

ヒストリカル法による バリュー・アット・リスクの計測： 市場価格変動の非定常性への実務的対応

あんどうよしたか
安藤美孝

要 旨

バリュー・アット・リスク（以下、VaR）は、金融機関のリスク管理における、標準的なリスク指標である。VaRの算出には、リスク・ファクターの収益率分布に正規性を仮定することが多いが、分布の裾の厚さを捉えることは難しい。このため、近年では、経験分布を用いることで、収益率分布の裾の厚さを表現できる、ヒストリカル法に注目が集まっている。ただし、ヒストリカル法には、リスク・ファクターの直近の変動を捉えにくいという問題点が存在する。そこで、リスク・ファクターの直近の変動をよりうまく表現するための、改良手法がいくつか提案されている。

本稿では、ヒストリカル法およびいくつかの改良手法を解説するとともに、数値分析を通じて各手法の比較を行い、リスク管理実務において望ましいVaR算出手法を検討する。

キーワード：VaR算出手法、ヒストリカル法、標本分位点、ハレル=デービス推定量、GARCHモデル

本稿の作成に当たっては、小暮厚之教授（慶應義塾大学）から大変貴重なコメントを頂戴した。ただし、本稿に示されている意見は日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

安藤美孝 日本銀行金融研究所（E-mail : yoshitaka.andou@boj.or.jp）

1 . はじめに

VaR (バリュー・アット・リスク) は、1990年代に、金融機関のリスク管理実務において、標準的なリスク指標として用いられるようになった。VaRの算出には、市場価格ないしリスク・ファクターの変動に正規性を仮定した分散共分散法やモンテカルロ法が用いられることが多い。しかし、アジア通貨危機やロシア危機、LTCM破綻等に伴う市場価格の急激な変動によって、実際の市場価格の分布は正規分布よりも厚い裾を持つこと、よって正規性の仮定は必ずしも十分ではないことが改めて認識されている。一方、正規分布以外のパラメトリックな分布を仮定すると、計算負荷が重くなり、実務上は、正規分布以外のパラメトリックな分布を仮定することは難しい。このため、近年では、VaRの算出において、分布にパラメトリックな仮定を置かず、経験分布を用いることで、分布の裾の厚さを表現できるヒストリカル法に注目が集まっている。

ヒストリカル法には、いくつかの派生的な手法が存在する。基本的なヒストリカル法は、過去に生じたリスク・ファクターの変動が将来も起きるという市場の定常性を仮定している。この方法では、過去のデータに一様の重みを与えているため、リスク・ファクターの直近の変動の特徴を捉えにくいという問題がある。そこで、市場価格の直近の変動を重視するように重み付けを行う、あるいはリスク・ファクターの直近の変動の大きさを反映するよう過去の収益率を修正する等の改良手法がいくつか提案されている。

本稿では、さまざまなヒストリカル法によるVaRの算出の手順および特徴を解説するとともに、実際の市場データを用いた数値分析により各手法の比較を行う。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2節では、VaRの定義およびヒストリカル法以外の代表的なVaR算出手法を述べる。3節では、ヒストリカル法の手順や特徴、4節では、リスク・ファクターの直近の変動パターンを捉えることができるようヒストリカル法を改良した3つの手法の手順や特徴を説明する。5節では、ヒストリカル法、ヒストリカル法を改良した3手法など、いくつかの種類のVaR算出手法を用いて、株価指数、為替、円金利グリッドの実際のデータを用いて、VaRを算出し数値分析を行う。6節では、5節の数値分析の結果等を踏まえて、各種のヒストリカル法の中で、リスク管理実務の観点から望ましいと考えられる手法を検討する。最後に7節で、本稿のまとめを述べる。

2 . ヒストリカル法以外の代表的なVaR算出手法

本節では、リスク管理実務でVaRを算出するために用いられている、ヒストリカル法以外の代表的な手法を概説する。

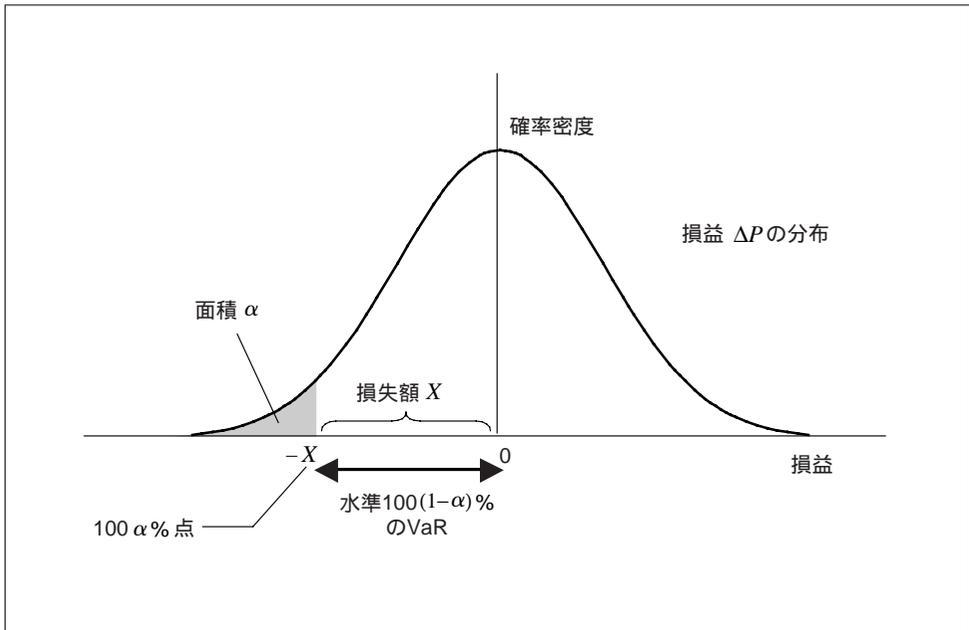
(1) VaRの定義

VaRとは、金融商品のポートフォリオを、現時点からある一定の期間保有するとき（この期間を保有期間という）に、リスク・ファクターの変動により、ある一定の確率で生じ得る最大損失額のことをいう。数学的には、現時点 t のポートフォリオの価値を $P(t)$ として、将来の時点 τ までに生じる損益額 $\Delta P(= P(\tau)-P(t))$ に対して、

$$\Pr[\Delta P \leq -X] = \alpha, \tag{1}$$

が成立するとき、損失額 X を、保有期間 $\tau-t$ 、信頼水準 $100(1-\alpha)\%$ のVaRと呼ぶ。VaRを求めることは、損益 ΔP の分布の $100\alpha\%$ 点を求めることである（図表1参照）。

図表1 損益分布とVaR



(2) ヒストリカル法以外の代表的なVaR算出手法

ここでは、ヒストリカル法以外の代表的なVaR算出手法として、分散共分散法およびモンテカルロ法を概観する¹。

1 これらのVaR算出手法の詳細は、例えば、木島 [1998]、山下 [2000]、Jorion [2000] を参照。

イ．分散共分散法

分散共分散法は、リスク・ファクターとポートフォリオ価値の間の線形関係だけを主に捉え、リスク・ファクターの収益率の変動が（多変量）正規分布に従うと仮定して、VaRを算出する手法である。分散共分散法は、シミュレーションの必要がなく、解析的にVaRを求められることが実務上の利点である。一方、リスク・ファクターとポートフォリオ価値に明確な非線形の関係があるオプション等の商品あるいはそうした商品を含むポートフォリオのVaRの算出には不向きである。さて、収益率分布を特徴づける分散共分散行列の推定には、いくつかの手法が考えられる。そのうち、標準的な手法と指数型加重移動平均法について説明する。

（イ）標準的な手法

標準的には、リスク・ファクターの収益率のヒストリカル・データに対し、標本分散、同共分散を計算することで分散共分散行列を推定する。以下では、本手法によるVaR算出法を「分散共分散法」と呼ぶ。

（ロ）指数型加重移動平均法²

上記の標準的な手法に対し、VaR算出時点に近いデータをより重視するように重み付けを行って、分散共分散行列を推定する³。これは、リスク・ファクターの変動が大きい時期や小さい時期が継続する傾向があるため、VaR算出時点に近い時点のデータをより重視することで、その傾向をVaRの算出に反映することを企図したものである。以下では、本手法によるVaR算出法を「指数型加重移動平均法」と呼ぶ。

ロ．モンテカルロ法

モンテカルロ法は、リスク・ファクターの変動にパラメトリックな仮定を置き、乱数を用いたシミュレーションにより、損益分布を求め、そこからVaRを算出する手法である。原理的には収益率分布に任意の仮定を置くことが可能であるが、実務では、取扱いが容易な多変量正規分布を先験的に仮定することが多い。モンテカルロ法によるVaR算出では、リスク・ファクターとポートフォリオ価値の間の非線形な関係を織り込むことができるが、線形なポートフォリオを考える場合、リスク・ファクターの収益率変動に正規分布を仮定すると、分散共分散法によるVaRに一致する。

2 Exponentially Weighted Moving Average Method.

3 時点 t の分散 σ_t^2 は、1時点前の分散の推定値 σ_{t-1}^2 および収益率の実現値 r_{t-1} から、 $\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2$ ($0 < \lambda < 1$)で推定される。 λ は減衰因子（decay factor）と呼ばれる定数で、値が小さいほど直近の実現値を重視する。この分散の推定式は、 $\sigma_t^2 = (1-\lambda)\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} r_{t-k}^2$ と整理でき、指数的に減少する重みを過去の実現値に与え、その和（平均）を求めていることがわかる。また、リスク・ファクター i, j の共分散は、同様に $\sigma_{ij,t}^2 = \lambda\sigma_{ij,t-1}^2 + (1-\lambda)r_{i,t-1}r_{j,t-1}$ で推定される。

3. ヒストリカル法によるVaRの算出手法

本節では、ヒストリカル法によるVaRの算出手順等を解説する。

(1) ヒストリカル法によるVaRの算出手順

ヒストリカル法は、過去の観測期間中のリスク・ファクターの変動パターンが、いずれも同じ確率で起きると仮定し、ポートフォリオの損益分布を求め、そこからVaRを算出する手法である。以下では、リスク・ファクターが1つの場合、同複数の場合に分けて、ヒストリカル法によるVaRの算出手順を説明する。

イ. リスク・ファクターが1つの場合

現時点 t のリスク・ファクターの値を x_t 、 T 日の観測期間のリスク・ファクターの値を $x_{t-T}, \dots, x_{t-2}, x_{t-1}$ とすると、収益率 $r_{t-T+1}, \dots, r_{t-1}, r_t$ は、(2)式で計算される⁴。

$$r_{t-i+1} = \frac{x_{t-i+1}}{x_{t-i}} - 1, \quad i = 1, \dots, T. \quad (2)$$

さて、現時点のポートフォリオの価値を $P(x_t)$ とすると、1営業日後の損益 $\Delta P = P(x_{t+1}) - P(x_t)$ の分布を考える。ヒストリカル法では、収益率が時点に関係なく互いに独立に同一の分布に従っていると仮定して、収益率分布に経験分布を用いる。つまり、過去に観測された収益率 $r_{t-T+1}, \dots, r_{t-1}, r_t$ が同じ確率で実現するものと仮定して、 T 個のシナリオ $\{x_{t+1}^{(T)}, \dots, x_{t+1}^{(2)}, x_{t+1}^{(1)}\}$ を作成する。ここで、

$$x_{t+1}^{(i)} = x_t(1 + r_{t-i+1}), \quad i = 1, \dots, T, \quad (3)$$

である。次に、(3)式で得られた T 個のシナリオを用いて、損益シナリオ $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ を以下で求める。

$$\Delta P_i = P(x_{t+1}^{(i)}) - P(x_t), \quad i = 1, \dots, T. \quad (4)$$

ここで、 $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ を ΔP の真の損益分布から無作為に抽出された標本であると考え、求めようとしているVaRに相当する分位点を推定する。 ΔP_i を昇順に並べ替えたもの(順序統計量という)を、

$$\{\Delta P_{(1)}, \Delta P_{(2)}, \dots, \Delta P_{(T)}\}, \quad (5)$$

4 連続複利表現では、 $r_{t-i+1} = \ln(x_{t-i+1}/x_{t-i})$ ($i = 1, \dots, T$)である。

とする。VaRの信頼水準を $100(1-\alpha)\%$ とすれば、 $-\Delta P_{((T+1)\alpha)}$ がVaRとなる。 $(T+1)\alpha$ が整数でないときには、 $(T+1)\alpha$ を挟む2つの整数番目の損益シナリオを線形按分して符号を逆にした値をVaRとする。このように、ただだか2個の順序統計量から、分位点に該当するVaRを求める方法を、ここでは「標本分位点 (sample quantile) 法」と呼ぶ。

ロ．リスク・ファクターが複数の場合

現時点 t の n 個のリスク・ファクターの値を $\{x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t}\}$ とする。 T 日のヒストリカル・データの観測期間のリスク・ファクター値と収益率をそれぞれ以下で表す。

$$\{x_{1,t-T}, x_{2,t-T}, \dots, x_{n,t-T}\}, \dots, \{x_{1,t-2}, x_{2,t-2}, \dots, x_{n,t-2}\}, \{x_{1,t-1}, x_{2,t-1}, \dots, x_{n,t-1}\} \quad (6)$$

$$\{r_{1,t-T+1}, r_{2,t-T+1}, \dots, r_{n,t-T+1}\}, \dots, \{r_{1,t-1}, r_{2,t-1}, \dots, r_{n,t-1}\}, \{r_{1,t}, r_{2,t}, \dots, r_{n,t}\} \quad (7)$$

現時点のポートフォリオの価値を $P\{x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t}\}$ とする。1営業日後の損益は $\Delta P = P(x_{1,t+1}, x_{2,t+1}, \dots, x_{n,t+1}) - P(x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t})$ となる。収益率が、時点に関係なく、同一の多変量分布に従っていると仮定し、収益率分布にはヒストリカル・データの経験分布を用いる。つまり、 $i = 1, 2, \dots, T$ として、ヒストリカル・データの観測期間中の時点 $t-i+1$ の収益率の組 $\{r_{1,t-i+1}, r_{2,t-i+1}, \dots, r_{n,t-i+1}\}$ を用いて、1営業日後の T 個のシナリオの組 $\{x_{1,t+1}^{(i)}, x_{2,t+1}^{(i)}, \dots, x_{n,t+1}^{(i)}\}$ を(8)式から作成する。

$$\begin{cases} x_{1,t+1}^{(i)} = x_{1,t}(1+r_{1,t-i+1}) \\ x_{2,t+1}^{(i)} = x_{2,t}(1+r_{2,t-i+1}) \\ \vdots \\ x_{n,t+1}^{(i)} = x_{n,t}(1+r_{n,t-i+1}), \quad i = 1, \dots, T. \end{cases} \quad (8)$$

これにより、リスク・ファクター間の相関関係を織り込んだシナリオが得られる。 T 個のシナリオによる損益を、

$$\Delta P_i = P(x_{1,t+1}^{(i)}, x_{2,t+1}^{(i)}, \dots, x_{n,t+1}^{(i)}) - P(x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t}), \quad i = 1, \dots, T, \quad (9)$$

とすれば、 $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ を得て、標本分位点法でVaRを求めることができる。

(2) 分位点の推定

ヒストリカル法によるVaRの算出では、損益シナリオ $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ を損益 ΔP の標本と考え、 $100\alpha\%$ 点に該当する分位点を推定する。シナリオ数 (標本数)

は、ヒストリカル・データの観測期間の日数である。この場合、多くのシナリオを得ようとしても、データの入手が困難なことがある。また、データを手に入れたとしても、観測期間を長くし過ぎると、現在の市場の価格変動のパターン等と相容れないシナリオを含む恐れがある。その一方で、 α は通常0.01などの非常に小さな値であることから、シナリオ数が十分多くないと、VaRの高い推定精度は得られない。

こうしたシナリオ数と推定精度の問題に対応するために、実務で利用される手法として、ブートストラップ法、ハレル=デービス推定量という推定量を用いる方法、分布の平滑化による推定法等が存在する。以下では、これらの手法の概要を説明する。

イ．ブートストラップ法による推定法

Efron [1979] によるブートストラップ法は、経験分布から、母集団分布の統計量等を推定する手法である⁵。ブートストラップ法によるVaR推定の手順を以下に示す。

基の標本セットとして $\{\Delta P_{(1)}, \Delta P_{(2)}, \dots, \Delta P_{(T)}\}$ が与えられたものとし、ここから重複を許して、無作為に T 個の標本を抽出する（復元抽出を行う）

抽出した標本セットに標本分位点法を用いて、VaRの推定値を得る。

および を多数回繰り返し、 得た複数のVaR推定値の平均をVaRとする。

このように、ブートストラップ法によるVaR推定では、復元抽出により作成した多数の標本セットに標本分位点法を適用する。その過程では、基の標本セットに標本分位点法を適用するときには選ばれたかたか2個の順序統計量に加えて、その近辺の順序統計量の情報（分布の裾に関する情報）が利用される。したがって、ブートストラップ法によって、VaRのより安定した推定値が得られることが期待される⁶。

ロ．ハレル=デービス推定量による推定法⁷

Harrell and Davis [1982] が提案したハレル=デービス推定量（以下、HD推定量）は、 $\{\Delta P_{(1)}, \Delta P_{(2)}, \dots, \Delta P_{(T)}\}$ を所与とするときの $100\alpha\%$ 点 ΔP_{α} の推定量で、順序統計量 $\Delta P_{(i)}$ の重み付き平均をとった、

$$\Delta P_{\alpha} = \sum_{i=1}^T w_{T,i}^{\alpha} \Delta P_{(i)}, \quad (10)$$

として与えられる。ここで、重み関数 $w_{T,i}^{\alpha}$ は、

$$w_{T,i}^{\alpha} = \frac{1}{\beta(k, T-k+1)} \int_{(i-1)/T}^{i/T} y^{k-1} (1-y)^{T-k} dy, \quad k = (T+1)\alpha, \quad (11)$$

5 ブートストラップ法に関する和文文献としては、例えば、汪ほか [2003] がある。

6 ただし、基の標本の数が少ない場合には、ブートストラップ法で多数の標本セットを作成しても、VaRのより安定した推定値は得られない。

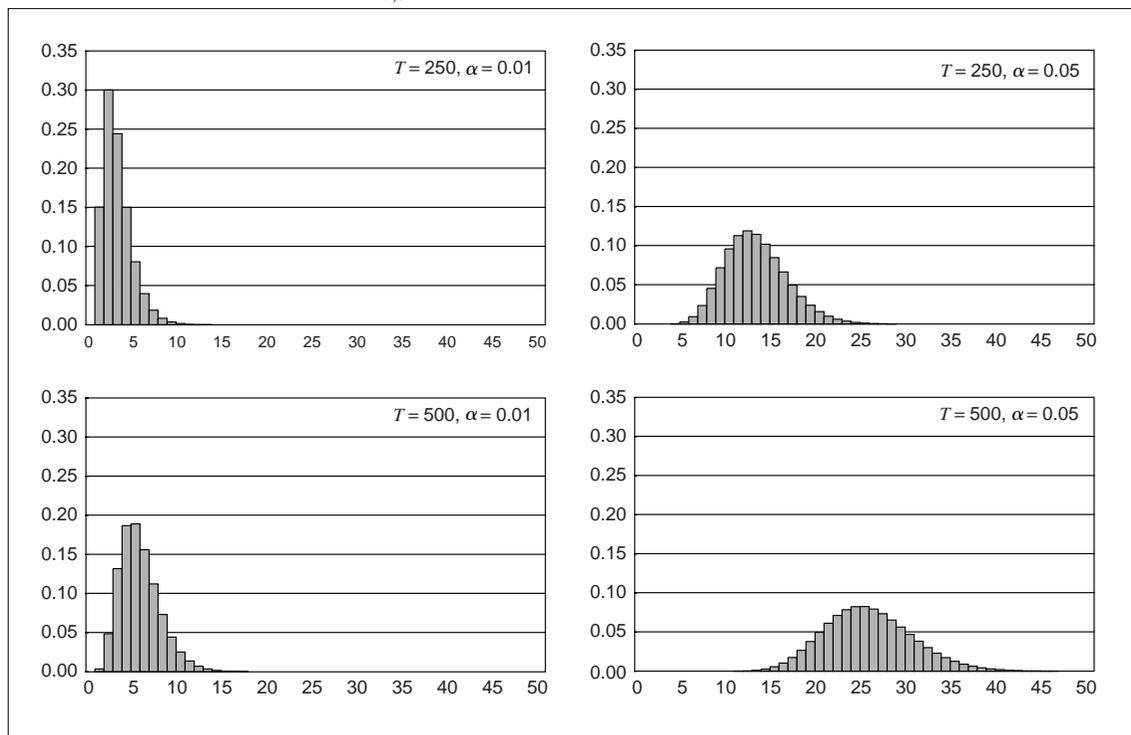
7 ここでの説明は、Inui, Kijima and Kitano [2003] を参考にした。

で表される^{8, 9}。以下では、HD推定量による分位点の算出方法をHD推定法と呼ぶ。

標本分位点法による推定値は、ただか2つの順序統計量により決定されるが、HD推定法による推定値は、2つの順序統計量を中心に全ての順序統計量に重みを与えて平均をとるため、標本分位点法に比べて安定した推定値を与えることが期待される。

図表2に、 $\alpha=0.01, 0.05$ 、 $T=250, 500$ のときの重み関数 $w_{T,i}^\alpha$ のグラフを示す。ここから、VaRを与える i の付近 ($i=(T+1)\alpha$ 付近) で重みが大きいがわかる。

図表2 HD推定量の重み関数 $w_{T,i}^\alpha$ (縦軸：重み、横軸： i)



ところで、HD推定量は、ブートストラップ法による推定量の期待値と一致することが知られている (Sheather and Marron [1990])¹⁰。つまり、HD推定量を用いれば、ブートストラップ法による多数の復元抽出なしに、同様の推定量を解析的に得ることができる。このことは、HD推定量を用いることの利点である。

⁸ $\beta(a, b)$ はベータ関数で、 $\beta(a, b) = \int_0^1 y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy$ ($a, b > 0$) である。HD推定量の導出は、補論1の(1)を参照。なお、ベータ関数の定義から $\sum_{i=1}^n w_{T,i}^\alpha = 1$ 、 $w_{T,i}^\alpha > 0$ が成立する。

⁹ $X_{(i)}$ を順序統計量とすると、一般に、 $L = \sum_{i=1}^n w_i X_{(i)}$ 、 $w_i \geq 0$ 、 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ で表現される統計量 L を L 統計量という。HD推定量および標本分位点は L 統計量である。

¹⁰ 証明は補論1の(2)を参照。

八．分布の平滑化による推定法

ここでは、分布の平滑化を概説する¹¹。平滑化は、離散的な標本から滑らかな確率密度関数を推定する方法である。標本 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ が与えられたとき、平滑化では、推定確率密度関数 $\hat{f}(x)$ は、次式で与えられる。

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right). \tag{12}$$

ここで、 h はバンド幅と呼ばれる平滑化の程度を表すパラメータで、 $K(u)$ は、カーネル関数と呼ばれる密度関数である。図表3に、代表的な関数形を挙げる。

図表3 カーネル関数の例（シモノフ [1999] より抜粋）

カーネル名	関数形
ガウス型	$(2\pi)^{-1/2} e^{-u^2/2} \quad [-\infty, \infty]$
イバネクニコフ	$3/4 (1-u^2) \quad [-1, 1]$
2乗重み	$15/16 (1-u^2)^2 \quad [-1, 1]$

平滑化で確率密度関数が得られれば、標本が少ない場合でも、分位点の推定値を得ることが可能である¹²。しかし、平滑化には、カーネル関数やバンド幅の設定により推定値が大きく変動するほか、推定手続きが煩雑である等の実務上の問題がある。

(3) ヒストリカル法によるVaR算出の具体例

ここでは、ヒストリカル法によるVaR算出を行い、異なる観測期間で計測したVaRの比較、VaRの標本分位点法による推定量とHD推定量の比較を試みる。

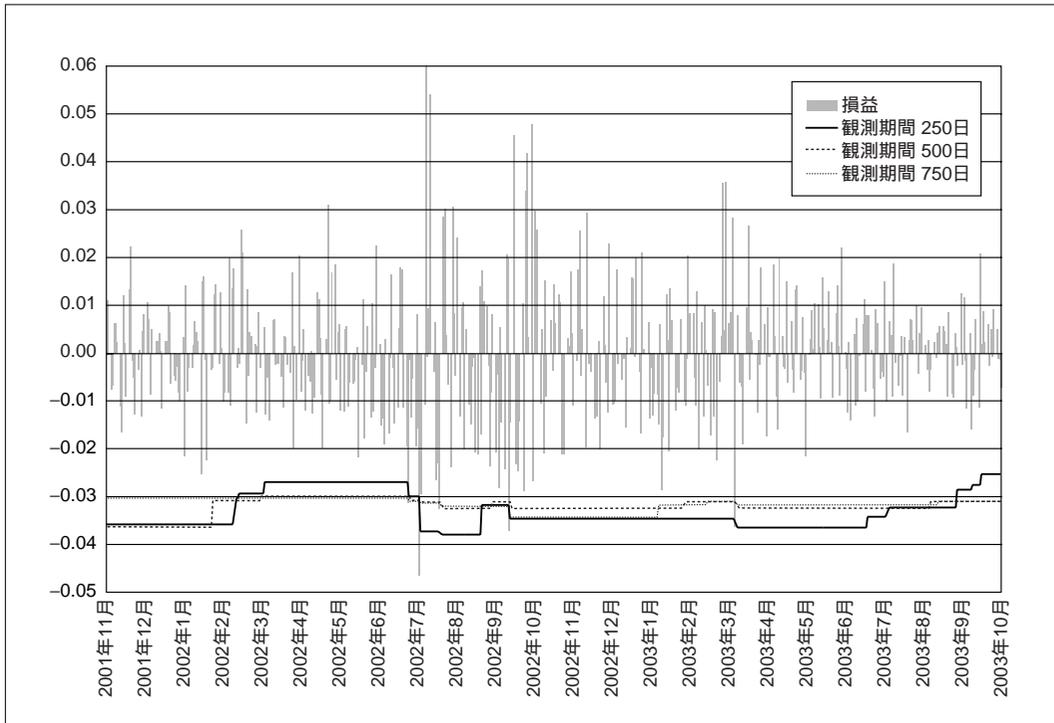
図表4は、損益がダウ・ジョーンズ工業株価平均指数（以下、NYダウ平均）に連動するポジション1単位で、ヒストリカル法によるVaR（信頼水準99%、標本分位点法で推定）と損益を日次で計算した結果である。棒グラフは損益（収益率）、3本の折線グラフは250、500、750営業日の観測期間のヒストリカル・データを用いて計算したVaRを示したものである¹³。

11 分布の平滑化の詳細は、シモノフ [1999] を参照。

12 平滑化を利用してVaRの算出を試みた既存研究にButler and Schachter [1997] がある。

13 図表4、5および7～12では、2001年11月16日～2003年10月16日をVaRの算出対象期間とした。

図表4 ヒストリカル法によるVaRと損益



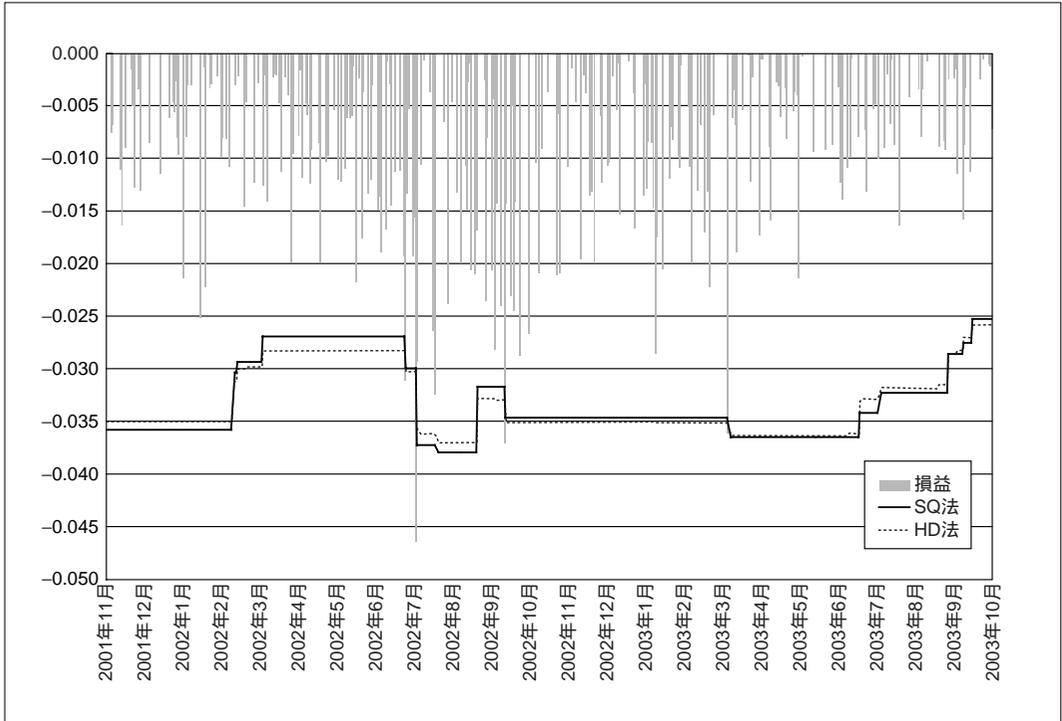
図表4から、VaRは、ほぼ一定の水準の時期がしばらく続いた後に、ジャンプして、再度ほぼ一定水準の時期が再び続くということを繰り返していることがわかる。これは、分位点の推定に採用されている標本がしばらくの間は不変で、ヒストリカル・データの観測期間が変わることで、分位点の推定に採用されている標本が入れ替わるためである。また、ヒストリカル法では損失だけを勘案しているため¹⁴、比較的大きな利益が出てもVaRは不変で、比較的大きな損失が生じたときにVaRが増加することもみてとれる。さらに、観測期間が短いほど標本数が少ないため、VaRの変動が頻繁で大きいことがわかる。

次に、図表5に、標本分位点法およびHD推定法によるVaRを比較した結果を示す。観測期間は250営業日で、そのほかの前提は図表4と同一である。なお、図表5には、損益のうち損失のみを掲げてある。

図表5から、両手法によるVaRはほぼ同様の値を与えているが、HD推定法のVaRの方が、標本分位点法のVaRよりも変動が小さいことがみてとれる。これは、上述のように、HD推定法が、標本分位点法に比べて安定した推定値を与えるためである。

14 後述のヒストリカル法に改良を加えた手法には、大きな利益が生じた場合にも、VaRが増加する手法がある。

図表5 標本分位点 (SQ) によるVaRとHD推定量によるVaRの比較



4 . リスク・ファクターの直近の変動を考慮したヒストリカル法

ヒストリカル法によるVaRの算出では、経験分布を用いており、特定の分布を仮定していない。このことは、損益分布の裾に注目して行うVaR推定という点では、特定の分布（例えば正規分布）を先験的に仮定する他のVaR推定手法に比べると、実務上は好ましい。しかし、観測期間内の標本がいずれも同一確率で将来発生すると考えるヒストリカル法は、リスク・ファクターの直近の変動パターンをVaRの推定に反映させ難いという実務上の問題点もあわせ持つ。

こうした問題意識から、近年、ヒストリカル法で、リスク・ファクターの直近の変動パターンをより反映させやすいようにした手法が、Boudoukh, Richardson and Whitelaw [1998]、Hull and White [1998]、Barone-Adesi, Giannopoulos and Vosper [1999] により提案されている。本節では、これらの手法を解説する。

(1) Boudoukh, Richardson and Whitelaw [1998] による手法

Boudoukh, Richardson and Whitelaw [1998] は、ヒストリカル法によるVaR算出手順の中で、損益シナリオに対して、指数型加重移動平均と類似の重み付けを行うVaR算出手法を提案している。以下、本手法をBRW法と呼ぶ。

BRW法は、損益シナリオの作成までは、従来のヒストリカル法と同じであるが、損益シナリオに指数的に減少する重み付けを行い、リスク・ファクターの直近の変動パターンをより重視するように工夫した手法である。以下に、BRW法によるVaR算出手順を示す。

現時点から1,2,..., T営業日前のリスク・ファクターの変動によって、T個の損益シナリオ $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ が得られたとする。

損益シナリオ $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ に対して、過去にさかのぼるに従って一定の割合 $\lambda(0 < \lambda < 1)$ で減少する重み $\{w_1, w_2, \dots, w_T\}$ を(13)式で与える¹⁵。

$$w_i = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^T} \lambda^{i-1}. \quad (13)$$

λ は減衰因子(decay factor)と呼ばれる定数で、この値が小さいほど直近のデータを重視することになる¹⁶。

損益シナリオ $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ を昇順に並び替えた順序統計量を $\{\Delta P_{(1)}, \Delta P_{(2)}, \dots, \Delta P_{(T)}\}$ とし、それぞれに与えられた重みを $\{w_{(1)}, w_{(2)}, \dots, w_{(T)}\}$ とする¹⁷。VaRの信頼水準を $100(1-\alpha)\%$ とすると、損失の大きなシナリオから、順に重みを足し上げていき、 α に達したときの損益シナリオ(の絶対値)をVaRの推定値とする。正確に α にならない場合には、損益シナリオの線形補間によりVaRを求める。 $w_{(1)}$ が α より大きい場合には、 $-\Delta P_{(1)}$ をVaRとする。数式で表すと以下のようになる¹⁸。

$$(a) \sum_{i=1}^k w_{(i)} \leq \alpha < \sum_{i=1}^{k+1} w_{(i)} \text{ のとき、}$$

$$\text{VaR}_\alpha = -\left\{ (\alpha - \sum_{i=1}^k w_{(i)}) \Delta P_{(k+1)} + \left(\sum_{i=1}^{k+1} w_{(i)} - \alpha \right) \Delta P_{(k)} \right\} / w_{(k+1)}, \quad (14)$$

(b) $w_{(1)} \geq \alpha$ のとき、

$$\text{VaR}_\alpha = -\Delta P_{(1)}. \quad (15)$$

15 重みの合計は $\sum_{i=1}^T w_i = \sum_{i=1}^T (1-\lambda)\lambda^{i-1}/(1-\lambda^T) = 1$ である。

16 BRW法の減衰因子は、指数型加重移動平均法の減衰因子とは意味合いが異なることに注意してほしい。後者は、過去の実現収益率に対して、指数関数的に減少する重みを与えるが、前者は、損益シナリオに対して、指数関数的に減少する重みを与える。

17 $\Delta P_{(i)}$ が ΔP_j に該当するならば、 $w_{(i)} = w_j$ である。

18 ここで示した方法は、原論文とやや異なっている。本稿では、 $\Delta P_{(k)}$ は $\sum_{i=1}^k w_{(i)} \times 100\%$ 点に該当するが、原論文では、 $\{\sum_{i=1}^{k-1} w_{(i)} + w_{(k)}/2\} \times 100\%$ 点に該当するとしている。ここで、 λ を限りなく1に近づけて、各損益シナリオに与える重みを同一($w_{(i)} = 1/n$)としよう。このとき、 $\Delta P_{(k)}$ は、本稿の方法では $(k/n) \times 100\%$ 点に該当し、原論文の方法では $\{(k-0.5)/n\} \times 100\%$ 点に該当する。一方、標本分位点法では、 $\Delta P_{(k)}$ は、 $\{k/(n+1)\} \times 100\%$ 点に該当する。このため、 n に比べて k が十分小さい(つまり、 k は、VaR算出対象となる分布の裾にある)と、原論文の方法に比べて本稿の方法が、標本分位点法に近い推定値を与えることになる。つまり、 λ が1に近い場合、BRW法のような損益シナリオの重み付けを行う方法によるVaRと、標本分位点法によるVaRとは近い値をとるのが自然であると思われる。このため、ここでは、本稿の手法を採用することにした。

図表6は、BRW法によるVaR算出において、減衰因子(λ)および観測期間にいくつかの値を与え、損益シナリオの重みを過去にさかのぼって和を取り、それが0.99を超えた時点までの日数¹⁹を示したものである。VaRの信頼水準を99%とすれば、この日数は、大雑把に言えば、「実質的な観測期間」と考えることができる。

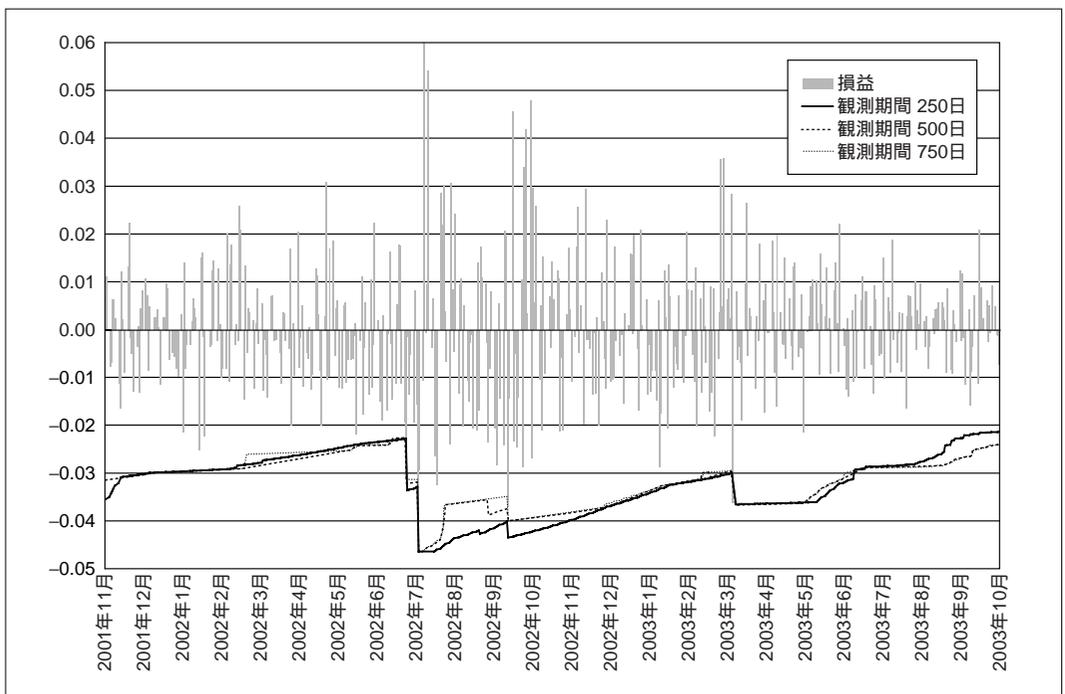
図表6 BRW法の「実質的な観測期間」

	$\lambda = 0.94$	$\lambda = 0.97$	$\lambda = 0.99$
250営業日	75	150	240
500営業日	75	152	409
750営業日	75	152	454

図表6から、 $\lambda = 0.94$ 、 0.97 のときには、減衰因子が小さいため、「実質的な観測期間」は、基の観測期間に比べかなり短いことがわかる。「実質的な観測期間」が短いと、分布の裾をうまく表現できなくなる可能性がある。したがって、減衰因子 λ の水準を決定する際には、「実質的な観測期間」の長さにも留意する必要がある。

図表7は、NYダウ平均に損益が連動するポジション1単位で、BRW法によるVaR（信頼水準99%）と損益を日次で計算した結果である。観測期間は、250、500、750営業日の3通りとし、減衰因子は $\lambda = 0.99$ とした。

図表7 BRW法によるVaRと損益（観測期間の比較）



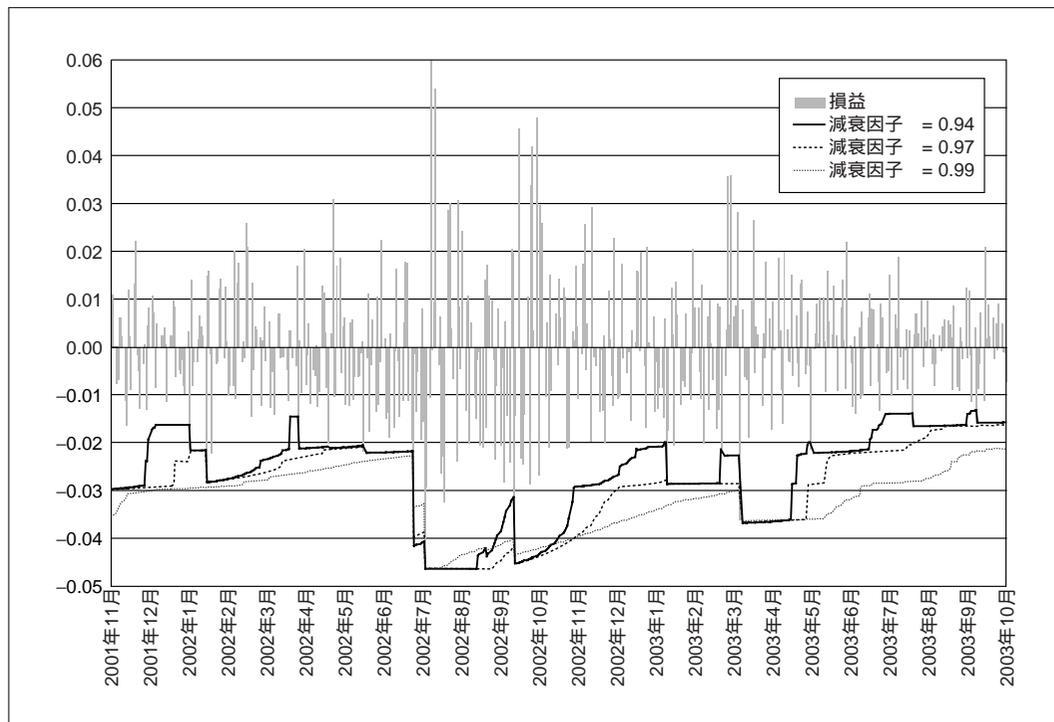
19 $\sum_{i=1}^N (1-\lambda)\lambda^{i-1}/(1-\lambda^N) > 0.99$ となる N の最小値。

図表7から、VaRはジャンプして上昇した後、徐々に低下するという動きを繰り返す傾向がみてとれる。これは、BRW法では、1営業日ずつずらしていく観測期間の中に大きな損失が生じた営業日が入ってくると、VaRはジャンプする形で増加するが、その後、各シナリオに与えられた重みは徐々に低下するので、新たに大きな損失を発生させた営業日が観測期間に入っていない限りは、VaRは徐々に低下するためである。なお、図表7では、通常のコスト法と同様に、損失のみがVaRに勘案される様子もわかる。

各観測期間のVaRをみると、500営業日および750営業日のときのVaRの傾向はほぼ同様になっていることがわかる。これは、図表6で示したように、重みを勘案した「実質的な観測期間」が、両者で大きな差がないことが背景となっている。

次に、図表8に、観測期間を250営業日とし、減衰因子を0.94、0.97、0.99として、BRW法で算出したVaRを掲げた。

図表8 BRW法によるVaRと損益（減衰因子の比較）



図表8からは、減衰因子が小さいほどVaRの変動が大きいことがわかる。これは、減衰因子が小さいほど、「実質的な観測期間」が短くなることによる理由である。

(2) Hull and White [1998] による手法

Hull and White [1998] は、コスト法に、指数型加重移動平均によるボラ

ティリティ推定を組み合わせた手法を提案した。以下では、この手法をHW法と呼ぶ。

通常ヒストリカル法では、損益シナリオを作成する際に、過去に生じた収益率をそのまま用いるが、HW法では、リスク・ファクターの直近の変動パターンを反映するように、過去に生じた収益率を修正して用いる。収益率の修正は、観測された収益率を、指数型加重移動平均で計算したその時点の推定ボラティリティで除し、現時点の推定ボラティリティを乗ずることで行われる。以下に、このHW法の概要および具体的な適用方法を示す。

まず、リスク・ファクターを1つとする。収益率 r_t のボラティリティが指数型加重移動平均で計算されるとして、収益率を以下のように表現する。

$$r_t = \sigma_t \epsilon_t, \tag{16}$$

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2. \tag{17}$$

ここで、 ϵ_t は、互いに独立に、同一の分布（平均0、分散1）に従う確率変数である。

さて、現時点 t で、推定ボラティリティ σ_t および収益率の実現値 r_t は既知であるから、(17)式より時点 $t+1$ の推定ボラティリティ σ_{t+1} が求められる。VaRを算出するためには、 r_{t+1} の変動をモデル化する必要があるが、(16)式から ϵ_{t+1} の分布を決めればよいことがわかる。ここで、 $\epsilon_{t+1} \sim N(0,1)$ とすれば、2節で述べた指数型加重移動平均法と同じこととなる。一方、HW法では、過去の実現値 $\epsilon_{t-i+1} (i=1, \dots, T)$ から得られる経験分布を利用する。 $\epsilon_{t-i+1} (i=1, \dots, T)$ は、過去の実現収益率 $r_{t-i+1} (i=1, \dots, T)$ および推定ボラティリティ $\sigma_{t-i+1} (i=1, \dots, T)$ を用いて、

$$\epsilon_{t-i+1} = r_{t-i+1} / \sigma_{t-i+1}, i=1, \dots, T, \tag{18}$$

により計算される。これに σ_{t+1} を乗じて収益率 r_{t+1} のシナリオとすれば、VaRを算出できる。算出手順を整理すると、以下ようになる。

過去に観測された収益率を $\{r_{t-T+1}, \dots, r_{t-1}, r_t\}$ 、指数型加重移動平均による推定ボラティリティを $\{\sigma_{t-T+1}, \dots, \sigma_{t-1}, \sigma_t\}$ 、時点 $t+1$ の推定ボラティリティを σ_{t+1} として、

$$r_{t-i+1}^* = \frac{r_{t-i+1}}{\sigma_{t-i+1}} \sigma_{t+1}, i=1, 2, \dots, T, \tag{19}$$

により、修正された収益率 $\{r_{t-T+1}^*, \dots, r_{t-1}^*, r_t^*\}$ を得る²⁰。

20(19)式は、過去の収益率に $\sigma_{t+1}/\sigma_{t-i+1}$ を乗ずることで、リスク・ファクターの直近の変動パターンを反映するように修正したものと解釈することができる。

修正された収益率 $\{r_{t-T+1}^*, \dots, r_{t-1}^*, r_t^*\}$ を用いて、通常のヒストリカル法と同様の手順により VaR を算出する。

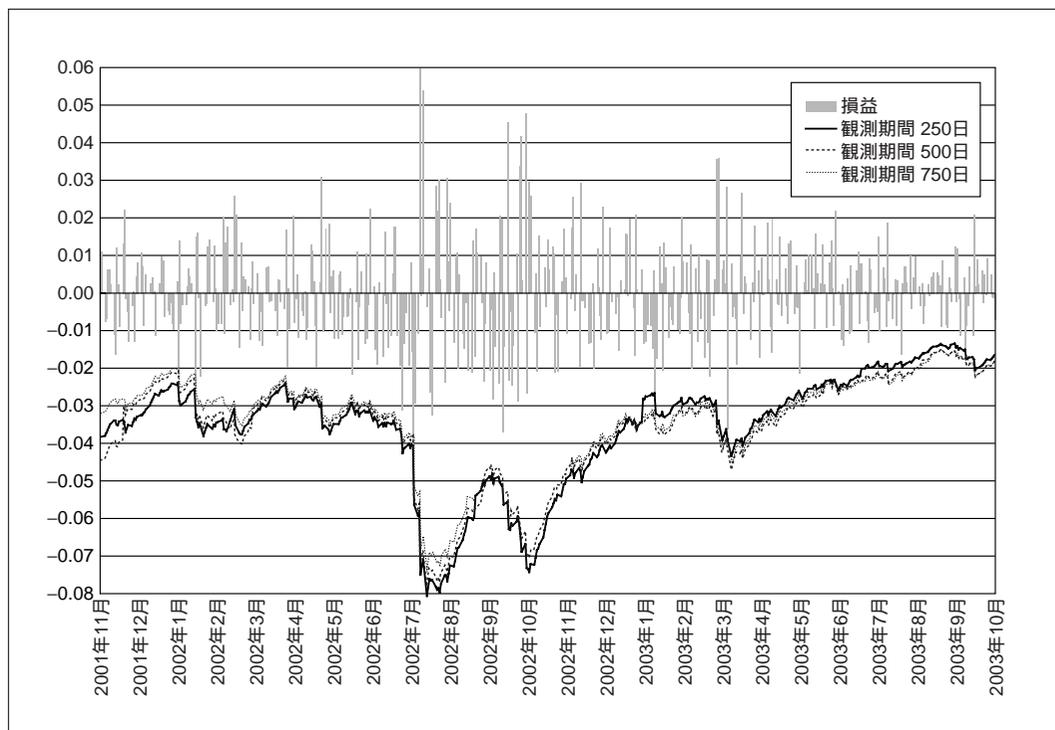
リスク・ファクターが複数のときも同様に、全リスク・ファクターの過去の収益率を、(19)式に従って修正し、通常のヒストリカル法の手順により VaR を算出することが可能である。

図表9は、NYダウ平均に損益が連動するポジション1単位で、HW法による VaR (信頼水準99%) と損益を日次で計算した結果である。観測期間は250、500、750営業日の3通りとし、減衰因子は $\lambda=0.94$ とした。

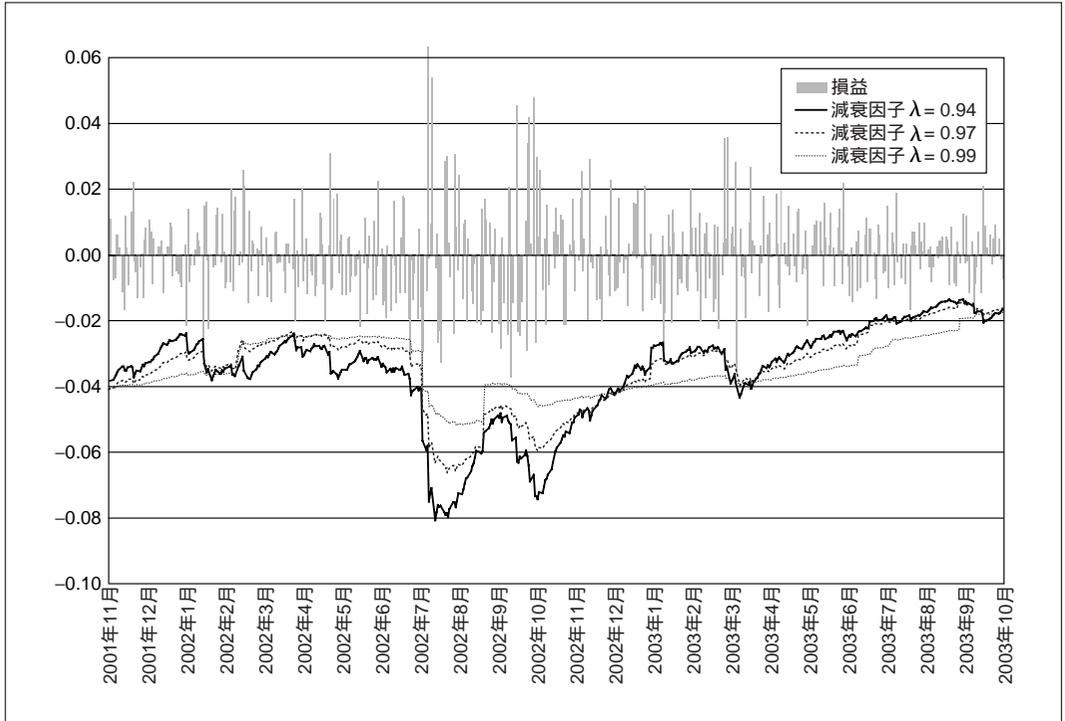
図表9からは、損益が正負によらず大きく動いたときに、VaRが増加していることがわかる。これは、通常のヒストリカル法およびBRW法では、損失のみが VaR の水準に影響を与えるのに対し、HW法では、損益が正負に関係なく大きく振れた場合には推定ボラティリティが上昇し、VaRの水準に影響を与えることによるものである。

HW法では、観測期間の違いによる推定値の違いはさほど大きくないことがわかる。収益率の変動が(16) (17)式で適切に表現されているならば、 ϵ_t は時点に関係なく同一の分布に従う。このとき、(18) (19)式で修正された収益率シナリオも時点に関係なく同一の分布に従うので、観測期間によらず VaR はほぼ同水準となるはずである。したがって、観測期間による推定値の差異が小さいというこで得ら

図表9 HW法によるVaRと損益（観測期間の比較）



図表10 HW法によるVaRと損益（減衰因子の比較）



れた結果から、収益率の変動が適切に表現されているための必要条件の1つが満たされているといえる²¹。

次に、図表10に、観測期間を250営業日に固定し、減衰因子 λ を0.94、0.97、0.99の3通りとして、HW法でVaRを計算した結果を掲げた。

図表10からは、減衰因子が小さい方がVaRの変動が大きいことがわかる。これは、減衰因子が小さいほど、推定ボラティリティの変動が大きくなるためである。

(3) Barone-Adesi, Giannopoulos and Vosper [1999] による手法

Barone-Adesi, Giannopoulos and Vosper [1999] が提案した手法は²²、ボラティリティの推定にGARCHモデルを利用することを除き、HW法と同様の手法である。同論文では、提案した手法をフィルタ付ヒストリカル・シミュレーション (FHS: filtering historical simulation) と呼んでいる。以下、この手法をFHS法と呼ぶ。

FHS法がHW法と異なる点は、収益率の変動の定式化である。本稿では、以下の

21 厳密には、(16) (17)式が適当な定式化であるか否かは、 ϵ_t が時点に関係なく同一の分布（平均0、分散1）に従うこと、および互いに独立であることを、統計的に検証する必要がある（検証方法は、例えば渡部 [2000] を参照）。

22 Barone-Adesi, Bourgoin and Giannopoulos [1998] も参照。

ように、収益率 r_t がGARCH (1,1) モデルに従っていると仮定する²³。

$$r_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (20)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (21)$$

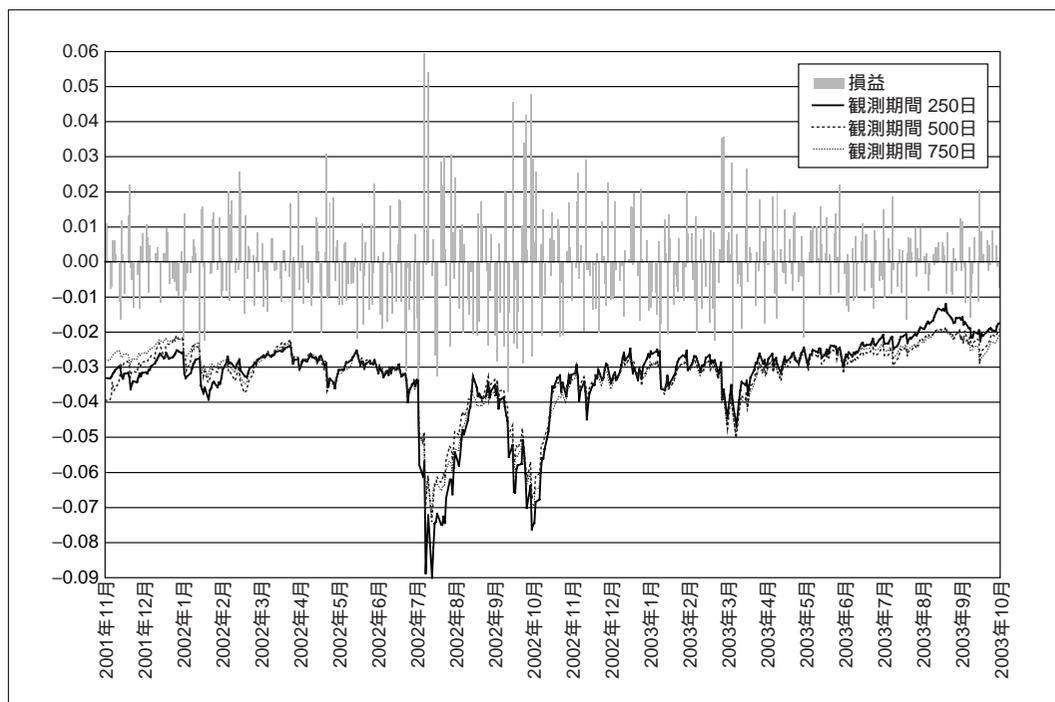
ここで、 ϵ_t は互いに独立に同一の分布（平均0、分散1）に従う確率変数で、 α 、 β 、 ω はパラメータである。

(17)式と(21)式を比べると、FHS法の分散の定式化（GARCHモデル）の方が、HW法のそれ（指数型加重移動平均）よりも、パラメータの自由度が多く、収益率の変動をよりの確に捉えられると期待できる。

本稿では、GARCHモデルのパラメータを、擬似最尤法により求める²⁴。VaRの算出を日次で行う都度、観測期間中のデータに対して尤度を最大化するよう、パラメータの推定を行う。そのほかの手順は、HW法と全く同じである。また、リスク・ファクターが複数の場合も、ボラティリティの推定法を除いて、HW法と全く同じである。

図表11は、NYダウ平均に損益が連動するポジション1単位で、FHS法によるVaR

図表11 FHS法によるVaRと損益（観測期間の比較）



23 原論文ではARMA-GARCH (1,1) モデルを仮定しているが、本稿では簡単化のためGARCH (1,1) モデルを利用する。

24 通常のGARCHモデルのパラメータ推定方法と同様に、 ϵ_t が標準正規分布に従っていると仮定して、尤度を最大化するようにパラメータを推定する。 ϵ_t が標準正規分布に従っていない場合でも、標本数を十分大きくすると、推定量が真の値に収束することが示されている（Bollerslev and Wooldrige [1992]）。

(信頼水準99%)と損益を日次で計算した結果である。観測期間は、250、500、750営業日の3通りとした。

図表11では、HW法と同様に、損益が正負によらず大きく動いたときに、VaRが増加している。また、観測期間が短い方が、変動が若干大きいようである。これは、観測期間が短いと、推定したGARCHモデルのパラメータが振れやすいためであると考えられる。しかし、HW法と同様に、各観測期間のVaRは水準がほぼ同じであり、収益率の変動が適切に捉えられるための必要条件の1つは満たされているといえよう。

(4) 各種手法のまとめ

本節で説明したBRW法、HW法、FHS法、および通常ヒストリカル法(以下、HS法)のポイントを図表12にまとめる。

図表12 各種ヒストリカル法の特徴

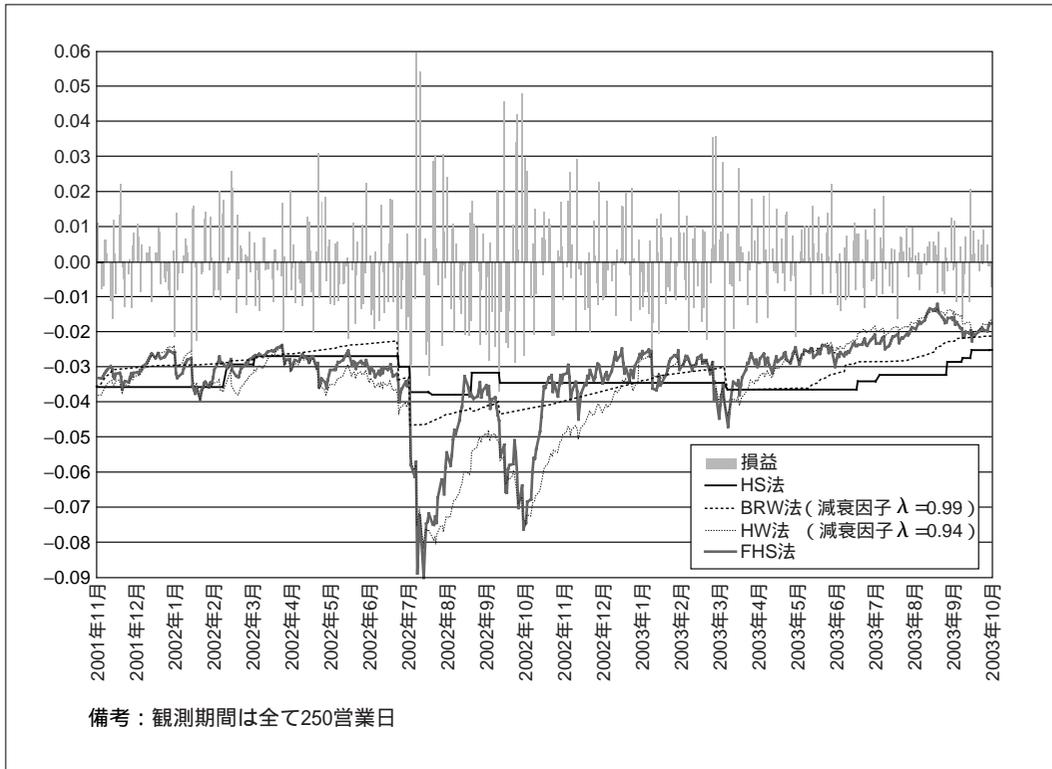
	収益率変動のシナリオ	損益シナリオの重み付け
HS法	過去の収益率をそのまま利用	均等
BRW法	過去の収益率をそのまま利用	指数関数的に減少
HW法	指数型加重移動平均による推定ボラティリティを利用し、過去の収益率を修正して利用	均等
FHS法	GARCHによる推定ボラティリティを利用し、過去の収益率を修正して利用	均等

次に、図表13に、各手法によって算出したVaRを示した。観測期間は250営業日で、減衰因子はBRW法で0.99、HW法で0.94とした²⁵。

図表13から、HS法とBRW法、HW法とFHS法の計測結果の傾向が比較的類似しているように見受けられる。これは、BRW法が、観測期間を実質的に短くしたHS法と見なせること、HW法とFHS法が、いずれも可変分散モデルを利用していることが背景にあると考えられる。VaRの変動は、HS法やBRW法に比べて、可変分散モデルに基づくHW法やFHS法の方が大きくなっているようにみとれる。

25 Boudoukh, Richardson and Whitelaw [1998] およびHull and White [1998] を参考にした。

図表13 HS法、BRW法、HW法、FHS法によるVaRの比較



5. 数値分析による各種VaR算出手法の比較

本節では、分散共分散法（以下、VCV法）、指数型加重移動平均法（以下、EWMA法）、HS法、BRW法、HW法およびFHS法の6種類のVaR算出手法を用いて、実際の市場データからVaRを算出し、比較を行う。

VaRの算出対象として、株価指数・為替・円金利の単一リスク・ファクターのポジション、円金利のポートフォリオを採用した。の目的は、株価指数・為替・円金利の多様なリスク・ファクターで比較を行うことにより、各VaR算出手法の特徴を浮かび上がらせることである。の目的は、昨年夏場の円金利（特に中長期金利）に短期間で大きな変動が生じた時期、および昨年夏場以前の円金利が比較的落ち着いていた時期を採り上げ、相場の変動がVaR算出手法へ与える影響を考察することである。以下では、数値分析の設定を説明した後、数値分析の結果を考察する。

(1) 数値分析の設定

イ．算出対象のリスク・ファクターおよびデータの取扱い

図表14に、分析の対象とするリスク・ファクターの一覧を掲げる。

図表14 算出対象リスク・ファクター

株価指数（7種）	為替（10種）	円金利（15種）
NYダウ工業株30種平均	ユーロ	円LIBOR1ヵ月
トロント総合300種株価指数	英ポンド	円LIBOR3ヵ月
FT100種総合株価指数	スイス・フラン	円LIBOR6ヵ月
CAC40種株価指数	シンガポール・ドル	円LIBOR12ヵ月
DAX株価指数	カナダ・ドル	円スワップ2年
日経225種平均	オーストラリア・ドル	円スワップ3年
ハンセン指数	デンマーク・クローネ	円スワップ5年
	スウェーデン・クローナ	円スワップ7年
	ニュージーランド・ドル	円スワップ10年
	米ドル	円債1年
		円債2年
		円債3年
		円債5年
		円債7年
		円債10年

また、図表15に、ヒストリカル・データの取得期間を示す。データは、取得期間中の月曜日から金曜日までの日次データを対象としてBloombergより取得し、欠損値がある場合には、前後の日次データで線形に補間した。なお、VaR算出の基準通貨を円とするため、為替のデータは、円建てに換算して利用した。

図表15 データ取得期間

株価指数	1990/1/1 ~ 2003/10/17 (3,600営業日)
為替	1990/1/1 ~ 2003/10/17 (3,600営業日)
円金利	1996/1/1 ~ 2003/10/17 (2,035営業日)

備考：ユーロの1999年以前のデータはドイツ・マルクを換算して利用した。

ロ．VaR算出対象ポジションの設定

(イ) 単一リスク・ファクター

図表14に挙げた全てのリスク・ファクター（32種類）について、図表16のポジションをVaR算出の対象とする。

図表16 ポジション保有量

株価指数、為替	各指数、各通貨が1単位
円金利	各金利グリッドのベース・ポイント・バリューが1単位

また、VaRの算出対象期間は、図表17とした。

図表17 VaR算出対象期間

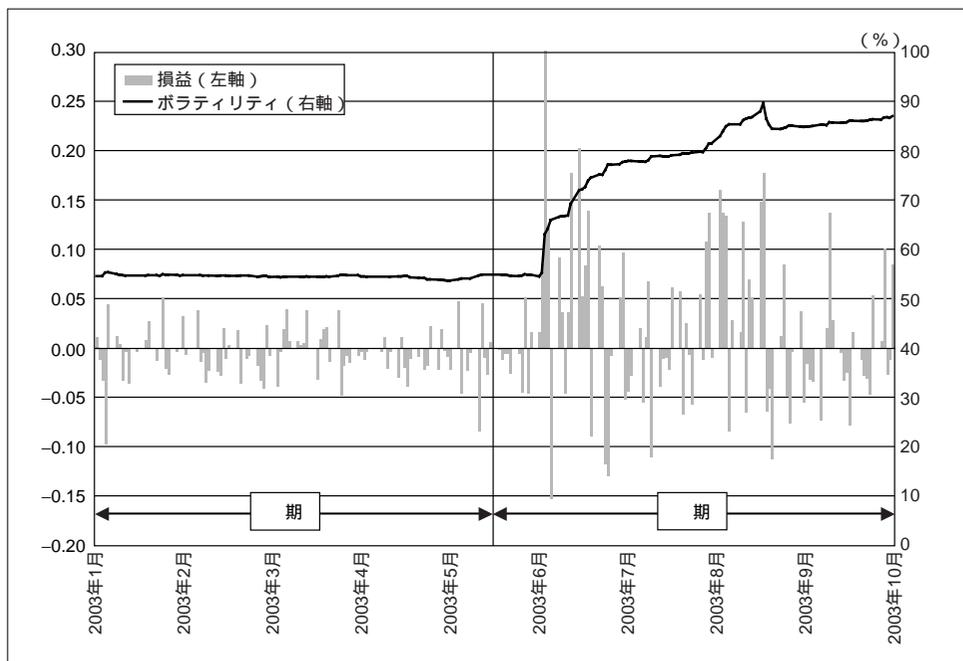
株価指数	1992/11/16～2003/10/17（2,850営業日）
為替	1992/11/16～2003/10/17（2,850営業日）
円金利	1998/11/16～2003/10/17（1,285営業日）

（ロ）円金利ポートフォリオ

円LIBOR1～12カ月、円スワップ金利2～10年の9個の円金利グリッド（図表13参照）にポジションを保有する円金利ポートフォリオを考える。ここでは、各円金利グリッドのBPVを-1～+1の範囲でランダムに振らせることで、100個のポートフォリオを作成した²⁶。

この円金利ポートフォリオのVaRの算出対象期間は、長期金利に大きな変動がみられた時期として、2003年6月2日～10月17日（100営業日）を採用し、比較的相場環境が落ち着いていた時期として、その直前の時期の2003年1月13日～5月30日（100営業日）を採用した。以下、2003年1月13日～5月30日を 期、2003年6月2日～10月17日を 期と呼ぶことにする。図表18に、 期および 期における、円スワップ金利（5年）の収益率およびボラティリティ（年率）²⁷を示す。

図表18 円スワップ金利（5年）の収益率およびボラティリティ



26 Hendricks [1996] によるポートフォリオ作成方法を参考にした。

27 過去250営業日の収益率データの標本標準偏差を計算した。

八．VaR算出手法の設定

VaRの信頼水準は99%とし、観測期間 T は250、500、750営業日の3種類とする。減衰因子 λ は0.94、0.97、0.99の3種類とする²⁸。

HS法では、標本分位点法とHD推定法の2種類の手法でVaRを算出した。以下では、前者によるHS法をHS(SQ)法、後者によるそれをHS(HD)法と呼ぶ。図表19に、数値分析を行う手法の設定をまとめる。

図表19 VaR算出手法の設定

	手法	観測期間	減衰因子	信頼水準
1	VCV	250	-	99%
2	VCV	500	-	99%
3	VCV	750	-	99%
4	EWMA	-	0.99	99%
5	EWMA	-	0.97	99%
6	EWMA	-	0.94	99%
7	HS(SQ)	250	-	99%
8	HS(SQ)	500	-	99%
9	HS(SQ)	750	-	99%
10	HS(HD)	250	-	99%
11	HS(HD)	500	-	99%
12	HS(HD)	750	-	99%
13	BRW	250	0.99	99%
14	BRW	500	0.99	99%
15	BRW	750	0.99	99%
16	BRW	250	0.97	99%
17	BRW	500	0.97	99%
18	BRW	750	0.97	99%
19	BRW	250	0.94	99%
20	BRW	500	0.94	99%
21	BRW	750	0.94	99%
22	HW	250	0.99	99%
23	HW	500	0.99	99%
24	HW	750	0.99	99%
25	HW	250	0.97	99%
26	HW	500	0.97	99%
27	HW	750	0.97	99%
28	HW	250	0.94	99%
29	HW	500	0.94	99%
30	HW	750	0.94	99%
31	FHS	250	-	99%
32	FHS	500	-	99%
33	FHS	750	-	99%

二．VaR算出結果の考察基準

VaRの算出結果に基づき、各種VaR算出手法の比較を行うため、超過回数の比率、VaRのボラティリティ、超過事象の相関、VaRの相対水準の4つの基準を採用した。

(イ) 超過回数の比率

これは、いわゆるバック・テストングのことである。ここでは、VaRの全算出

.....
 28 減衰因子は、EWMA法、BRW法およびHW法で用いるが、手法により意味が異なる。脚注16で述べたように、BRW法では、それを損益シナリオの重み付けに用いる。一方、EWMA法およびHW法では、それを指数型加重移動平均による分散の推定に用いる。EWMA法は推定した分散（および共分散）を損益変動幅の決定に利用し、HW法は推定した分散を過去の収益率シナリオの修正に利用する。

対象日数に対する、損失額がVaRを超過した日数の比率を計算する。VaRの信頼水準を99%としているので、この比率は1%近傍になることが望ましい。

(ロ) VaRのボラティリティ

VaRの変動度合いをみるために、各手法が算出したVaRの年率ボラティリティを求める。リスク管理実務では、VaRをポジションの保有枠に用いることがあるため、その観点では、VaRのボラティリティが小さい手法の方が実務上は望ましい。

(ハ) 超過事象の相関

VaRが日々正確に算出されていれば、超過事象は毎日1%の確率で独立に生じる。超過事象を表す確率変数 X_t を導入する。

$$X_t = \begin{cases} 1 & (\text{時点 } t \text{ において損失額がVaRを超過した}) \\ 0 & (\text{時点 } t \text{ において損失額がVaRを超過していない}) \end{cases} \quad (22)$$

超過事象が独立であれば、時系列 $\{X_t\}$ の全ての自己相関は0である。

本稿では、 $\{X_t\}$ の1～15次の標本自己相関が全て0であるという帰無仮説²⁹に対し、リュング＝ボックス統計量³⁰による検定を行った。リスク・ファクターの変動パターンをうまく捉えられていない手法では、相場変動が大きくなったときに超過事象が頻繁に起こるため、検定では帰無仮説が棄却されやすいことが予想される。実務的には、VaRの算出結果が、検定で棄却されにくい方が好ましい。

(ニ) VaRの相対的水準

VaR算出対象ポジション（対象ポートフォリオ）ごとに、各手法で、全算出日のVaRの平均値を計算する。各手法のVaR平均値と、全手法のVaR平均値（各手法のVaR平均値を全手法 33種類 で平均したもの）との乖離を計算することで、相対的な大小関係を表せる。実務では、一般的に、VaRを所要自己資本額の基準としているため、VaRが小さい方が自己資本額は小さくなる。このため、実務的には自己資本の効率的運用の観点から、VaRは必要以上に大きすぎない方がよい。

(2) 数値分析の結果

イ．単一リスク・ファクターの結果

ここでは、33種類の手法で、単一リスク・ファクターのポジションのVaRを算出し、4種類の基準で各手法を比較した結果を示す。また、標本分位点法によるVaRとHD推定法によるVaRに関して、若干の考察を行う。

29 この帰無仮説は、Hull and White [1998] のそれにならった。

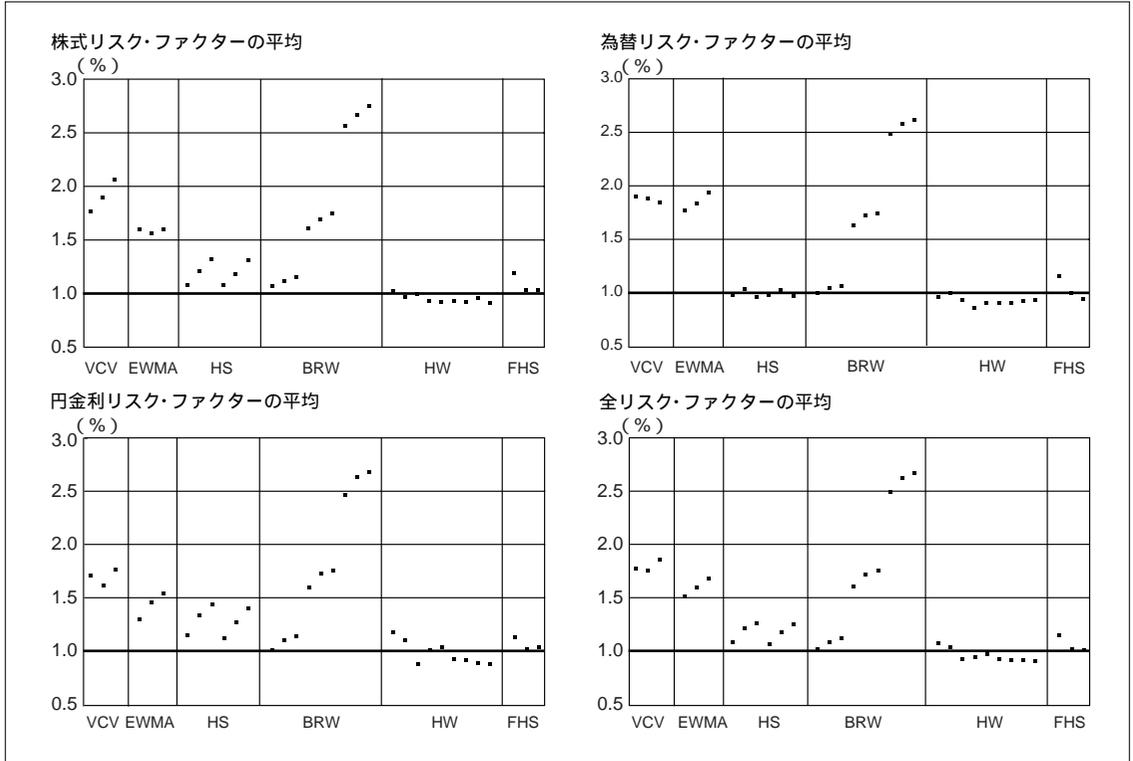
30 リュング＝ボックス統計量の詳細は、補論2を参照。

(イ) 各種基準による各手法の比較

a. 超過回数の比率

図表20に、株価指数・為替・円金利のリスク・ファクターおよび全リスク・ファクターに対して、超過回数の比率を平均した結果を、VaR算出手法の通し番号順（図表19参照）に左からプロットしたグラフを示す。

図表20 超過回数の比率（単一リスク・ファクター）



上述のように、超過回数の比率は、VaRの信頼水準を99%としているので、1%になることが望まれる。このことを念頭に図表20をみると、超過回数比率が比較的1%に近い値をとっているのは、HW法、FHS法、HS法およびBRW法（減衰因子0.99）であること、それ以外の手法では1%を相当上回っていることがわかる。

は、いずれの手法も損益分布に正規性等の仮定を置かず、実際の損益の経験分布に基づく手法であることが、良好な結果に繋がったものと考えられる³¹。

は、VCV法とEWMA法では収益率分布に正規性の仮定を置いていることが、BRW法（減衰因子0.94または0.97）では実質的な観測期間が短くなっていることが、

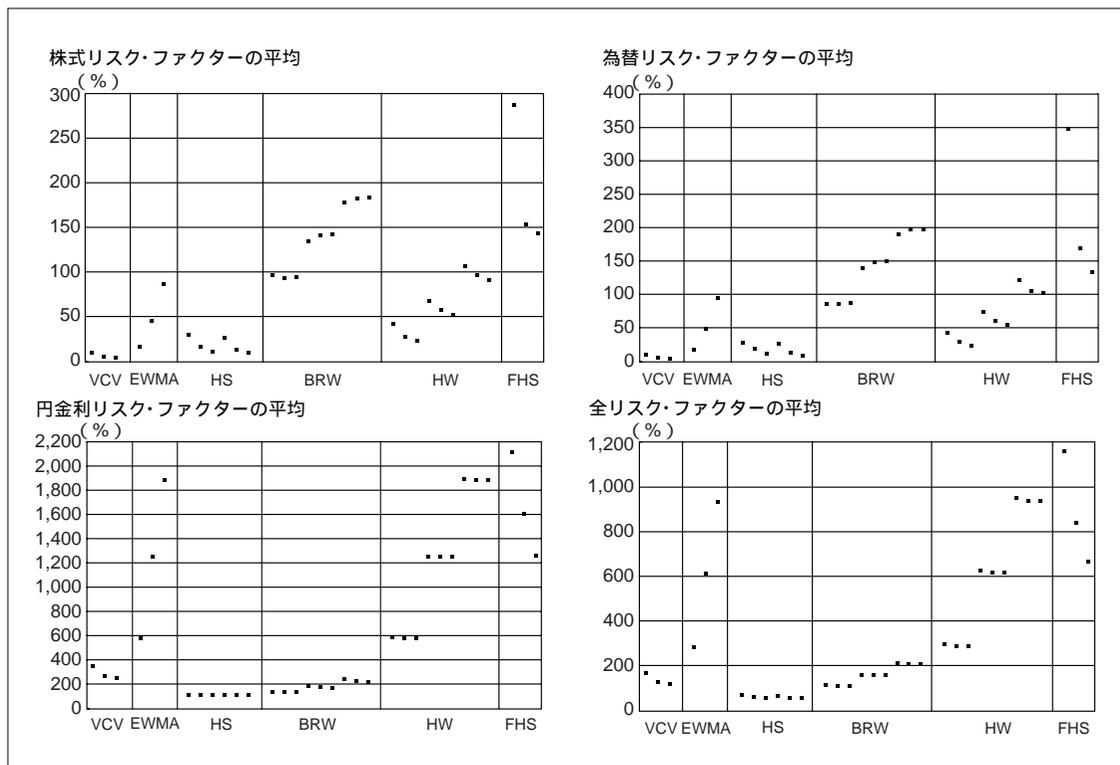
31 HS法では、観測期間を250、500、750営業日としたが、観測期間が短いほど超過回数比率は1%に近い。これは、いたずらに観測期間を長くして分布の裾のデータ数を増やすより、直近のリスク・ファクターの変動パターンを反映できるようにした方がよい場合があることを意味する。

それぞれ、実際の損益分布の裾を十分に表現できない背景であると考えられる。

b. VaRのボラティリティ

図表21に、株価指数・為替・円金利のリスク・ファクターおよび全リスク・ファクターで、ボラティリティを平均した結果をプロットしたグラフを示す。

図表21 VaRのボラティリティ(単一リスク・ファクター)

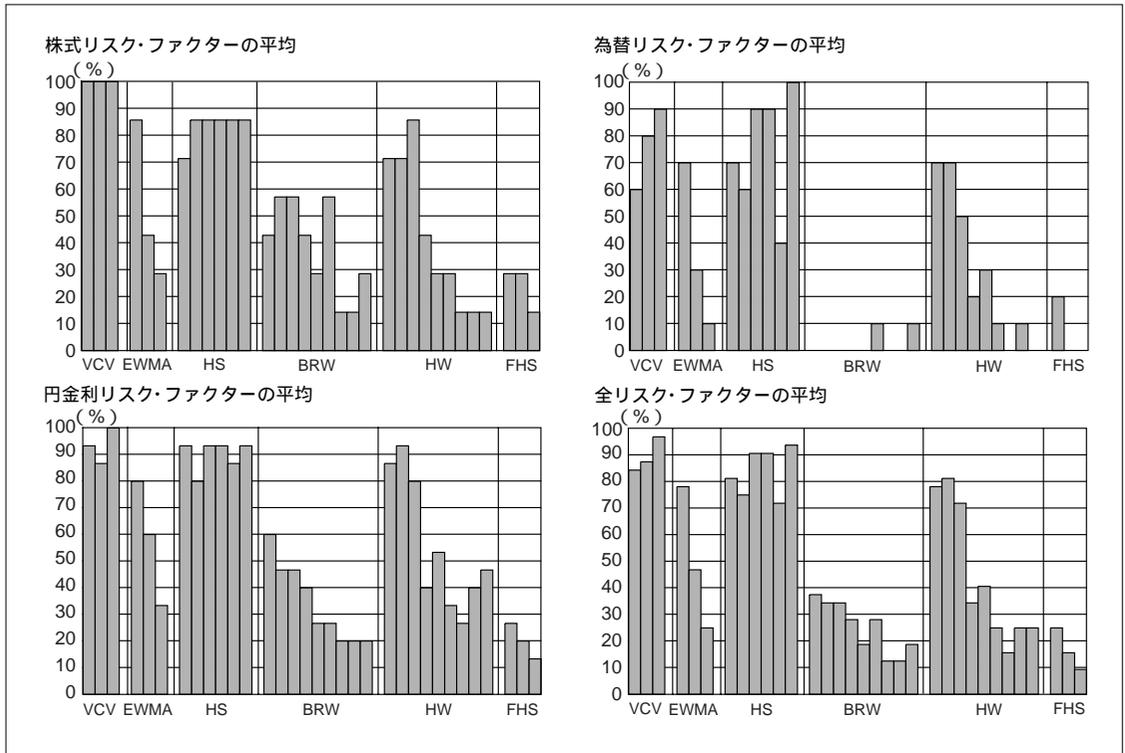


図表21をみると、相対的にボラティリティが小さい手法はHS法、VCV法であることがわかる。これは、リスク・ファクターの直近の変動パターンを反映しきれないことの裏返しでもある。これらの手法以外で、ボラティリティが低めに算出される手法は、円金利ではBRW法を、それ以外のリスク・ファクターではHW法(減衰因子0.99)を挙げることができる。

c. 超過事象の相関

図表22に、リスク・ファクターごとに、リュング=ボックス統計量を用いて、超過事象の相関の検定を行った結果を掲げる。具体的には、株価指数・為替・円金利のリスク・ファクターおよび全リスク・ファクターのうち有意水準1%で棄却された割合を示す。

図表22 超過事象の相関の検定(単一リスク・ファクター)



図表22をみると、EWMA法(減衰因子0.94)、BRW法(減衰因子0.94)、HW法(減衰因子0.94)およびFHS法の棄却割合が相対的に小さいこと、VCV法とHS法は、棄却割合が80~90%と非常に高いこと、EWMA法、BRW法およびHW法では、減衰因子が小さいほど棄却割合が小さくなる傾向があることがみてとれる³²。

は、いずれもリスク・ファクターの直近の変動パターンを重視する手法であることが理由であると考えられる。

32 図表22では、為替リスク・ファクターで、BRW法の棄却割合が相対的にかなり低い。この点、実際のデータを詳細に観察したところでは、為替リスク・ファクターでは、大きな損失が生じてからしばらくの間に、さらに大きな損失が生じることは、株や円金利に比べて少なかった。一方、ここでのBRW法(信頼水準99%のVaRを算出)では、減衰因子を0.94、0.97、0.99の3通りとしているため、(13)式で直近のデータに与えられる重みはいずれも1%超である。このため、直近の観測期間中のどの損失よりも大きい損失が新たに生じると、それは、その時点のVaRを超える。その損失額は、(15)式により翌日のVaRとして採用される。その後、VaRとして採用された損失を上回る損失が発生しない限り、VaRとして採用された損失に与えられる重みは日々徐々に低下し、1%を割り込んだ時点で、今度は(14)式によってVaRが計算される。この点、重みは時間の経過に伴い急速には低下しないので、VaRの水準が大きく変動することはほとんどなく、損失がVaRを超過するのは、VaRとして採用された損失を上回る損失が発生するときにほぼ限定される。このことが、為替リスク・ファクターの棄却割合が低い背景となっていると考えられる。

なお、株価指数や円金利に比べて、相対的に、為替リスク・ファクターで大きな損失が継続的には発生しない背景として、通貨当局による為替介入あるいは為替介入に対する市場の警戒感によって急激な為替変動の継続が抑制されていると推論できるかもしれない。しかし、この点については、本稿ではこれ以上は立ち入らない。

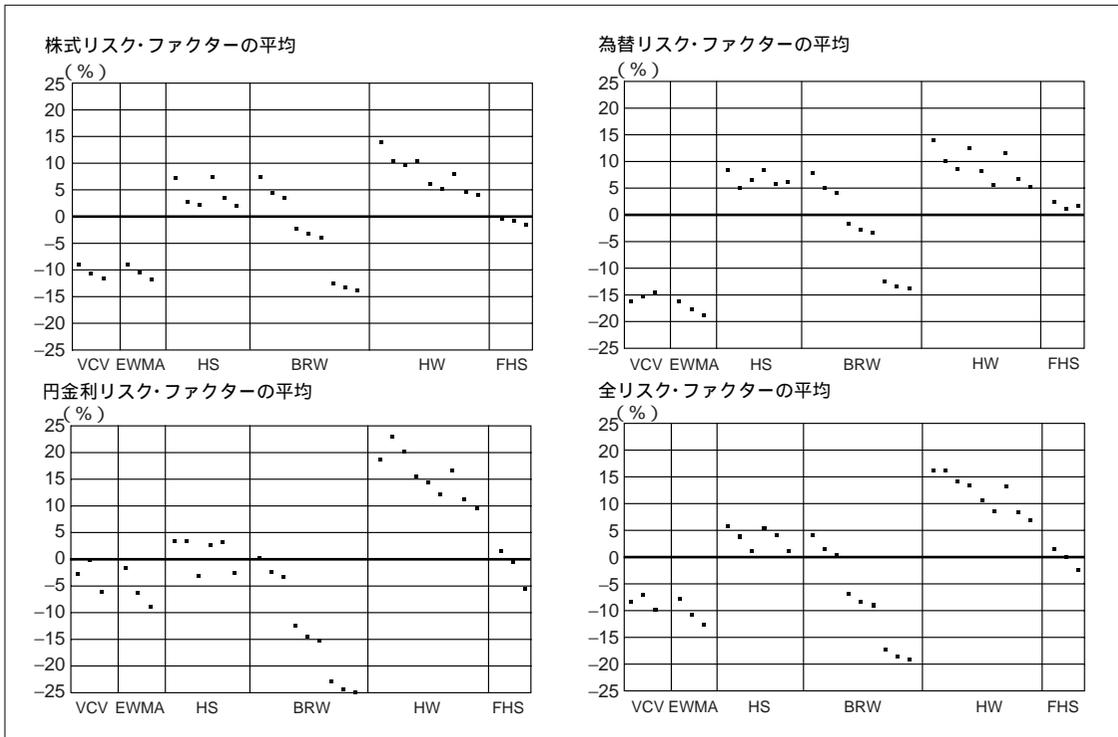
は、VCV法とHS法が、収益率分布に定常性を仮定しており、リスク・ファクターの直近の変動パターンを捉えにくい手法であることが背景となっている。

は、減衰因子が小さいほど、リスク・ファクターの直近の変動パターンを重視し、超過事象は毎日独立に発生する度合いが高くなることを意味している。

d . VaRの相対的水準

図表23に、株価指数・為替・円金利のリスク・ファクターおよび全リスク・ファクターで、VaRの全手法平均値からの乖離を平均した結果を示す。

図表23 VaRの全手法平均値からの乖離（単一リスク・ファクター）



図表23をみると、HW法を除いた各手法では、図表20とは上下が概ね逆になっている。これは、相対的に小さいVaRを算出する手法の方が、損失がVaRを上回る回数（超過回数）の比率も相対的に大きくなる傾向があるためである。

一方、HW法では、VaRの平均からの乖離が正で相対的にかなり大きい。その一方で、図表20では、HW法の超過回数比率は概ね1%の水準にある。直観的には、相対的に大きなVaRを算出する手法では、超過回数の比率も相対的に小さくなると思われるが、HW法の結果はその直観と必ずしも整合的ではない。この理由を、前掲の図表13を基に考えてみる。図表13で、HW法とFHS法を比較すると、両手法とも、相場変動が大きくなると比較的速やかにVaRが大きくなる一方で、その後相場が落ち着いたときのVaRの低下速度は、HW法の方が遅い傾向がある。このため、

相場変動が大きく損失がVaRを超過する可能性が高まったときには、両手法とも速やかにVaRを引き上げ、超過の過度な発生を抑えているが、HW法は、相場が落ち着き、超過の可能性が低下したときもVaRを相対的に高止まりさせている。したがって、結果として、HW法では、超過回数比率は概ね1%と期待どおりの水準になる一方で、算出されるVaRは時間平均をとると高めに算出されるのである。

(ロ) 標本分位点法とハレル = デービス推定法の比較

Inui, Kijima and Kitano [2003] では、正規分布、 t 分布等の裾が凸性を持つ損益分布で、HS (SQ) 法でVaRを算出すると、VaRを過大に推定する可能性があること、一定の条件のもとで³³、HS (HD) 法を用いてVaRを算出すると、HS (SQ) 法よりさらに過大なVaRを推定することを数値実験で示している。一方、乾 [2003] では、実際の市場データ (円・ドル為替レートおよび日経平均株価指数) を用いて数値分析を行い、Inui, Kijima and Kitano [2003] の指摘とは異なり、VaRを過小評価する傾向がみられることを示した。考えられる理由として、乾 [2003] は、実際の収益率分布の裾が凸性を満たしていないこと、収益率が互いに独立に同一分布に従っていないことを挙げている。

ここでは、本稿の上述の数値計算結果を用いて、乾 [2003] と同様の傾向がみられるか否かを検討する。まず、超過回数の比率 (図表20) をみると、両手法とも、ほとんどのリスク・ファクターで超過比率がわずかながら1%を超えるにとどまっており、過大なVaRを推定しているとはいい難い。また、両手法が計算したVaR水準 (図表23) をみても、明確な大小関係はなく、HS (HD) 法がHS (SQ) 法よりも、過大なVaRを算出するという傾向はない³⁴。

このように、株・為替・円金利の多くの種類のリスク・ファクターでも、乾 [2003] と同様の傾向がみられることが示された。したがって、リスク管理実務が対象とする実際の市場データには、Inui, Kijima and Kitano [2003] の指摘は、必ずしも該当しないと考えておいてよいと思われる。しかし、乾 [2003] と同じ傾向がみられる理由については、本稿では立ち入らず、乾 [2003] が挙げた2つの可能性を肯定するにとどめておきたい。

ロ・円金利ポートフォリオの数値計算の結果

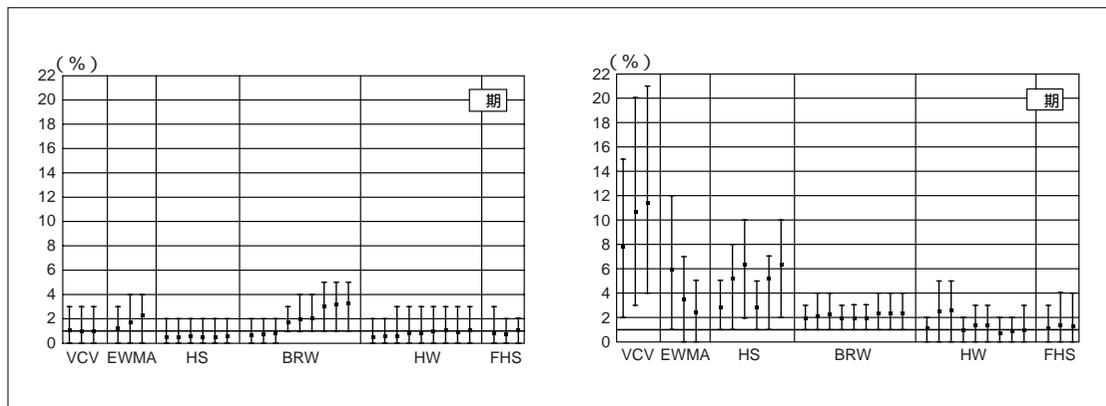
次に、上述した円金利ポートフォリオを用いて、相場変動が比較的落ち着いていた時期 (2003年1月13日 ~ 5月30日 期) および円金利 (特に中・長期金利) に大きな変動があった時期 (2003年6月2日 ~ 10月17日 期) で行った数値分析の結果を示す。具体的には、期、期ともに、単一リスク・ファクターの場合と同様に、超過回数の比率 (図表24)、VaRの全手法平均値からの乖離 (図表25)

33 t 分布等の裾が厚い分布ほど、この条件が満たされやすくなる。詳細はInui, Kijima and Kitano [2003] を参照。

34 各リスク・ファクターで個別にみても同様である。

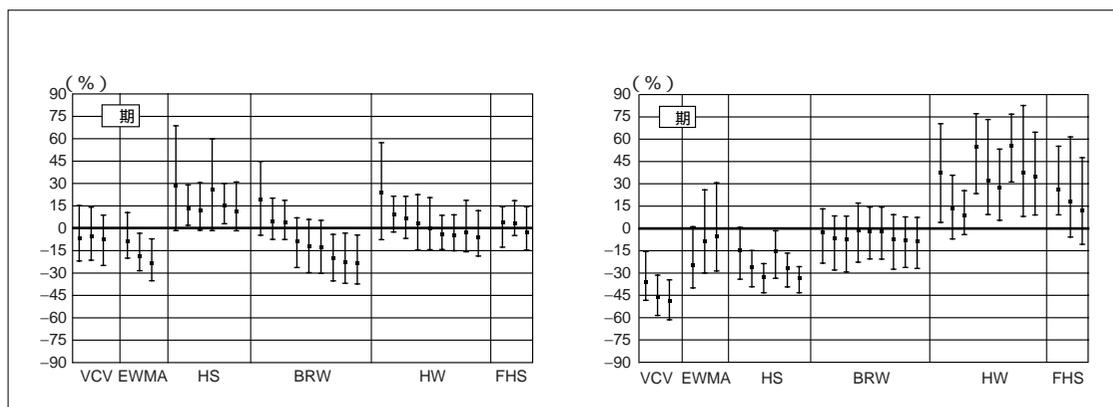
および VaRのボラティリティ（図表26）を計算した³⁵。なお、図表24、25、26では、各指標の平均値とともに、100個のポートフォリオ中、上位5番目および下位5番目の結果もあわせて示した。

図表24 超過回数の比率（円金利ポートフォリオ）



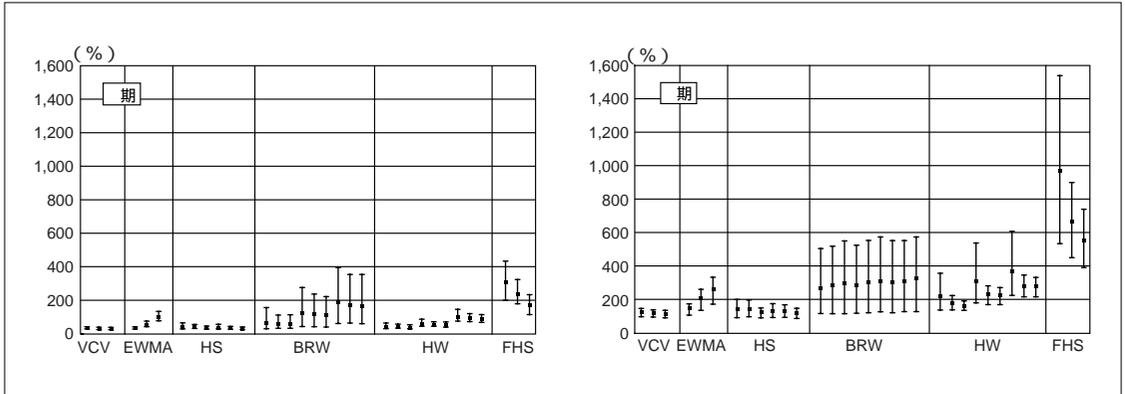
図表24をみると、期では、EWMA法およびBRW法の一部を除いて、ほぼ1%の超過率を示している。なお、HS法およびHW法（減衰因子0.99）の超過率が0.5%程度と若干1%を下回っているが、これは、期の直前の相場変動が大きかったため、相対的に大きなVaRが推定されたことによると考えられる。一方、期では、VCV法、EWMA法およびHS法の超過率が1%を大きく上回っているうえ、同一手法で算出されるVaRのばらつきも期に比べると大きい。これに対して、BRW法、HW法およびFHS法は、超過率は1~2%程度にあるほか、VaRのばらつきも他の手法に比べると小さい。

図表25 VaRの全手法平均値からの乖離（円金利ポートフォリオ）



35 VaRの算出対象期間が100営業日と短いため、ここでは、超過事象の相関の検定は行わない。

図表26 VaRのボラティリティ（円金利ポートフォリオ）



図表25をみると、期では、HS法およびHW法（減衰因子0.99）のVaRが大きく、図表24の結果と整合的である。期では、1%程度の超過比率を示したHW法やFHS法のVaR水準が比較的大きいことがわかる。これは、他の手法がVaRを過小評価していることが原因である（図表24参照）。HW法とFHS法を比べると、VaRは、単一リスク・ファクターのときと同様に、HW法の方が大きい傾向がある。

図表26をみると、期では期に比べてVaRのボラティリティの水準が大幅に増加していることがわかる。

6．若干の考察

本節では、リスク管理実務でのVaR算出手法として望ましい条件を考え、通常のヒストリカル法（HS法）ヒストリカル法に拡張を加えた手法（BRW法、HW法、およびFHS法）の実務上の利用可能性を考察する。

（1）リスク管理実務でのVaR算出手法の望ましい条件

前節では、VaRの算出結果を基に各種VaR算出手法の比較を行うため、超過回数比率、VaRのボラティリティ、超過事象の相関、VaRの相対水準という4つの基準を設定した。

本稿では、実際にVaR算出手法をリスク管理実務で利用する観点では、「VaRが損失を適切に捉えていること」（に対応）が最も重要であり、次に、その条件が満たされたうえで、「算出されるVaRの変動が過度に大きくないこと」（に対応）が実務上要請されると考えることにする。さらに、そのうえで、との基準が満たされれば、実務上はなお好ましいと考える。

また、「VaRが損失を適切に捉えていること」および「算出されるVaRの変動が過度に大きくないこと」という条件のほかでは、「VaR算出手法が複雑すぎないこと」

も同様に重要である。リスク管理実務上、VaRは日々算出される重要な経営指標の1つとなっていることから、VaRの算出に多大な時間（例えば数日）を要するような計算負荷の大きく複雑な手法でないことが要請される。また、VaR算出に関連して何らかの問題が生じた際に、速やかに原因を追究できるためにも、手法が複雑すぎないことが必要となる。

（2）各種VaR算出手法の実務での利用可能性

次に、（1）で挙げた各種条件を前提に、本稿で解説した各種VaR算出手法の実務での利用可能性を検討する。ここでは、まず、単一リスク・ファクターのVaRの算出結果（全リスク・ファクターの平均）を用いる。図表15にあるように、ここでは、最長十数年の日次データを用いており、リスク・ファクターが過去に示したさまざまな変動パターンを分析の対象としている。この意味で、以下ではまず、相場の安定期や変動期を含めた長期間における、各種VaR算出手法の利用可能性をみていくことになる。その後、前節の円金利ポートフォリオの分析結果を基に、リスク・ファクターが大幅に変動する時期に注目して、各種VaR算出手法を考察する。

イ．単一リスク・ファクターの分析結果を基に

最初に、「VaR算出手法が複雑すぎないこと」という条件を検討する。HS法は、リスク・ファクターの過去の変動が将来も繰り返されるという単純な仮定を置いており、また計算負荷が軽いことから、この条件を十分満たしていると考えられる。また、BRW法もHS法の単純な拡張であるので、この条件を満たしている。一方、HW法およびFHS法は、これらもHS法の拡張であり、その考え方自体は決して難しいものではない。しかし、HW法やFHS法では、GARCH等の分散推定モデルを用いて分散を定式化しているため、各種パラメータの推定作業が相当煩雑になる（ただし、HS法等と同様に、リスク・ファクター間の相関を求める必要はないという点は実務上の利点である）。したがって、HW法およびFHS法は、この条件を十分満たしているとはいえないと思われる。

次に、「VaRが損失を適切に捉えていること」に関しては、超過比率でみると、損益分布に正規性等の仮定を置かず、実際の損益分布に基づく手法であるHS法（HS SQ 法、以下HS法）、BRW法（減衰因子0.99、以下BRW法）、HW法およびFHS法は、比較的良好な結果を示した³⁶（前出図表20の右下段参照）。

以下では、「VaRが損失を適切に捉えていること」という条件を満たしたHS法、

36 ちなみに、マーケット・リスクに関するパーゼル合意（いわゆるマーケット・リスク規制）では、銀行の内部モデルを規制上の自己資本の計測に用いる場合に、VaRを損失が超過した比率によるバック・テストを義務付けている。具体的には、250個の標本において、5回以上の超過があったときには、追加的な自己資本を課す扱いとしている（Basel Committee on Banking Supervision [1996]）。この規制の存在を前提とすると、銀行にとっては、2%（=5/250）未満の超過比率となるVaR算出手法が必要となるが、ここでのHS法、BRW法、HW法およびFHS法はいずれも超過比率は1.5%を下回る水準にある。

BRW法、HW法およびFHS法のみを対象に、その他の条件を満たすか否かという観点で考察する。図表27にそれらの手法によるVaRの分析結果をまとめた。

「算出されるVaRの変動が過度に大きくないこと」という条件でみると（図表27の左上段）、HS法とBRW法でVaRの変動が相対的に小さいことがわかる。上述のように、「VaRが損失を適切に捉えていること」と「算出されるVaRの変動が過度に大きくないこと」の2つの条件を重要視する立場では、HS法とBRW法がその条件に合致する。

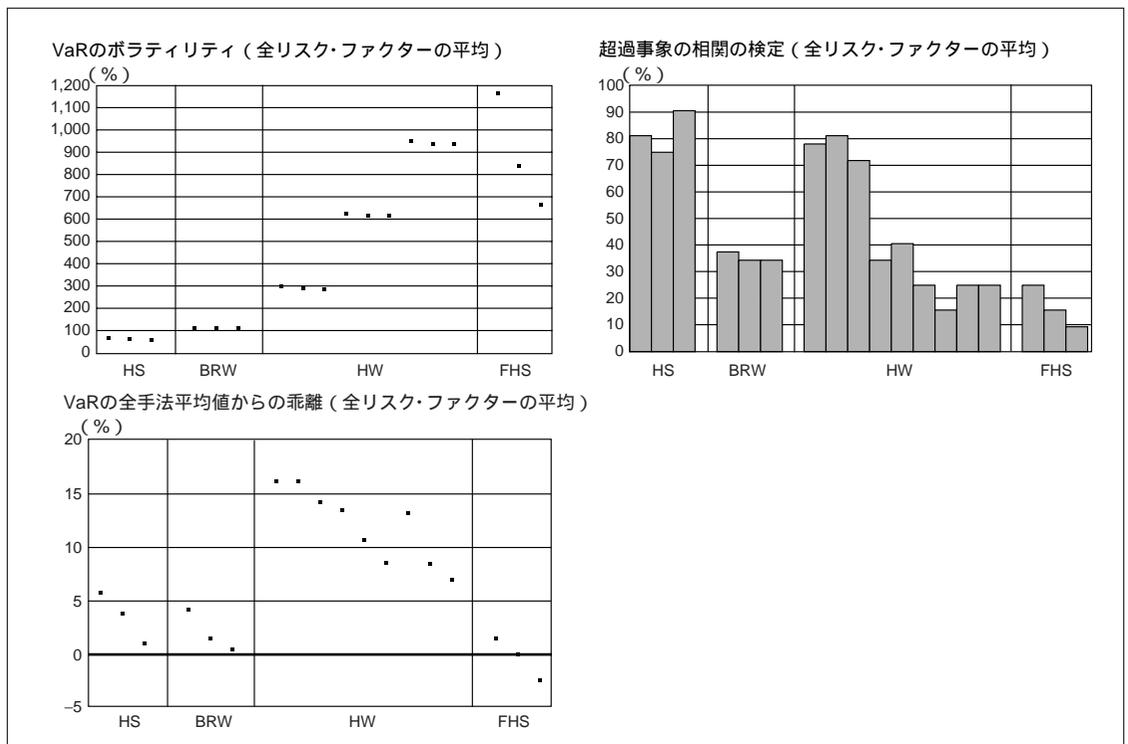
さらに、超過事象の相関、VaRの相対水準という2つの条件を加えると、の観点では、HS法とBRW法では、観測期間が長いほど、VaRは相対的に小さくなる（ただし、図表20をみると、観測期間が長いほど超過比率が高くなる傾向はある）。また、については、棄却割合は、HS法よりもBRW法が小さく、後者の方が好ましいといえる。

本稿の数値分析に基づくこれらの評価結果を踏まえると、リスク管理実務上で用いるヒストリカル法に基づくVaR算出手法としては、HS法あるいはBRW法が相対的に望ましいと結論付けることができる。

ロ．円金利ポートフォリオの分析結果を基に

イ .では、相場の安定期や変動期を含めた長期間における、各種VaR算出手法の

図表27 HS法、BRW法、HW法およびFHS法の各種分析結果

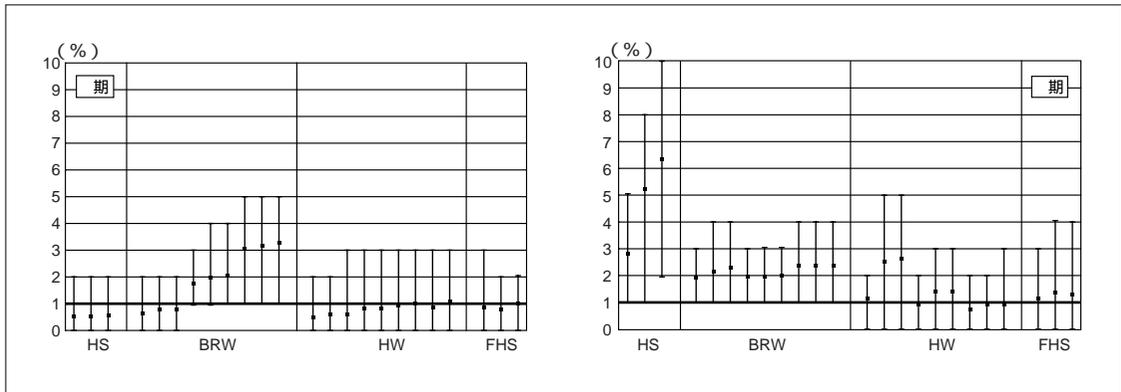


利用可能性をみてきた。次に、前節の円金利ポートフォリオの分析結果を基に、リスク・ファクターが大幅に変動する時期に注目して各種VaR算出手法を考察する。

相場変動が比較的落ち着いていた時期（2003年1月13日～5月30日 期）および円金利（特に中・長期金利）に大きな変動があった時期（2003年6月2日～10月17日 期）について、図表28に、「VaRが損失を適切に捉えていること」という条件に対応する超過回数比率（HS SQ 法 以下、HS法、BRW法、HW法およびFHS法）を掲げる³⁷。

図表28をみると、期では、まずイ.で相対的に望ましいとされたHS法はかなり高めな超過比率を示しているほか、同BRW法はHS法に比べれば低めであるが2%程度とやや高めな超過比率となっている。この一方、HW法とFHS法は比較的良好な結果となっている。これは、特にHW法とFHS法がリスク・ファクターの直近の変動パターンを重視する枠組みを持つことが背景にあると考えられる。

図表28 超過回数の比率（円金利ポートフォリオ）



次に、これらの4つの手法がその他の条件を満たすか否かという観点で考察する。図表29に、期での、それらの手法によるVaRの分析結果をまとめた^{38, 39}。

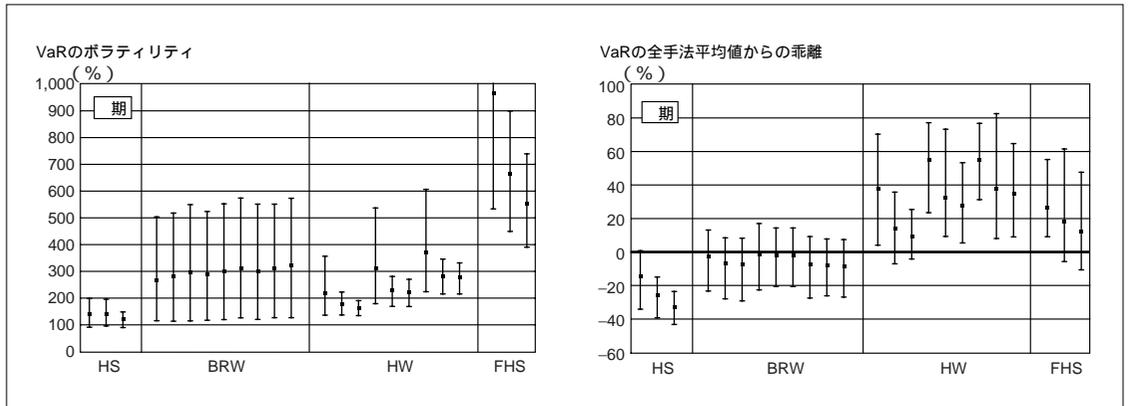
「算出されるVaRの変動が過度に大きくないこと」という条件でみると（図表29の左図）、BRW法、HW法およびFHS法ではいずれもVaRのボラティリティが相対的にかなり大きいことがわかる。また、特にHW法およびFHS法では、他の手法に比べて、大きめのVaRを算出する傾向があることもみてとれる（図表29の右図）。これらは、特にHW法およびFHS法が、「VaRが損失を適切に捉えていること」という条件を満たしていることの裏返しである。

37 HS（HD）法、VCV法およびEWMA法の結果を省いた以外は、図表24と同様。

38 脚注35で述べたように、ここでは超過事象の相関の検定は行わない。

39 図表29は、図表25、26からの抜粋。

図表29 HS法、BRW法、HW法およびFHS法の各種分析結果



このように、上述の 期のようなリスク・ファクターの急激な変動があったときには、VaR算出手法が、「VaRが損失を適切に捉えていること」、「算出されるVaRの変動が過度に大きくないこと」という2つの条件を同時に満たすことは難しい。

イ .では、相場の安定期や変動期を含めた長期間の市場データを用いて、各種VaR算出手法を検討した結果、HS法が減衰因子0.99のBRW法が相対的に望ましいとの結論を得た。ここで仮に、リスク管理実務の連続性の観点から、特定のVaR算出手法を継続的に使用することが望ましいと考えるならば、相場の状況にかかわらず、HS法か減衰因子0.99のBRW法のいずれかをVaR算出手法として採用することになる。この点、上述の 期では、HS法は、超過比率がかなり高く、前者の条件に必ずしも適う手法ではない。一方、BRW法は、超過比率はHS法よりは低く、少なくとも前者の条件をある程度満たしていると考えられる。したがって、本稿の分析結果を前提にすると、ヒストリカル・データを用いた各種VaR算出手法の中では、BRW法がリスク管理実務上は相対的に好ましい手法であるとの評価を与えられると思われる。

7 . おわりに

本稿では、通常ヒストリカル法 (HS法) およびHS法に改良を加えた3つの手法 (BRW法、HW法、FHS法) によるVaRの算出手法を説明し、VCV法、EWMA法を加えて、数値分析による各手法の比較を行った。

単一リスク・ファクターを用いた数値分析 (多様なリスク・ファクターの長期間のデータを用いた分析) からは、収益率分布に正規性の仮定を置いた手法 (VCV法、EWMA法) は、分布の裾を適切に捉えられないのに対し、過去の経験分布を利用するHS法およびHS法に改良を加えた手法は、分布の裾を相対的によく表現することが示された。また、HS法に改良を加えた手法は、リスク・ファクターの直近の変動パターンを捉えることもある程度対応できており、この点でHS法よりも

優れたVaR算出手法であることがわかった。円金利ポートフォリオを用いた数値分析からは、相場が安定的な時期にはHS法でも問題はないが、相場が不安定な時期でも分布の裾を相対的にうまく捉えられる手法は、分布にパラメトリックな仮定を設けず、かつ直近のデータをより重視するBRW法、HW法およびFHS法であることが示された。

リスク管理実務での利用を考えると、VaR算出手法に求められる条件としては、「VaRが損失を適切に捉えていること」、「VaRの変動が過度に大きくないこと」の2つが特に重要である。これらの条件で数値分析の結果をみると、単一リスク・ファクターの数値分析からは、HS法、減衰因子が高めのBRW法が望ましいとの結論が導かれる。一方、円金利ポートフォリオの数値分析からは、リスク・ファクターの急激な変動があったときには、本稿で検討したVaR算出手法は、いずれも「VaRが損失を適切に捉えていること」、「算出されるVaRの変動が過度に大きくないこと」という2つの条件を同時に満たすことは難しいことが判明した。リスク管理実務の連続性の観点から、特定のVaR算出手法を継続的に使用することが望ましいとする立場では、本稿の数値分析の結果をみる限りは、HS法よりも、減衰因子が高めのBRW法を使うことが相対的に好ましいとの評価を与えられるように思われた。

ただし、本稿の分析およびその評価は、いくつかの種類のリスク・ファクターやポートフォリオを対象としたものである。つまり、本稿で示した各種の考察が、あらゆるポートフォリオに該当するわけではない。したがって、実際のリスク管理実務においては、独自に、本稿のような数値分析を行い、それを基にさまざまな観点で検討を加え、適切と思われるVaR算出手法を選択することが必要となる。

補論1 . ハレル = デービス推定量について

(1) ハレル = デービス推定量の導出

分布関数 $F(x)$ 、確率密度関数 $f(x)$ の分布より得られた標本を $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 、経験分布の分布関数を $F_n(x) = 1/n \sum_{i=1}^n 1_{\{x \geq X_i\}}$ ⁴⁰、標本を昇順に並べ替えた順序統計量を $\{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}\}$ とする。このとき、 k 番目の順序統計量 $X_{(k)}$ で、

$$P\{X_{(k)} \leq x\} = \sum_{i=k}^n \frac{n!}{(n-i)!} F^i(x) (1-F(x))^{n-i}, \quad (\text{A-1})$$

が成立する。順序統計量 $X_{(k)}$ の確率密度関数 $f_k(x)$ は、(A-1)式を微分して、

$$f_k(x) = \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} F(x)^{k-1} \{1-F(x)\}^{n-k} f(x), \quad (\text{A-2})$$

で与えられる⁴¹。このとき、順序統計量 $X_{(k)}$ の期待値は、

$$\begin{aligned} E[X_{(k)}] &= \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_{-\infty}^{\infty} x F(x)^{k-1} \{1-F(x)\}^{n-k} dF(x) \\ &= \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_0^1 F^{-1}(y) y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy, \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

となる。 $E[X_{(n+1)\alpha}]$ は、 $n \rightarrow \infty$ のとき $100\alpha\%$ 点に収束するので、経験分布 $F_n(x)$ を用いて $100\alpha\%$ 点を、

$$HD_\alpha = \frac{1}{\beta((n+1)\alpha, (n+1)(1-\alpha))} \int_0^1 F_n^{-1}(y) y^{(n+1)\alpha-1} (1-y)^{(n+1)(1-\alpha)-1} dy, \quad (\text{A-4})$$

により推定する。これが HD 推定量である⁴²。

経験分布の定義より (A-4) 式は、以下のように書き換えることが可能である。

$$HD_\alpha = \sum_{i=1}^n w_{n,i}^\alpha X_{(i)}. \quad (\text{A-5})$$

ここで、 $w_{n,i}^\alpha$ は次式で表される。

$$w_{n,i}^\alpha = \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_{(i-1)/n}^{i/n} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy, \quad k = (n+1)\alpha. \quad (\text{A-6})$$

40 $1_{\{x \geq X_i\}}$ は、 $x \geq X_i$ のとき 1、 $x < X_i$ のとき 0 となる定義関数。

41 ここで $\beta(\cdot, \cdot)$ はベータ関数であり、 $\beta(k, n-k+1) = (k-1)! (n-k)! / n!$ が成立する。

42 ここで、 $(n+1)\alpha$ は整数でなくてもよい。

(2) ハレル=デュービス推定量とブートストラップ法の関係について

$(n+1)\alpha = k$ が整数である場合に、ブートストラップ法による推定値の期待値が HD 推定量に一致することを示す。

ブートストラップ法による分位点の推定は以下の手順で行われる。

順序統計量 $\{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}\}$ から、重複を許して、無作為に n 個の標本を抽出する。

抽出した標本から、 k 番目に小さい値を抽出する。

および を必要回数繰り返し、 で得た抽出した標本の平均を分位点の推定値とする。

上記 の手順で、順序統計量 $X_{(i)}$ が抽出される確率を考える。まず、 の重複を許した抽出において、 $X_{(i)}$ 以下の標本を k 個以上抽出する確率（このとき、 で抽出される値は $X_{(i)}$ 以下となる）は、

$$\sum_{j=k}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} (i/n)^j \{1-(i/n)\}^{n-j}, \quad (\text{A-7})$$

である。同様に、 $X_{(i-1)}$ 以下の値を k 個以上抽出する確率（このとき、 で抽出される値は $X_{(i-1)}$ 以下となる）は、

$$\sum_{j=k}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \{(i-1)/n\}^j [1-\{(i-1)/n\}]^{n-j}, \quad (\text{A-8})$$

である。したがって、 で抽出される k 番目に小さい値が $X_{(i)}$ である確率 $w_{n,i}^\alpha$ は、

$$w_{n,i}^\alpha = \sum_{j=k}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} (i/n)^j \{1-(i/n)\}^{n-j} - \sum_{j=k}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \{(i-1)/n\}^j [1-\{(i-1)/n\}]^{n-j}, \quad (\text{A-9})$$

となり、ブートストラップ法による推定値の期待値は $\sum_{i=1}^n w_{n,i}^\alpha X_{(i)}$ で表される。

ところで、確率変数 X がベータ分布 $Beta(k, n-k+1)$ に従い、確率変数 Y が二項分布 $Bi(n, p)$ に従うとき以下の関係が成立することが知られている（蓑谷 [1998]）。

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq p) &= \Pr(Y \geq K) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_0^p y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy &= \sum_{j=k}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} p^j (1-p)^{n-j}. \quad (\text{A-10}) \end{aligned}$$

(A-10)式を用いれば、(A-9)式の $w_{n,i}^\alpha$ は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}
 w_{n,i}^\alpha &= \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_0^{i/n} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy \\
 &\quad - \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_0^{(i-1)/n} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy \\
 &= \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_{(i-1)/n}^{i/n} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy . \tag{A-11}
 \end{aligned}$$

これは、(A-6)式のHD推定量の重み $w_{n,i}^\alpha$ にほかならない。よって、ブートストラップ法による推定値の期待値がHD推定量に一致することが示された。

補論2 . リュング = ボックス統計量⁴³

時系列データ $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ を所与とするとき、1次から m 次までの標本自己相関係数は、 \bar{x} を $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ の標本平均として、

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^T (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}, \quad k=1, 2, \dots, m, \quad (\text{A-12})$$

で定義される。

このとき、リュング = ボックス統計量 $LB(m)$ は、標本自己相関係数を用いて、

$$LB(m) = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}^2(k)}{T-k}, \quad (\text{A-13})$$

で計算される。

リュング = ボックス統計量は、1次から m 次までの自己相関係数が全てゼロであるという帰無仮説のもとで、自由度 m のカイ2乗分布 $\chi^2(m)$ に漸近的に従う。自由度 m 、上側確率 α に対する値を $\chi_\alpha^2(m)$ とすると、有意水準 α での検定では $LB(m) > \chi_\alpha^2(m)$ のときに帰無仮説を棄却すればよいことになる。なお、 $m=15$ のとき、有為水準1%の棄却域は、 $LB(15) > \chi_\alpha^2(15) = 30.5779$ である。

.....
43 ここでの説明は、渡部 [2000] を参考にした。

参考文献

- 乾 孝治、「VaRのバイアスと内挿・外挿による修正」、日本保険・年金リスク学会 第1回設立記念大会予稿集、2003年、153頁
- 木島正明編著、『金融リスクの計量化【上】バリュー・アット・リスク』、金融財政事情研究会、1998年
- シモノフ、ジェフリー S. (竹澤邦夫・大森 宏訳)、『平滑化とノンパラメトリック回帰への招待』、農林統計協会、1999年
- 蓑谷千鳳彦、『すぐに役立つ統計分布』、東京図書、1998年
- 山下智志、『市場リスクの計量化とVaR』、朝倉書店、2000年
- 渡部敏明、『ボラティリティ変動モデル』、朝倉書店、2000年
- 汪 金芳・田栗正章・手塚 集・樺島祥介・上田修功、『統計科学のフロンティア11 計算統計 確率計算の新しい手法』、岩波書店、2003年
- Barone-Adesi, G., F. Bourgoin, and K. Giannopoulos, “Don't Look Back,” *RISK*, 11 (8), 1998, pp. 100-104.
- , K. Giannopoulos, and L. Vosper, “VaR without Correlations for Non-linear Portfolios,” *Journal of Futures Markets*, 19, 1999, pp. 583-602.
- Basel Committee on Banking Supervision, “Supervisory framework for the use of “backtesting” in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements,” Basel Committee Publications, 22, January 1996. (<http://www.bis.org/>で入手可、日本銀行仮訳は<http://www.boj.or.jp/>で入手可)
- Bollerslev, T., and J. M. Wooldridge, “Quasi Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances,” *Econometric Reviews*, 11, 1992, pp. 143-172.
- Boudoukh, J., M. Richardson, and R. Whitelaw, “The Best of Both Worlds,” *RISK*, 11 (5), 1998, pp. 64-67.
- Butler, J. S., and B. Schachter, “Estimating Value-at-Risk with a Precision Measure by Combining Kernel Estimation With Historical Simulation,” Working Paper, 1997.
- Efron, B., “Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife,” *The Annals of Statistics*, 7, 1979, pp. 1-26.
- Harrell, F. E., and C. E. Davis, “A new distribution-free quantile estimator,” *Biometrika*, 69, 1982, pp. 635-640.
- Hendricks, D., “Evaluation of Value at Risk Models Using Historical Data,” *Economic Policy Review*, Federal Reserve Bank of New York, April 1996, pp. 36-69.
- Hull, J., and A. White, “Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk,” *Journal of Risk*, 1, 1998, pp. 5-19.
- Inui, K., M. Kijima, and A. Kitano, “VaR is subject to a significant positive bias,” Working Paper, 70, Graduate School of Economics Kyoto University, 2003.
- Jorion, P., *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, Chicago, 2000.
- Sheather, S. J., and J. S. Marron, “Kernel quantile estimators,” *Journal of the American Statistical Association*, 85, 1990, pp. 410-416.

