L|X] = l)$ が成立し、(12)式は、

$$\left. \frac{d^2q_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = - \frac{1}{f_X(x)} \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{var}[L|X = x] f_X(x)}{l'(x)} \right) \right|_{x=x_{1-\alpha}}, \quad (13)$$

と書き換えられる。ただし、 $l'(x)$ は $l(x)$ の1次微分である。(11) (13)式の結果を、(10)式に代入すると、以下の定理3が得られる。

定理3 (グラニュラリティ調整)

真の損失分布の α 分位点と極限損失分布の α 分位点との差 $\Delta q_\alpha(L) (= q_\alpha(L) - q_\alpha(E[L|X]))$ は、グラニュラリティ調整項と呼ばれ、

$$\Delta q_\alpha(L) = - \frac{1}{2f_X(x)} \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{var}[L|X = x] f_X(x)}{l'(x)} \right) \right|_{x=x_{1-\alpha}}, \quad (14)$$

で与えられる¹⁴。

極限損失分布の分位点 $q_\alpha(E[L|X])$ に、グラニュラリティ調整項 $\Delta q_\alpha(L)$ を加えることで、債務者個別の要因によるリスクを勘案することができ、分位点のよりよい推定値が解析的に得られる。ただし、グラニュラリティ調整は、 $q_\alpha(E[L|X])$ ま

14 (14)式から明らかなように、条件付期待値 $l(x) = E[L|X = x]$ は2次微分可能、条件付分散 $\text{var}[L|X = x]$ は1次微分可能でなければならない。

わりでの $q_\alpha(L)$ の2次までのテーラー展開に過ぎず¹⁵、債務者の数が極端に少ない場合や、特定の債務者に極端にエクスポージャーが集中している場合には、やはり真の分布との乖離が大きくなり、よい推定値が得られない可能性があることになる。

3．基礎編：1ファクター・マートン型モデル

マートン型の信用リスク計量モデルは、実務で広く利用されている。本節では、1ファクターのマートン型モデルの枠組みで、デフォルト率とLGDが独立である場合と、デフォルト率とLGDの相関を考慮する場合に分けて、極限損失分布およびグラニュラリティ調整による、損失分布の分位点の近似解析表現を導出する。また、均一ポートフォリオ（全債務者のエクスポージャー、デフォルト率、相関、デフォルト時の損失率が等しいポートフォリオ）を対象に、損失分布の分位点の厳密な解析解を示す。さらに、仮想的なポートフォリオを用いて、極限損失分布およびグラニュラリティ調整による近似解析表現の精度を検証し、最後に数値検証の結果を踏まえたまとめを述べる。

(1) デフォルト率とLGDが独立である場合

極限損失分布およびグラニュラリティ調整を利用した1ファクターのマートン型モデルの枠組みでの分位点の解析表現は、Wilde [2001]、Pykhtin and Dev [2002a] が、均一ポートフォリオを対象にデフォルト率とLGDが独立である場合に、Emmer and Tasche [2003] が、不均一ポートフォリオを対象にLGDが1（回収率が0）の場合に、それぞれ導出している。ここでは、不均一ポートフォリオを対象に、デフォルト事象とLGDが独立である場合に、1ファクターのマートン型モデルの枠組みで、与信ポートフォリオの損失をモデル化し、極限損失分布およびグラニュラリティ調整を用いて、分位点の解析表現を導出する。

イ．モデルの設定

ポートフォリオに含まれる債務者数を M とし、各債務者 i に元本 A_i の貸出を行っているとする。このとき、各債務者のポートフォリオ全体に占める割合は $w_i = A_i / \sum_{j=1}^M A_j$ で定義される。債務者 i のデフォルトは、マートン型モデルの枠組みに従い、

15 Canabarro, Picoult and Wilde [2003] によれば、テーラー展開における高次の微分項は、 X を所与とするときの L の高次モーメントおよび $\text{var}[L|X]$ のべき乗に依存しており、 $\text{var}[L|X]$ が小さく、これらが無視できる場合には、2次項までの展開により効率的な計算が可能であるとしている。実際、後述するように、仮想ポートフォリオを用いた数値分析では、2次項までの近似の精度は良好であることが確かめられる。また、Wilde [2001] は、基のポートフォリオに含まれる各与信を n 等分して、 $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることで、グラニュラリティ調整項を導出し、グラニュラリティ調整項がオーダー $1/n$ の項とみなせること、つまり、債務者数が増加すると高次の項は無視し得ることを示した。

ある一定期間内（例えば1年）に、資産を表す標準正規分布に従う確率変数 Y_i が、ある閾値を下回った場合に生じると考える。 Y_i は、債務者 i の資産収益率を標準化したものと考えられ、債務者 i のデフォルト率を p_i とすれば、 $N^{-1}(\cdot)$ を標準正規分布の分布関数 $N(\cdot)$ の逆関数として、閾値は $N^{-1}(p_i)$ で与えられる。ここでは、債務者 i の資産収益率 Y_i は、全債務者に共通である単一のシステムティック・リスク・ファクター X を用いて、

$$Y_i = \sqrt{\rho_i}X + \sqrt{1-\rho_i}\xi_i, \quad (15)$$

と表現されるとする。ただし、 X および ξ_i は互いに独立に標準正規分布に従う確率変数である。システムティック・リスク・ファクター X は全債務者の資産収益率に影響を与える要因であるから、国際的に業務を展開する金融機関のポートフォリオでは、世界経済の景気変動を反映するような変数と考えられるし、ある特定の業種のみで構成されたポートフォリオでは、業種別の株価指数を反映するような変数になると予想される。一方、 ξ_i は X では説明することができない債務者個別の要因を表している。また、 $\sqrt{\rho_i}$ は債務者 i の X への依存度を表す係数で、ファクター・ローディングと呼ばれ、債務者 i と j の資産収益率の相関（資産相関）は $\sqrt{\rho_i\rho_j}$ で与えられる。ここで、 X は景気変動を反映し、景気上昇（下降）に伴って増加（減少）する変数であるとする。このとき、景気上昇により X が大きくなるに従い、債務者の資産収益率 Y_i は増加し、デフォルト率が小さくなる。すなわち、 X の値によりデフォルト率は変動し、 $X=x$ のときの条件付デフォルト率 $p_i(x)$ は、

$$\begin{aligned} p_i(x) &= \Pr[Y_i < N^{-1}(p_i) / X = x] \\ &= \Pr[\sqrt{\rho_i}X + \sqrt{1-\rho_i}\xi_i < N^{-1}(p_i) / X = x] \\ &= \Pr\left[\xi_i < \frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho_i}x}{\sqrt{1-\rho_i}}\right] \\ &= N\left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho_i}x}{\sqrt{1-\rho_i}}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられる。

以上で、債務者のデフォルトのモデル化が完了したので、次にLGDのモデルを定める。ここでは、債務者 i のLGDは確率変数 Q_i ($\in [0, 1]$)により決定され、 Q_i はモデルに含まれる他の確率変数とは独立に、平均 μ_i 、標準偏差 σ_i の分布に従うとする¹⁶。また、債務者 i がデフォルトしたときに1、それ以外では0になる変数 D_i を定義する。

16 Q_i について特定の分布形は仮定しない。

すなわち、 A が真のとき1、偽のとき0をとる定義関数 1_A を用いれば、

$$D_i \equiv 1_{\{Y_i < N^{-1}(p_i)\}}, \quad (17)$$

となる。このとき、債務者 i の損失率 L_i は、

$$L_i = D_i Q_i, \quad (18)$$

で与えられ、ポートフォリオ全体の損失率 L は、次式で表現される。

$$L = \sum_{i=1}^M w_i L_i = \sum_{i=1}^M w_i D_i Q_i. \quad (19)$$

□ . 分位点 (VaR) の解析表現

まず、 $X = x$ が所与のときのデフォルト事象を表す変数 $D_i(x)$ を定義する。 $D_i(x)$ は、定義関数を用いて、

$$D_i(x) \equiv 1_{\{Y_i < N^{-1}(p_i) | X=x\}} = 1_{\{\xi_i < (N^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho_i}x) / \sqrt{1-\rho_i}\}}, \quad (20)$$

で定義され、期待値は $E[D_i(x)] = p_i(x)$ で与えられる。

さて、定理1より、十分に細分化されたポートフォリオの損失分布は、 X を所与とするときの条件付期待損失である極限損失分布 $E[L|X]$ により近似することができる。極限損失分布 L^∞ は、(19)式より、

$$\begin{aligned} L^\infty &= E[L|X] = \sum_{i=1}^M w_i E[L_i|X] = \sum_{i=1}^M w_i E[D_i Q_i|X] \\ &= \sum_{i=1}^M w_i E[Q_i] E[D_i(X)] = \sum_{i=1}^M w_i \mu_i p_i(X), \end{aligned} \quad (21)$$

で与えられる¹⁷。ここで、十分に細分化されたポートフォリオでは、損失率の α 分位点 $q_\alpha(L)$ は、極限損失分布の α 分位点 $q_\alpha(L^\infty)$ で近似される。極限損失分布の α 分位点は、定理2により、 $X = x_{1-\alpha} (= N^{-1}(1-\alpha))$ のときの条件付期待損失で与えられるので、損失率の α 分位点 $q_\alpha(L)$ は、

$$q_\alpha(L) \approx q_\alpha(L^\infty) = E[L|X = N^{-1}(1-\alpha)] = \sum_{i=1}^M w_i \mu_i p_i(N^{-1}(1-\alpha)), \quad (22)$$

で近似される。

17 このとき、仮定1に代わり $\sum_{i=1}^M w_i^2 \rightarrow 0$ を満たせば、定理1が成立して $L \rightarrow L^\infty$ となる (Vasicek [2002])。

一方、ポートフォリオが十分に細分化されていない場合には、 $q_\alpha(L)$ と $q_\alpha(L^\infty)$ の乖離を調整するために、グラニュラリティ調整が用いられる。 X は標準正規分布に従うので、定理3の(14)式より $\Delta q_\alpha(L)$ は、

$$\Delta q_\alpha(L) = -\frac{1}{2n(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{var}[L|X=x]n(x)}{l'(x)} \right) \Bigg|_{x=N^{-1}(1-\alpha)}, \quad (23)$$

となる。ここで、 $n(x)$ は標準正規分布の確率密度関数、 $l'(x)$ は $X=x$ のときの条件付期待損失 $l(x) = \sum_{i=1}^M w_i \mu_i p_i(x)$ の1次微分である。 $n'(x) = -xn(x)$ に注意し、(23)式の微分を計算すると、 $v(x) \equiv \text{var}[L|X=x]$ と置いて、

$$\Delta q_\alpha(L) = -\frac{1}{2l'(x)} \left(v'(x) - v(x) \left(\frac{l''(x)}{l'(x)} + x \right) \right) \Bigg|_{x=N^{-1}(1-\alpha)}, \quad (24)$$

と変形することができる。ここで、(24)式の計算には、 $l'(x)$ 、 $l''(x)$ 、 $v(x)$ 、 $v'(x)$ が必要である。まず、 $l'(x)$ および $l''(x)$ は、それぞれ、

$$l'(x) = \sum_{i=1}^M w_i \mu_i p_i'(x), \quad (25)$$

$$l''(x) = \sum_{i=1}^M w_i \mu_i p_i''(x), \quad (26)$$

で与えられる。ここで、

$$p_i'(x) = -\sqrt{\frac{\rho_i}{1-\rho_i}} n \left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho_i} x}{\sqrt{1-\rho_i}} \right), \quad (27)$$

$$p_i''(x) = -\frac{\rho_i}{1-\rho_i} \frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho_i} x}{\sqrt{1-\rho_i}} n \left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho_i} x}{\sqrt{1-\rho_i}} \right), \quad (28)$$

である。また、条件付分散 $v(x)$ およびその微分 $v'(x)$ は、

$$\begin{aligned} v(x) &= \text{var}[L|X=x] = E[L^2|X=x] - E[L|X=x]^2 \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^M w_i w_j \mu_i \mu_j p_i(x) p_j(x) + \sum_{i=1}^M w_i^2 (\mu_i^2 + \sigma_i^2) p_i(x) - \left(\sum_{i=1}^M w_i \mu_i p_i(x) \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^M w_i^2 p_i(x) \{ \mu_i^2 (1 - p_i(x)) + \sigma_i^2 \}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$v'(x) = \sum_{i=1}^M w_i^2 p_i'(x) \{ \mu_i^2 (1 - 2p_i(x)) + \sigma_i^2 \}, \quad (30)$$

で与えられる。(25)~(30)式を(24)式に代入し、 $x = N^{-1}(1-\alpha)$ とすれば、グラニュラリティ調整項 $\Delta q_\alpha(L)$ を得る。このとき、分位点は $q_\alpha(L) \approx q_\alpha(L^\infty) + \Delta q_\alpha(L)$ で推定される。

(2) デフォルト率とLGDの相関を考慮する場合

信用リスクの計量に際しては、LGDの推定が困難であること等から、LGDを定数もしくは独立した変数として取り扱うことが多い。しかし、景気が悪化すると、デフォルトする債務者が増加するとともに、担保価値の劣化を通じてLGDが増大する傾向がみられる等、経験的にはデフォルト率とLGDは正の相関を持つと考えられる。このように、景気悪化時にデフォルトの増加とLGDの増大が同時に進行して、損失が大きく膨らむ可能性がある状況を考えると、LGDを定数もしくは独立した変数とするモデルは、信用リスクを過小評価するおそれがある。Frye [2000a, b]¹⁸は、デフォルトを決定付ける各債務者の資産収益率と回収率の共通の要因をシステムティック・リスク・ファクターとして、両者の相関を考慮する1ファクターのマートン型モデルを提案した。さらに、Pykhtin and Dev [2002a]、Pykhtin [2003]は、このモデルを基に、極限損失分布による分位点の解析表現を導出している。以下では、Pykhtin and Dev [2002a]によるデフォルト率とLGDの相関を考慮した簡単なモデルを用いて、グラニュラリティ調整も勘案した分位点の近似解析表現を導出する。

イ．モデルの設定

モデルの設定は、LGDを表す確率変数 Q_i に関する仮定を除き、デフォルト率とLGDが独立である場合と同様である。デフォルトの有無にかかわらず損失率を決定する確率変数 \hat{Q}_i を、次式で定義する¹⁹。

$$\hat{Q}_i = \mu_i + \sigma_i(-\sqrt{r_i}X + \sqrt{1-r_i}\zeta_i) \quad (31)$$

ここで、 ζ_i はモデルに含まれる他の変数とは独立に標準正規分布に従う確率変数で、債務者個別の要因を表す。 \hat{Q}_i はシステムティック・リスク・ファクター X に依存しており、これにより、デフォルトを決定付ける資産収益率 Y_i ((15)式)との間に相関関係が生じる。例えば、景気が悪化して X が減少すると、資産収益率 Y_i が減少しデフォルトが増加するとともに、損失率 \hat{Q}_i も増加する。ところで、 \hat{Q}_i は、デ

18 家田・丸茂 [2002] は、Frye [2000b] を抄訳の形で紹介している。

19 Pykhtin and Dev [2002a] によれば、この定式化により、 \hat{Q}_i が [0, 1] の範囲に収まらないという問題が生じるが、制約を設けないことで解析表現の導出が容易になる上、現実的なパラメータ設定では、[0, 1] を外れることによる影響は無視し得る。また、Pykhtin [2003] では、 \hat{Q}_i が [0, 1] に収まるように別の定式化を行っている。

フォルトの有無と関係なく定義されるので、デフォルト時の損失率LGDとは異なる²⁰。しかし、 \hat{Q}_i は、デフォルト時の損失率を決定することから、これを潜在LGD (potential LGD) と呼ぶことにする。期待LGDは、 \hat{Q}_i の期待値 μ_i ではなく、デフォルトした場合の \hat{Q}_i の条件付期待値として、

$$E[\hat{Q}_i / Y_i < N^{-1}(p_i)] = \mu_i + \sigma_i \sqrt{\rho_i r_i} n(N^{-1}(p_i)) / p_i, \quad (32)$$

で与えられる。(32)式は p_i の単調減少関数になっている²¹。つまり、デフォルト率 p_i が小さいほど期待LGDが大きいう関係がある。これは、デフォルト率が低い債務者のデフォルトは、低い資産収益率で発生するが、このときは高い潜在LGD \hat{Q}_i となる傾向があるためである。さて、ポートフォリオ全体の損失率 L は、潜在LGD \hat{Q}_i を用いて、(19)式と同様に、次式で与えられる。

$$L = \sum_{i=1}^M w_i L_i = \sum_{i=1}^M w_i D_i \hat{Q}_i. \quad (33)$$

□ . 分位点 (VaR) の解析表現

極限損失分布 L^∞ は、以下で与えられる。

$$\begin{aligned} L^\infty &= E[L / X] = \sum_{i=1}^M w_i E[L_i / X] = \sum_{i=1}^M w_i E[D_i \hat{Q}_i / X] \\ &= \sum_{i=1}^M w_i E[\hat{Q}_i | X] E[D_i(X)] \\ &= \sum_{i=1}^M w_i (\mu_i - \sigma_i \sqrt{r_i} X) p_i(X). \end{aligned} \quad (34)$$

よって、損失分布の α 分位点 $q_\alpha(L)$ は、次式で近似される。

$$\begin{aligned} q_\alpha(L) &\approx q_\alpha(L^\infty) \\ &= E[L / X = N^{-1}(1-\alpha)] \\ &= \sum_{i=1}^M w_i (\mu_i - \sigma_i \sqrt{r_i} N^{-1}(1-\alpha)) p_i(N^{-1}(1-\alpha)). \end{aligned} \quad (35)$$

グラニュラリティ調整項 $\Delta q_\alpha(L)$ も同様にして、

$$\Delta q_\alpha(L) = -\frac{1}{2l'(x)} \left(v'(x) - v(x) \left(\frac{l''(x)}{l'(x)} + x \right) \right) \Bigg|_{x=N^{-1}(1-\alpha)}, \quad (36)$$

20 デフォルト率とLGDが独立であれば、LGDと潜在LGDは一致する。

21 (32)式の導出および単調減少性の証明は補論3を参照。

で与えられる。ここで、 $l(x) = \sum_{i=1}^M w_i (\mu_i - \sigma_i \sqrt{r_i x}) p_i(x)$ である。このとき、 $l'(x)$ および $l''(x)$ は、それぞれ、

$$l'(x) = \sum_{i=1}^M w_i \{-\sigma_i \sqrt{r_i} p_i(x) + (\mu_i - \sigma_i \sqrt{r_i x}) p_i'(x)\}, \quad (37)$$

$$l''(x) = \sum_{i=1}^M w_i \{-2\sigma_i \sqrt{r_i} p_i'(x) + (\mu_i - \sigma_i \sqrt{r_i x}) p_i''(x)\}, \quad (38)$$

となる。また、条件付分散 $v(x)$ およびその微分 $v'(x)$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} v(x) &= \text{var}[L | X = x] \\ &= E[L^2 | X = x] - E[L | X = x]^2 \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^M w_i w_j (\mu_i - \sigma_i \sqrt{r_i x})(\mu_j - \sigma_j \sqrt{r_j x}) p_i(x) p_j(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^M w_i^2 \{(\mu_i - \sigma_i \sqrt{r_i x})^2 + \sigma_i^2(1 - r_i)\} p_i(x) - \left(\sum_{i=1}^M w_i (\mu_i - \sigma_i \sqrt{r_i x}) p_i(x) \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^M w_i^2 p_i(x) \{(\mu_i - \sigma_i \sqrt{r_i x})^2 (1 - p_i(x)) + \sigma_i^2(1 - r_i)\}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} v'(x) &= \sum_{i=1}^M w_i^2 [p_i'(x) \{(\mu_i - \sigma_i \sqrt{r_i x})^2 (1 - 2p_i(x)) + \sigma_i^2(1 - r_i)\} \\ &\quad - 2\sigma_i \sqrt{r_i} (\mu_i - \sigma_i \sqrt{r_i x}) p_i(x) (1 - p_i(x))]. \end{aligned} \quad (40)$$

(37)~(40)式を(36)式に代入し、 $x = N^{-1}(1 - \alpha)$ とすれば、グラニューラリティ調整項 $\Delta q_\alpha(L)$ が得られる。このとき、分位点の推定値は $q_\alpha(L) \approx q_\alpha(L^\infty) + \Delta q_\alpha(L)$ となる。

(3) 均一ポートフォリオに対する厳密な解析解

均一ポートフォリオでは、任意の債務者数で、損失率分布の分位点の厳密な解析表現が得られる。家田・丸茂・吉羽 [2000] は、LGDが定数である場合、Pykhtin and Dev [2002a] は、本節(2)のデフォルト率とLGDが相関を持つ場合に分位点の厳密解を導出している。ここでは、これらの文献を参考に、デフォルト率とLGDが独立である場合、およびデフォルト率とLGDの相関を考慮する場合の分位点の厳密解を導出する。

イ．デフォルト率とLGDが独立である場合

各債務がポートフォリオ全体に占める割合を $w_i = 1/M$ 、債務者 i の資産収益率 Y_i の

ファクター・ローディングを $\sqrt{\rho}$ とする。すなわち、

$$Y_i = \sqrt{\rho}X + \sqrt{1-\rho}\xi_i, \quad (41)$$

で、債務者間の資産収益率の相関（資産相関）は ρ で与えられる。また、各債務者のLGDを表す確率変数 Q_i は、モデルに含まれる他の変数とは独立に平均 μ 、分散 $\sigma^2 (\neq 0)$ の標準正規分布に従うとする²²。このとき、ポートフォリオ全体の損失率 L は、以下のようになる。

$$L = \sum_{i=1}^M w_i L_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M D_i Q_i. \quad (42)$$

ポートフォリオ全体の損失率 L の分布関数 $F_L(l)$ は、 X による条件付けにより、

$$F_L(l) \equiv \Pr[L < l] = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[L < l | X = x] n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[L(x) < l] n(x) dx, \quad (43)$$

と表現することができる。ここで、 $L(x)$ は $X = x$ のときの条件付の損失率である。均一ポートフォリオでは、 $\Pr[L(x) < l]$ は、デフォルトした債務者の数のみに依存する。ここで、 $X = x$ を所与とするときのデフォルトした債務者の総数 $D(x)$ を、

$$D(x) \equiv \sum_{i=1}^M D_i(x), \quad (44)$$

により定義すると、 $\Pr[L(x) < l]$ は、 $D(x)$ による条件付けを用いて、

$$\Pr[L(x) < l] = \sum_{m=0}^M \Pr[L(x) < l | D(x) = m] \Pr[D(x) = m], \quad (45)$$

と表せる。 $X = x$ が所与のとき、各債務者のデフォルト事象は独立となるので、

$$\Pr[D(x) = m] = {}_M C_m [p(x)]^m [1 - p(x)]^{M-m}, \quad (46)$$

である。ここで、 ${}_M C_m$ は M 個から m 個を選ぶ組合せの数、 $p(x)$ は条件付デフォルト率で、 $p(x) = N((N-1)(p) - \sqrt{\rho}x / \sqrt{1-\rho})$ である。また、デフォルト総数が $D(x) = m (> 0)$ のときの損失率 $L = 1/M \sum_{i=1}^m Q_i$ は、正規分布 $N(m\mu/M, m\sigma^2/M^2)$ に従うので、

$$\Pr[L(x) < l | D(x) = m] = N\left(\frac{lM/m - \mu}{\sigma / \sqrt{m}}\right), \quad (47)$$

22 本節(1)で説明した極限損失分布およびグラニューラリティ調整を用いた分位点推定では、分布形を特定する必要はなく、期待値と分散の情報のみで十分であった。しかし、均一ポートフォリオの分位点の厳密解の導出には、分布形を特定する必要があるため、潜在LGDが従う分布と同じく（脚注19を参照）標準正規分布を採用する。

を得る。以上の結果を、(43)式に代入すると、

$$F_L(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M {}_M C_m [p(x)]^m [1-p(x)]^{M-m} N\left(\frac{lM/m - \mu}{\sigma/\sqrt{m}}\right) n(x) dx, \quad (48)$$

が得られる²³。また、確率密度関数 $f_L(l)$ は、(48)式を l で微分して、

$$f_L(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M \frac{M}{{}_M C_m} \frac{{}_M C_m [p(x)]^m [1-p(x)]^{M-m}}{\sigma/\sqrt{m}} n\left(\frac{lM/m - \mu}{\sigma/\sqrt{m}}\right) n(x) dx, \quad (49)$$

となる。(48) (49)式は数値積分により容易に計算可能である²⁴。 $F_L(l_\alpha) = \alpha$ を満たす l_α を数値計算により求めれば²⁵、損失分布の α 分位点の厳密解が得られる。

なお、LGDが $Q = \mu$ (定数) で与えられる場合は、損失率 L はデフォルトした債務者数により決まるので、デフォルトした債務者数が m 以下となる確率が α 以上となるように、

$$\sum_{k=0}^m \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[D(x) = k] n(x) dx = \sum_{k=0}^m \int_{-\infty}^{\infty} {}_M C_k [p(x)]^k [1-p(x)]^{M-k} n(x) dx \geq \alpha, \quad (50)$$

を満たす最小の m を求め、 $\mu m / M$ を損失分布の α 分位点とすればよい。

ロ．デフォルト率とLGDの相関を考慮する場合

デフォルト率とLGDの相関を考慮する場合も、デフォルト率とLGDが独立である場合と同様の手順で損失分布の α 分位点の厳密解を導出することができる。ただし、 Q_i の代わりに、(31)式で与えられる \hat{Q}_i を均一ポートフォリオに適用し、

$$\hat{Q}_i = \mu + \sigma(-\sqrt{r}X + \sqrt{1-r}\zeta_i), \quad (51)$$

の形で用いる。ポートフォリオ全体の損失率 L の分布関数 $F_L(l)$ は、

$$F_L(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^M {}_M C_m [p(x)]^m [1-p(x)]^{M-m} N\left(\frac{lM/m - \mu(x)}{(\sigma/\sqrt{m})\sqrt{1-r}}\right) n(x) dx, \quad (52)$$

で²⁶、確率密度関数 $f_L(l)$ は、

23 $m = 0$ のときは、 $N(\{lM/m - \mu\}/\{\sigma/\sqrt{m}\}) = 1$ とする。

24 Pykhtin and Dev [2002a] は、 $n(x)$ は $x = 0$ から離れるにつれて急速に0に近づくため、積分の範囲を有限の範囲に置き換えても問題なく、 $-6 \leq x \leq 6$ の範囲を0.05刻みで240等分すれば十分であるとしている。

25 本稿の数値検証では、二分法を用いたが、Pykhtin and Dev [2002a] は、二分法による繰り返し計算を数回行った後、ニュートン法に切り替えることで収束が速くなるとしている。

26 $m = 0$ のときは、 $N(\{lM/m - \mu(x)\}/\{(\sigma/\sqrt{m})\sqrt{1-r}\}) = 1$ とする。

$$f_L(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M \frac{M}{m} \frac{M C_m [p(x)]^m [1-p(x)]^{M-m}}{(\sigma/\sqrt{m})\sqrt{1-r}} n\left(\frac{lM/m - \mu(x)}{(\sigma/\sqrt{m})\sqrt{1-r}}\right) n(x) dx, (53)$$

で与えられる。ここで、 $\mu(x) \equiv \mu - \sigma \sqrt{r}x$ である。分位点の厳密解も同様にして、 $F_L(l_\alpha) = \alpha$ を数値計算で解くことにより求められる。

(4) 数値検証

極限損失分布およびグラニュラリティ調整を用いた近似解析表現は、対象とするポートフォリオにより近似精度が異なる。ここでは、本節(1)で示したデフォルト率とLGDが独立であるモデルによる近似解析表現について、均一ポートフォリオ、不均一ポートフォリオの順に近似精度の検証を行う。均一ポートフォリオでは、本節(3)で示した厳密な解析表現と近似解を比較することにより検証が可能である。一方、不均一ポートフォリオでは、厳密解が得られないため、モンテカルロ・シミュレーションによる結果と比較することにより検証する。また、本節(2)で示したデフォルト率とLGDの相関を考慮するモデルについても、それらが独立であるモデルとの簡単な比較を行う。

イ．均一ポートフォリオによる検証

ここでは、均一ポートフォリオを対象に、デフォルト率とLGDが独立であるモデルを用いて、近似解析表現²⁷および厳密な解析表現²⁸による信用リスク量を求め、両者を比較する。また、デフォルト率や資産相関の水準が近似精度に与える影響を調べる。

図表1に、デフォルト率 $p=1.0\%$ 、資産相関 $\rho=20\%$ 、LGDの期待値 $\mu=40\%$ 、同標準偏差 $\sigma=25\%$ 、信頼水準 $\alpha=99.9\%$ として、債務者数(対数目盛)を横軸として、近似解および厳密解をプロットしたグラフを示す。また、極限損失のみのグラフも合わせて示す。図表1からは、債務者数が増えるに従って、近似解と厳密解の差異は小さくなり、両者とも極限損失に漸近することがわかる。

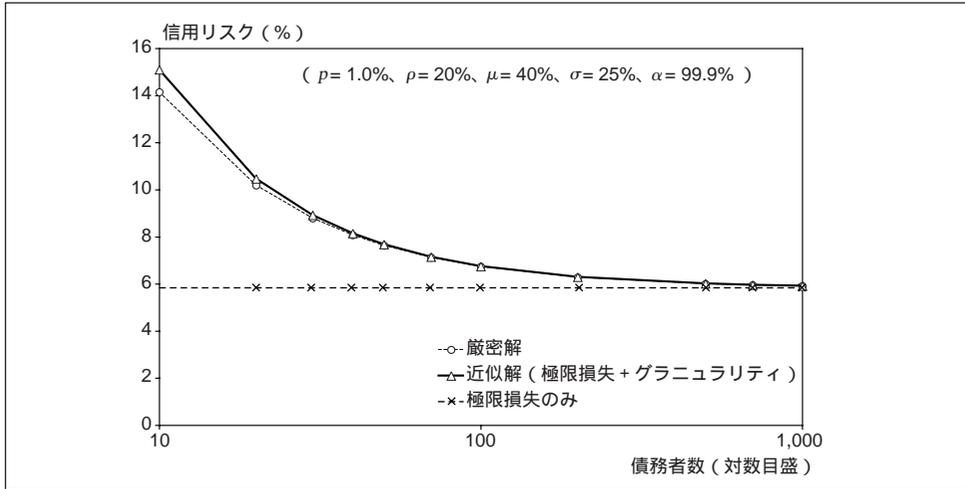
次に、デフォルト率および資産相関が、近似解と厳密解の差に与える影響を調べるため、図表2に、相関を一定($\rho=20\%$)としてデフォルト率を $p=0.5, 1.0, 5.0\%$ とした場合(1) およびデフォルト率を一定($p=1.0\%$)として相関を $\rho=15, 20, 25\%$ とした場合(2)の近似解と厳密解の乖離率²⁹を、債務者数を横軸(対数目盛)としてプロットしたグラフを示す(その他のパラメータの設定は図表1と同じ)。両グラフからは、デフォルト率が小さいとき、相関が小さいとき、および債務者数が少ないときに乖離率が大きい傾向が読み取れる。

27 (22)式および(24)-(30)式を利用する。

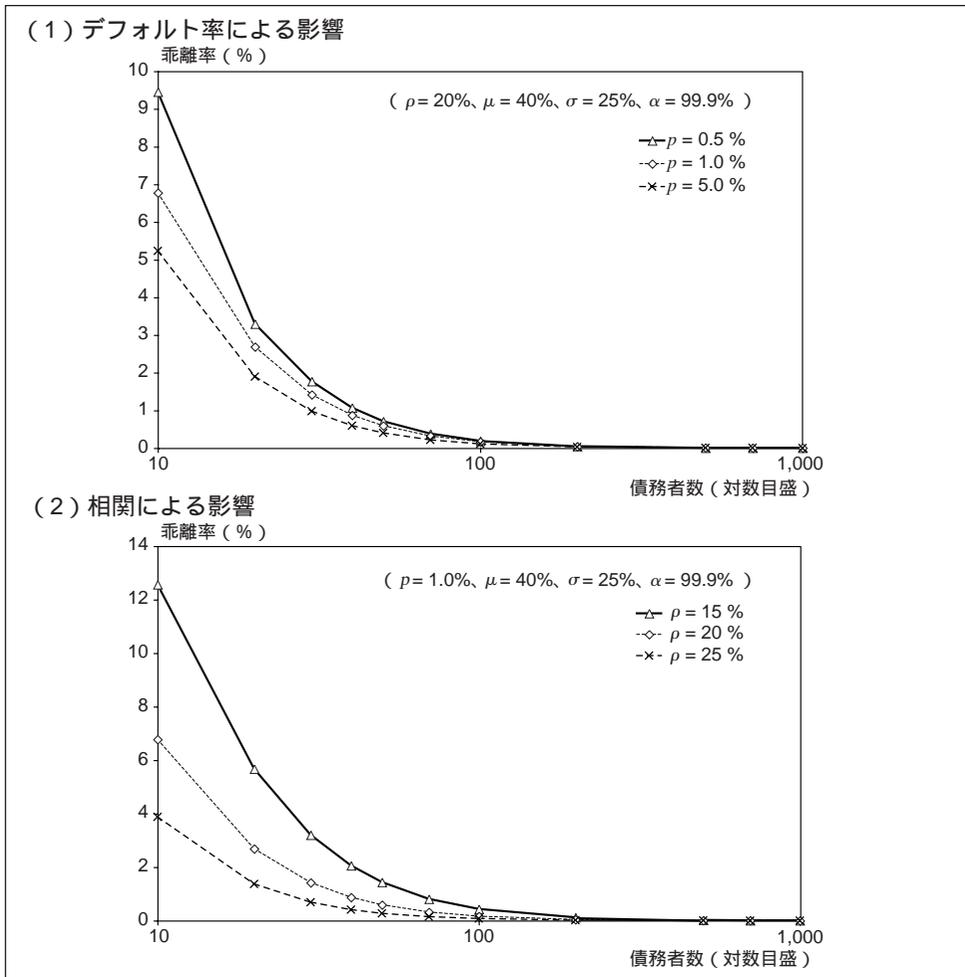
28 (48)式を利用して、数値計算により求める。

29 (近似解 - 厳密解) / 厳密解 × 100(%)で定義する。

図表1 近似解および厳密解の比較



図表2 近似解と厳密解の乖離率



ロ．不均一ポートフォリオによる検証

ここでは、不均一ポートフォリオを対象に、デフォルト率とLGDが独立であるモデルによる近似解の精度を検証する。不均一ポートフォリオに対する厳密解は得られないので、近似解の比較対象には、モンテカルロ・シミュレーション（10万通りのシナリオを発生）による推定結果を用いる。

まず、数値検証に用いるポートフォリオは、図表3に示すように、債務者数を a.20、b.50、c.100、d.200、e.500の5通り、エクスポージャーの分布は、均一分布、1先に集中、10%の先に集中、指数分布、3段階、5段階の6通りを設定した³⁰。各ポートフォリオには1aから6eの番号を付してある。なお、と は特に与信が集中しているポートフォリオである。与信の集中度は、概ね、 > > > > > の順となっている。

ここでは、資産相関 $\rho = 20\%$ 、LGDの期待値 $\mu = 40\%$ 、同標準偏差 $\sigma = 25\%$ 、信頼水準 $\alpha = 99.9\%$ を固定し、図表3で設定した各ポートフォリオに対して、デフォルト率を $p = 0.1、0.5、1.0、5.0、10.0\%$ とした場合の信用リスクを、近似解およびモンテカルロ・シミュレーションにより算出した³¹。図表4～9に両者の乖離率³²を示す。各図表は、エクスポージャーの分布 ～ に対応している。

図表3 検証に用いるポートフォリオ（1a～6e）

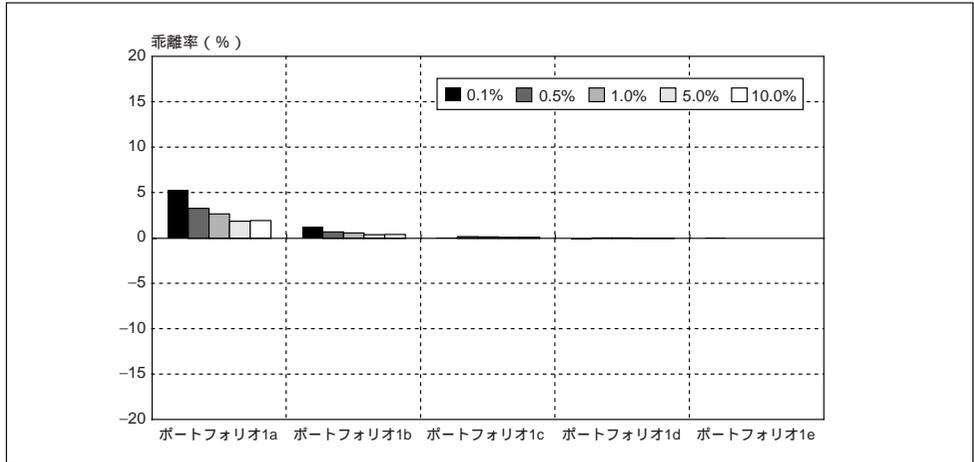
	a. 20先	b. 50先	c. 100先	d. 200先	e. 500先
均一分布	1a：各5%	1b：各2%	1c：各1%	1d：各0.5%	1e：各0.2%
1先に集中 (他の100倍)	2a： 1先に84.03%、 19先に各0.84%	2b： 1先に67.11%、 49先に各0.67%	2c： 1先に50.25% 99先に各0.50%	2d： 1先に33.44% 199先に各0.33%	2e： 1先に16.69% 499先に各0.17%
10%の先に集中 (他の100倍)	3a： 2先に各45.87%、 18先に各0.46%	3b： 5先に各18.35% 45先に各0.18%	3c： 10先に各9.17% 90先に各0.09%	3d： 20先に各4.59% 180先に各0.05%	3e： 50先に各1.83% 450先に各0.02%
指数分布	4a： 平均5%の指数 分布に従う	4b： 平均2%の指数 分布に従う	4c： 平均1%の指数 分布に従う	4d： 平均0.5%の指数 分布に従う	4e： 平均0.2%の指数 分布に従う
3段階分布 (2段階目で5倍、 3段階目で10倍)	5a： 10先に各1.43% 8先に各7.14% 2先に各14.29%	5b： 25先に0.57% 20先に2.86% 5先に5.71%	5c： 50先に0.29% 40先に1.43% 10先に2.86%	5d： 100先に0.14% 80先に0.71% 20先に1.43%	5e： 250先に0.06% 200先に各0.29% 50先に各0.57%
5段階分布 (段階ごとに 1.5倍)	6a： 1.90%、2.84%、 4.27%、6.40%、 9.60%を各4先 に配分	6b： 0.76%、1.14%、 1.71%、2.56%、 3.84%を各10先 に配分	6c： 0.38%、0.57%、 0.85%、1.28%、 1.92%を各20先 に配分	6d： 0.19%、0.28%、 0.43%、0.64%、 0.96%を各40先 に配分	6e： 0.08%、0.11%、 0.17%、0.26%、 0.38%を各100先 に配分

30 ポートフォリオの設定は、家田・丸茂・吉羽 [2000] を参考にした。

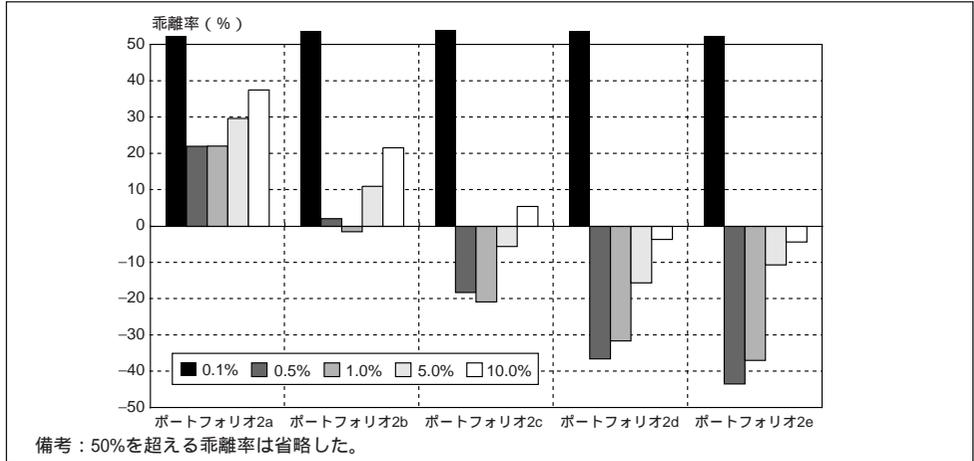
31 均一分布に従うポートフォリオ（1a～1e）では、モンテカルロ・シミュレーションではなく、厳密解を用いた。

32 (近似解 - モンテカルロによる算出結果) / モンテカルロによる算出結果 × 100 (%) で定義する。なお、モンテカルロ・シミュレーションによる算出結果にはシミュレーションによる誤差が含まれるため、乖離率に近似解の誤差とともにシミュレーションによる誤差が含まれる。別途確認したところ、対象とするポートフォリオにより異なるが、シミュレーションによる誤差は、標準偏差にして1～3%程度であり、乖離率が±5%程度であれば、近似解の誤差はそれほど大きくないと考えることにする。

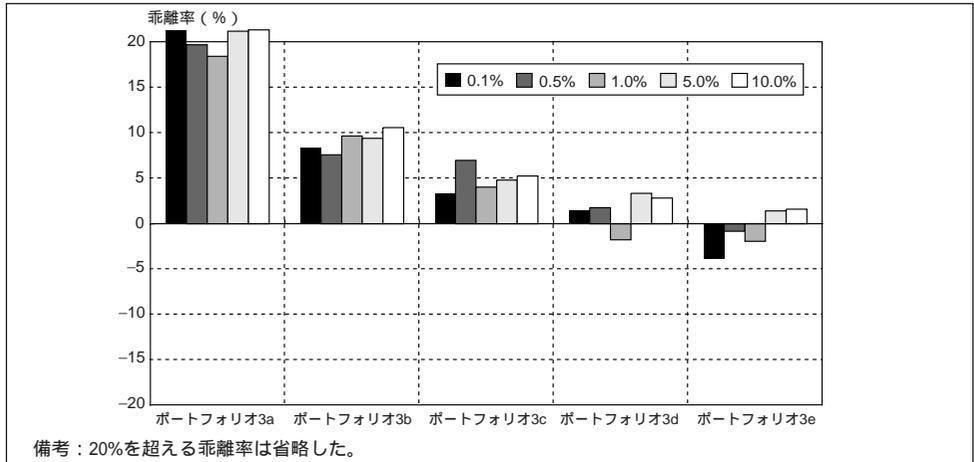
図表4 均一分布



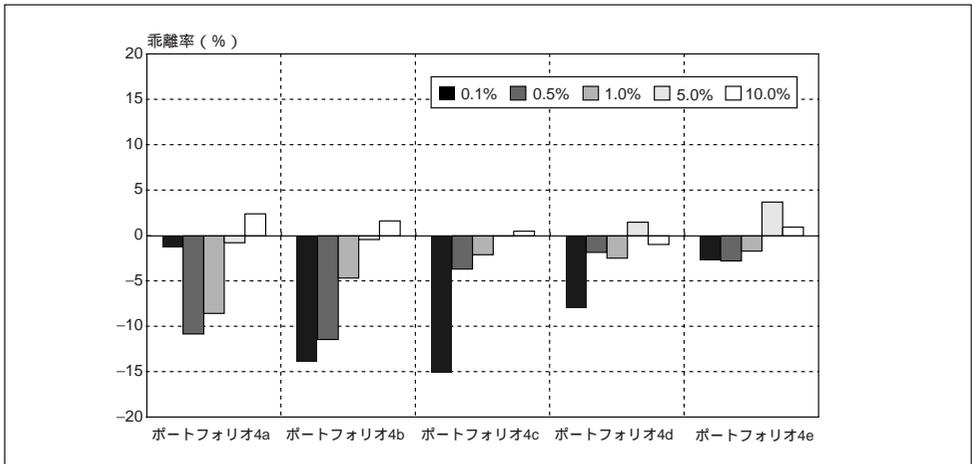
図表5 1先に集中



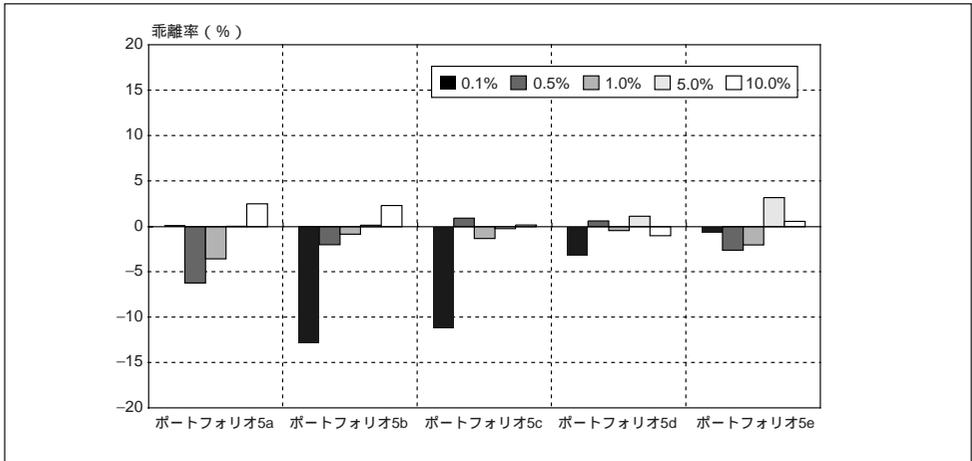
図表6 10%の先に集中



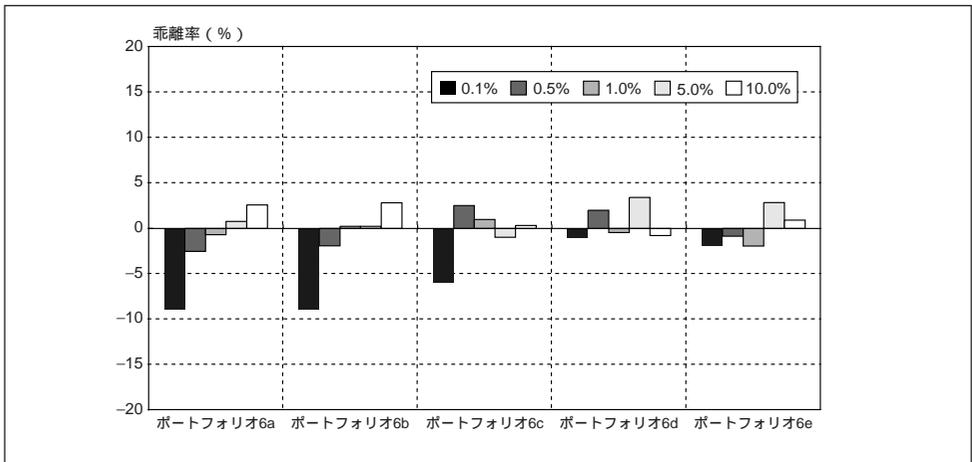
図表7 指数分布



図表8 3段階分布



図表9 5段階分布



エクスポージャーの分布別（図表別）に検証結果を以下に整理する。

均一分布（図表4）：近似精度は非常に良好で、債務者数の増加に従って乖離率はゼロに収束する。

1先に集中（図表5）：債務者数が増加しても、依然として乖離率は非常に大きく、債務者数をさらに増やさなければ近似精度は改善しないと予想される。なお、債務者数が少なくデフォルト率が小さい場合に過大評価し、逆の場合には過小評価する傾向がみられる。

10%の先に集中（図表6）：相対的に与信が集中したポートフォリオであるが、ほど与信の集中が極端ではないため、債務者数が増加するにつれて近似精度が改善し、債務者数が200以上であれば、近似精度は比較的良好である。

指数分布（図表7）、3段階（図表8）、5段階（図表9）： 、 、 の順に、与信の集中度が小さくなるにつれて近似精度が改善する傾向がある。デフォルト率が低い $p=0.1\%$ の場合や、債務者数が少ない場合を除けば、近似精度は比較的良好である。

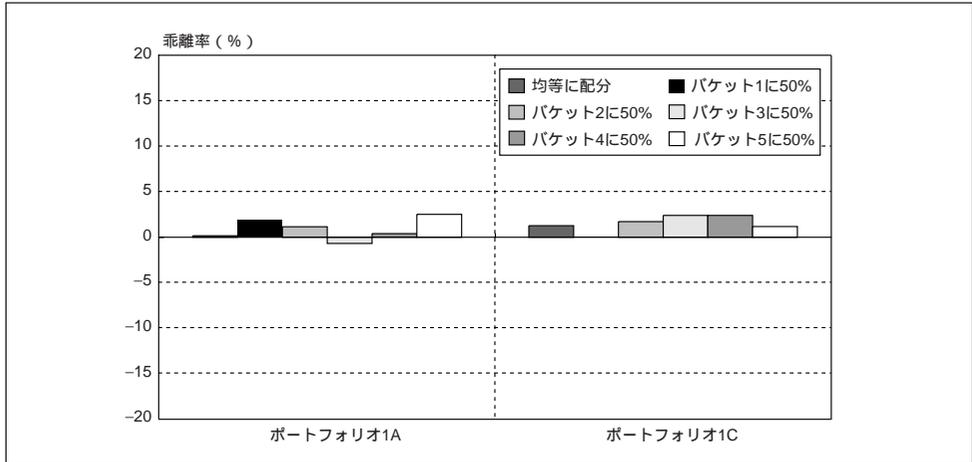
以上の結果から、近似解析表現は、極端に与信が集中している場合や、債務者数が少ない場合、デフォルト率が小さい場合に近似精度が悪くなる傾向があるが、比較的広範囲のポートフォリオで、精度のよい近似となっているといえる。

次に、より一般的な設定で検証するため、デフォルト率ごとの複数のバケットに分けられたポートフォリオを考える。図表10に、検証に用いる1A～6A、1C～6Cの12種類のポートフォリオを与える。各ポートフォリオは、デフォルト率（ $p=0.1$ 、 0.5 、 1.0 、 5.0 、 10.0% ）ごとに5つのバケットに分割されており、各バケットの構成（債務者数、分布）は、1a～6a、1c～6cと同じとする。さらに、全エクスポージャーの各バケットへの配分は、均等に20%ずつ配分する場合（1通り）と、1つのバケットに50%を配分し、残りのバケットに12.5%ずつ配分する場合（5通り）の計6通りを設定する。以上の設定により、各ポートフォリオで、近似解およびモンテカルロ・シミュレーションにより信用リスクを算出し、両者の乖離率を計算した結果は、図表11から図表16のとおりである。なお、資産相関 $\rho=20\%$ 、LGDの期待値 $\mu=40\%$ 、同標準偏差 $\sigma=25\%$ 、信頼水準 $\alpha=99.9\%$ とした。

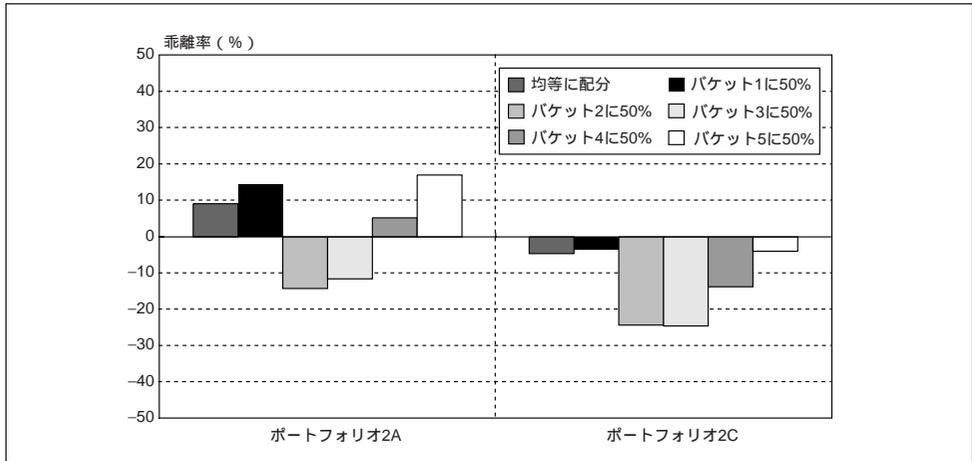
図表10 検証に用いるポートフォリオ（1A～6A、1C～6C）

ポートフォリオ	バケット	バケット1 ($p=0.1\%$)	バケット2 ($p=0.5\%$)	バケット3 ($p=1.0\%$)	バケット4 ($p=5.0\%$)	バケット5 ($p=10.0\%$)	債務者数
1A		1a	1a	1a	1a	1a	100
2A		2a	2a	2a	2a	2a	100
:		:	:	:	:	:	:
6A		6a	6a	6a	6a	6a	100
1C		1c	1c	1c	1c	1c	500
:		:	:	:	:	:	:
6C		6c	6c	6c	6c	6c	500

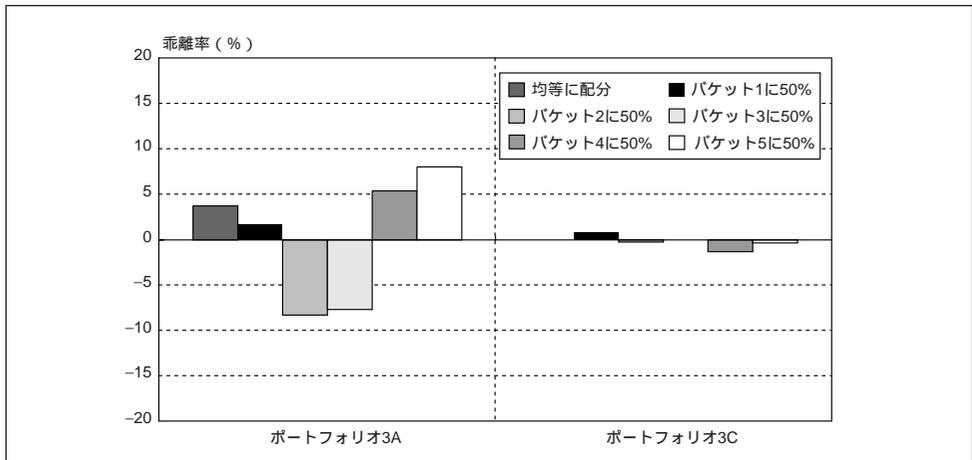
図表11 各バケット 均一分布



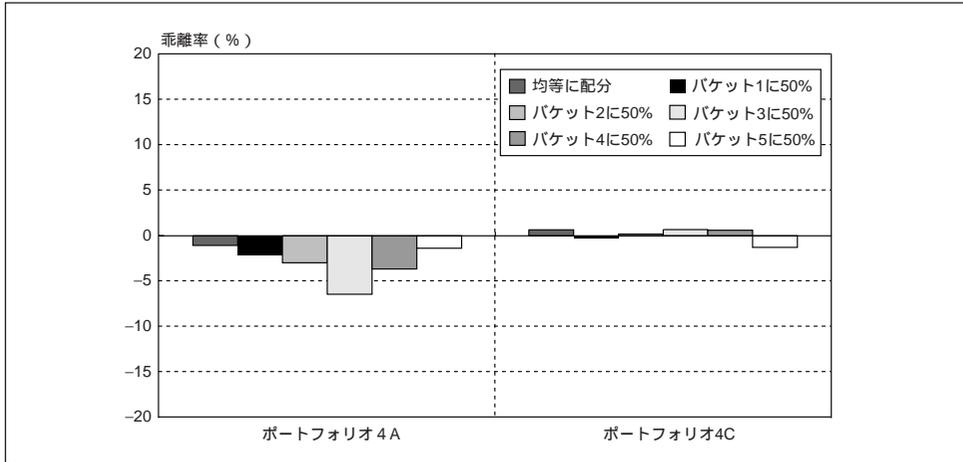
図表12 各バケット 1先に集中



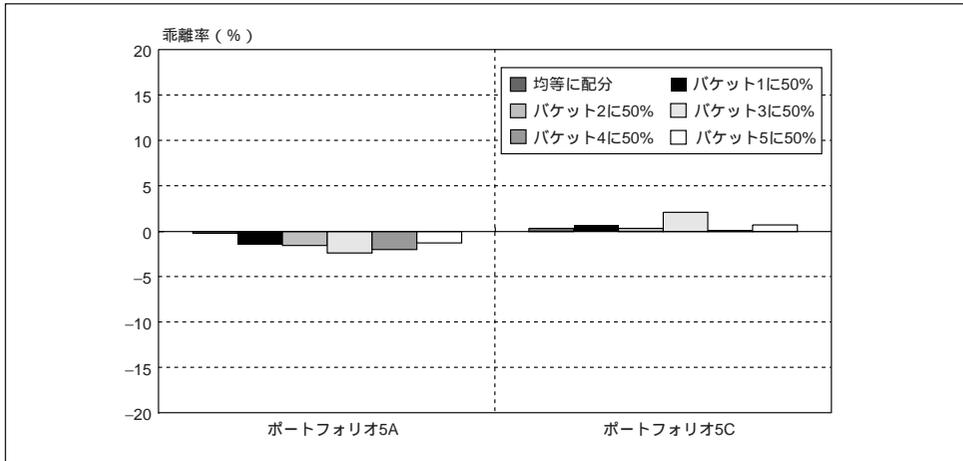
図表13 各バケット 10%の先に集中



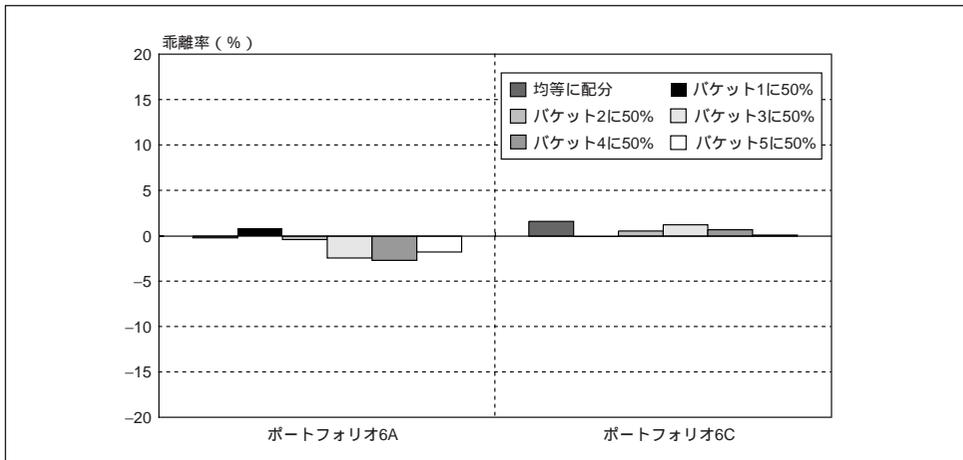
図表14 各バケット 指数分布



図表15 各バケット 3段階分布



図表16 各バケット 5段階分布



各バケットが従うエクスポージャーの分布別（図表別）に検証結果を整理する。

均一分布（図表11）：1A、1Cともにより近似精度である。

1先に集中（図表12）：2Aおよび2Cとも近似精度は非常に悪い。なお、債務者数が多いと過小評価に陥る傾向は図表5と同様である。

10%の先に集中（図表13）：3Aに比べて3Cの近似精度は格段に良好である。これは、債務者数の多さによるものであると考えられる。

指数分布（図表14）：4Aに比べて4Cの近似精度は良好である。これは、債務者数の多さによるものであると考えられる。

3段階（図表15）：5A、5Cともにより近似精度である。

5段階（図表16）：6A、6Cともにより近似精度である。

以上の結果から、債務者数が少ない場合や、エクスポージャーの集中がみられる場合以外は、近似精度は比較的良好であるといえる。

八．デフォルト率とLGDの相関を考慮したモデル

ここでは、均一ポートフォリオを対象に、本節(2)で示したデフォルト率とLGDの相関を考慮するモデル（相関考慮モデル）による近似解を算出し³³、デフォルト率とLGDが独立であるモデル（独立モデル）によるそれとの差異を確認する。

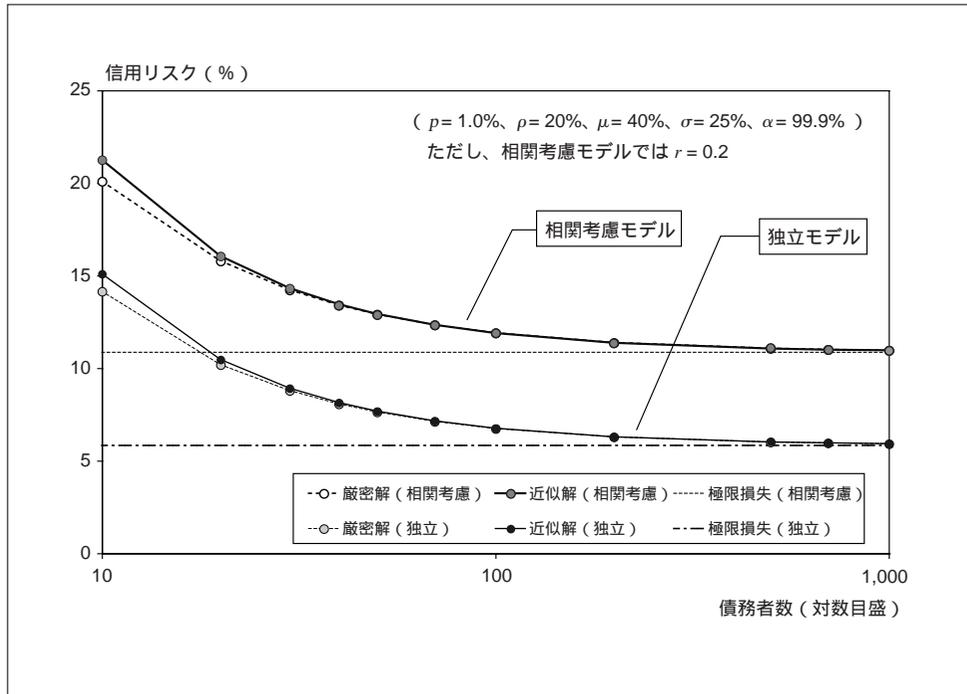
図表17に、デフォルト率 $p=1.0\%$ 、資産相関 $\rho=20\%$ 、LGDの期待値 $\mu=40\%$ 、同標準偏差 $\sigma=25\%$ 、信頼水準 $\alpha=99.9\%$ として、相関考慮モデル（ $r=0.2$ とする）による近似解および独立モデルによる近似解を、債務者数を横軸としてプロットした。なお、両モデルに対する厳密解および極限損失のみの値も合わせてプロットした。図表17からは、債務者数によらず、相関考慮モデルが、独立モデルよりも大きな信用リスク量を算出することがわかる。

次に、パラメータ r が信用リスク量に与える影響を調べるため、債務者数を $M=100$ で固定し（その他のパラメータは図表17と同じ）、 r に0と1の間の複数の値を与えたときの、相関考慮モデルによる近似解をプロットしたグラフが図表18である。なお、横軸には潜在LGDと資産収益率の相関（ $=-\sqrt{\rho r}$ ）を用い、独立モデルによる近似解も合わせて示す。図表18からは、相関考慮モデルと独立モデルの信用リスクの差が、資産収益率と潜在LGDの相関の絶対値にほぼ比例していることがわかる³⁴。このことは、LGDがデフォルト率と正の相関を有する場合に、独立モデルを利用すると、信用リスクを過小評価しかねないことを改めて認識させるものである。

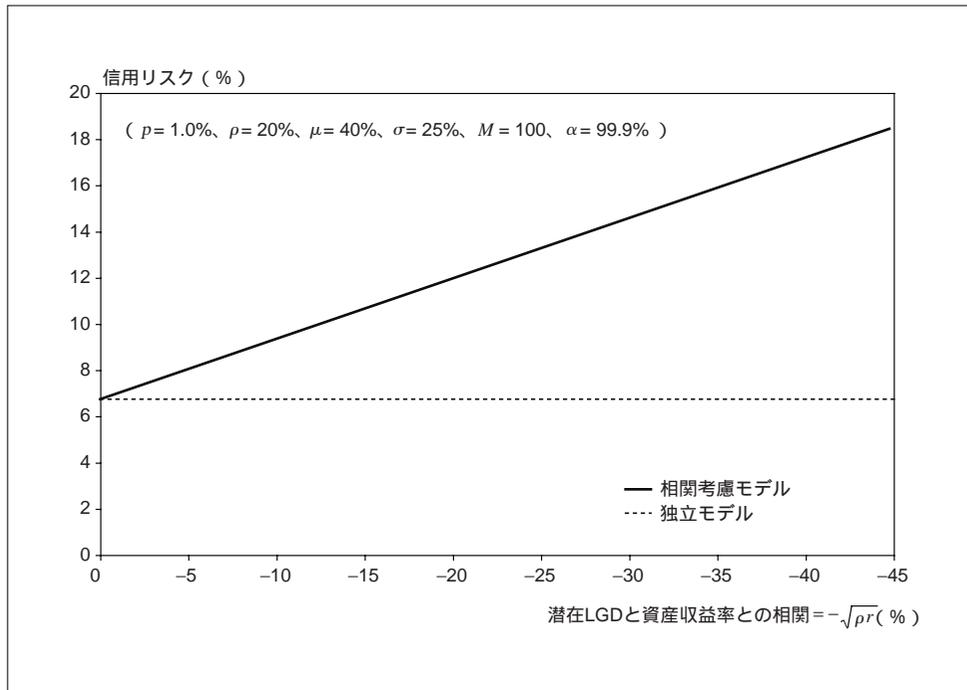
.....
33 (35)～(40)式を用いる。

34 これは、相関考慮モデルと独立モデルの極限損失の差が \sqrt{r} に比例すること、グラニュラリティ調整項は \sqrt{r} に比例しないが、極限損失に比べて小さいため、両モデルの信用リスクの差に大きな影響を与えないことが原因である。

図表17 相関考慮モデルと独立モデルの比較



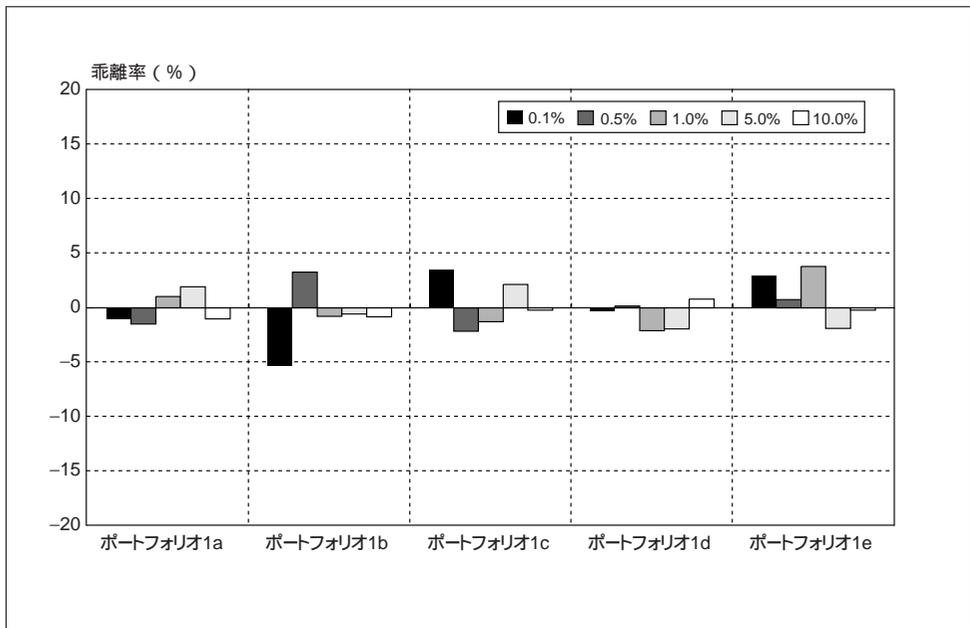
図表18 相関考慮モデルでの r の影響



(5) 小括と若干の考察

数値検証の結果からは、近似解析表現が、幅広い水準のパラメータで比較的良好な精度の近似を与えることがわかった。特に、分散化されたポートフォリオでは、近似解析表現の方が、モンテカルロ・シミュレーションによる推定よりも精度がよいことがある。図表19に、均一ポートフォリオを対象に、図表4と全く同じ設定で計算した、モンテカルロ・シミュレーション（10万通り）による推定値と厳密解との乖離率を示す³⁵。図表4と図表19の比較から、このケースでは、債務者数が100以上のときは、近似解の方が精度がよいことがわかる。一方、債務者数が少ない場合や、極端に与信が集中している場合には、近似解の精度はかなり悪くなるおそれがある。

図表19 均一分布（モンテカルロ・シミュレーション）



35 モンテカルロ・シミュレーション（10万通りのシナリオ発生）による推定を5回繰り返し、各回で厳密解との乖離率（の絶対値）を求め、5回の平均絶対乖離率を示した。

図表20に、近似解析表現とモンテカルロ・シミュレーションの長所と短所を整理した。近似解析表現は、ポートフォリオ構成によっては高い近似精度が確保し得ないことがあり、実務的に活用するモデルとして全面的に依存することは適当ではない。しかし、近似解析表現は、シミュレーションが不要で、ポートフォリオ構成によっては、幅広い水準のパラメータに対して精度のよい近似を与えることから、例えば、特定の種類の貸出から構成される部分的なポートフォリオ（小口ローン等）向けに、補完的に利用することは考えられる。

次に、1ファクターのマートン型モデルを利用する上での留意点として、ファクター数の問題を挙げる。国際的に活動する金融機関の与信ポートフォリオに1ファクター・モデルを適用する場合、世界経済の景気変動に連動するような変数をシステムティック・リスク・ファクターに選ぶことが考えられる。ところが、このポートフォリオに含まれる、ある地域または業種等で分類した債務者のグループに注目すると、このグループは、世界経済の景気変動以外に、地域や業種等の、グループに固有のリスク・ファクターに依存していると考えるのが自然である。このようなグループ固有のリスクも勘案するには、マルチ・ファクター・モデルを適用することが考えられる。したがって、国際的に業務を展開する金融機関のポートフォリオでは、マルチ・ファクター・モデルの利用が望ましい可能性がある。一方、特定の地域や特定の業種に限定されたポートフォリオでは、1ファクター・モデルで十分な場合もあり得る。図表21に、1ファクター・マートン型モデルとマルチ・ファクター・マートン型モデルの主な長所と短所を整理する。

図表20 近似解とモンテカルロ・シミュレーションの比較

	長 所	短 所
近似解析表現	<ul style="list-style-type: none"> ・シミュレーション不要 ・幅広い水準のパラメータで近似精度がよい 	<ul style="list-style-type: none"> ・与信が集中したポートフォリオで、近似精度が悪い
モンテカルロ・シミュレーション	<ul style="list-style-type: none"> ・任意のポートフォリオに対して、算出可能 	<ul style="list-style-type: none"> ・シミュレーション負荷が重い ・シミュレーション誤差を伴う

図表21 1ファクター・マートン型モデルとマルチ・ファクター・マートン型モデルの比較

	長 所	短 所	備 考
1ファクター・マートン型モデル	<ul style="list-style-type: none"> ・十分に細分化されたポートフォリオに対し、リスクのポートフォリオ不変性が成立する ・リスクの近似解析表現が得られる 	<ul style="list-style-type: none"> ・債務者に影響を与えるファクターを1つしか取り込めない 	<ul style="list-style-type: none"> ・パーゼルの内部格付手法でリスク・ウェイトを決定する基となっているモデル
マルチ・ファクター・マートン型モデル	<ul style="list-style-type: none"> ・債務者に影響を与える複数のファクターを取り込める 	<ul style="list-style-type: none"> ・パラメータの推定が煩雑 ・リスクのポートフォリオ不変性は成立しない ・一般的に、リスクの解析表現は得られない 	<ul style="list-style-type: none"> ・金融機関の内部モデルとして用いられることが多い。リスクの算出はモンテカルロ・シミュレーションによることが多い

4 . 応用編：マルチ・ファクター・マートン型モデル

実務では、与信ポートフォリオの信用リスクの計量にマルチ・ファクターのマートン型モデルが用いられることが多い。しかし、マルチ・ファクター・モデルでは、一般に分位点の解析表現を直接得ることはできない。Pykhtin [2004] は、基のマルチ・ファクターのマートン型モデルを、一定の仮定のもとで、同等な1ファクター・モデルに置き換えることにより分位点の解析表現を導出する方法を提案した³⁶。本節ではPykhtin [2004] に基づいて同手法を説明する。

(1) マルチ・ファクター・モデルの設定

1ファクター・モデルの設定と同様、債務者数を M 、債務者 i の借入元本を A_i 、ポートフォリオ全体に占める元本の割合を $w_i = A_i / \sum_{j=1}^M A_j$ 、デフォルト率を p_i とし、ある期間内に標準正規分布に従う資産収益率 Y_i が閾値を下回った場合に、債務者がデフォルトすると考える。

ここで、互いに独立に標準正規分布に従う、 N 個のシステムティック・リスク・ファクター X_1, X_2, \dots, X_N を考え、資産収益率 Y_i は、

$$Y_i = \alpha_{i1}X_1 + \dots + \alpha_{iN}X_N + \alpha_{iN+1}\xi_i, \quad (54)$$

と表せるとする。ここで、 ξ_i は、債務者個別の要因を表し、モデルに含まれる他の変数とは独立に標準正規分布に従う確率変数とする。資産収益率 Y_i の分散は1であるから、 $\sum_{k=1}^{N+1} \alpha_{ik}^2 = 1$ が成立する。 $r_i = \sum_{k=1}^N \alpha_{ik}^2$ とすれば、(54)式は、

$$Y_i = \sqrt{r_i}Z_i + \sqrt{1-r_i}\xi_i, \quad (55)$$

と書き換えられる。 Z_i は、 ξ_i と独立に標準正規分布に従う確率変数で、 $\beta_{ik} = \alpha_{ik} / \sqrt{r_i}$ として、システムティック・リスク・ファクターの線形結合により、

$$Z_i = \beta_{i1}X_1 + \beta_{i2}X_2 + \dots + \beta_{iN}X_N, \quad (56)$$

で表せる合成ファクターである。なお、 $\sum_{k=1}^N \beta_{ik}^2 = 1$ が成立する。このとき、債務者 i と j の資産相関は、 $\rho_{ij} = \sqrt{r_i r_j} \sum_{k=1}^N \beta_{ik} \beta_{jk}$ で与えられる。

36 Pykhtin [2004] では、マルチ・ファクター・モデルによる期待ショートフォールの解析表現も導出している。

最後に、LGDはデフォルト率と独立であるとして、3節(1)で示した1ファクター・モデルと同様に、モデルの他の確率変数とは独立なLGDを表す確率変数を Q_i (平均 μ_i 、標準偏差 σ_i)を考える。このとき、ポートフォリオ全体の損失率 L は、債務者 i の損失率 L_i の重み付き平均により、次式で与えられる。

$$L = \sum_{i=1}^M w_i L_i = \sum_{i=1}^M w_i 1_{\{Y_i \leq N^{-1}(p_i)\}} Q_i \quad (57)$$

(2) 同等な1ファクター・モデル

ポートフォリオが十分に細分化されているとき、定理1より、損失分布は極限損失分布 L^∞ に置き換えることができる。 L^∞ は、システムティック・リスク・ファクター $\{X_k\}$ を所与とする条件付期待値により、次式で与えられる。

$$L^\infty = E[L | \{X_k\}] = \sum_{i=1}^M w_i E[L_i | \{X_k\}] = \sum_{i=1}^M w_i \mu_i N \left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{r_i} \sum_{k=1}^N \beta_{ik} X_k}{\sqrt{1-r_i}} \right) \quad (58)$$

ファクター数が2以上 ($N \geq 2$) のときは、一般に L^∞ の α 分位点の解析表現は得られない。そこで、分位点の解析表現を得るために、基のマルチ・ファクター・モデルを同等な1ファクター・モデルに置き換えることを考える。

まず、同等な1ファクター・モデルが得られたとして、債務者 i の資産収益率 Y_i が、

$$Y_i = \sqrt{a_i} Z + \sqrt{1-a_i} \zeta_i \quad (59)$$

で表現されるとする。ここで、 Z および ζ_i は互いに独立に標準正規分布に従う確率変数である³⁷。また、 Z は実効ファクター、 $\sqrt{a_i}$ は実効ファクター・ローディングと呼ばれる。 Z を所与とするときの条件付期待損失率 $E[L | Z]$ は³⁸、

$$E[L | Z] = \sum_{i=1}^M w_i \mu_i \hat{p}_i(Z) \quad (60)$$

で与えられる。ここで、 $\hat{p}_i(Z)$ は、 Z が所与のときの債務者 i の条件付デフォルト率で、

$$\hat{p}_i(Z) = N \left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{a_i} Z}{\sqrt{1-a_i}} \right) \quad (61)$$

37 後述するように、通常の1ファクター・モデルとは異なり、 $\{\zeta_i\}$ は債務者間で互いに依存する。

38 $\{\zeta_i\}$ が債務者間で互いに依存するため、 $E[L | Z]$ は極限損失分布ではない。

である。このとき、 $q_\alpha(E[L|Z])$ が $q_\alpha(L)$ に近い値をとるならば、2節のグラニュラリティ調整項の導出と同様に、 $q_\alpha(L)$ を $q_\alpha(E[L|Z])$ まわりで2次項まで展開し、

$$q_\alpha(L) \approx q_\alpha(E[L|Z]) + \Delta q_\alpha(L), \quad (62)$$

により近似することが可能である³⁹。ただし、 $\Delta q_\alpha(L)$ は、定理3の(14)式で X の代わりに Z を代入して得られる。なお、 $\Delta q_\alpha(L)$ は、通常の1ファクター・モデルにおけるグラニュラリティ調整項とは異なるので、以下では、グラニュラリティ調整項と区別して、マルチ・ファクター調整項と呼ぶことにする。

以上で、分位点の解析表現を得る目処がついたので、基のモデルから、同等な1ファクター・モデルを決定する方法を考える。まず、実効ファクター Z が、 N 個のシステムティック・リスク・ファクター $\{X_k\}$ の線形結合により、

$$Z = \sum_{k=1}^N b_k X_k, \quad (63)$$

と表せると仮定する。ここで、 Z は標準正規分布に従い、 $\sum_{k=1}^N b_k^2 = 1$ という関係がある。このとき、 Z と債務者 i の合成ファクター Z_i の間に、

$$Z_i = \sqrt{\rho_i} Z + \sqrt{1 - \rho_i} \eta_i, \quad (64)$$

という関係があるとする。 η_i は、 Z と独立に標準正規分布に従う確率変数である。債務者間で $\{\eta_i\}$ は相互に依存し得る。また、 $\sqrt{\rho_i}$ は、 Z_i と Z の相関 $\text{corr}(Z_i, Z)$ に等しく、(56) (63)式より、次式で与えられる。

$$\sqrt{\rho_i} = \text{corr}(Z_i, Z) = \sum_{k=1}^N \beta_{ik} b_k. \quad (65)$$

以上の設定から、債務者 i の資産収益率 Y_i は、

$$\begin{aligned} Y_i &= \sqrt{r_i} Z_i + \sqrt{1 - r_i} \xi_i \\ &= \sqrt{r_i} (\sqrt{\rho_i} Z + \sqrt{1 - \rho_i} \eta_i) + \sqrt{1 - r_i} \xi_i \\ &= \sqrt{a_i} Z + \sqrt{1 - a_i} \zeta_i, \end{aligned} \quad (66)$$

と変形され、同等な1ファクター・モデルが導出される。なお、(66)式の最終行への変形で $a_i = r_i \rho_i$ 、 $\sqrt{1 - a_i} \zeta_i = \sqrt{r_i (1 - \rho_i)} \eta_i + \sqrt{1 - r_i} \xi_i$ とした。 ζ_i は、 Z とは独立に

39 $E[L|Z]$ は極限損失分布ではないが、実効ファクター Z に仮定2および仮定3が成立するため、2節で示したグラニュラリティ調整項の導出と全く同じ導出過程をたどることができ、 $\Delta q_\alpha(L)$ は定理3に与えたグラニュラリティ調整項と同じ表現で与えられる。

標準正規分布に従うが、債務者間で $\{\eta_i\}$ が相互に依存することから、 $\{\zeta_i\}$ も債務者間で依存し、通常の1ファクター・モデルとは異なる。最後に、 $\{a_i\}$ および $\{b_k\}$ を決定する。 a_i は、(65)式より

$$a_i = r_i \rho_i = r_i \left(\sum_{k=1}^N \beta_{ik} b_k \right)^2, \quad (67)$$

という関係を持つので、 $\{b_k\}$ を与えれば $\{a_i\}$ を定められる。 $\{b_k\}$ は、 $q_\alpha(E[L|Z])$ が真の分位点 $q_\alpha(L)$ に近い値をとるように定めることが望ましい。しかし、これは容易ではないので、Pykhtin [2004] は、直観的に、実効ファクター Z と合成ファクター $\{Z_i\}$ が大きい相関を持つことが望ましいとして、以下の最大化問題を考えた。

$$\max_{\{b_k\}} \left(\sum_{i=1}^M c_i \text{corr}(Z_i, Z) \right) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^N b_k^2 = 1. \quad (68)$$

この最大化問題の解は、(65)式より、次式で与えられる⁴⁰。

$$b_k = \frac{\sum_{i=1}^M c_i \beta_{ik}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^M c_i \beta_{ik} \right)^2}}. \quad (69)$$

(69)式では $\{c_i\}$ を与える必要があるが、Pykhtin [2004] は、種々の設定で α 分位点の推定を試行した結果、

$$c_i = w_i \mu_i N \left(\frac{N^{-1}(p_i) + \sqrt{r_i} N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-r_i}} \right), \quad (70)$$

とするのが経験上よいと指摘している。以下、本稿でも、この設定を用いることにする。以上で、同等な1ファクター・モデルが定まった。

(3) 分位点 (VaR) の解析表現

損失率分布 L の α 分位点は、(62)式から、

$$\begin{aligned} q_\alpha(L) &\approx q_\alpha(E[L|Z]) + \Delta q_\alpha(L) \\ &\approx \sum_{i=1}^M w_i \mu_i \hat{\rho}_i(N^{-1}(1-\alpha)) + \Delta q_\alpha(L), \end{aligned} \quad (71)$$

で近似される。ここで、マルチ・ファクター調整項 $\Delta q_\alpha(L)$ は、(14)式より、

40 ラグランジュの未定乗数法を用いれば、容易に求まる。

$$\Delta q_\alpha(L) = -\frac{1}{2n(z)} \frac{d}{dz} \left(\frac{\text{var}[L|Z=z]n(z)}{l'(z)} \right) \Bigg|_{z=N^{-1}(1-\alpha)}, \quad (72)$$

で与えられる。(72)式の微分を計算すると、

$$\Delta q_\alpha(L) = -\frac{1}{2l'(z)} \left(v'(z) - v(z) \left(\frac{l''(z)}{l'(z)} + z \right) \right) \Bigg|_{z=N^{-1}(1-\alpha)}, \quad (73)$$

となる。ただし、 $l(z) \equiv E[L|Z=z]$ 、 $v(z) \equiv \text{var}[L|Z=z]$ である。(73)式を計算するためには、 $l'(z)$ 、 $l''(z)$ 、 $v(z)$ 、 $v'(z)$ が必要である。まず、 $l(z)$ は、(60) (61)式で与えられることから、 $l'(z)$ と $l''(z)$ は、それぞれ、次式で与えられる。

$$l'(z) = \sum_{i=1}^M w_i \mu_i \hat{p}'_i(z), \quad (74)$$

$$l''(z) = \sum_{i=1}^M w_i \mu_i \hat{p}''_i(z). \quad (75)$$

ここで、以下の関係がある。

$$\hat{p}'_i(z) = -\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}} n \left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{a_i} z}{\sqrt{1-a_i}} \right), \quad (76)$$

$$\hat{p}''_i(z) = -\frac{a_i}{1-a_i} \frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{a_i} z}{\sqrt{1-a_i}} n \left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{a_i} z}{\sqrt{1-a_i}} \right). \quad (77)$$

次に、条件付分散 $v(z)$ とその微分 $v'(z)$ を求める。これらは、 Z を所与とするときの債務者間の資産収益率((59)式)が互いに独立にならないことから、数式が多少複雑になる。まず、(59)式は、以下のように書き換えられる。

$$Y_i = \sqrt{a_i} Z + \sum_{k=1}^N (\sqrt{r_i} \beta_{ik} - \sqrt{a_i} b_k) X_k + \sqrt{1-r_i} \xi_i. \quad (78)$$

よって、 Z を所与とするときの Y_i と Y_j の条件付相関 $\hat{\rho}_{ij}$ は、 $\sum_{k=1}^N b_k^2 = 1$ および $a_i = r_i$ ($\sum_{k=1}^N \beta_{ik} b_k$)²((67)式)に注意して、次式となる⁴¹。

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\sqrt{r_i r_j} \sum_{k=1}^N \beta_{ik} \beta_{jk} - \sqrt{a_i a_j}}{\sqrt{(1-a_i)(1-a_j)}}. \quad (79)$$

41 (79)式は、 $i=j$ の場合も含めて定義される。

さて、条件付分散 $v(z) \equiv \text{var}[L|Z=z]$ は、一般に、

$$\text{var}[L|Z=z] = \text{var}[E[L|\{X_k\}]|Z=z] + E[\text{var}[L|\{X_k\}]|Z=z], \quad (80)$$

と分解することができる。ここで、右辺第1項を $v_\infty(z)$ 、第2項を $v_G(z)$ と表記する。

$v_\infty(z)$ は、 $Z=z$ を所与としたときの、極限損失分布 $L^\infty = E[L|\{X_k\}]$ の条件付分散であり、基のマルチ・ファクター・モデルと、同等な1ファクター・モデルによる極限損失分布との差異を反映したものと解釈される。したがって、 $v_\infty(z)$ は、債務者数が増加しても消えない、システムティックな要素であり、以下で与えられる⁴²。

$$v_\infty(z) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j \mu_i \mu_j [N_2(N^{-1}[\hat{p}_i(z)], N^{-1}[p_j(z)], \hat{\rho}_{ij}) - \hat{p}_i(z) \hat{p}_j(z)]. \quad (81)$$

ここで、 $N_2(\cdot, \cdot, \cdot)$ は2次元標準正規分布の分布関数である⁴³。また、 $v'_\infty(z)$ は(81)式を微分して、以下で与えられる。

$$v'_\infty(z) = 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j \mu_i \mu_j \hat{p}'_i(z) \left[N \left(\frac{N^{-1}[\hat{p}_j(z)] - \hat{\rho}_{ij} N^{-1}[\hat{p}_i(z)]}{\sqrt{1 - (\hat{\rho}_{ij})^2}} \right) - \hat{p}_j(z) \right]. \quad (82)$$

一方、 $v_G(z)$ は、債務者数が有限であることの影響を表すアンシステムティックな要素であり、1ファクター・モデルでのグラニューラリティ調整に該当すると解釈される。 $v_G(z)$ は、

$$v_G(z) = \sum_{i=1}^M w_i^2 (\mu_i^2 [\hat{p}_i(z) - N_2(N^{-1}[\hat{p}_i(z)], N^{-1}[\hat{p}_i(z)], \hat{\rho}_{ii})] + \sigma_i^2 \hat{p}_i(z)), \quad (83)$$

で与えられ⁴⁴、 $M \rightarrow \infty$ の極限で0に収束する⁴⁵。また、 $v'_G(z)$ は、

$$v'_G(z) = \sum_{i=1}^M w_i^2 \hat{p}'_i(z) \left(\mu_i^2 \left[1 - 2N \left(\frac{N^{-1}[\hat{p}_i(z)] - \hat{\rho}_{ii} N^{-1}[\hat{p}_i(z)]}{\sqrt{1 - (\hat{\rho}_{ii})^2}} \right) \right] + \sigma_i^2 \right), \quad (84)$$

で与えられる。以上で、 $v(z) = v_\infty(z) + v_G(z)$ および $v'(z) = v'_\infty(z) + v'_G(z)$ が得られた。

ここで、(73)式に $v(z) = v_\infty(z)$ 、 $v'(z) = v'_\infty(z)$ を代入したものを $\Delta q_\alpha^\infty(L)$ とし、 $v(z) = v_G(z)$ 、 $v'(z) = v'_G(z)$ を代入したものを $\Delta q_\alpha^G(L)$ とする。(73)式は、 $v(z)$ および $v'(z)$ に対して線形であるから、マルチ・ファクター調整項 $\Delta q_\alpha(L)$ は、

42 導出は補論4を参照。

43 2次元正規分布の分布関数の数値評価はVasicek [1998] を参照。

44 導出は補論5を参照。

45 ここでは、 $\sum_{i=1}^M w_i^2 \rightarrow 0$ を仮定している。

$$\Delta q_\alpha(L) = \Delta q_\alpha^\infty(L) + \Delta q_\alpha^G(L) \quad (85)$$

で得られ、分位点は $q_\alpha(L) \approx q_\alpha(E[L|Z]) + \Delta q_\alpha(L)$ で推定される。また、 $M \rightarrow \infty$ のとき、 $\Delta q_\alpha^G(L) \rightarrow 0$ より、分位点は $q_\alpha(L) \approx q_\alpha(E[L|Z]) + \Delta q_\alpha^\infty(L)$ で推定され、これは極限損失分布((58)式)の分位点の推定値に相当する。

(4) 数値例

以下では、マルチ・ファクター調整の近似精度を検証する。なお、ここに示す数値例は、Pykhtin [2004] で示された数値例における、一部のパラメータの水準を変更して計算したものである。

イ. 2ファクターの例

ポートフォリオは、AとBの2つの均一バケットに分けられるものとして、バケット u ($u = A, B$) に含まれる債務者数を M_u 、バケット u がポートフォリオ全体に占める割合を ω_u とする。また、バケット u に含まれる各債務のデフォルト率を p_u 、LGDの期待値 μ_u 、同標準偏差 σ_u 、合成ファクター Z_u 、合成ファクター・ローディング $\sqrt{r_u}$ とする。さらに、合成ファクターの相関を $\text{corr}(Z_A, Z_B) = \rho$ とする。このとき、バケット u 内の資産相関は r_u 、バケット間の資産相関は $\rho\sqrt{r_A r_B}$ で与えられる。

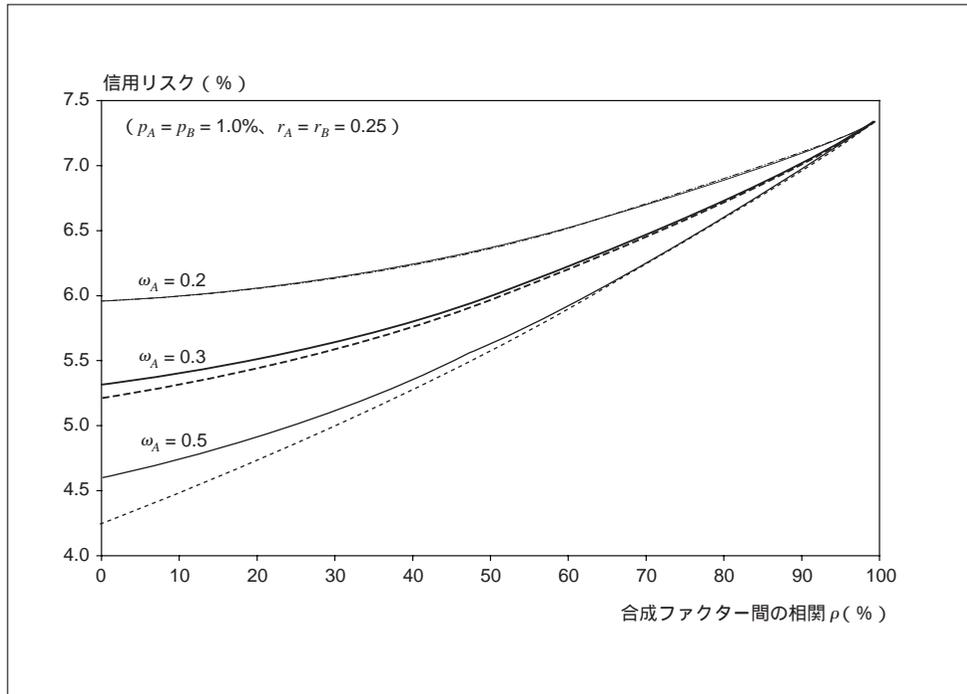
マルチ・ファクター調整のシステムティック部分 $\Delta q_\alpha^\infty(L)$ の精度を確認するため、 $M = \infty$ のときの数値例を示す。まず、均一ポートフォリオを対象に、マルチ・ファクター調整による近似解⁴⁶ (点線) と厳密解⁴⁷ (実線) との比較を図表22に示す。ここでは、 $p_A = p_B = 1.0\%$ 、 $\mu_A = \mu_B = 40\%$ 、 $\sigma_A = \sigma_B = 25\%$ 、 $r_A = r_B = 0.25$ 、 $\alpha = 99.9\%$ とし、 $\omega_A = 0.2, 0.3, 0.5$ の場合について、横軸を合成ファクター間の相関 ρ としてプロットした。図表22からは、 ρ が大きいとき、もしくは、 ω_A が0.5近くではないときに、近似精度がよい傾向があることがわかる。これは、 $\rho = 1$ 、あるいは $\omega_A = 0$ 、 $\omega_A = 1$ の極限では、ここでの2ファクター・モデルは1ファクター・モデルに一致し、近似解が厳密解と等しくなることを背景としている。近似精度は、これらの極限から最も離れているとき、つまり、バケットの重みが等しく ($\omega_A = \omega_B = 0.5$)、かつ ρ が小さいときに ($\rho = 0$)、最も悪くなる。

次に、不均一ポートフォリオを対象に、近似解と厳密解との比較を図表23に示す。ここでは、 $p_A = 0.1\%$ 、 $r_A = 0.25$ 、 $p_B = 5.0\%$ 、 $r_B = 0.04$ とし $\omega_A = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7$ の場合を示した (その他の設定は図表22と同じ)。図表23からは、近似解と厳密解に

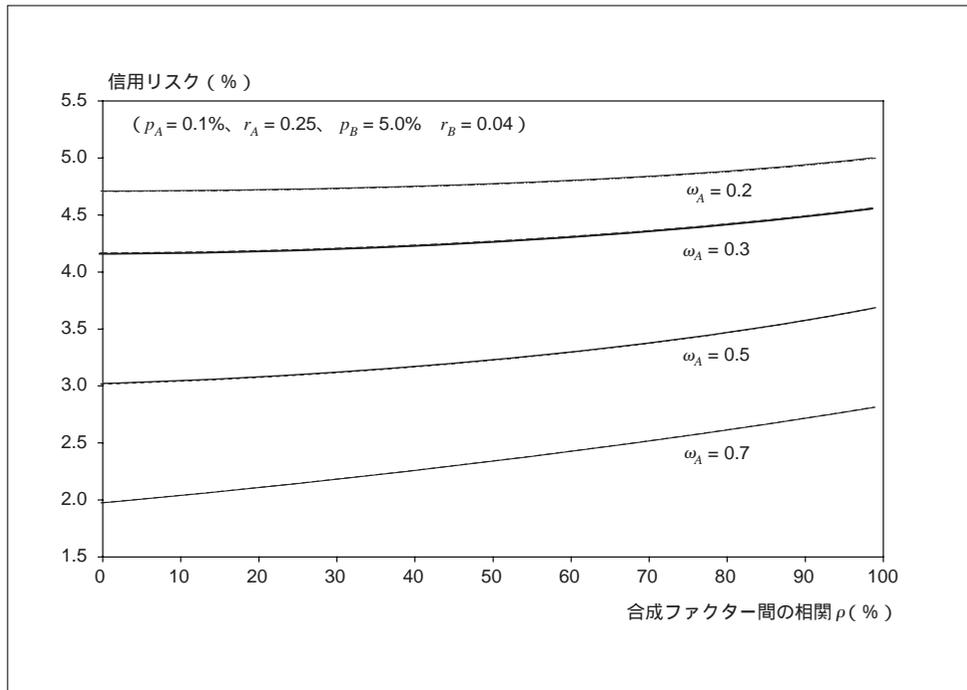
46 $q_\alpha(L) \approx q_\alpha(E[L|Z]) + \Delta q_\alpha^\infty(L)$ で近似する。

47 2つの均一バケットで構成されるポートフォリオに、2ファクター・モデルを適用する場合には、極限損失分布 L^∞ ((58)式) の分位点の厳密解が得られる。補論6を参照。

図表22 近似解と厳密解の比較 (2ファクター、均一、 $M = \infty$)



図表23 近似解と厳密解の比較 (2ファクター、不均一、 $M = \infty$)



図表24 近似解とモンテカルロ・シミュレーションの比較（2ファクター、均一、 M 有限）

ω_A	M	M_A	M_B	近似	MC	乖離率
0.7	500	100	400	2.33%	2.32%	0.5%
		250	250	2.69%	2.71%	-0.6%
		400	100	2.59%	2.57%	1.0%
	100	20	80	2.79%	2.76%	1.0%
		50	50	4.14%	4.27%	-3.0%
		80	20	3.63%	3.47%	4.6%
				4.60%	4.39%	4.6%
0.3	500	100	400	4.25%	4.24%	0.1%
		250	250	4.66%	4.66%	0.0%
		400	100	4.88%	4.86%	0.3%
	100	20	80	5.81%	5.67%	2.3%
		50	50	6.28%	6.05%	3.8%
		80	20	7.39%	6.83%	8.3%
				12.03%	9.85%	22.2%

大きな乖離はみられない。つまり、不均一ポートフォリオの方が、均一ポートフォリオよりも近似精度がよいことになる。

2ファクターの例の最後に、債務者数が有限の場合の近似精度の検証を行う。分位点の厳密解は得られないので、比較の対象としてモンテカルロ・シミュレーションを用いる⁴⁸。図表24に、バケットに含まれる貸出数を変えて、近似解およびモンテカルロ・シミュレーションにより分位点（ $\alpha = 99.9\%$ ）を算出した結果を示す。ここでは、パラメータの設定は図表23と同じとし、 $\rho = 0.5$ として、 $\omega_A = 0.3$ と $\omega_A = 0.7$ のケースで、分位点を算出した。図表24からは、債務者数が多いほど、近似精度が良好である傾向がみられる。

ロ．マルチ・ファクターの例

システムティック・リスク・ファクターが2個よりも多いマルチ・ファクター・モデルを考える。まず、 $N - 1$ 個の業種ごとに固有なシステムティック・リスク・ファクターを $\{X_k\}_{k=1}^{N-1}$ （互いに独立とする）、1個の全債務者に共通なシステムティック・リスク・ファクターを X_N とする。このとき、債務者 i の合成ファクターは、次式で表せる。

$$Z_i = \beta_i X_N + \sqrt{1 - \beta_i^2} X_{k(i)}, \quad (86)$$

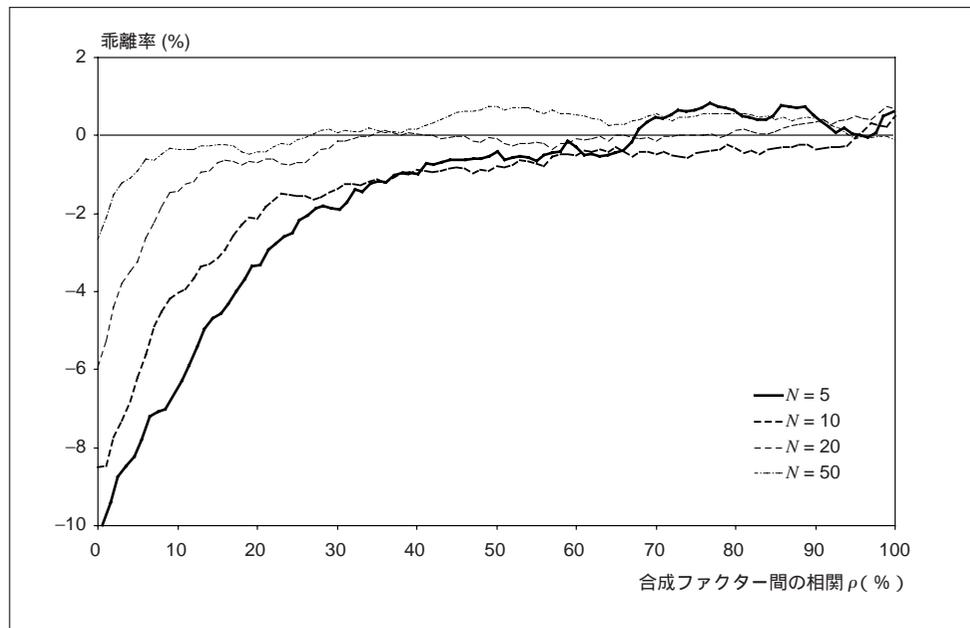
48 シミュレーションでは、LGDは平均 μ 、標準偏差 σ の正規分布に従う乱数とした（脚注19を参照）。

ここで、 $k(i)$ は債務者 i が属する業種を表す。また、同一業種の債務は全て均一バケットに含まれ、バケット u の債務者数を M_u 、デフォルト率 p_u 、LGDの期待値 μ_u 、同標準偏差 σ_u 、合成ファクターを Z_u 、合成ファクター・ローディングを $\sqrt{r_u}$ 、バケットの重みを ω_u とする。さらに、グローバル・ファクターの係数は、全ての合成ファクターで等しく、 $\beta_i = \beta$ と仮定する。このとき、合成ファクター間の相関は $\rho = \beta^2$ 、バケット u 内の資産相関は r_u 、バケット u と v の間の資産相関は $\rho\sqrt{r_u r_v}$ で与えられる。

まず、均一ポートフォリオで、債務者数 $M = \infty$ （各バケットで $M_u = \infty$ ）の場合を考える。図表25に、ファクター数を与え（ $N = 5, 10, 20, 50$ ）モンテカルロ・シミュレーションで得られる L^∞ の99.9%点からの近似解（ $= q_\alpha(E[L|Z]) + \Delta q_\alpha^\infty(L)$ ）の乖離率を、横軸を合成ファクター間の相関 ρ としてプロットした。ただし、 $p_u = 1.0\%$ 、 $\mu_u = 40\%$ 、 $\sigma_u = 25\%$ 、 $r_u = 0.25$ とした。図表25からは、 ρ が大きいほど、近似精度が良好であることがわかる。このことは、 $\rho = 1$ の極限で、モデルが1ファクター・モデルに収束することを背景としている。また、ファクター数が多いほど、近似精度が良好である傾向がある。これも、モデルのファクター数が多いほど、モデルが1ファクター・モデルに近いことが原因であると考えられる⁴⁹。

次に、業種数を10とし、不均一ポートフォリオで、近似解とモンテカルロ・シミュ

図表25 近似解の精度（マルチ・ファクター、均一、 $M = \infty$ ）



49 債務者ごとに業種が異なる場合（ $N-1=M$ ）は、ファクター・ローディングが $\sqrt{\rho\beta}$ の1ファクター・モデルと同じになる。

図表26 不均一ポートフォリオの設定（11ファクター、10バケット）

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_u	0.1%	0.2%	0.2%	0.5%	1.0%	1.0%	1.0%	2.0%	2.0%	5.0%
μ_u	50%	30%	50%	30%	50%	30%	50%	30%	50%	30%
σ_u	20%	10%	20%	10%	20%	10%	20%	10%	20%	10%
r_u	0.36	0.36	0.25	0.25	0.16	0.16	0.09	0.09	0.04	0.04
ω_u	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
M_u^A	50	100	50	100	50	100	50	100	50	100
M_u^B	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
M_u^C	10	20	50	50	100	100	200	200	500	1,000

図表27 近似解とモンテカルロ・シミュレーションの比較（11ファクター、不均一）

ρ	極限損失			ポートフォリオA			ポートフォリオB			ポートフォリオC		
	近似	MC	乖離率	近似	MC	乖離率	近似	MC	乖離率	近似	MC	乖離率
0.50	2.15%	2.16%	-0.5%	2.33%	2.34%	-0.4%	3.06%	3.12%	-2.0%	2.32%	2.36%	-1.4%
0.40	1.91%	1.91%	-0.2%	2.11%	2.12%	-0.4%	2.91%	2.91%	-0.2%	2.09%	2.14%	-2.4%
0.30	1.68%	1.68%	-0.4%	1.90%	1.90%	0.1%	2.80%	2.78%	0.8%	1.87%	1.91%	-2.2%
0.20	1.45%	1.46%	-0.7%	1.71%	1.71%	0.1%	2.75%	2.65%	3.8%	1.66%	1.74%	-4.8%
0.10	1.23%	1.26%	-2.1%	1.55%	1.55%	-0.2%	2.82%	2.54%	11.3%	1.46%	1.57%	-7.3%

レーションの結果を比較する。図表26に、各バケットのパラメータの設定を示す⁵⁰。ここでは、債務者数が異なる3つのポートフォリオA、B、Cを設定した。なお、各ポートフォリオのバケットごとの債務者数 M_u^A 、 M_u^B 、 M_u^C を、図表26の下3行に記した。

図表27に、各ポートフォリオの算出結果を示す。また、極限損失 ($M = \infty$) も合わせて示す。

極限損失での近似解の精度は、相関 ρ によらず良好であるほか、2ファクターの設定と同様に、均一ポートフォリオ（図表25の $N = 10$ を参照）の場合よりも良好である。また、ポートフォリオAも、 ρ によらず、近似解は良好な精度を示している。これは、個々の債務のエクスポージャーが小さく、ポートフォリオが細分化されているためであると考えられる。一方、債務者数がポートフォリオAの1/5であるポートフォリオBでは、 ρ が小さいときに、近似解の精度が悪い。ポートフォリオCの近似解の水準は、ポートフォリオAに近いが、ポートフォリオAよりも近似解の精度が悪い。これは、ポートフォリオCのエクスポージャーのばらつきが、ポートフォリオAより大きいことが原因であると考えられる。

50 Pykhtin [2004] の設定を採用した。

(5) 小括

本節では、Pykhtin [2004] が提案した、マルチ・ファクターのマートン型モデルを用いて、損失分布の分位点の近似解析表現を導出する方法を解説するとともに、幾つかの数値例を示した。

上述のように、近似解析表現を導出する際のパラメータの決定方法は、必ずしも理論的根拠に基づくものではない。しかし、数値例の結果からは、近似解析表現が幅広い範囲のパラメータで、精度のよい近似を与えることがわかった。特徴的な傾向としては、システムティック・リスク・ファクターの数が多いほど近似精度が高いほか、均一ポートフォリオよりも不均一ポートフォリオで高い近似精度が得られる。また、1ファクター・モデルの近似解析表現と同様に、合成ファクター間の相関が大きいときや、ポートフォリオが分散化しているときに、マルチ・ファクター・モデルの近似解析表現の近似精度が高いという傾向がある。

実務上はマルチ・ファクター・モデルが用いられることが多い点を考えれば、マルチ・ファクター・モデルの近似解析表現は有用であると考えられる。ただし、数値例でみたように、マルチ・ファクター・モデルの近似解析表現は、ポートフォリオの構成やパラメータの設定によっては近似精度が非常に悪くなる可能性があるため、実際に実務で利用する際には、事前に近似精度の検証を十分に行う必要がある。

5 . 応用編：証券化商品の経済的資本

本節では、極限損失分布を利用して、証券化商品の経済的資本 (economic capital) を解析的に算出する手法を解説する。経済的資本とは、リスク (ここでは、信用リスク) を自己資本の範囲内に収めるという考え方のもとで、調達される自己資本のことをいう⁵¹。Pykhtin and Dev [2002b]、Pykhtin and Dev [2003]、Gordy and Jones [2002] は、極限損失分布の考え方を利用して、証券化商品の経済的資本を解析的に算出する方法を提案した。これらの手法は、規制で用いることを念頭に、最低限の情報を利用して、経済的資本を簡便に算出することを目的とする手法であるが、その簡便さのゆえに、規制以外の実務上の目的でもこれを利用することは検討に値すると考えられる。本節では、証券化商品の概要と上記の3つの先行研究の手法のポイントを述べた後、これら3つの手法の具体的な内容を解説する。

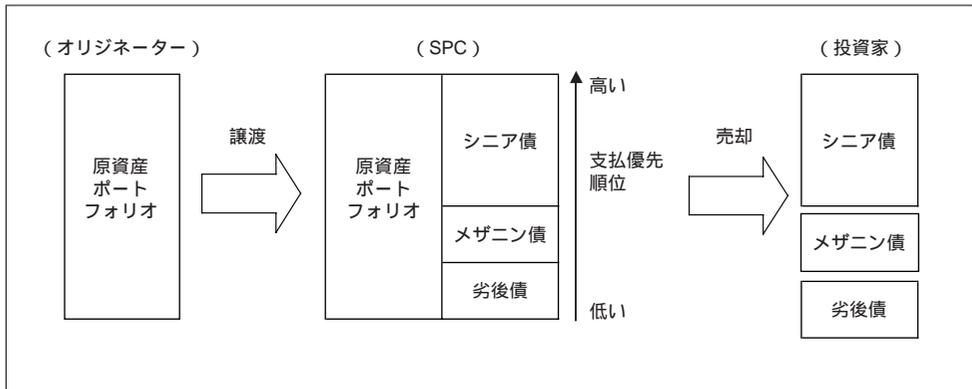
51 本稿では、非期待損失部分のみならず、期待損失部分も含めて経済的資本でカバーすると考える (脚注1を参照)。

(1) 証券化商品の概要、先行研究での経済的資本の算出方法のポイント

本稿では、金銭債権等で構成される原資産ポートフォリオを、特別目的会社（以下、SPC）等に譲渡し、これを裏付け（担保）として、SPC等が発行する有価証券等を、証券化商品と呼ぶ。代表的な商品としては、ABS（Asset Backed Securities）やCDO（Collateralized Debt Obligation）⁵²等が挙げられる。通常、SPC等に譲渡された原資産ポートフォリオは、優先劣後構造を持つ複数のトランシェに再構成されて、投資家に売却される。なお、優先劣後構造とは、各トランシェの投資家への支払優先順位を定める仕組みのことであり、デフォルト等で原資産ポートフォリオに損失が発生すると、支払優先度の低いトランシェから順に損失を負担する。図表28に、証券化商品の簡単なスキームを示す。各トランシェは、支払優先度の高いものから順に、シニア債、メザニン債、劣後債と呼ばれる⁵³。以下、証券化商品の1つのトランシェに投資する場合を考える。

図表29の斜線部分で表される、信用補完水準 S 、厚さ T のトランシェに投資する。ここで、信用補完水準（以下、補完水準）とは、投資するトランシェよりも劣後するエクスポージャーが、原資産ポートフォリオ全体に占める割合であり、厚さは、投資するトランシェが、原資産ポートフォリオ全体に占める割合のことである。つまり、補完水準 S 、厚さ T のトランシェは、デフォルト等による原資産ポートフォリオの損失が S を超えたときに初めて毀損し、 $S + T$ までの損失を負担する。

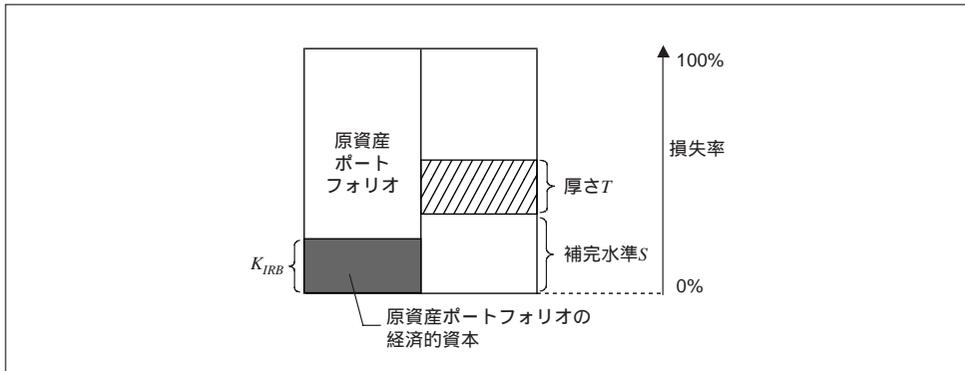
図表28 証券化商品のスキーム



52 なお、CDOにはシンセティック型と呼ばれる種類がある。これは、クレジット・デリバティブを用いて原資産ポートフォリオのリスクとリターンのみをSPCに移転するタイプのCDOである。これに対し、原資産ポートフォリオ自体をSPCに移転するタイプのCDOは現物型と呼ばれる。

53 シニア債よりも優先度の高いスーパー・シニア債を含め、さらに多くのトランシェに分割されることもある。また、劣後部分は売却せずに、オリジネーターが保有することも多い。詳細は、水野・河合 [2002]、小宮 [2003] 等を参照。

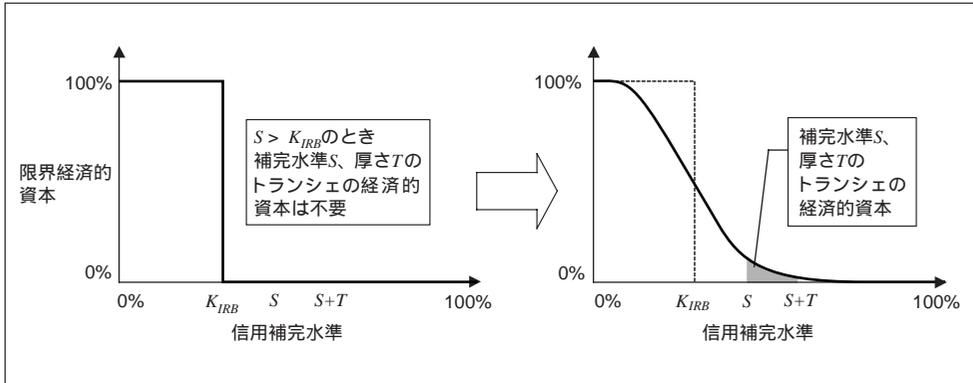
図表29 信用補完水準 S 、厚さ T のトランシェ



原資産ポートフォリオの信頼水準 α の経済的資本を K_{IRB} とする。つまり、原資産ポートフォリオには、信頼水準 α で最大 K_{IRB} の損失が生じる。したがって、自然な発想としては、トランシェの補完水準が K_{IRB} より低いときは ($S < K_{IRB}$)、両者の差額 (最大 T) と同額の資本を積み、トランシェの補完水準が K_{IRB} より高いときは ($S > K_{IRB}$)、資本は不要とするという扱いが考えられる。図表30の左図に、この考え方に基づく、トランシェの限界経済的資本 (トランシェの微小単位の厚さに必要な経済的資本) を示す。

しかし、トランシェの補完水準 K_{IRB} がより高ければ資本を不要とする扱いは、保守性の観点から、「規制当局にとって受け入れ難く (unacceptable for regulators)」 (Pykhtin and Dev [2002b])、「好ましいものではない (an unsatisfactory knife-edge property)」 (Gordy and Jones [2002]) との問題意識のもとで、トランシェの補完水準 K_{IRB} がより高いときにも何らかの規制上の資本賦課を必要とするロジックが幾つか提案されている。このうち、Pykhtin and Dev [2002b, 2003] は、証券化商品に投資している投資家のポートフォリオと、証券化商品の原資産ポートフォリオで、異なる2つのシステムティック・リスク・ファクターを考え、図表30の右図のような、全ての補完水準で滑らかかつゼロではない経済的資本の解析表現を導出している。また、Gordy and Jones [2002] は、トランシェの補完水準が確率的に変動するモデルを導入して、全ての補完水準で滑らかかつゼロではない経済的資本の解析表現を求めている。以下では、Pykhtin and Dev [2002b]、Pykhtin and Dev [2003]、Gordy and Jones [2002] による経済的資本の解析表現を、順に解説する。

図表30 トランシェの限界経済的資本（資本賦課の異なる考え方の例）



(2) Pykhtin and Dev [2002b] による方法

Pykhtin and Dev [2002b] は、証券化商品の原資産ポートフォリオが均一で、十分に細分化されている場合に、同じく十分に細分化された金融資産ポートフォリオを持つ投資家が、この証券化商品のトランシェに投資する際の経済的資本や期待損失率を解析的に計算する方法を提案した。

まず、貸出等で構成される証券化商品の原資産ポートフォリオを考え、原資産ポートフォリオの損失率を L 、その密度関数を $f(l)$ 、損失率が l より大きくなる確率を $G(l)(= \Pr(L > l))$ とする。このとき、 $f(l) = -dG(l)/dl$ である。 $G(l)$ の具体的な表現を与えるため、1ファクターのマートン型モデルの枠組みにより、ポートフォリオの損失をモデル化する。ここでは、原資産ポートフォリオは均一で、十分に細分化されているとし、デフォルト率を p 、資産相関を ρ_A 、標準正規分布に従う単一のシステムティック・リスク・ファクターを X とする。すなわち、債務者 i の資産収益率 Y_i は、

$$Y_i = \sqrt{\rho_A} X + \sqrt{1 - \rho_A} \xi_i, \tag{87}$$

と表現されて、債務者 i は $Y_i < N^{-1}(p)$ のときにデフォルトすると考える。ここで、 ξ_i は X とは独立に標準正規分布に従う確率変数である。また、LGDを表す確率変数を Q_i とし、他の変数とは独立に平均 μ の同一の分布に従うとする。このとき、原資産ポートフォリオの損失率 L は、以下で与えられる。

$$L = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Q_i 1_{\{Y_i < N^{-1}(p)\}}. \tag{88}$$

原資産ポートフォリオは十分に細分化されているので、定理1を使うことができ、損失率 L は、極限損失分布を用いて、次式で表せる。

$$\begin{aligned}
L &= E[L | X] \\
&= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E[Q_i] \Pr[Y_i < N^{-1}(p) | X] \\
&= \mu N \left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho_A} X}{\sqrt{1 - \rho_A}} \right). \tag{89}
\end{aligned}$$

したがって、 $l < \mu$ のとき、 $G(l)$ は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
G(l) &= \Pr[L > l] \\
&= \Pr \left[\mu N \left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho_A} X}{\sqrt{1 - \rho_A}} \right) > l \right] \\
&= \Pr \left[X < \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{1 - \rho_A} N^{-1}(l/\mu)}{\sqrt{\rho_A}} \right] \\
&= N \left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{1 - \rho_A} N^{-1}(l/\mu)}{\sqrt{\rho_A}} \right).
\end{aligned}$$

また、 $l \geq \mu$ のときは、 $G(l) = 0$ である。整理すると、

$$G(l) = \begin{cases} N \left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{1 - \rho_A} N^{-1}(l/\mu)}{\sqrt{\rho_A}} \right) & (l < \mu) \\ 0 & (l \geq \mu), \end{cases} \tag{90}$$

となる。ここで、原資産ポートフォリオの（信頼水準 α の）経済的資本 K_{IRB} は、 $G(K_{IRB}) = 1 - \alpha$ で与えられるので、(90)式より、以下を得る⁵⁴。

$$K_{IRB} = \mu N \left(\frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho_A} N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho_A}} \right). \tag{91}$$

さて、補完水準 S 、厚さ T のトランシェの損失率 $U(S, T)$ は、

$$U(S, T) = \begin{cases} 0 & (L \leq S) \\ (L - S)/T & (S < L \leq S + T), \\ 1 & (L > S + T) \end{cases} \tag{92}$$

となる。よって、トランシェの期待損失率は、以下で与えられる。

$$E[U(S, T)] = \int_S^{S+T} \frac{l - S}{T} f(l) dl + \int_{S+T}^1 f(l) dl = \frac{1}{T} \int_S^{S+T} G(l) dl. \tag{93}$$

54 $N^{-1}(1 - \alpha) = -N^{-1}(\alpha)$ の関係を用いた。

(93)式から、 $G(l)$ は、トランシェの限界期待損失率と考えることができる。(93)式の積分は解析的に表現することができ、(90)式を代入すれば、

$$H(l) = \begin{cases} \mu N_2(N^{-1}(l/\mu), N^{-1}(p), \sqrt{1-\rho_A}) & (l < \mu) \\ \mu p & (l \geq \mu) \end{cases}, \quad (94)$$

と置いて、次式を得る⁵⁵。

$$E[U(S, T)] = \frac{H(S+T) - H(S)}{T}. \quad (95)$$

次に、トランシェの経済的資本を導出する。十分に細分化された大きな金融資産ポートフォリオを持つ投資家が、証券化商品のトランシェに投資しているとする。以下、投資家が保有するポートフォリオを、原資産ポートフォリオと混同しないように、「投資ポートフォリオ」と呼ぶ。投資ポートフォリオの損失は、(X とは異なる)標準正規分布に従う単一のシステムティック・リスク・ファクター Z に依存すると仮定し、 X と Z には以下の関係があるとする。

$$X = \sqrt{\rho_X} Z + \sqrt{1-\rho_X} \epsilon. \quad (96)$$

ここで、 $\sqrt{\rho_X}$ は X と Z の相関で⁵⁶、 ϵ は標準正規分布に従う独立な確率変数である。また、証券化商品への投資額は、投資ポートフォリオ全体に比べて非常に小さいと仮定する⁵⁷。以上の設定の下で、補完水準 S 、厚さ T のトランシェの経済的資本 $K(S, T)$ は、(93)式と同様に、 $Z = N^{-1}(1 - \alpha)$ を所与とするときのトランシェの条件付期待損失率を用いて、以下で与えられる。

$$K(S, T) = \frac{1}{T} \int_S^{S+T} G(l | Z = N^{-1}(1 - \alpha)) dl. \quad (97)$$

(97)式より、 $G(l | Z = N^{-1}(1 - \alpha))$ を限界経済資本と考えることができる。(89)(96)式を用いると、限界経済資本 $G(l | Z = N^{-1}(1 - \alpha))$ は、次式で表せる。

55 補論7を参照。

56 X と Z はともに、十分に細分化されたポートフォリオのシステムティック・リスク・ファクターであるから、両者の相関 $\sqrt{\rho_X}$ は大きな値をとると予想される。Pykhtin and Dev [2002b]は、90%程度が妥当であるとしている。

57 この仮定により、証券化商品が含まれるか否かによらず、投資ポートフォリオは十分に細分化されるとみなせ、証券化商品の経済的資本は、 Z を所与とするときの条件付期待損失率により与えられる。Pykhtin and Dev [2003]は、証券化エクスポージャーが投資ポートフォリオ全体の2~3%に収まっていれば仮定が成立しているとみなしてよいとしている。

$$\begin{aligned}
G(l | Z = N^{-1}(1-\alpha)) &= \Pr[L > l | Z = N^{-1}(1-\alpha)] \\
&= \Pr \left[\mu N \left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho_A} (\sqrt{\rho_X} Z + \sqrt{1-\rho_X} \epsilon)}{\sqrt{1-\rho_A}} \right) > l | Z = N^{-1}(1-\alpha) \right] \\
&= \Pr \left[\epsilon < \frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho_A} \sqrt{\rho_X} N^{-1}(\alpha) - \sqrt{1-\rho_A} N^{-1}(l/\mu)}{\sqrt{\rho_A} \sqrt{1-\rho_X}} \right] \\
&= N \left(\frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho_A} \sqrt{\rho_X} N^{-1}(\alpha) - \sqrt{1-\rho_A} N^{-1}(l/\mu)}{\sqrt{\rho_A} \sqrt{1-\rho_X}} \right). \tag{98}
\end{aligned}$$

(98)式を(97)式に代入すると、経済的資本 $K(S, T)$ は、

$$I(l) = \begin{cases} \mu N_2 \left(N^{-1}(l/\mu), \frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho_A} \rho_X N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho_A} \rho_X}, \sqrt{\frac{1-\rho_A}{1-\rho_A \rho_X}} \right) & (l < \mu) \\ \mu N \left(\frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho_A} \rho_X N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho_A} \rho_X} \right) & (l \geq \mu), \end{cases} \tag{99}$$

と置いて、次式で与えられる⁵⁸。

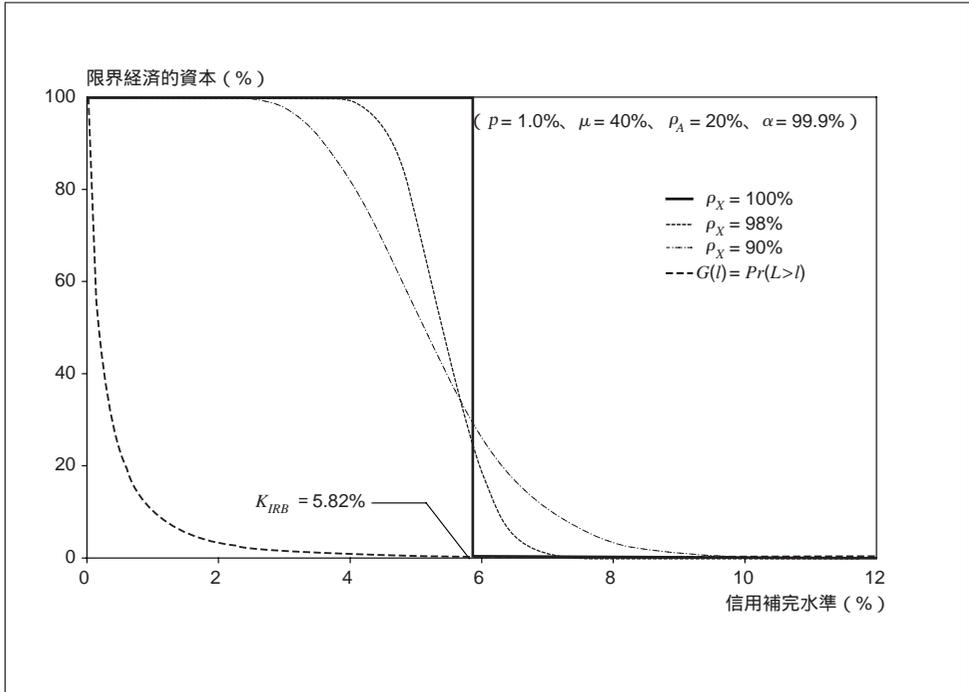
$$K(S, T) = \frac{I(S+T) - I(S)}{T}. \tag{100}$$

図表31に、 $p=1.0\%$ 、 $\mu=40\%$ 、 $\rho_A=20\%$ 、 $\alpha=99.9\%$ のときのトランシェの限界期待損失率 $G(l)$ 、および3通りの $\rho_X (=100, 98, 90\%)$ での限界経済的資本 $G(l | Z = N^{-1}(1-\alpha))$ を示す。 $\rho_X=100\%$ のときは、 $K_{IRB}=5.82\%$ を境に階段状の限界経済的資本を与えるが、 $\rho_X=98\%$ または 90% のときは、全ての補完水準で滑らかでゼロ超の経済的資本を与えている。また、 $\rho_X=98\%$ 、 90% のときを比較すると、補完水準の大きさによって、両者の限界経済的資本の大小関係が逆転している。このような形状になる理由は、以下の図表32で説明する。

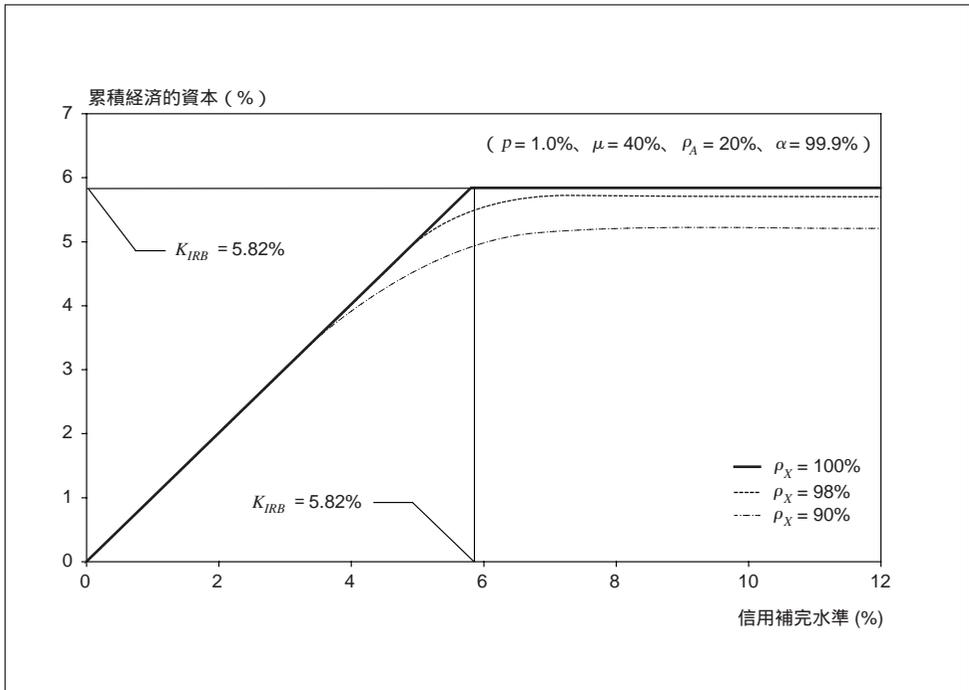
図表32に、累積経済的資本 $K(0, L)$ を示す。累積経済的資本は、 ρ_X の増加関数となっている。これは、 ρ_X が小さいと、証券化商品が投資ポートフォリオに含まれることによる分散効果が大きいためである。したがって、限界経済的資本と ρ_X の間には図表31のような関係があることになる。なお、累積経済的資本は、 $L \rightarrow 1$ で $K(0, 1)$ に収束し、 ρ_X が大きい方から、それぞれ 5.82% 、 5.70% 、 5.24% で与えられる。つまり、 $\rho_X=100\%$ のときは $K(0, 1) = K_{IRB}$ であるが、 $\rho_X=98, 90\%$ のときは、 $K(0, 1) < K_{IRB}$ である。

58 補論8を参照。

図表31 限界経済的資本



図表32 累積経済的資本



最後に、Pykhtin and Dev [2002b] による経済的資本の解析表現を導出する際に置いた仮定を整理すると、

原資産ポートフォリオは均一で、十分に細分化されている

原資産ポートフォリオは単一システムティック・リスク・ファクター X に依存する

投資ポートフォリオは十分に細分化されている

投資ポートフォリオは単一システムティック・リスク・ファクター Z に依存する

投資ポートフォリオのエクスポージャーに比べ、トランシェのエクスポージャーは小さい

の5つになる。このうち、 (1) 、 (2) の仮定は、金融機関等の投資ポートフォリオは大きくかつ分散化されていると考えられるので、一般的に成立していると考えられる。一方、 (3) 、 (4) の仮定は、実際のポートフォリオでは成立していない場合もあり得るが、この仮定を置くことで、経済的資本の解析表現が容易に導けるという利点がある。また、 (5) の仮定は、企業向け貸出等を原資産とするCDO等では必ずしも成立していない事例もあると思われるが、例えば多数の小口の消費者ローンを原資産ポートフォリオとするABS等ではよい近似になっていると考えられる⁵⁹。

(3) Pykhtin and Dev [2003] による方法

Pykhtin and Dev [2002b] は、証券化商品の原資産ポートフォリオが均一かつ十分に細分化されていることを仮定したが、Pykhtin and Dev [2003] は、後者の仮定を緩和し、任意の債務者数の均一ポートフォリオを原資産とする証券化商品を対象に、経済的資本の解析表現を導出した。Pykhtin and Dev [2003] の手法は、Pykhtin and Dev [2002b] と同様の考え方に基づいているが、最大の相違点は、原資産ポートフォリオの仮定の違いにより、原資産ポートフォリオの損失率 L の分布が異なることである。

モデルの設定は、本節(2)とほぼ同一である。相違点の1つは、債務者数 M が任意であることである。もう1つは、損失率分布を特定する必要があるため、LGDは他の変数と独立に平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定することである。

さて、債務者数 M が任意であるため、損失率 L は極限損失分布で近似することができず、本節(2)とは異なる分布に従う。しかし、損失率 L の分布を除けば、本節(2)の結果をそのまま利用することができて、補完水準 S 、厚さ T のトランシェの期待損失率 $E[U(S, T)]$ は、(93)式と同様、次式で与えられる。

59 Pykhtin and Dev [2002b] は、債務者数として、投資適格の債務者の場合は2,000~3,000が、投資不適格の債務者の場合は200~300がそれぞれ必要であるとしている。

$$E[U(S,T)] = \frac{1}{T} \int_S^{S+T} G(l) dl . \quad (101)$$

また、経済的資本 $K(S, T)$ は、(97)式と同様に、以下で与えられる。

$$K(S,T) = \frac{1}{T} \int_S^{S+T} G(l | Z = N^{-1}(1-\alpha)) dl . \quad (102)$$

以下、任意の債務者数 M に対して、 $G(l)$ および $G(l | Z = N^{-1}(1-\alpha))$ の具体的な表現を与えて、期待損失率および経済的資本の解析表現を導出する。

原資産ポートフォリオは、均一な債務者で構成されているので、 $G(l)$ は解析的に、

$$G(l) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^M C_m [p(x)]^m [1-p(x)]^{M-m} N(x_m(l)) n(x) dx , \quad (103)$$

と表せる((48)式参照)。ここで、 $p(x)$ は $X = x$ を所与とするときの条件付デフォルト率であり、 $p(X)$ および $x_m(l)$ は、次式で与えられる。

$$p(X) = N \left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho_A} X}{\sqrt{1-\rho_A}} \right) , \quad (104)$$

$$x_m(l) = \frac{lM / m - \mu}{\sigma / \sqrt{m}} . \quad (105)$$

よって、トランシェの期待損失率は、(101)式に(103)~(105)式を代入して、

$$h_m(l) = \frac{m}{M} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} (x_m(l) N(x_m(l)) + n(x_m(l))) , \quad (106)$$

と置くと、次式を得る⁶⁰。

$$E[U(S,T)] = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^M C_m [p(x)]^m [1-p(x)]^{M-m} \frac{h_m(S+T) - h_m(S)}{T} n(x) dx . \quad (107)$$

なお、(107)式(および(106)式)は数値積分により容易に評価し得る⁶¹。また、原資産ポートフォリオの経済的資本 K_{IRB} も、 $G(K_{IRB}) = 1-\alpha$ より、(103)式を用いて数値的に求めることができる。

60 $\int_{-\infty}^t N(s) ds = tN(t) + n(t)$ を利用した。

61 脚注24参照。

次に、 $G(l | Z = N^{-1}(1-\alpha))$ は、

$$\begin{aligned} G(l | Z = N^{-1}(1-\alpha)) &= \Pr[L > l | Z = N^{-1}(1-\alpha)] \\ &= E[\Pr[L > l | Z = N^{-1}(1-\alpha), \epsilon] | Z = N^{-1}(1-\alpha)], \quad (108) \end{aligned}$$

と変形することができる。ここで、 $\Pr[L > l | N^{-1}(1-\alpha), \epsilon]$ を求める準備として、 Z および ϵ を所与とするときの条件付デフォルト確率 $\tilde{p}(Z, \epsilon)$ を考える。 Z および ϵ が与えられれば、 X が確定し((96)式参照)、 X を所与とするときの条件付デフォルト率は(104)式で表せることから、 $\tilde{p}(Z, \epsilon)$ は、

$$\tilde{p}(Z, \epsilon) = N \left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho_A}(\sqrt{\rho_X}Z + \sqrt{1-\rho_X}\epsilon)}{\sqrt{1-\rho_A}} \right), \quad (109)$$

で与えられる。 Z および ϵ を所与とするとき、各債務者のデフォルト事象は独立となるので、 $\Pr[L > l | Z = N^{-1}(1-\alpha), \epsilon]$ は、以下で与えられる⁶²。

$$\begin{aligned} \Pr[L > l | Z = N^{-1}(1-\alpha), \epsilon] \\ = 1 - \sum_{m=0}^M M C_m [\tilde{p}(N^{-1}(1-\alpha), \epsilon)]^m [1 - \tilde{p}(N^{-1}(1-\alpha), \epsilon)]^{M-m} N(x_m(l)). \quad (110) \end{aligned}$$

よって、(108)式は、次式となる。

$$\begin{aligned} G(l | Z = N^{-1}(1-\alpha)) \\ = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^M M C_m [\tilde{p}(N^{-1}(1-\alpha), \epsilon)]^m [1 - \tilde{p}(N^{-1}(1-\alpha), \epsilon)]^{M-m} N(x_m(l)) n(\epsilon) d\epsilon. \quad (111) \end{aligned}$$

これを、(102)式に代入すると、経済的資本 $K(S, T)$ は、以下で与えられる。

$$\begin{aligned} K(S, T) &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^M M C_m [\tilde{p}(N^{-1}(1-\alpha), \epsilon)]^m [1 - \tilde{p}(N^{-1}(1-\alpha), \epsilon)]^{M-m} \\ &\quad \times \frac{h_m(S+T) - h_m(S)}{T} n(\epsilon) d\epsilon. \quad (112) \end{aligned}$$

ここで、 $h_m(l)$ は(106)式で与えられる。以上で、トランシェの経済的資本の導出が完了した。

ところで、原資産ポートフォリオ全額に投資している場合、要求される経済的資本は、 $Z = N^{-1}(1-\alpha)$ を所与とするときの期待損失率により、

$$K_{ALL} = \mu N \left(\frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho_A \rho_X} N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho_A \rho_X}} \right), \quad (113)$$

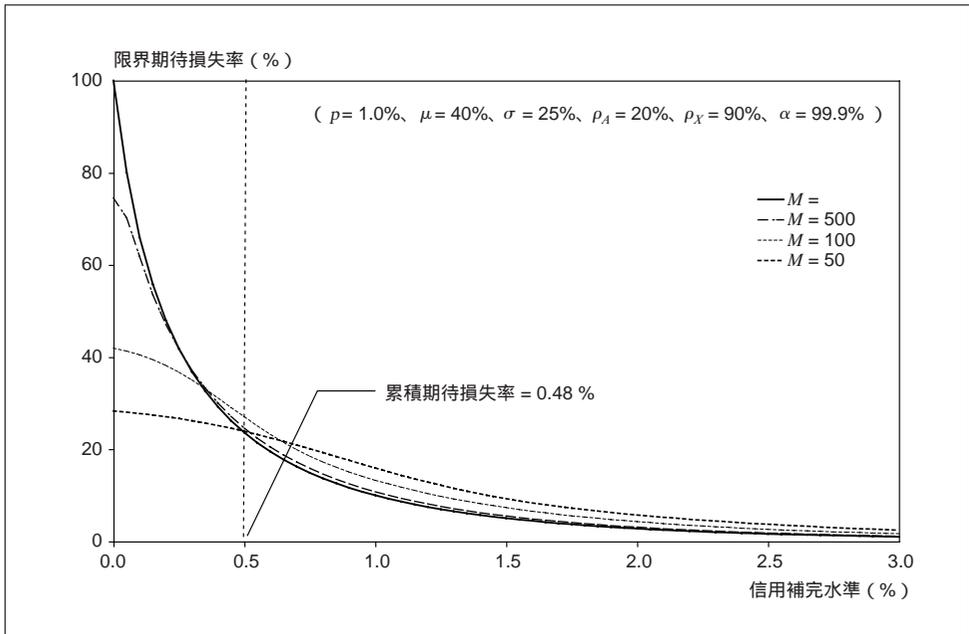
62 3節(3)の議論と同様にして求められる。

で与えられる⁶³。 K_{ALL} を求めることは、補完水準0、厚さ1のトランシェの経済的資本 $K(0, 1)$ を求めることに等しいので、本来なら両者は一致すべきである。しかし、それぞれのモデルに実際に数字を与えてみると、両者には多少の乖離が生じる。これは、両者の具体的な定式化の相違によるものである。具体的には、Pykhtin and Dev [2003] では、LGDが正規分布に従うと仮定しているが、これに伴い、LGDが $[0, 1]$ の範囲を外れる可能性が排除されておらず、その結果として、上述のような乖離を生じさせているのである⁶⁴。

図表33に、 $p = 1.0\%$ 、 $\mu = 40\%$ 、 $\sigma = 25\%$ 、 $\rho_A = 20\%$ 、 $\rho_X = 90\%$ 、 $\alpha = 99.9\%$ のときの、4通りの債務者数での $G(l)$ (限界期待損失率) を示す。なお、 $M = \infty$ のケースは、(90) 式により計算した。

図表33では、補完水準が低いときは、債務者数が少ないほど限界期待損失率が低く、補完水準が高いときは、債務者数が多いほど限界期待損失率が低いという傾向がある。つまり、補完水準が低いときは、原資産ポートフォリオの分散度合いと限界期待損失率に正の相関がある。これは、直観的には次のような背景に基づくものである。原資産ポートフォリオの累積期待損失率を固定して、微小単位の厚さを持

図表33 限界期待損失率

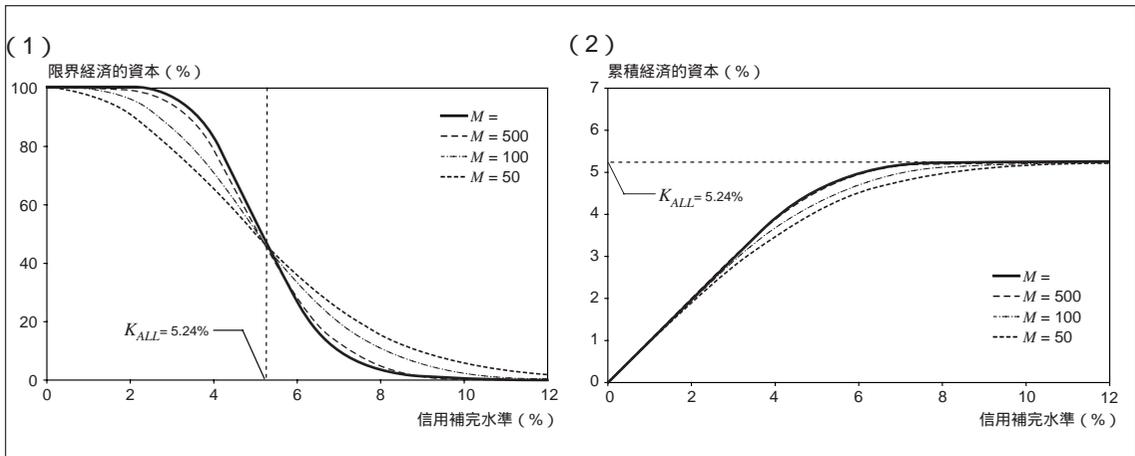


63 X を所与とする原資産ポートフォリオの期待損失率は、 $\mu N ((N^{-1}(p) - \sqrt{\rho_A} X) / (\sqrt{1 - \rho_A}))$ で与えられるので、(96) 式を代入すれば容易に求まる。なお、投資ポートフォリオに含まれることによる分散効果のため、 $K_{ALL} < K_{IRB}$ となる。

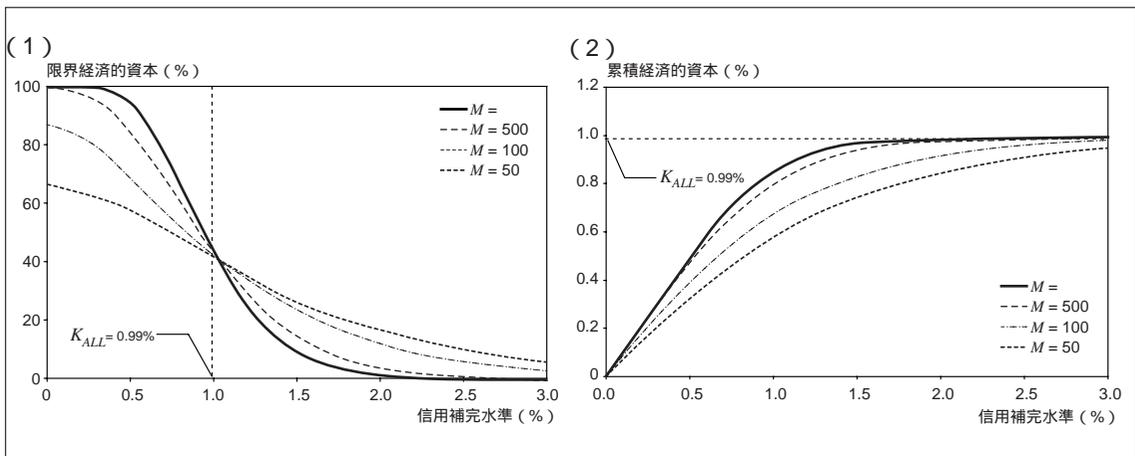
64 Pykhtin and Dev [2003] は、現実的なパラメータ設定では、LGDが $[0, 1]$ を外れる可能性は小さく、 K_{ALL} と $K(0, 1)$ の差異は無視し得るとしている。なお、 $\sigma \rightarrow 0$ のとき両者は一致する。

つ連続的な優先劣後トランシェを仮想する。ここで、最下位トランシェを考えると、原資産ポートフォリオが無限に分散化されていれば、各債務者のデフォルトが確率的に発生するとしても、デフォルト率がゼロでなければ、最下位トランシェは確実に損失を負担することになる。一方、債務者数が有限で、デフォルト率が1でなければ、全ての債務者がデフォルトせず、最下位のトランシェに全く損失が発生しない場合もあり、一般的にそのような確率は、原資産ポートフォリオの分散度合いが低いとき（債務者数が少ないとき）に大きくなる。つまり、最下位トランシェでは、原資産ポートフォリオの分散度合いと限界期待損失率に正の相関があるのである。最下位トランシェに近い上位トランシェでも同様の傾向があるが、補充水準が累積期待損失率を上回るような優先順位のトランシェになると、今度は逆に原資産ポートフォリオの分散度合いが低いほど、限界損失率が大きいという傾向を持つ。

図表34 限界経済的資本および累積経済的資本 ($p=1.0\%$)



図表35 限界経済的資本および累積経済的資本 ($p=0.10\%$)



次に、図表34に、限界経済的資本 $G(l|Z = N^{-1}(1 - \alpha))$ (1) および累積経済的資本(2)を示す(設定は図表33と同じ)。なお、 $M = \infty$ のケースは、(98)式により計算した。また、図表35に、デフォルト率のみを変え、 $p = 0.10\%$ のときの結果を示す。補完水準が K_{ALL} 付近のときを境に、限界経済的資本と債務者数の関係が逆転している。この背景は、微少単位の厚さを持つ連続的な優先劣後トランシェを仮想すると、上述の議論と同様に理解することが可能である。

(4) Gordy and Jones [2002] による方法

Gordy and Jones [2002] は、トランシェの補完水準が予め与えられていたとしても、実際にはその補完水準どおりのペイオフが発生しているわけではないと考えて、トランシェの補完水準が確率的に変動するモデルを考案した。その背景として、彼らは、

実際に発行されている証券化商品では、優先トランシェの投資家への全ての支払いが完了する前に、劣後トランシェの投資家にも、利息等の幾らかの支払いが行われるという意味で、厳格な優先順位を要求している証券化商品は多くない、

厳格に優先順位が守られていても、劣後トランシェのクーポンが原資産である貸出の金利より高く設定される分だけ、劣後トランシェの損失吸収力が強化されていることを、信用補完水準の設定時に過小評価することが多い⁶⁵、

ことを挙げている。Gordy and Jones [2002] の手法は、Pykhtin and Dev [2003] の手法と同じく、ポートフォリオが均一であれば、任意の債務者数のポートフォリオを原資産とする証券化商品に適用可能であり、全ての補完水準で滑らかな経済的資本の解析表現を与える。また、同手法はパーゼルの証券化商品の取扱いにおける内部格付手法の指定関数方式 (supervisory formula) で利用されている。以下、Gordy and Jones [2002] の手法を解説する。

イ．モデルの設定

まず、投資ポートフォリオと原資産ポートフォリオの設定を述べる。証券化商品を保有する投資家のポートフォリオは十分に細分化されており、投資ポートフォリオ全体に対する証券化商品のエクスポージャーは非常に小さいとする。このとき、投資ポートフォリオの損失は、標準正規分布に従う単一のシステムティック・リス

65 Gordy and Jones [2002] は次のような例を挙げている。

「元本\$100、金利8%の1年契約の貸出を原資産とする証券化商品を考える。同商品は、元本\$20、契約利息20%の劣後トランシェと、元本\$80、契約利息5%の優先トランシェに分けられているとする。このとき、優先トランシェの水準は20%であるが、貸出の22%がデフォルトしたときでも、貸出からの返済額は\$84.24 (=78 × 1.08) に達し、優先トランシェが毀損することはない。」

ク・ファクター X に依存するとする⁶⁶。また、原資産ポートフォリオの損失率を L 、 $X=x_{1-\alpha}$ を所与とするときの L の分布関数を $H_\alpha(l) = \Pr(L \leq l | X=x_{1-\alpha})$ とする⁶⁷。

以上で、モデルの大まかな枠組みは整ったが、後の計算で必要となる $H_\alpha(0)$ 、 $E[L | x_{1-\alpha}]$ 、 $\text{var}[L | x_{1-\alpha}]$ を導出するため、さらにモデルの詳細を特定する。ここでは、原資産ポートフォリオに含まれる債務者数を M として、全て均一な債務でポートフォリオが構成されているとする。また、各債務者のデフォルトは、1ファクターのマートン型モデルの枠組みに従って、デフォルト率を p 、資産相関 ρ 、各債務者のLGDは他の変数とは独立に平均 μ 、分散 σ^2 の同一分布に従うと仮定する⁶⁸。このとき、 $X=x_{1-\alpha}(=N^{-1}(1-\alpha))$ を所与とするときの条件付デフォルト率 p_α は、

$$p_\alpha = N\left(\frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho}N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right), \quad (114)$$

で与えられる。 $H_\alpha(0)$ は、 $X=x_{1-\alpha}$ のときに損失が0となる確率であるから、

$$H_\alpha(0) = (1-p_\alpha)^M, \quad (115)$$

で与えられる。また、損失率の条件付期待値 $E[L | x_{1-\alpha}]$ および分散 $\text{var}[L | x_{1-\alpha}]$ は、それぞれ、以下で与えられる。なお、 $E[L | x_{1-\alpha}] = K_{IRB}$ である。

$$E[L | x_{1-\alpha}] = \mu p_\alpha, \quad (116)$$

$$\text{var}[L | x_{1-\alpha}] = \frac{1}{M}(\mu^2 p_\alpha(1-p_\alpha) + p_\alpha \sigma^2). \quad (117)$$

次に、証券化商品の設定を述べる。証券化商品は優先順位の低い方から順に、トランシェ1から m まで、 m 個のトランシェで構成されているとする。ここで、 $\hat{S} = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ ($\sum S_i = 1$)を、各トランシェが全体に占める割合(トランシェの厚さ)とする。Gordy and Jones [2002]では、 \hat{S} が確率的に変動すると考え、パラメータ

66 Pykhtin and Dev [2002b] (本節(2))、Pykhtin and Dev [2003] (本節(3))では、原資産ポートフォリオのシステムティック・リスク・ファクター X と、投資ポートフォリオのシステムティック・リスク・ファクター Z の2つを考えたが、ここでは投資ポートフォリオのシステムティック・リスク・ファクター X のみを考える。

67 Gordy and Jones [2002]は、 L を X の増加関数として、 $X=x_\alpha$ を所与とするときの L の分布関数を $H_\alpha(\cdot)$ としているが、本稿では、 L を X の減少関数と考えるので、 $X=x_{1-\alpha}$ を所与とするときの L の分布関数を $H_\alpha(\cdot)$ とした。

68 Gordy and Jones [2002]では、 $\sigma^2 = \gamma\mu(1-\mu)$ を仮定している。

$(\tau\omega_1, \dots, \tau\omega_m)$ ($\tau > 0, \sum \omega_i = 1$)のディリクレ分布に従うと仮定する⁶⁹。このとき、 $\hat{S} = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ の期待値は $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ で与えられる。また、 τ は、 \hat{S} の不確実性の程度を表すパラメータで、 $\tau \rightarrow \infty$ のとき、 \hat{S} は確率的ではなくなり、 $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ に収束する。さらに、表記の簡単化のため、 $\hat{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ を $Z_j = \sum_{i \leq j} S_i$ で定義されるトランシェの累積補完水準、 $\hat{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ を $\zeta_j = \sum_{i \leq j} \omega_i$ で定義されるトランシェの期待累積補完水準とする。

さて、投資家が補完水準0、厚さ z の最劣後トランシェに投資するとき、経済的資本 $C(z)$ は⁷⁰、投資ポートフォリオが十分に細分化されていることから、定理2より $X = x_{1-\alpha}$ を所与とするときの条件付期待損失で与えられ、次式となる。

$$C(z) = \int_0^1 \min\{z, l\} dH_\alpha(l) = z - \int_0^z H_\alpha(l) dl . \tag{118}$$

したがって、トランシェの割合 \hat{S} が固定されている場合には、トランシェ j の経済的資本は、以下で与えられる⁷¹。

$$K_j = C(Z_j) - C(Z_{j-1}) = C(\zeta_j) - C(\zeta_{j-1}) . \tag{119}$$

一方、 \hat{S} が確率的に変動する場合には、次式で与えられる⁷²。

$$K_j = E[C(Z_j)] - E[C(Z_{j-1})] . \tag{120}$$

Z_j はベータ分布 $Beta(\tau\zeta_j, \tau(1-\zeta_j))$ に従うので^{73, 74}、 $E[C(Z_j)]$ は、

69 確率変数ベクトル $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ($x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1$)が、パラメータ $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ ($u_1, u_2, \dots, u_m \geq 0$)のディリクレ分布に従うとき、確率密度関数は、 $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{1}{z(\hat{u})} \prod_{i=1}^m x_i^{u_i-1}$ で与えられる。ただし、 $z(\hat{u}) = \prod_{i=1}^m \Gamma(u_i) / \Gamma(\sum_{i=1}^m u_i)$ である ($\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数を表し、 $\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} e^{-x} dx$ である)。ディリクレ分布は、ベータ分布を一般化したものであり、 x_i の周辺分布はベータ分布 $Beta(u_i, \sum_{i=1}^m u_i)$ となる (ベータ分布については脚注73を参照)。このとき、 x_i の期待値は $E[x_i] = u_i / \sum_{i=1}^m u_i$ で与えられる。

70 ここでは、原資産ポートフォリオの元本に対する割合で示す。

71 (119)式は、 K_{jRB} を境に階段状の限界経済的資本を与える。

72 \hat{S} はモデルに含まれる他の変数と独立とする。

73 ベータ分布 $Beta(a, b)$ の密度関数は、ベータ関数 $\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ を用いて $f(x) = x^{a-1} (1-x)^{b-1} / \beta(a, b)$ で与えられ、分布関数は $B(z; a, b) = \int_0^z f(x) dx$ となる。また、期待値は $a / (a+b)$ で与えられる。

74 ディリクレ分布の性質より、互いに独立にガンマ分布 $G(\tau\omega_i, 1)$ に従う確率変数 $V_i (i = 1, \dots, m)$ を用いて ($G(\tau\omega_i, 1)$ の密度関数は $f(x) = x^{\tau\omega_i-1} e^{-x} / \Gamma(\tau\omega_i)$)、 $S_j = V_j / \sum_{i=1}^m V_i$ と表すことができる。ここで、 $X_1 = \sum_{i \leq j} V_i$ 、 $X_2 = \sum_{i > j} V_i - X_1$ と置くと、トランシェの累積水準 Z_j は $Z_j = \sum_{i \leq j} S_i = X_1 / (X_1 + X_2)$ で表せる。ガンマ分布の再生性より $X_1 \sim G(\tau\zeta_j, 1)$ 、 $X_2 \sim G(\tau(1-\zeta_j), 1)$ であるから、 $Z_j \sim Beta(\tau\zeta_j, \tau(1-\zeta_j))$ となる。なお、各分布の性質は裏谷 [1998] を参照。

$$\begin{aligned}
E[C(Z_j)] &= E[Z_j] - E\left[\int_0^{Z_j} H_\alpha(l) dl\right] \\
&= \zeta_j - \int_0^1 z \frac{\tau \zeta_j^{-1} (1-z)^{\tau(1-\zeta_j)-1}}{\beta(\tau \zeta_j, \tau(1-\zeta_j))} \int_0^z H_\alpha(l) dl dz \\
&= \zeta_j - \left[B(z; \tau \zeta_j, \tau(1-\zeta_j)) \int_0^z H_\alpha(l) dl \right]_0^1 + \int_0^1 B(z; \tau \zeta_j, \tau(1-\zeta_j)) H_\alpha(z) dz \\
&= \zeta_j - \int_0^1 \{1 - B(z; \tau \zeta_j, \tau(1-\zeta_j))\} H_\alpha(z) dz, \quad (121)
\end{aligned}$$

と計算される。ここで、 $B(z; a, b)$ はベータ分布 $Beta(a, b)$ の分布関数である。

(121) 式は、期待累積補完水準 ζ_j 以外に、他の期待累積補完水準に依存しないので、トランシェを表す添字 j を省略し、期待累積補完水準 ζ までの最劣後部分の経済的資本 $K(\zeta)$ を、 ζ の連続関数として、

$$K(\zeta) \equiv E[C(Z) | E[Z] = \zeta] = \zeta - \int_0^1 \{1 - B(z; \tau \zeta, \tau(1-\zeta))\} H_\alpha(z) dz, \quad (122)$$

で表現することにする。以下では、 $K(\zeta)$ の評価方法を検討する。

□ . 経済的資本の解析表現

$K(\zeta)$ の算出は、 $H_\alpha(z)$ を解析的に捉えることが難しいため、数値計算やシミュレーションに頼らざるを得ない。そこで、 $K(\zeta)$ を解析的な関数で近似するために、適合関数 $F(\zeta)$ を、次式で定義する。

$$F(\zeta) \equiv 1 - \frac{K'(\zeta)}{K'(0)}. \quad (123)$$

ここで、 $K'(0) \approx 1 - H_\alpha(0)$ 、 $K'(1) = 0$ であることから、 $F(\zeta)$ は分布関数のような性質を持つ⁷⁵。(123) 式を $K'(\zeta) = K'(0)(1 - F(\zeta))$ と書き換えて積分すると、

$$K(\zeta) = K'(0) \int_0^\zeta (1 - F(y)) dy, \quad (124)$$

となるので、 $F(y)$ が得られれば $K(\zeta)$ は容易に求められる。

ここで、期待値 μ_F および分散 σ_F^2 を求めて、 $F(y)$ の近似を考える。(124) 式で、 $\zeta = 1$ とすると、

$$\begin{aligned}
K(1) &= K'(0) \int_0^1 (1 - F(y)) dy = K'(0) (1 - [yF(y)]_0^1) + \int_0^1 y f(y) dy \\
&= K'(0) \mu_F,
\end{aligned}$$

⁷⁵ Gordy [2004b] は、「 $\zeta = 0$ で $K(\zeta)$ の微分を解析的に得ることは困難である。しかし、 $\tau = \infty$ で $K'(\zeta)|_{\tau=\infty} = 1 - H_\alpha(\zeta)$ となるので、 $K'(0)|_{\tau=\infty} = 1 - H_\alpha(0)$ を得るが、 $K'(0)$ が、 $K'(0)|_{\tau=\infty}$ に τ の指数の速さで収束することを用いると、大きな τ では $K'(0)$ を $K'(0)|_{\tau=\infty} = 1 - H_\alpha(0)$ で近似することができる」としている。

となるので、期待値 μ_F は、次式で与えられる。

$$\mu_F = \frac{K(1)}{K'(0)} = \frac{E[L|x_{1-\alpha}]}{1-H_\alpha(0)} \quad (125)$$

一方、分散 σ_F^2 は、補論9に示すように、 τ が100程度より大きい場合には⁷⁶、以下で近似可能である。

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 &= \frac{1}{K'(0)} (\text{var}[L|x_{1-\alpha}] + E[L|x_{1-\alpha}]^2) - \mu_F^2 \\ &+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{K'(0)} (E[L|x_{1-\alpha}](1-E[L|x_{1-\alpha}]) - \text{var}[L|x_{1-\alpha}]) \end{aligned} \quad (126)$$

なお、右辺第1項は、分散化されていない債務者の個別リスクを表し、第2項は、トランシェの補完水準の不確実性による寄与で、 $\tau \rightarrow \infty$ のとき消滅する。

また、原資産ポートフォリオが十分に細分化されている場合には、 $K'(0) = 1$ 、 $\text{var}[L|x_{1-\alpha}] = 0$ となるので、(125)および(126)式は、

$$\mu_F = E[L|x_{1-\alpha}], \quad (127)$$

$$\sigma_F^2 = (1/\tau)E[L|x_{1-\alpha}](1-E[L|x_{1-\alpha}]), \quad (128)$$

と書き換えられる。ところで、(125)~(128)式の計算に必要な $H_\alpha(0)$ 、 $E[L|x_{1-\alpha}]$ 、 $\text{var}[L|x_{1-\alpha}]$ は、(115)~(117)式で導出済である。

以上で、適合関数 $F(\zeta)$ の期待値 μ_F 、分散 σ_F^2 が得られたので、 $F(\zeta)$ を期待値と分散が等しくなるベータ分布 $\tilde{F}(\zeta) = \text{Beta}(\theta\mu_F, \theta(1-\mu_F))$ で近似する⁷⁷。 θ は、トランシェの補完水準の不確実性を表すパラメータ τ と同様、 \tilde{F} の不確実性を表すパラメータで、

$$\theta \equiv \frac{\mu_F(1-\mu_F)}{\sigma_F^2} - 1, \quad (129)$$

で定義される。(124)式で、 $F(y)$ の代わりに $\tilde{F}(y)$ を代入した式を $\tilde{K}(\zeta)$ とすれば、

76 パーゼル では $\tau = 1000$ である (Basel Committee on Banking Supervision [2004] paragraph 626)。

77 Gordy and Jones [2002]によれば、2個のパラメータで決定される近似分布の候補は、幾つか考えられるが、 $[0, 1]$ の区間が与えられたときに、ベータ分布は自然な選択であり、実際に、幅広い水準のパラメータで良好な適合性を示す。

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(\zeta) &= K'(0) \int_0^\zeta (1 - \tilde{F}(y)) dy \\
&= (1 - H_\alpha(0)) \left\{ [(1 - \tilde{F}(y))y]_0^\zeta + \int_0^\zeta y \tilde{f}(y) dy \right\} \\
&= (1 - H_\alpha(0)) \left\{ \zeta (1 - B(\zeta; \theta \mu_F, \theta(1 - \mu_F))) + \int_0^\zeta y \frac{y^{\theta \mu_F - 1} (1 - y)^{\theta(1 - \mu_F) - 1}}{B(\theta \mu_F, \theta(1 - \mu_F))} dy \right\} \\
&= (1 - H_\alpha(0)) \left\{ \zeta (1 - B(\zeta; \theta \mu_F, \theta(1 - \mu_F))) + \int_0^\zeta \mu_F \frac{y^{\theta(\mu_F + 1) - 1} (1 - y)^{\theta(1 - \mu_F) - 1}}{B(\theta \mu_F + 1, \theta(1 - \mu_F))} dy \right\} \\
&= (1 - H_\alpha(0)) \{ \zeta (1 - B(\zeta; \theta \mu_F, \theta(1 - \mu_F))) + \mu_F B(\zeta; \theta \mu_F + 1, \theta(1 - \mu_F)) \},
\end{aligned} \tag{130}$$

となり、 $K(\zeta)$ の近似式を得る。(130)式で得られた $\tilde{K}(\zeta)$ は、パーゼルで証券化商品の取扱いにおける内部格付手法の指定関数方式で利用される $K(L)$ にほかならない⁷⁸。Gordy and Jones [2002]は、多くのさまざまなパラメータの組合せで数値検証を行った結果⁷⁹、 $\tilde{K}(\zeta)$ による $K(\zeta)$ の近似精度はほとんどの組合せで非常によく、現実的なパラメータの設定では問題はないと結論付けている。 $\tilde{K}(\zeta)$ が得られれば、経済的資本を $K(S, T)$ は、次式で与えられる。

$$K(S, T) = (\tilde{K}(S+T) - \tilde{K}(S)) / T. \tag{131}$$

また、限界経済資本 $\tilde{K}'(\zeta)$ は、(130)式を微分して、以下で与えられる。

$$\tilde{K}'(\zeta) = (1 - H_\alpha(0)) (1 - B(\zeta; \theta \mu_F, \theta(1 - \mu_F))). \tag{132}$$

原資産ポートフォリオが十分に細分化されている場合には、 $H_\alpha(0) = 0$ かつ、(127)、(128)式より $\theta = \tau - 1$ であるから、 $\tilde{K}(\zeta)$ および $\tilde{K}'(\zeta)$ は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(\zeta) &= \zeta (1 - B(\zeta; (\tau - 1) \mu_F, (\tau - 1)(1 - \mu_F))) \\
&\quad + \mu_F B(\zeta; (\tau - 1) \mu_F + 1, (\tau - 1)(1 - \mu_F)),
\end{aligned} \tag{133}$$

$$\tilde{K}'(\zeta) = 1 - B(\zeta; (\tau - 1) \mu_F, (\tau - 1)(1 - \mu_F)). \tag{134}$$

78 Basel Committee on Banking Supervision [2004] paragraph 624を参照。なお、最終案では、 K_{IRB} 以下の水準で自己資本控除になるほか、経済的資本に下限が設定されている((131)式により経済的資本が算出されるわけではない)。

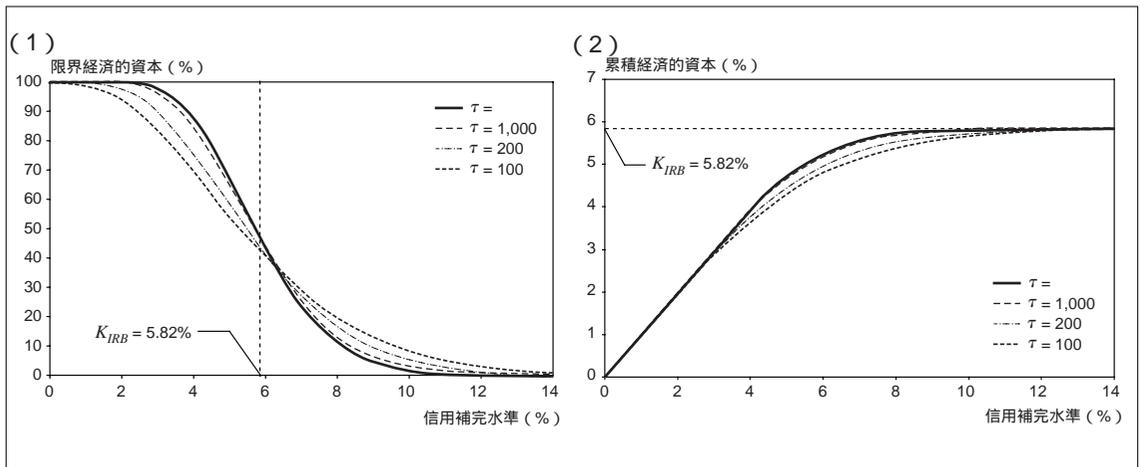
79 数値検証は、モンテカルロ・シミュレーションで求めた $K(\zeta)$ と $\tilde{K}(\zeta)$ を比較することで行った。なお、モンテカルロ・シミュレーションによる $K(\zeta)$ の推定は、 $Z \sim \text{Beta}(\tau \zeta, \tau(1 - \zeta))$ のとき、 $K(\zeta) = E[\min\{Z, L\} | x_{1-\alpha}]$ であることを利用する。具体的には、ベータ分布に従う Z の標本 $\{z_1, \dots, z_T\}$ および、分布関数 H_α に従う L の標本 $\{l_1, \dots, l_T\}$ を抽出し、 $(1/T) \sum \min\{z_i, l_i\}$ で推定する。

八．数値例

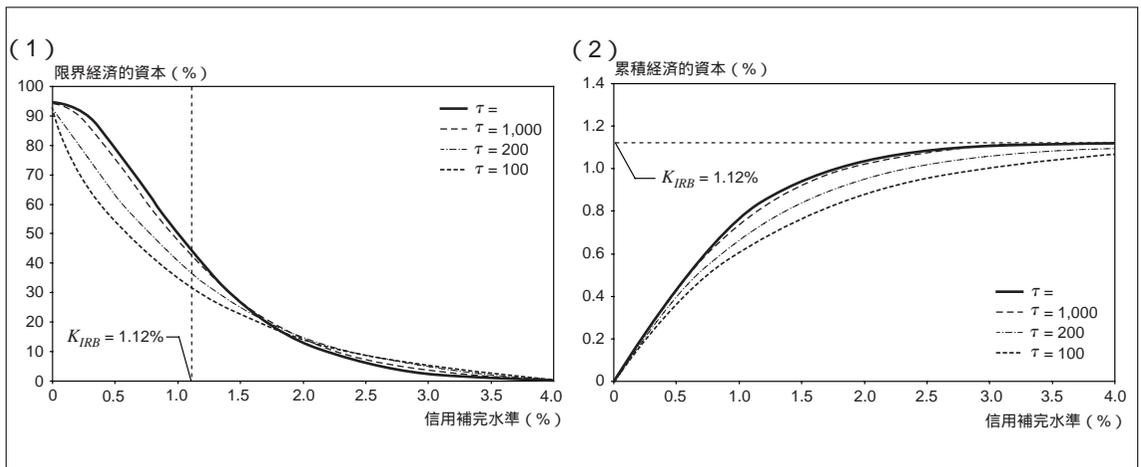
図表36に、 $p = 1.0\%$ 、 $\rho = 20\%$ 、 $\mu = 40\%$ 、 $\sigma = 25\%$ 、 $\alpha = 99.9\%$ 、 $M = 100$ のときに、経済的資本が τ の値にどのように依存するかを示す。補完水準が低いときは、 τ が小さいほど経済的資本が低く、補完水準が高いときは、 τ が大きいほど経済的資本が低い傾向がある。これは、 τ が小さいほど補完水準の不確実性が高まることを反映している。

また、図表37に、 $p = 0.1\%$ のときのグラフを示す。図表36と比較すると、デフォルト率が低いほど τ の影響が大きいことがわかる。

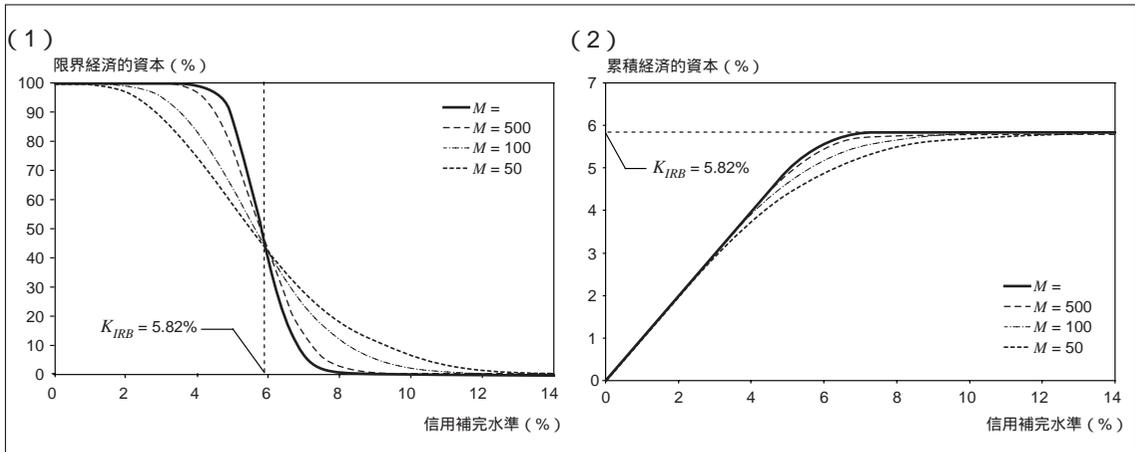
図表36 限界経済的資本および累積経済的資本 ($p = 1.0\%$ 、 $M = 100$)



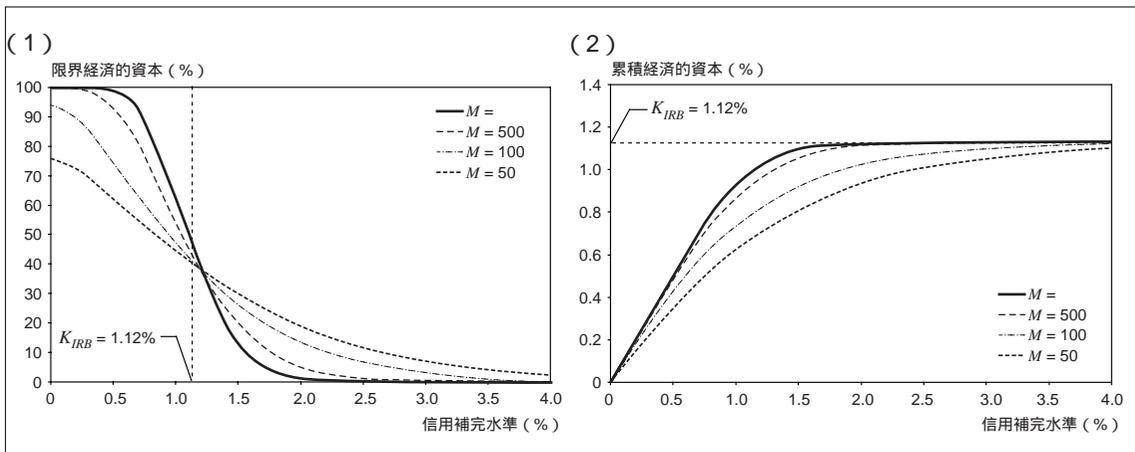
図表37 限界経済的資本および累積経済的資本 ($p = 0.1\%$ 、 $M = 100$)



図表38 限界経済的資本および累積経済的資本 ($p=1.0\%$ 、 $\tau=1,000$)



図表39 限界経済的資本および累積経済的資本 ($p=0.1\%$ 、 $\tau=1,000$)



次に、図表38に、 $p=1.0\%$ 、 $\rho=20\%$ 、 $\mu=40\%$ 、 $\sigma=25\%$ 、 $\alpha=99.9\%$ 、 $\tau=1,000$ のときに、経済的資本が債務者数 M にどのように依存するかを示す。補完水準が低いときは、 M が小さいほど経済的資本が低く、補完水準が高いときは、 M が大きいほど経済的資本が低い傾向がある。これは、債務者数 M が少ないほど、原資産ポートフォリオの分散効果が小さいためである。

また、図表39に、 $p=0.1\%$ のときのグラフを示す。図表38と比較すると、デフォルト率が低いほど債務者数 M の影響が大きいことがわかる。

(5) 小括

本節では、Pykhtin and Dev [2002b] Pykhtin and Dev [2003] Gordy and Jones [2002] による証券化商品の経済的資本を解析的に計算する方法を解説した。ここ

図表40 Pykhtin and Dev [2003] の方法とGordy and Jones [2002] の方法の特徴

	PD法 (Pykhtin and Dev [2003] の方法)	GJ法 (Gordy and Jones [2002] の方法)
仮定	<ul style="list-style-type: none"> ・原資産ポートフォリオは均一 ・投資ポートフォリオは十分に細分化 ・投資ポートフォリオは単一システムティック・リスク・ファクターに依存 ・投資ポートフォリオのエクスポージャーよりトランシェのエクスポージャーは小 	<ul style="list-style-type: none"> ・原資産ポートフォリオ独自のシステムティック・リスク・ファクターは非考慮 ・トランシェの補完水準は確率的に変動
パラメータ	債務者数 M 、LGDの期待値 μ 、同分散 σ^2 、トランシェの補完水準 S 、トランシェの厚さ T デフォルト率 p 、資産相関 ρ_A 、原資産ポートフォリオと投資ポートフォリオのシステムティック・リスク・ファクターの相関 ρ_X	デフォルト率 p 、資産相関 ρ^{80} 、補完水準の不確実性を表すパラメータ τ
計算方法	数値計算が必要	解析表現
備考		バーゼルの証券化商品の取扱いにおける内部格付手法の指定関数方式で利用

では、投資ポートフォリオが十分には細分化されていない場合にも適用可能である Pykhtin and Dev [2003] の方法（以下、PD法）と Gordy and Jones [2002] の方法（以下、GJ法）の主な異同を比較する。図表40に、PD法とGJ法の特徴を整理する。

まず、両手法の仮定の違いは、原資産ポートフォリオ独自のシステムティック・リスク・ファクターの存在を仮定するか否か、トランシェの補完水準に不確実性があるかどうかというモデル構築上のもののみである。なお、両手法とも原資産ポートフォリオが均一であることを前提としているが、不均一ポートフォリオでも、これを同等な均一ポートフォリオに置き換えることによって、これらの手法を適用することが可能となる⁸¹。次に、パラメータは、両手法とも8個で同じであるが、PD法では、原資産ポートフォリオと投資ポートフォリオのシステムティック・リスク・ファクターの相関 ρ_X 、GJ法では、補完水準の不確実性を表すパラメータ τ を、それぞれ必要とする点で異なっている。最後に、計算方法については、PD法が数値計算を必要とするため、相応の計算時間を要する一方、GJ法では解析表現を得ているため、計算時間の問題は発生しない。

80 デフォルト率 p および資産相関 ρ は、条件付デフォルト確率 p_α の計算に利用されるが、 K_{IRB} さえ得られれば、条件付デフォルト確率は $p_\alpha = K_{IRB} / \mu$ により求められるので、 p および ρ の代わりに K_{IRB} を入力パラメータとすることができる。

81 Gordy [2003] は、不均一ポートフォリオの損失分布のモーメントをマッチングさせることにより、同等な均一ポートフォリオを得る手法を提案している。また、バーゼルでは、不均一ポートフォリオに含まれるエクスポージャーの「実効的な個数」を求めることにより、不均一ポートフォリオを均一ポートフォリオで近似する方法を採用している。

6 . おわりに

本稿では、与信ポートフォリオの信用リスクを解析的に計算するための、極限損失分布およびグラニュラリティ調整の手法の考え方を解説した上で、実際に実務で利用する観点から、1ファクターとマルチ・ファクターのマートン型モデルの適用事例、および証券化商品の経済的資本の算出方法を説明した。

極限損失分布およびグラニュラリティ調整を利用した、与信ポートフォリオの信用リスクの近似解析表現は、幾つかの数値例で示したように、幅広い範囲のパラメータで非常によい近似精度を示した。また、この近似解表現は、証券化商品の信用リスクの算出にも応用することが可能である等、その適用範囲は広く、実務上の利用価値は高いと考えられる。ただ、含まれる債務者数が少ないポートフォリオや、与信が一部の債務者に集中しているポートフォリオでは、近似解表現の精度は必ずしもよくはないという傾向がある。したがって、近似解表現を実務で利用することを検討する場合、近似精度の検証を行い、その特性および限界を十分に把握することが肝要となる。

補論1 . 定理1の証明

独立な確率変数列 $\{Y_M\}$ 、正定数列 $\{a_M\}$ について、以下の補助定理1（大数の強法則の変形版）が成り立つ。

補助定理1

$a_M \rightarrow \infty$ 、 $\sum_{M=1}^{\infty} (V[Y_M] / a_M^2) < \infty$ に対し次式が成立する。

$$\frac{1}{a_M} \left(\sum_{i=1}^M Y_i - E \left[\sum_{i=1}^M Y_i \right] \right) \rightarrow 0 \quad (a.s.) \quad (A-1)$$

また、以下の補助定理2が成り立つ。

補助定理2

正の実数値列 $\{b_M\}$ が、 $\rho > 1$ に対し $b_M = O(M^{-\rho})$ と表せるとき、以下が成立する。

$$\sum_{M=1}^{\infty} b_M < \infty . \quad (A-2)$$

さて、 $Y_M \equiv L_M A_M$ 、 $a_M \equiv \sum_{i=1}^M A_i$ とする。システムティック・リスク・ファクター X の任意の実現値 x に対し、次式が成立する。

$$\sum_{M=1}^{\infty} (V[Y_M | x] / a_M^2) = \sum_{M=1}^{\infty} \left(A_M / \sum_{i=1}^M A_i \right)^2 V[L_M | x] . \quad (A-3)$$

ここで、 $V[L_M | x] < \infty$ より、有限の V^* に対して $V[L_M | x] \leq V^*$ とすると、

$$\sum_{M=1}^{\infty} (V[Y_M | x] / a_M^2) \leq V^* \sum_{M=1}^{\infty} \left(A_M / \sum_{i=1}^M A_i \right)^2 , \quad (A-4)$$

である。仮定1(b)より $\zeta > 0$ に対して、 $A_M / \sum_{i=1}^M A_i = O(M^{-1/2+\zeta})$ であるから、 $(A_M / \sum_{i=1}^M A_i)^2 = O(M^{-1+2\zeta})$ が成立し、 $\sum_{M=1}^{\infty} (A_M / \sum_{i=1}^M A_i)^2 < \infty$ となることがわかる（補助定理2）。また、仮定1(a)より $a_M \rightarrow \infty$ であるから、補助定理1の条件が満たされた。

$$L = \frac{\sum_{i=1}^M L_i A_i}{\sum_{i=1}^M A_i} = \frac{\sum_{i=1}^M Y_i}{a_M} , \quad (A-5)$$

であるから、 $X = x$ のとき、

$$L - E[L|x] \rightarrow 0 (a.s.), \quad (A-6)$$

が成立する。よって定理1が示された。

補論2 . VaRの微分 ((11) , (12)式で利用)

ここでは、Martin and Wilde [2002] に示されているVaRの微分の導出方法を説明する。

まず、 X および U を任意の確率変数、 ϵ をパラメータとそれぞれした上で、確率変数 $Y_\epsilon = X + \epsilon U$ を考える。このとき、以下の定理が成立する。

定理A (VaRの微分)

Y_ϵ の α 分位点 $q_\alpha(Y_\epsilon)$ の $\epsilon = 0$ での ϵ による1次および2次微分は、それぞれ

$$\left. \frac{dq_\alpha(Y_\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = E[U | X = q_\alpha(X)], \quad (\text{A-7})$$

$$\left. \frac{d^2q_\alpha(Y_\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = -\frac{1}{f_X(x)} \frac{d}{dx} (\text{var}(U | X = x) f_X(x)) \Big|_{x=q_\alpha(X)}, \quad (\text{A-8})$$

で得られる。ここで、 $f_X(x)$ は確率変数 X の確率密度変数である。

定理Aを証明する準備として、以下の補助定理3の証明を行う。

補助定理3

Y_ϵ の分布関数を $F_{Y_\epsilon}(\cdot)$ とすると、 $m > 0$ に対し、

$$\left. \frac{\partial^m F_{Y_\epsilon}}{\partial \epsilon^m} \right|_{\epsilon=0} = (-1)^m \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (\mu_m(x) f_X(x)), \quad (\text{A-9})$$

が成立する。ここで、 $\mu_m(x) = E(U^m | X = x)$ である。

[補助定理3の証明]

Y_ϵ の積率母関数を $M_{Y_\epsilon}(s) = E(e^{sX+s\epsilon U})$ と置く。これを ϵ で m 回偏微分し、 $\epsilon = 0$ とすると、

$$\left. \frac{\partial^m M_{Y_\epsilon}}{\partial \epsilon^m} \right|_{\epsilon=0} = s^m E(U^m e^{sX}), \quad (\text{A-10})$$

となる。 Y_ϵ の確率密度関数は、積率母関数 $M_{Y_\epsilon}(s)$ の逆ラプラス変換により、

$$f_{Y_\epsilon}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} M_{Y_\epsilon}(s) e^{-sx} ds, \quad (\text{A-11})$$

で得られる。これを ϵ で m 回偏微分し、 $\epsilon = 0$ とすると、(A-10)式より次式を得る。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^m}{\partial \epsilon^m} f_{Y_\epsilon}(z) \right|_{\epsilon=0} &= \frac{1}{2\pi i} E \left(\int_{-i\infty}^{i\infty} s^m U^m e^{s(X-x)} ds \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} E \left(U^m \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{s(X-x)} ds \right). \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

ここで、 $1/2\pi i \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{s(X-x)} dx = \delta_{X=x}$ が成立し、さらに、 $E(U^m \delta_{X=x}) = \mu_m(z) f_X(x)$ となることに注意すると、(A-12)式は、

$$\left. \frac{\partial^m}{\partial \epsilon^m} f_{Y_\epsilon}(x) \right|_{\epsilon=0} = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} E(U^m \delta_{X=x}) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} (\mu_m(x) f_X(x)), \quad (\text{A-13})$$

と変形することができる。(A-13)式を積分すれば、(A-9)式が得られる。よって補助定理3が示された。

[定理Aの証明]

α を固定値とし、 Y_ϵ の α 分位点 $q_\alpha(Y_\epsilon)$ を簡単に $q(\epsilon)$ と表記する。このとき、 $F_{Y_\epsilon}(q(\epsilon)) = \alpha$ (一定)である。ここで、 $F(\epsilon, q) = F_{Y_\epsilon}(q(\epsilon))$ のように、 $F_{Y_\epsilon}(q(\epsilon))$ を ϵ および $q(=q(\epsilon))$ の関数として考えると、連鎖律より $dF = F_\epsilon d\epsilon + F_q dt = 0$ となり、

$$\frac{dq}{d\epsilon} = -\frac{F_\epsilon}{F_q}, \quad (\text{A-14})$$

が成立する。ここで、下の添字は偏微分を表す。また、2次微分については、

$$\frac{d^2 q}{d\epsilon^2} = \frac{-F_q^2 F_{\epsilon\epsilon} + 2F_\epsilon F_q F_{\epsilon q} - F_\epsilon^2 F_{qq}}{F_q^3}, \quad (\text{A-15})$$

が成立する。

さて、補助定理3の(A-9)式で、 $m=1$ とすると、

$$\left. \frac{\partial F_{Y_\epsilon}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = -\mu_1 f, \quad (\text{A-16})$$

が得られる。(A-14)式は、(A-16)式および $F_q = f$ に注意すると、

$$\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} q_\alpha(Y_\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = -\frac{F_\epsilon}{F_q} = \frac{\mu_1 f}{f} = \mu_1, \quad (\text{A-17})$$

と、変形できる。これは、定理Aの(A-7)式にほかならない。

また、補助定理3の(A-9)式で、 $m=2$ とすると、

$$F_{\epsilon\epsilon} = \frac{\partial^2 F_{Y_\epsilon}}{\partial \epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{dx} (\mu_2 f), \quad (\text{A-18})$$

が得られる。これを用いて、(A-15)式は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2q}{d\epsilon^2} &= \frac{-1}{f^3} \left(f^2 \frac{d}{dx} (\mu_2 f) - 2\mu_1 f^2 \frac{d}{dx} (\mu_1 f) + (\mu_1 f)^2 \frac{df}{dx} \right) \\ &= -\frac{1}{f} \frac{d}{dx} (\mu_2 f - \mu_1^2 f), \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

と書き換えられる。ここで $\mu_2 - \mu_1^2 = \text{var}(U|X=x)$ より、(A-8)式を得る。

補論3．期待LGDの導出および p_i に関する単調減少性の証明 ((32)式)

期待LGDは、デフォルト時の潜在LGD \hat{Q}_i の条件付期待値 $E[\hat{Q}_i | Y_i < N^{-1}(p_i)]$ で与えられる。 $D_i = 1_{\{Y_i < N^{-1}(p_i)\}}$ であることに注意すれば、

$$E[\hat{Q}_i | Y_i < N^{-1}(p_i)] = E[D_i \hat{Q}_i] / p_i, \quad (\text{A-20})$$

となる。ここで、 X を所与とするとき D_i と \hat{Q}_i は独立であるから、

$$\begin{aligned} E[D_i \hat{Q}_i] &= E[E[D_i \hat{Q}_i | X]] \\ &= E[E[D_i(X)] E[\hat{Q}_i | X]] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_i(x) (\mu_i - \sigma_i \sqrt{r_i} x) n(x) dx \\ &= \mu_i p_i + \sigma_i \sqrt{r_i} \int_{-\infty}^{\infty} n'(x) p_i(x) dx \\ &= \mu_i p_i + \sigma_i \sqrt{r_i} \left\{ [n(x) p_i(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} n(x) p_i'(x) dx \right\} \\ &= \mu_i p_i + \sigma_i \sqrt{r_i} \left\{ 0 + \int_{-\infty}^{\infty} n(x) \sqrt{\frac{\rho_i}{1-\rho_i}} n \left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho_i} x}{\sqrt{1-\rho_i}} \right) dx \right\} \\ &= \mu_i p_i + \sigma_i \sqrt{r_i} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\rho_i} n(N^{-1}(p_i)) n \left(\frac{x - \sqrt{\rho_i} N^{-1}(p_i)}{\sqrt{1-\rho_i}} \right) dx \\ &= \mu_i p_i + \sigma_i \sqrt{\rho_i r_i} n(N^{-1}(p_i)), \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

となる。(A-21)式を(A-20)式に代入すると、次式が得られる。

$$E[\hat{Q}_i | Y_i < N^{-1}(p_i)] = \mu_i + \sigma_i \sqrt{\rho_i r_i} n(N^{-1}(p_i)) / p_i. \quad (\text{A-22})$$

これで、(32)式が得られた。

さて、 $f(p_i) = \mu_i + \sigma_i \sqrt{\rho_i r_i} n(N^{-1}(p_i)) / p_i$ とにおいて、 p_i で微分すると、

$$f'(p_i) = \sigma_i \sqrt{\rho_i r_i} \left(- \frac{n(N^{-1}(p_i)) + p_i N^{-1}(p_i)}{p_i^2} \right), \quad (\text{A-23})$$

となる。なお、 $dn(x)/dx = -xn(x)$ 、 $dN^{-1}(p_i)/dp_i = 1/n(N^{-1}(p_i))$ を利用した。ここで、(A-23)式の括弧内の分子に注目し、 $g(p_i) = n(N^{-1}(p_i)) + p_i N^{-1}(p_i)$ とにおいて、 p_i で微分すると次式となる。

$$g'(p_i) = -N^{-1}(p_i) + N^{-1}(p_i) + p_i / n(N^{-1}(p_i)) = p_i / n(N^{-1}(p_i)) . \quad (\text{A-24})$$

よって、 $g'(p_i) \geq 0$ から、 $g(p_i)$ は単調増加であることがわかる。ここで、ロピタルの定理を利用すると、

$$\begin{aligned} \lim_{p_i \rightarrow 0} g(p_i) &= \lim_{p_i \rightarrow 0} n(N^{-1}(p_i)) + p_i N^{-1}(p_i) = \lim_{p_i \rightarrow 0} 0 + \frac{N^{-1}(p_i)}{1/p_i} \\ &= \lim_{p_i \rightarrow 0} \frac{-p_i^2}{n(N^{-1}(p_i))} = \lim_{p_i \rightarrow 0} \frac{-2p_i}{-N^{-1}(p_i)} = 0 , \end{aligned} \quad (\text{A-25})$$

となるから、 $g(p_i) \geq 0$ である。よって、(A-23)式より $f'(p_i) \leq 0$ となり、 $f(p_i)$ が p_i の単調減少関数であることがわかる。

補論4 . $v_{\infty}(y)$ の導出 ((81)式の導出)

条件付分散のシステムティック項 $v_{\infty}(y)$ は、

$$\begin{aligned} v_{\infty}(y) &= \text{var}[E[L|\{X_k\}]|Z=z] \\ &= E[\{E[L|\{X_k\}]\}^2|Z=z] - \{E[E[L|\{X_k\}]|Z=z]\}^2 \\ &= E[\{E[L|\{X_k\}]\}^2|Z=z] - \{E[L|Z=z]\}^2, \end{aligned} \quad (\text{A-26})$$

と変形できる。(A-26)式の右辺第1項の内側の期待値の2乗は、

$$\begin{aligned} &\{E[L|\{X_k\}]\}^2 \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j \mu_i \mu_j N \left[\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{r_i} \sum_{k=1}^N \beta_{ik} X_k}{\sqrt{1-r_i}} \right] N \left[\frac{N^{-1}(p_j) - \sqrt{r_j} \sum_{k=1}^N \beta_{jk} X_k}{\sqrt{1-r_j}} \right], \end{aligned} \quad (\text{A-27})$$

となる。ここで、確率変数 Y_i および \tilde{Y}_j を以下のように定義する。

$$Y_i = \sqrt{r_i} \sum_{k=1}^N \beta_{ik} X_k + \sqrt{1-r_i} \xi_i, \quad (\text{A-28})$$

$$\tilde{Y}_j = \sqrt{r_j} \sum_{k=1}^N \beta_{jk} X_k + \sqrt{1-r_j} \tilde{\xi}_j, \quad (\text{A-29})$$

ここで、 ξ_i および $\tilde{\xi}_j$ は他の確率変数とは独立な、標準正規分布に従う変数である。 Y_i および \tilde{Y}_j を用いると、(A-27)式は、

$$\begin{aligned} \{E[L|\{X_k\}]\}^2 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j \mu_i \mu_j \Pr[Y_i < N^{-1}(p_i)|\{X_k\}] \Pr[\tilde{Y}_j < N^{-1}(p_j)|\{X_k\}] \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j \mu_i \mu_j \Pr[Y_i < N^{-1}(p_i), \tilde{Y}_j < N^{-1}(p_j)|\{X_k\}], \end{aligned} \quad (\text{A-30})$$

となる。なお、2行目への変形は、 $\{X_k\}$ を所与とするととき Y_i および \tilde{Y}_j が独立であることを用いた。このとき、(A-26)式の右辺第1項は、

$$\begin{aligned} &E[\{E[L|\{X_k\}]\}^2|Z=z] \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j \mu_i \mu_j E[\Pr[Y_i < N^{-1}(p_i), \tilde{Y}_j < N^{-1}(p_j)|\{X_k\}]|Z=z] \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j \mu_i \mu_j \Pr[Y_i < N^{-1}(p_i), \tilde{Y}_j < N^{-1}(p_j)|Z=z] \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j \mu_i \mu_j N_2(N^{-1}[\hat{p}_i(z)], N^{-1}[\hat{p}_j(z)], \hat{\rho}_{ij}), \end{aligned} \quad (\text{A-31})$$

となる。また、(A-26)式の右辺第2項は、

$$\{E[L|Z=z]\}^2 = \left\{ \sum_{i=1}^M w_i \mu_i \hat{p}_i(z) \right\}^2, \quad (\text{A-32})$$

となる。(A-17)式に、(A-31) (A-32)式を代入すると、

$$\begin{aligned} v_{\infty}(y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j \mu_i \mu_j N_2(N^{-1}[\hat{p}_i(z)], N^{-1}[\hat{p}_j(z)], \hat{\rho}_{ij}) - \left\{ \sum_{i=1}^M w_i \mu_i \hat{p}_i(z) \right\}^2 \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j \mu_i \mu_j [N_2(N^{-1}[\hat{p}_i(z)], N^{-1}[\hat{p}_j(z)], \hat{\rho}_{ij}) - \hat{p}_i(z) \hat{p}_j(z)], \end{aligned} \quad (\text{A-33})$$

となり、 $v_{\infty}(y)$ が得られた。

補論5 . $v_G(z)$ の導出 ((83)式の導出)

条件付分散のグラニュラリティ調整項 $v_G(z)$ は、

$$\begin{aligned} v_G(z) &= E[\text{var}(L|\{X_k\})|Z=z] \\ &= E[L^2|Z=z] - E\{E[L|\{X_k\}]^2|Z=z\}, \end{aligned} \quad (\text{A-34})$$

と変形することができる。ここで、債務者 i のデフォルト状態を表す変数 $D_i = 1_{\{Y_i \leq N^{-1}(p_i)\}}$ を定義すると、(A-34)式の右辺第1項は、

$$\begin{aligned} E[L^2|Z=z] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^M w_i D_i Q_i\right)\left(\sum_{j=1}^M w_j D_j Q_j\right) \middle| Z=z\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^M w_i^2 D_i Q_i^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^M w_i w_j D_i D_j Q_i Q_j \middle| Z=z\right] \\ &= \sum_{i=1}^M w_i^2 \hat{p}_i(z) (\mu_i^2 + \sigma_i^2) + \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^M w_i w_j \mu_i \mu_j N_2(N^{-1}[\hat{p}_i(z)], N^{-1}[\hat{p}_j(z)], \hat{\rho}_{ij}), \end{aligned} \quad (\text{A-35})$$

となる。(A-34)式の右辺第2項は(A-31)式に与えられているので、(A-34)式に、(A-31)式、(A-35)式を代入すると、

$$\begin{aligned} v_G(z) &= \sum_{i=1}^M w_i^2 \hat{p}_i(z) (\mu_i^2 + \sigma_i^2) + \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^M w_i w_j \mu_i \mu_j N_2(N^{-1}[\hat{p}_i(z)], N^{-1}[\hat{p}_j(z)], \hat{\rho}_{ij}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i w_j \mu_i \mu_j N_2(N^{-1}[\hat{p}_i(z)], N^{-1}[\hat{p}_j(z)], \hat{\rho}_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^M w_i^2 (\mu_i^2 [\hat{p}_i(z)] - N_2(N^{-1}[\hat{p}_i(z)], N^{-1}[\hat{p}_i(z)], \hat{\rho}_{ii})) + \sigma_i^2 \hat{p}_i(z), \end{aligned} \quad (\text{A-36})$$

となり、 $v_G(z)$ が得られた。

補論6．2ファクター・モデルにおける L^∞ の厳密な分位点の計算方法⁸²
(脚注47)

バケットAおよびBにおける資産収益率を以下のように表す。

$$\begin{cases} Y_i = \sqrt{r_A} X_1 + \sqrt{1-r_A} \xi_i \\ Y_j = \sqrt{r_B} (\rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2} X_2) + \sqrt{1-r_B} \xi_j. \end{cases} \quad (\text{A-37})$$

このとき、極限損失 L^∞ は、

$$\begin{aligned} L^\infty &= E[L | \{X_k\}] = \sum_{i=1}^M w_i \mu_i N \left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{r_i} \sum_{k=1}^N \beta_{ik} X_k}{\sqrt{1-r_i}} \right) \\ &= \omega_A \mu_A N \left(\frac{N^{-1}(p_A) - r_A X_1}{\sqrt{1-r_A}} \right) + \omega_B \mu_B N \left(\frac{N^{-1}(p_B) - \sqrt{r_B} (\rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2} X_2)}{\sqrt{1-r_B}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A-38})$$

となる。さて、 L^∞ の分布関数を考え、 $\Pr [L^\infty < l] = E [\Pr [L^\infty < l | X_1]]$ と書き換える。ここで、事象 $\{L^\infty < l\}$ は、(A-38)式より、

$$\omega_A \mu_A N \left(\frac{N^{-1}(p_A) - r_A X_1}{\sqrt{1-r_A}} \right) + \omega_B \mu_B N \left(\frac{N^{-1}(p_B) - \sqrt{r_B} (\rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2} X_2)}{\sqrt{1-r_B}} \right) \leq l, \quad (\text{A-39})$$

と表せる。条件付確率 $\Pr [L^\infty < l | X_1]$ を求めるため、上式を X_2 について解くと、

$$\begin{aligned} X_2 &\geq \frac{1}{\sqrt{r_B(1-\rho^2)}} \\ &\times \left[N^{-1}(p_B) - \sqrt{r_B} \rho X_1 - \sqrt{1-r_B} N^{-1} \left(\frac{1}{\omega_B \mu_B} \left\{ l - \omega_A \mu_A N \left(\frac{N^{-1}(p_A) - \sqrt{r_A} X_1}{\sqrt{1-r_A}} \right) \right\} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A-40})$$

となる。 Z_2 は標準正規分布に従う確率変数であるから、(A-40)式の右辺を $K(X_1)$ と置けば、条件付確率は、

82 本手法は、Pykhtin [2004]の著者に確認したものである。

$$\Pr[L^\infty < l | X_1] = 1 - N(K(X_1)) , \quad (\text{A-41})$$

で与えられる。よって、 L^∞ の分布関数は、以下の積分を評価することで得られる。

$$\Pr[L^\infty \leq l] = E[\Pr[L^\infty \leq l | X_1]] = \int_{-\infty}^{\infty} n(x) \Pr[L^\infty \leq l | X_1 = x] dx . \quad (\text{A-42})$$

分位点 q_α (L^∞) は、 $\Pr[L^\infty \leq l] = \alpha$ となる l を数値的に解くことで求められる。具体的には、ニュートン＝ラフソン法を利用する。同手法には、分布関数 $\Pr[L^\infty \leq l]$ の微分が必要であるが、 $dN^{-1}(x)/dx = 1/n(N^{-1}(x))$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl} \Pr[L^\infty < l | X_1 = x] &= n(K(x)) \sqrt{1-r_B} \\ &\times \left[\sqrt{r_B(1-\rho^2)} \omega_B \mu_B n \left(N^{-1} \left(\frac{1}{\omega_B \mu_B} \left\{ l - \omega_A \mu_A N \left(\frac{N^{-1}(p_A) - \sqrt{r_A} z}{\sqrt{1-r_A}} \right) \right\} \right) \right) \right]^{-1} , \end{aligned} \quad (\text{A-43})$$

となるので、これを x について積分すれば、分布関数 $\Pr[L^\infty \leq l]$ の微分が得られる。

相関 ρ の水準を変えて、例えば0.01刻みで、分位点を得たい場合には、高い相関 ρ から始めると、よい初期値が得られる。 $\rho = 0.99$ の場合には、1ファクター・モデルを適用した場合の分位点を初期値とする。1ファクター・モデルによる分位点は、

$$L^\infty = E[L | X] = \sum_{i=1}^M w_i \mu_i N \left[\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{r_i} X}{\sqrt{1-r_i}} \right] , \quad (\text{A-44})$$

で、 $X = N^{-1}(1-\alpha)$ とすることで得られる。この初期値では、通常2、3回で収束する。次に、ここで得た $\rho = 0.99$ の場合の分位点を、 $\rho = 0.98$ の場合の初期値に用いる。これを $\rho = 0$ まで順次繰り返す。これにより計算の反復回数を減らし、効率よく計算することができる。

補論7．トランシェの期待損失率の確認 ((94) (95)式)

$dN_2(x, y, a)/dx = n(x) N(y - ax) / \sqrt{1 - a^2}$ 、 $dN^{-1}(x)/dx = 1/n(N^{-1}(x))$ に注意すると、 $l < \mu$ のとき、

$$\frac{d}{dl} \mu N_2(N^{-1}(l/\mu), N^{-1}(p), \sqrt{1 - \rho_A}) = N \left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{1 - \rho_A} N^{-1}(l/\mu)}{\sqrt{\rho_A}} \right) = G(l), \quad (\text{A-45})$$

が成立する。これを用いると、 $l < \mu$ のとき、 $H(l) = \int_0^l G(x) dx$ は、

$$H(l) = \mu N_2(N^{-1}(l/\mu), N^{-1}(p), \sqrt{1 - \rho_A}), \quad (\text{A-46})$$

で与えられる。また、 $l \geq \mu$ のとき $G(l) = 0$ より、 $H(l) = \int_0^\mu G(x) dx$ となるから、(A-46)式で $l \rightarrow \mu$ として、以下で与えられる。

$$H(l) = \mu p. \quad (\text{A-47})$$

このとき、補完水準 S 、厚さ T のトランシェの期待損失率は、 $H(l)$ を用いて、

$$E(U(S, T)) = \frac{1}{T} \int_S^{S+T} G(l) dl = \frac{H(S+T) - H(S)}{T}, \quad (\text{A-48})$$

と表せる。(A-46)~(A-48)式は(94) (95)式である。

補論8．トランシェの経済的資本の確認 ((99) (100)式)

補論7と同様の手順で導出可能である。 $dN_2(x, y, a)/dx = n(x) N(y - ax) / \sqrt{1-a^2}$ 、 $dN^{-1}(x)/dx = 1/n(N^{-1}(x))$ に注意すると、 $l < \mu$ のとき、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dl} \mu N_2 \left(N^{-1}(l/\mu), \frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho_A \rho_X} N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho_A \rho_X}}, \sqrt{\frac{1 - \rho_A}{1 - \rho_A \rho_X}} \right) \\ &= N \left(\frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho_A} \sqrt{\rho_X} N^{-1}(\alpha) - \sqrt{1 - \rho_A} N^{-1}(l/\mu)}{\sqrt{\rho_A} \sqrt{1 - \rho_X}} \right) \\ &= G(l | Z = N^{-1}(1 - \alpha)) , \end{aligned} \tag{A-49}$$

が成立する。これを用いると、 $l < \mu$ のとき、 $I(l) = \int_0^l G(x | Z = N^{-1}(1 - \alpha)) dx$ は、

$$I(l) = \mu N_2 \left(N^{-1}(l/\mu), \frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho_A \rho_X} N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho_A \rho_X}}, \sqrt{\frac{1 - \rho_A}{1 - \rho_A \rho_X}} \right) , \tag{A-50}$$

で与えられる。また、 $l \geq \mu$ のとき $G(l | Z = N^{-1}(1 - \alpha)) = 0$ より、 $I(l) = \int_0^\mu G(x | Z = N^{-1}(1 - \alpha)) dx$ となるので、(A-50)式で $l \rightarrow \mu$ として、

$$I(l) = \mu N \left(\frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\rho_A \rho_X} N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho_A \rho_X}} \right) , \tag{A-51}$$

で与えられる。

このとき、補完水準 S 、厚さ T のトランシェの経済的資本は、 $I(l)$ を用いて、

$$K(S, T) = \frac{1}{T} \int_S^{S+T} G(l | Z = N^{-1}(1 - \alpha)) dl = \frac{I(S+T) - I(S)}{T} , \tag{A-52}$$

と表せる。(A-50)~(A-52)式は(99) (100)式である。

補論9 . 適合関数 $F(\zeta)$ の分散 σ_F^2 の導出 ((126)式の導出)

$f(\zeta) = F'(\zeta)$ とすると、分散の定義より、適合関数 $F(\zeta)$ の分散は、

$$\sigma_F^2 = \int_0^1 y^2 f(y) dy - \mu_F^2 = \frac{-1}{K'(0)} \int_0^1 y^2 K''(y) dy - \mu_F^2, \quad (\text{A-53})$$

で与えられる。(A-53)式内の積分は部分積分を用い、

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^2 K''(y) dy &= [y^2 K'(y)]_0^1 - 2 \int_0^1 y K'(y) dy = -2 \left([yK(y)]_0^1 - \int_0^1 K(y) dy \right) \\ &= -2 \left(K(1) - \int_0^1 K(y) dy \right), \end{aligned} \quad (\text{A-54})$$

と変形することができる。(A-54)式内の $\int_0^1 K(y) dy$ は、(122)式より、

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(y) dy &= \int_0^1 \left(y - \int_0^1 (1 - B(z; \tau y, \tau(1-y))) H_\alpha(z) dz \right) dy \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^1 H_\alpha(z) dz + \int_0^1 \int_0^1 B(z; \tau y, \tau(1-y)) H_\alpha(z) dz dy \\ &= \frac{1}{2} - (1 - K(1)) + \int_0^1 \left(\int_0^1 B(z; \tau y, \tau(1-y)) dy \right) H_\alpha(z) dz \\ &= K(1) - \left(\frac{1}{2} - \int_0^1 \left(\int_0^1 B(z; \tau y, \tau(1-y)) dy \right) H_\alpha(z) dz \right), \end{aligned} \quad (\text{A-55})$$

となる。(A-54) (A-55)式を(A-53)式に代入すれば、

$$\sigma_F^2 = \frac{1}{K'(0)} \left(1 - 2 \int_0^1 \Xi_\tau(z) H_\alpha(z) dz \right) - \mu_F^2, \quad (\text{A-56})$$

を得る。ただし、次式の関係がある。

$$\Xi_\tau(z) \equiv \int_0^1 B(z; \tau y, \tau(1-y)) dy, \quad (\text{A-57})$$

ここで、 $\Xi_\tau(z)$ は、次式により極めて正確な近似が可能である⁸³。

$$\tilde{\Xi}_\tau(z) = z + \xi \left(\frac{1}{2} - z \right) \frac{(z(1-z))^{\eta-1}}{\beta(\eta, \eta)}, \quad (\text{A-58})$$

ただし、

83 詳細は、Gordy and Jones [2002] のAppendix.Bを参照。

$$\eta = \frac{3(\tau^2 + 6\tau + 6)}{3\tau^2 + 13\tau + 18}, \quad (\text{A-59})$$

$$\xi = \frac{2\eta + 1}{3(\tau + 1)}, \quad (\text{A-60})$$

である。また、 τ が100程度より大きければ、 $\eta \approx 1$ 、 $\xi \approx 1/\tau$ と近似することができ
て⁸⁴、(A-58)式は、

$$\tilde{\Xi}_\tau(z) = z + \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{2} - z \right), \quad (\text{A-61})$$

と書き換えることができる。このとき、部分積分を利用すれば、

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \tilde{\Xi}_\tau(z) H_\alpha(z) dz &= \left[\left(z^2 + \frac{1}{\tau} (z - z^2) \right) H_\alpha(z) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(z^2 + \frac{1}{\tau} (z - z^2) \right) h_\alpha(z) dz \\ &= 1 - (\text{var}[L | x_{1-\alpha}] + E[L | x_{1-\alpha}]^2 + \frac{1}{\tau} (E[L | x_{1-\alpha}](1 - E[L | x_{1-\alpha}]) - \text{var}[L | x_{1-\alpha}])) , \end{aligned} \quad (\text{A-62})$$

となり、これを (A-56)式に代入すると (126)式を得る。

.....
84 詳細は、Gordy and Jones [2002] のFigure 7を参照。

参考文献

- 家田 明・丸茂幸平、「単一ファクター・モデルによる信用リスク計量化について」、『証券アナリストジャーナル』、2002年4月、76～93頁
- ・吉羽要直、「与信ポートフォリオにおける信用リスクの簡便な算出方法」、『金融研究』、第19巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2000年、109～144頁
- 小宮清孝、「CDOのプライシング・モデルとそれを用いたCDOの特性等の考察：CDOの商品性、国内市場の概説とともに」、『金融研究』、第22巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2003年、89～130頁
- 水野裕二・河合祐子、『詳細 信用リスク商品 - クレジット・デリバティブと証券化の実務』、IS コム、2002年
- 蓑谷千鳳彦、『すぐに役立つ統計分布』、東京図書、1998年
- Basel Committee on Banking Supervision, “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards,” Basel Committee Publications No. 107, June 2004. (<http://www.bis.org/> で入手可)
- Canabarro, E., E. Picoult, and T. Wilde, “Analysing counterparty risk,” *Risk*, 16 (9), 2003, pp. 117-122.
- Credit Suisse Financial Products, *CreditRisk+: A Credit Risk Management Framework*, 1997.
- Dembo, A., J. Deuschel, and D. Duffie, “Large portfolio losses,” *Finance and Stochastic*, 8, 2004, pp. 3-16.
- Emmer, S., and D. Tasche, “Calculating credit risk capital charges with the one-factor model,” Working paper, 2003. (<http://www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/pers/tasche/> で入手可)
- Frye, J., “Collateral damage,” *Risk*, 13 (4), 2000a, pp. 91-94.
- ・ “Depressing recoveries,” *Risk*, 13 (11), 2000b, pp. 108-111.
- Gordy, M., “A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules,” *Journal of Financial Intermediation*, 12 (3), July 2003a, pp. 199-232.
- (ed.), *Credit Risk Modelling: The Cutting-edge Collection - Technical Papers published in Risk 1999-2003*, Risk Books, 2003b.
- ・ “Granularity Adjustment in Portfolio Credit Risk Measurement,” *Risk Measures for the 21st Century*, edited by G. Szegő, Wiley, 2004a, pp. 109-121.
- ・ “Model Foundations for the Supervisory Formula Approach,” *Structured Credit Products: Pricing, Rating, Risk Management and Basel II*, edited by W. Perraudin, Risk Books, 2004b.
- ・ and D. Jones, “Capital allocation for securitizations with uncertainty in loss prioritization,” Basel Committee Working paper, 2002. (<http://www.bis.org/> で入手可)
- Gouriéroux, C., J.P. Laurent, and O. Scaillet, “Sensitivity analysis of values at risk,” *Journal of Empirical Finance*, 7, 2000, pp. 225-245.
- Gupton, G., C. Finger, and M. Bhatia, *CreditMetrics-Technical Document*, J.P. Morgan & Co. Incorporated, 1997.
- Luenberger, D.G., *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons, Inc, 1969.
- Martin, R., K. Thompson, and C. Browne, “Taking to the saddle,” *Risk*, 14 (6), 2001, pp. 91-94.

- , and T. Wilde, "Unsystematic credit risk," *Risk*, 15 (11), 2002, pp. 123-128.
- Pykhtin, M., and A. Dev, "Analytical approach to credit risk modeling," *Risk*, 15 (3), 2002a, pp. s26-s32.
- , and , "Credit risk in asset securitizations: Analytical model," *Risk*, 15 (5), 2002b, pp. s16-s20.
- , and , "Coarse-grained CDOs," *Risk*, 16 (1), 2003, pp. 113-116.
- , "Unexpected recovery risk," *Risk*, 16 (8), 2003, pp. s26-s32.
- , "Multi-factor adjustment," *Risk*, 17 (3), 2004, pp. 85-90.
- Tasche, D., "The single risk factor approach to capital charges in case of correlated loss given default rates," Working paper, 2004. (<http://www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/pers/tasche/>で入手可)
- Vasicek, O., "Limiting loan loss probability distribution," KMV Corporation, 1991.
- , "A series expansion for the bivariate normal integral," *Journal of Computational Finance*, 1 (4), summer, 1998, pp. 5-10.
- , "Loan portfolio value," *Risk*, 15 (12), 2002, pp. 160-162.
- Wilde, T., "Probing granularity," *Risk*, 14 (8), 2001, pp. 103-106.

正 誤 表

論文名：「与信ポートフォリオの信用リスクの解析的な評価方法：極限損失分布
およびグラニューラリティ調整を軸に」

筆 者：安藤 美孝

掲載号：『金融研究』、第 24 巻別冊第 1 号、39～120 頁、2005 年 7 月

修正日：2009 年 10 月 20 日

- ・ 47 頁 (12)式：

$$[\text{var}(U | E[L | X] = l)f_L(l)] \rightarrow \{\text{var}[U | E[L | X] = l]f_L(l)\}$$

- ・ 106 頁 (A-12)式と(A-13)式の間デルタ関数の定義式：

$$1/2\pi i \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{s(X-x)} dx = \delta_{X=x} \rightarrow 1/(2\pi i) \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{s(X-x)} ds = \delta_{X=x}$$

- ・ 115 頁 2 行目：

$$dN_2(x, y, a) / dx = n(x)N(y - ax) / \sqrt{1 - a^2}$$
$$\rightarrow dN_2(x, y, a) / dx = n(x)N((y - ax) / \sqrt{1 - a^2})$$

以 上