Forward Backward Stochastic Differential Equationsに関する一考察

吉田敏弘（よしだ としひろ）

要　旨

本稿で考察の対象となるBackward Stochastic Differential Equations（BSDE's：バックワード確率微分方程式）、Forward Backward Stochastic Differential Equations（FBSDE's：フォワード・バックワード確率微分方程式）の概念を簡単にまとめると、時間の経過とともに前進するプロセス（forward process）に対して、ある時点における目的関数を与え、これを最適化するように制御アルゴリズムを構成する。この制御アルゴリズムを実際にフォワード・プロセスに当てはめて目的関数を満足するように構成されたプロセスをバックワード・プロセス（backward process）と呼ぶ。特に、プロセスが確率微分方程式で表現される場合に、バックワード・プロセスをBSDE'sと呼び、さらに、フォワード・プロセスがバックワード・プロセスの影響を受ける場合に両者をあわせてFBSDE'sと呼ぶ。

本稿では、BSDE's、FBSDE'sについて簡単に整理するとともに、これらの表現形式が主要な役割を果たす数理ファイナンスの分野、特に、Harrison and Pliska［1981］の枠組みで議論できる問題群において、その適用例と問題の拡張に伴う表現形式の拡張についてまとめた。

キーワード： BSDE's、FBSDE's、最適ポートフォリオ問題、派生証券の価格付け、金利の期間構造

本稿をまとめるに当たって、貴重なコメントをいただいた木島正明教授（京都大学）および金融研究所のスタッフに感謝します。本稿で示されている内容および意見は筆者に属し、日本銀行、金融市場局あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

吉田敏弘　日本銀行金融市場局兼金融研究所研究第1課
（E-mail: toshihiro.yoshida@boj.or.jp）

1．はじめに

Backward Stochastic Differential Equations（以降BSDE's）、さらには、Forward Backward Stochastic Differential Equations（以降FBSDE's）といった概念は、Bismut［1978］によって線形の場合が確率制御に関する観点から考察され、その後、Pardoux and Peng［1990］、Ma and Yong［1993］などによって一般的な場合が議論されるようになった。

特に、ファイナンスへの応用という観点から、非常に幅広い分野を持ち、かつ、非完備市場に関する議論にも自然に展開できるという柔軟性に富んだ理論フレームであることが認識されるに及んで、ファイナンスの領域からの研究も盛んになりつつある。例えば、派生証券の評価（Cvitanić and Karatzas［1993］、Duffie, Ma and Yong［1994］、Otaka and Yoshida［2000］など）、制約付きポートフォリオ問題、さらには、ある種の効用関数の議論（Duffie and Epstein［1992］など）など、その適用範囲をひろげてきた（網羅的なサーベイ論文、特にBSDE'sに関するサーベイ論文としてEl Karoui, Peng and Quenez［1997］など）。

ところが、解の存在、一意性を保証するために要請される条件、あるいは、具体的な解を構成する方法であるFour Step Scheme（Ma, Protter and Yong［1994］）などを適用するうえで求められる条件も厳しいものになることなどから、現実的なモデル構築を行ううえでは、理論構成上の厳密さとのバランスをとることがかなり難しくなるといった問題点を持っている。

本稿では、BSDE's、FBSDE'sの理論で記述できる問題群をさまざまな理論（最適制御、偏微分方程式論など）との関係性の中でまとめると同時に、ファイナンス分野におけるモデル構築の具体的な適用例を紹介する。

本稿の構成を以下に述べる。最初に、本稿において考察の対象となる問題群の数学的表現形式をまとめ、その後、数理ファイナンスにおける代表的問題をその表現形式に着目して議論する。それらの問題を議論するうえで必要となる数学的構造に関しては補論にまとめるようにした。

2．Forward Backward Stochastic Differential Equations

最初に、FBSDE'sの概念を簡単に述べる。時間の経過とともに前進するプロセス（forward process）に対して、ある時点における目的関数を与え、これを最適化するように制御アルゴリズムを構成する。この制御アルゴリズムを実際にフォワード・プロセスに当てはめて目的関数を満足するように構成されたプロセスをバックワード・プロセスと呼ぶ。特に、プロセスが確率微分方程式で表現される場合、両者をあわせてFBSDE'sと呼ぶ。

数理ファイナンスの場合で述べると、フォワード・プロセスで表現される原資産価格のダイナミクスに対して、目的関数は効用関数の最大化、あるいは、ペイオフ

図1　FBSDE's **の概念図**

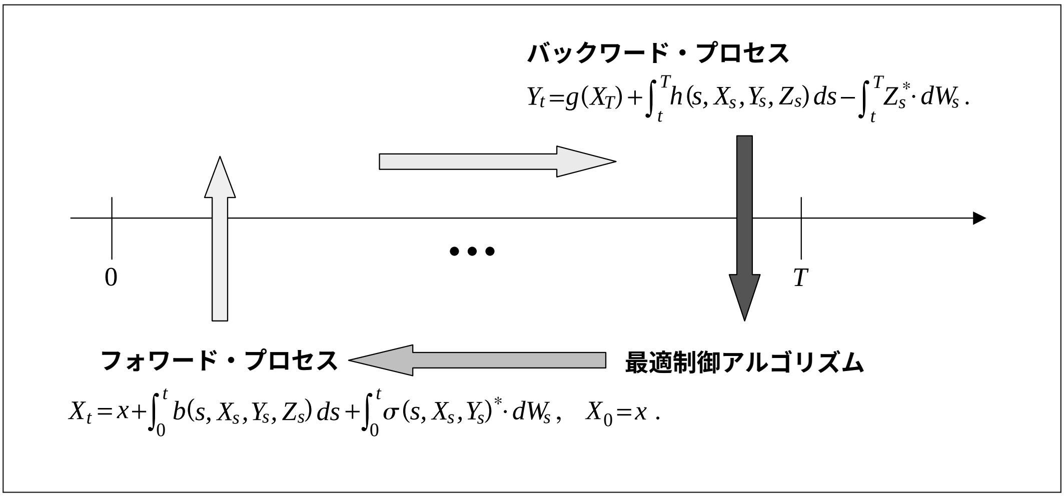
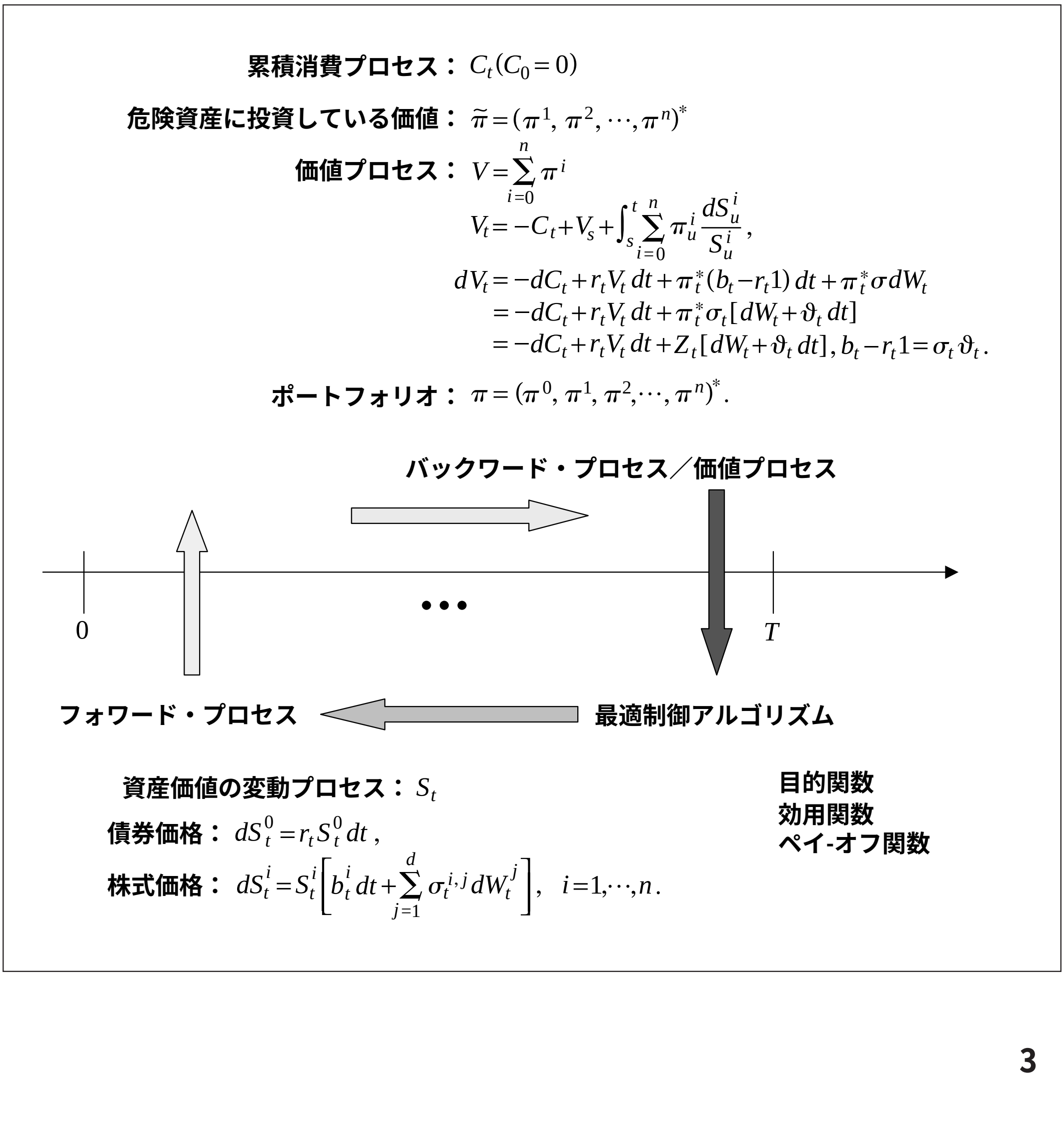


図2　FBSDE's **の例（ポートフォリオ選択問題）**



関数の実現に相当し、最適ポートフォリオの価値、あるいは、ヘッジ・ポートフォリオの価値のダイナミクスがバックワード・プロセスで表現されることになる。

また、従来の代表的数理ファイナンスにおける問題は、フォワード・プロセスがバックワード・プロセスに影響されない場合が多く、結果として、後者のみを求める形のものが多い。これを特にBSDE'sと呼ぶ。

(1) Backward Stochastic Differential Equations

あるフィルター付確率空間（filtered probability space）($\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t$）を考え、$\xi$を評価時点$T$における$m$次元確率変数、$Y_t$を時点$t$における$m$次元バックワード・プロセス、$Z_t$を最適パスを実現する$m \times d$次元制御プロセスとする。この時、BSDE'sの一般的な形式は次のように表現することができる。

$$Y_t = Y_T + \int_t^T h(s, Y_s, Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s^* \cdot dW_s \,, \qquad Y_T = \xi, \qquad (1)$$

ここで、w_tはd次元ウィーナー（Wiener）プロセス。

定理2.1：BSDE'sの可解性（Solvability of BSDE's） BSDE's（1）は以下を満足するスタンダード・パラメータ（standard parameter）(ξ, h）が与えられた時、一意の解（Y, Z）を持つ。

1. $\xi \in \mathbf{L}_T^2(\mathbf{R}^m)$: $\mathbf{L}_T^2(\mathbf{R}^m)$は$\mathcal{F}_T$－可測な$E(|X|^2) < \infty$である確率変数の空間。

2. h は一様にリプシッツ（Lipschitz）で$h(\cdot, 0, 0) \in \mathbf{H}_T^2(\mathbf{R}^m)$: $\mathbf{H}_T^2(\mathbf{R}^m)$ は $E\int_0^T |\psi_t|^2 dt < \infty$であるような全ての可予測なプロセス$\psi : \Omega \times [0, T] \to \mathbf{R}^m$ の空間。

証明 Pardoux and Peng［1990］Theorem 3.1 参照。

系2.2：局所リプシッツ条件（Local Lipschitz Condition） BSDE's（1）の解の存在条件は次のような局所リプシッツ条件の形に緩和することができる。

$$|h(t, y_1, z_1) - h(t, y_2, z_2)| \le \mu(l)(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|),$$

$$\forall y_1, y_2 \in R^m, \forall z_1, z_2 \in R^{m \times d} \quad \text{s.t.} \ |y_1|, |y_2| \le l.$$

$$E\left[|X|^2 + \int_t^T |h(0, 0, s)|^2 ds \mid \mathcal{F}_t\right] \le k^2 \qquad \text{a.e., a.s.}$$

この時、ある定数$T_0 \in [0, T)$が存在し、区間$[T_0, T]$において一意の解（Y, Z）が存在する。さらに、この区間において$|X_t| \leq 4k$ a.s., a.e。ここで、$T - T_0 = 4C_1^{-1}\log 2$, $C_1 = 1+2\mu(4k)+2(\mu(4k))^2$。

証明　Peng［1993］Corollary 2.3 参照。

（2）Forward Backward Stochastic Differential Equations

FBSDE'sは、n次元フォワード・プロセスX_tがX_tの関数として記述される終端条件を持つBSDE'sを満足するプロセス（Y, Z）の影響を明示的に受ける場合の表現形式で、（X, Y, Z）を同時に求める形になる。ここで、$\sigma(\cdot)$は$n \times d$次元のボラティリティ・プロセス。

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s, Y_s, Z_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, Y_s)^* \cdot dW_s\,, \qquad X_0 = x\,, \tag{2}$$

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h(s, X_s, Y_s, Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s^* \cdot dW_s\,. \tag{3}$$

定理2.3：FBSDE'sの可解性（Solvability of FBSDE's）　FBSDE's（2）～（3）式は次の条件を満足するとき、一意の解（X, Y, Z）を持つ。

1. $b(\cdot)$、$h(\cdot)$、$\sigma(\cdot)$、$g(\cdot)$は滑らかな関数で、一階の微分がある定数Lで押さえられる。さらに、ある$\alpha \in (0, 1)$に対して$g \in C^{2+\alpha}(\mathbf{R}^n)$。

2. ある正の連続関数$\mu(\cdot)$とある正の定数vが存在し、

$$\mu(|y|)\, I \leq \sigma(t, x, y)\, \sigma(t, x, y)^* \leq vI\,.$$

3. 任意の$(t, x, z) \in [0, T) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m \times d}$に対して、ある正の定数$v$が存在し、

$$|b(t, x, 0, 0)| + |h(t, x, 0, z)| \leq v\,.$$

証明　Ma and Yong［1999］Chapter 4 Theorem 2.2 参照。

注記　上記のFBSDE'sでボラティリティ・プロセス、制御プロセスを（X, Y, Z）の関数形に拡張した形式も考えられる[1]。

1 $m = 1$ の場合については、Ma, Protter and Yong［1994］Theorem 4.5 参照。

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, Y_s, Z_s)^* \cdot dW_s,\ X_0 = x, \tag{4}$$

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T \tilde{\sigma}(s, X_s, Y_s, Z_s)^* \cdot dW_s. \tag{5}$$

定理2.4： Four Step Scheme FBSDE's　(2)～(3)式に対して、ある関数$\theta(\cdot)$が存在し、$Y_t = \theta(t, X_t)$と記述できると仮定する。このとき、次のアルゴリズムを適用することによって(2)～(3)式の解を具体的に構成することができる。

1. 次を満足する滑らかな関数$z(\cdot)$をみつける。

$$z(t, x, y, p) = p\sigma(t, x, y). \tag{6}$$

2. Step 1 で求めた $z(\cdot)$ を用いて以下にあげる偏微分方程式を解くことによって$\theta(t, x)$を求める。

$$\theta_t^k + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\theta_{xx}^k(\sigma\sigma^*)(t, x, \theta)] + \langle b(t, x, \theta, z(t, x, \theta, \theta_x)), \theta_x^k \rangle + h^k(t, x, \theta, z(t, x, \theta, \theta_x)) = 0,\ 1 \le k \le m, \tag{7}$$

$$\theta(T, x) = g(x). \tag{8}$$

3. 上記までのステップで求めた$z(\cdot)$と$\theta(t, x)$を用いて次のFSDE'sを解く。

$$X_t = x + \int_0^t \tilde{b}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \tilde{\sigma} \cdot (s, X_s) \cdot dW_s, \tag{9}$$

$$\tilde{b}(t, x) = b(t, x, \theta(t, x), z(t, x, \theta(t, x), \theta_x(t, x))),$$

$$\tilde{\sigma}(t, x) = \sigma(t, x, \theta(t, x)).$$

4. ステップ3 で求めたX_tを用いて

$$Y_t = \theta(t, X_t), \tag{10}$$

$$Z_t = z(t, X_t, \theta(t, X_t), \theta_x(t, X_t)), \tag{11}$$

証明　Ma, Protter and Yong［1994］を参照。

（3）Extended Forward Backward Stochastic Differential Equations

FBSDE'sにおける（(X, Y, Z)）をある確率測度$\mu_t(\cdot)$に依存した形式に拡張したものを、本稿ではExtended FBSDE's（以降EFBSDE's）と呼ぶ。

$$X_t = x + \int_0^t \int_U b(X_s, Y_s, z)\,\mu_s(dz)\,ds + \int_0^t \int_U \sigma(X_s, Y_s, z)^* \mu_s(dz) \cdot dW_s,\ X_0 = x, \quad (12)$$

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T \int_U h(X_s, Y_s, z)\,\mu_s(dz)\,ds - \int_t^T \int_U z^* \mu_s(dz) \cdot dW_s. \quad (13)$$

仮定2.5　EFBSDE'（12）～（13）式に対して次の仮定を置く。

（A.1）$b(\cdot)$、$h(\cdot)$、$\sigma(\cdot)$は連続関数。

さらに、x、y に関して微分可能で次を満たす正の定数Lが存在する。

$$\sum_{\zeta=\{x,y\}} (|b_\zeta(x, y, u)| + |h_\zeta(x, y, u)| + |\sigma_\zeta(x, y, u)|) \le L, \qquad \forall (x, y) \in R^n \times R^m, \forall u \in U.$$

（A.2）任意の$u \in U$に対してある正の定数C が存在し、

$$|b(0, 0, u)| + |h(0, 0, u)| + |\sigma(0, 0, u)| \le C.$$

（A.3）gは連続関数。

定義：許容可能緩和コントロール（Admissible Relaxed Control）　$\mathcal{U}^R$は$\mathcal{A} = (\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, W, \mu)$を要素に持つ集合とする。この時、$\mathcal{U}^R$を許容可能緩和コントロールと呼ぶ。ここで、$(\Omega, F, P, F_t)$ はフィルター付確率空間、W_t は$\mathcal{F}_t$-ウィーナー・プロセスであり、$\mu \in \mathbf{M}(\Omega)$はある性質を満足する測度[2]。

注記　（3）式における$\mathcal{F}_t$-適合なZ_tは、$\mu_t(du, \omega) = \delta_{Z_t(\omega)}(u)$とした場合の緩和コントロールと考えることもできる[3]。

2 Ma and Yong［1993］参照。簡単な説明は補論参照。

3 すなわち、$\mu_t(\cdot,\omega)$は$Z_t(\omega)$をサポートとするDirac-測度である。

（4）最適制御とFBSDE's

本稿における最適制御の問題は、$\Gamma = \{(x, g(x)) | x \in \mathbf{R}^n\}$とするとき、$(X(T), Y(T)) \in \Gamma$となる$Z$をみつける問題のクラスが中心となる。いま、$Y(T) = g(X(T))$に対して次のような汎関数[4]を考える。

$$J(t, x, y; Z(\cdot)) = Ef(X(T; t, x, y, Z(\cdot)), Y(T; t, x, y, Z(\cdot))). \qquad (14)$$

定義：Viscosity Solution-Hamilton-Jacobi-Bellman Equation-Value Function

FBSDE's（2）～（3）式およびEFBSDE's（12）～（13）式に対して次のような$V(t, x, y)$を考える。

$$V(t, x, y) = \inf_{\substack{\mu, P \\ Z(\cdot) \in Z^{\mu}[t, T]}} J(t, x, y; Z(\cdot)) = J(t, x, y; \bar{Z}(\cdot)), \qquad (15)$$

$$V(T, x, y) = f(x, y). \qquad (16)$$

この時、$V(t, x, y)$を粘性解（viscosity solution）と呼び、制御問題はこれを満足する$\bar{Z}(\cdot)$をみつける問題に帰着される。この時、（15）～（16）式はハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン（Hamilton-Jacobi-Bellman）方程式（以降HJB）（17）～（18）式を満たし、これを値関数（Value Function）と呼ぶ。

$$V_t(t, x, y) + H(t, x, y, DV(t, x, y), D^2V(t, x, y)) = 0, \qquad (17)$$

$$V(T, x, y) = f(x, y), \qquad (18)$$

$$DV = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}, \qquad D^2V = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} \\ V_{xy}^T & V_{yy} \end{pmatrix}.$$

ただし、$H(\cdot)$はハミルトニアン（Hamiltonian）であり、

$$\mathcal{H}(t, x, y, q, Q, z) = \left\{ \left\langle q, \begin{pmatrix} b(t, x, y, z) \\ h(t, x, y, z) \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left[Q \begin{pmatrix} \sigma(t, x, y, z) \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(t, x, y, z) \\ z \end{pmatrix}^T \right] \right\}, \qquad (19)$$

$$H(t, x, y, q, Q) = \inf_{z \in R^n \times R^m} \mathcal{H}(t, x, y, q, Q, z), \qquad (20)$$

で定義される。

4 本稿では、コスト関数としてMayer typeのもの、すなわち、EFBSDE'sの枠組みで

$$J = (t, \eta_t, \mathcal{A}) = E^P[G(\xi_T(t, \eta_t, \mathcal{A}))],$$

と表現できるものを考える。ここで、Gは非負の値をとる連続な関数、$\mathcal{A}$は許容可能緩和コントロール。

定理2.6：EFBSDE's の可解性（Solvability of EFBSDE's） 仮定（A.1）～（A.3）のもとで、（12）～（13）式はHJBを満足する粘性解 $V(\cdot)$ からなる結節集合（nodal set）$\mathcal{N}(\cdot)$[5]が $(0, x, y)$ を含む場合のみ可解となる。

証明 Ma and Yong［1993］Theorem 4.3 参照。

３．ファイナンスへの応用

前節の数学的な表現形式をもとに、代表的な数理ファイナンスにおける問題を考察していく。

(1) 最適ポートフォリオ問題

最適ポートフォリオ問題に関しては、X_tが資産価格プロセスを表現し、Y_tがポートフォリオの価値プロセス、Z_tが最適ポートフォリオを表現する問題と考えるとFBSDE'sの枠組みで統一的に記述することが可能である。

いま、資産価値の変動プロセスX_tが次のようにモデル化されるとする。

$$dX_t^0 = r_t X_t^0\, dt\,, \tag{21}$$

$$dX_t^i = X_t^i \left[b_t^i\, dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} dW_t^j \right],\ \ i = 1,\ \cdots, n\,. \tag{22}$$

ここで、X_t^0は無危険資産、X_t^i $(i = 1,\cdots, n)$ は危険資産とする。このとき、価値プロセスをY_t^1、危険資産に投資している価値を$\pi = (\pi^1,\pi^2,\cdots, \pi^n)^*$、$\pi^0 = Y^1 - \Sigma_{i=1}^n \pi^i$とすると

$$Y_t^1 = Y_s^1 + \int_s^t \sum_{i=0}^{n} \pi_u^i \frac{dX_u^i}{X_u^i}\,, \tag{23}$$

であり、

$$\begin{aligned} dY_t^1 &= r_t Y_t^1\, dt + \pi_t^* (b_t - r_t 1)\, dt + \pi_t^* \sigma_t \cdot dW_t \\ &= r_t Y_t^1\, dt + \pi_t^* \sigma_t \cdot [dW_t + \theta_t\, dt]\,, \\ & b_t - r_t 1 = \sigma_t \theta_t\,. \end{aligned} \tag{24}$$

ここで、θ_t はリスク・プレミアム（risk premium）。

5 結節集合は $\mathcal{N}(V) = \{(t, x, y) \mid V(t, x, y) = 0\}$ で定義される集合。

定義：自己充足的取引戦略（Self-Financing Strategy）　(24)式における(Y^1, π) $(\int_0^T|\sigma_t^* \pi_t|^2 dt < \infty)$を自己充足的取引戦略と呼ぶ。また、$Y_t^1 \geq 0, t \in [0, T]$を満足する場合には実行可能（feasible）という。

定義：自己充足的優取引戦略（Self-Financing Superstrategy）　自己充足的取引戦略に連続かつ増加である累積消費プロセス（cumulative consumption process）$Y_t^0 (Y_0^0 = 0)$を加えた、

$$dY_t^1 = r_t Y_t^1 dt - dY_t^0 + \pi_t^* \sigma_t \cdot [dW_t + \theta_t dt],$$

を考える。この時、$Y = (Y^0, Y^1)^*$として(Y, π)を自己充足的優取引戦略と呼ぶ。

マートン（Merton）問題はこの自己充足的優取引戦略を求める問題と考えることができる。すなわち、各時点における消費c_t $(Y_t^0 = \int_0^t c_s ds)$を用いて、

$$J(t, x, y, Y(\cdot), Z(\cdot)) = -E_t\left[\int_t^T U(s, c_s)\, ds + B(T, Y_T^1)\right],$$

を最小化する（Y, Z）を求める問題に帰着する。ここで、$U(\cdot)$は効用関数、$B(\cdot)$は終端時点の価値のみに依存する効用関数である。

（2）派生証券の価格付け

本稿における派生証券の価格評価は、Harrison and Pliska［1981］の基本概念をベースに説明する。すなわち、前節で述べた最適ポートフォリオをヘッジ・ポートフォリオの概念に置き換えた議論を中心に行う。

仮定3.1　以降の議論では、市場には裁定機会（arbitrage opportunity）[6]が存在しないと仮定する。

イ．完備市場

定義：ヘッジ戦略（Hedging Strategy）　$X_T^1 = g(X_T) \geq 0$となる実行可能な自己充足的取引戦略(Y^1, π)をヘッジ戦略と呼ぶ。

定義：完備市場（Complete Market）　全ての派生証券が達成可能（attainable）であるような市場モデルを完備市場と呼ぶ。完備市場モデルでは、フォワード・プロセスX_tは資産価値プロセスとして認識され、その次元とウィーナー・プロセスW_tの次元は一致する（$n = d$）。

6 例えばDothan［1990］などを参照。

定理3.2：Complete Market - Equivalent Martingale Measure　完備市場では、同値マルチンゲール測度（Equivalent Martingale Measure）Qはラドン・ニコディム微分（Radon-Nikodym derivative）$\rho = dQ/dP$を通して一意に決定される。

証明　Harrison and Pliska［1981］Proposition 3.35、Corollary 3.36、Proposition 5.14を参照。

注記　市場モデル（21）～（22）式においては、ラドン・ニコディム微分は具体的に次のようになる。

$$\frac{dQ}{dP} = \epsilon_T(-\theta \cdot W) = \exp\left[-\int_0^T \theta_s^* dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\theta_s|^2 ds\right], \qquad (25)$$

ここで、$\epsilon_t(\cdot)$はexponential martingale、θ_tは（24）式におけるリスク・プレミアム。また、確率測度PとQは次の関係式を満足する。

$$E^P[\rho X] = \int X \rho dP = \int X dQ = E^Q[X].$$

注記　同値マルチンゲール測度Qのもとで、$dW_t^Q = dW_t + \theta_t dt$として定義される$W_t^Q$はウィーナー・プロセスになる。

定理3.3：尤度比プロセス（Likelihood Ratio Process**）**　$z_t = E^P(dQ/dP|\mathcal{F}_t)$で与えられるプロセスを尤度比プロセスといい、任意の適合プロセス$\{x_t\}$に対して

$$\frac{E^P[z_t x_t|\mathcal{F}_s]}{E^P[z_t|\mathcal{F}_s]} = E^Q[x_t|\mathcal{F}_s],$$

が成立する。

証明　Dothan［1990］Theorem 9.3 参照。

定理3.4：Price of Contingent Claim-Hedging Portfolio　完備市場モデルでは、派生証券（Contingent Claim）の価格はヘッジ・ポートフォリオの価値 Y_t^1 で与えられる。

証明　Harrison and Pliska［1981］Proposition 2.9、Proposition 3.32 参照。

注記　ブラック＝ショールズ・モデルのヨーロピアン・コール・オプションに関する評価式は、原資産のフォワードSDEが（21）～（22）式、ペイオフ関数が$g(x) = \max\{x - K, 0\}$で与えられる問題である。

例1：二項モデル（Binomial Model）

二項モデルを取り上げて、ヘッジ・ポートフォリオの簡単な説明を行う。対象となる派生証券として、一期間後のヨーロピアン・コール・オプションを考え、株式の価格過程に次のプロセスを仮定する。

$$S \to \begin{cases} uS, & p, \\ dS, & 1-p. \end{cases}$$

また、無リスク資産である債券の金利をr、さらに、$R = 1+r$とし、$d < R < u$と仮定する。したがって、ヨーロピアン・コール・オプションの現在価値をCとすれば、一期間後の変動は、

$$C \to \begin{cases} C_u = \max[uS-K, 0], & p, \\ C_d = \max[dS-K, 0], & 1-p, \end{cases}$$

となる。このとき、株式の保有枚数Δと債券の保有量Bからなるヘッジ・ポートフォリオ$S\Delta + B$を考えると、

$$S\Delta + B \to \begin{cases} uS\Delta + RB, & p, \\ dS\Delta + RB, & 1-p. \end{cases}$$

ヘッジ・ポートフォリオであるから、一期間後の双方の価値が一致する。したがって、

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}, \quad B = \frac{uC_u - dC_d}{(u-d)R}.$$

このとき、

$$\begin{aligned} C &= S\Delta + B \\ &= \frac{1}{R}\left[\left(\frac{R-d}{u-d}\right) C_u + \left(\frac{u-R}{u-d}\right) C_d\right]. \end{aligned}$$

さらに、

$$q = \frac{R-d}{u-d}, \quad 1-q = \frac{u-R}{u-d},$$

とすれば、

$$C = \frac{1}{R}[qC_u + (1-q)C_d],$$

と記述することができ、仮定から$0 < q < 1$である。このとき、qが同値マルチンゲール測度となり、$qu + (1-q)d = R$を満足することがわかる。

多期間の場合についても同様の議論が成立し、n期間後に満期を迎えるヨーロピアン・コール・オプションの価値$C(n, S, K)$は再帰式（recursive formula）を用いれば、

$$C(n, S, K) = R^{-1}[qC(n-1, uS, K) + (1-q)C(n-1, dS, K)],$$

で与えられる。

命題3.5：Price of American Contingent Claim - Superhedging Portfolio　アメリカン・タイプの派生証券（American Contingent Claim）の価格は、優ヘッジ・ポートフォリオの価値Y_t^1で与えられる。

すなわち、$Z_t = \pi_t^* \sigma_t$であるπ_t、Y_t^0、obstacle $\hat{X}_t$[7]が与えられて、

$$-dY_t^1 = h(t, Y_t, Z_t)\,dt + dY_t^0 - Z_t^* \cdot dW_t, \quad Y_T^1 = g(X_T), \tag{26}$$

$$Y_t^1 \geq \hat{X}_t, \quad \int_0^T (Y_t^1 - \hat{X}_t)\,dY_t^0 = 0, \quad \hat{X}_t = l(t, X_t),$$

を満足する（Y, Z）[8]が存在する。ここで、$l(\cdot)$は、$l : [0, T] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$で、

$$l(t, x) \leq K(1 + |x|^p),\ t \in [0, T],\ x \in \mathbf{R}^n,$$

$$l(T, x) \leq g(x),$$

を満足する。

さらに、この時、停止時（stopping time）$D_t = \inf\{t \leq s \leq T\,;\, Y_s^1 = \hat{X}_s\}$は停止時の集合$\Gamma_t$に対して次を満足する場合に最適となる[9]。

$$Y_t^1 = ess\ \ sup_{\nu \in \Gamma_t}\ Y_t^1(\nu, \tilde{X}_\nu) = Y_t^1(D_t, \tilde{X}_{D_t}),$$

$$\tilde{X}_t = g(X_T) 1_{t=T} + \hat{X}_t 1_{t<T}.$$

証明　El Karoui, Pardoux and Quenez［1997］Proposition 5.1 参照。

注記　(26) 式においてY_t^0は早期行使プレミアム（early exercise premium）と解釈することができる。

7 オプション価値ベースで測った境界値。

8 古典的な問題では$h(t, y, z) = -r_t y - \pi^* \sigma_t \theta_t$で与えられる。

9 $Y_t^1 = u(t, X_t)$と置くと、

$$\min\left(u(t, x) - l(t, x), -\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - L_t u(t, x) - h(t, x, u(t, x), (\nabla u \sigma)(t, x))\right) = 0,$$

$$u(T, x) = g(x),$$

を満足する。

例2：離散時点のアメリカン・プット・オプション

Iwaki, Kijima and Yoshida［1995］にそって、アメリカン・プット・オプションにおけるプレミアムの分解について離散時間モデルを用いて説明する。いま、時点を$\tau_0 = 0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = T$とし、$T$を満期、$K$を行使価格、$T_i = T - \tau_i$ $(i = 0,\cdots, n)$とする。株価プロセスを$S_i = S_e^{X_i}$、ただし、$\{X_i, i = 0,\cdots, n\}$ は $X_0 = 0$であるような定常独立増分を持つマルコフ連鎖とする。

この時、アメリカン・プット・オプションのプレミアム$A(S, T)$はある同値マルチンゲール測度Q_dのもとで以下のダイナミック・プログラミング（Dynamic Programming）を満足する。

$$A(S_i, T_i) = \max\left[K - S_i,\ e^{-r(\tau_{i+1}-\tau_i)} E^{Q_d}[A(S_{i+1}, T_{i+1}) | S_i]\right], \quad i = 0, \cdots, n-1,$$
$$\text{s.t.} \quad A(S, 0) = \max[K - S, 0].$$

いま、$\mathbf{G} = (G_1, \cdots, G_n)$を境界値（boundary value）とすると、

$$G_n = K;\ e^{-r(\tau_{i+1}-\tau_i)} E^{Q_d}[A(G_i e^{X_{i+1}-X_i}, T_{i+1})] = K - G_i, \quad i = n-1, \cdots, 1,$$

を満足する。このとき、$\hat{G}_i = G_i / S$とすれば、$A(S, T)$は、指示関数（indicator function）$I_{\{\cdot\}}$を用いて次のように分解できる。

$$A(S, T) = p(S, T) + e(S, T),$$
$$p(S, T) = e^{-rT} E^{Q_d}\left[(K - Se^{X_n}) I_{\{X_n \le \ln \hat{G}_n\}}\right],$$
$$e(S, T) = \sum_{i=1}^{n-1} e^{-r\tau_i} E^{Q_d}\left[(K - Se^{X_i} - p(Se^{X_i}, T_i)) I_{\{X_1 > \ln \hat{G}_1, \ldots, X_{i-1} > \ln \hat{G}_{i-1}, X_i \le \ln \hat{G}_i\}}\right].$$

ここで、$p(S, T)$はヨーロピアン・プット・オプションのプレミアム、$e(S, T)$は早期行使プレミアム[10]。

ロ．非完備市場

定義：非完備市場（Incomplete Market） 本稿における非完備市場の定義は、フォワード・プロセスX_tの次元がW_tの次元よりも小さい場合（$n \le d$）とする。したがって、X_tのうち最初の $j\,(j \le n)$を基本資産（primary asset）とし、ボラティリティ関数を、

$$\sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_t^1 \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_t^1 = (\sigma_t^{ik})_{1\le i\le j,\, 1\le k\le d},\ \sigma_t^2 = (\sigma_t^{ik})_{j+1\le i\le n,\, 1\le k\le d},$$

と分解する。これに対応してZ_tも、

10　証明はIwaki, Kijima and Yoshida［1995］Proposition 2 を参照。

$$Z_t = \pi_t^* \sigma_t = ({}^1\pi_t)^* \sigma_t^1 + ({}^2\pi_t)^* \sigma_t^2,$$

と分解できる。このとき、許容可能戦略（admissible strategy）であるためには${}^2\pi_t = 0$であり、

$$dY_t^1 = r_t Y_t^1 dt + ({}^1\pi_t)^* \sigma_t \cdot (dW_t + \theta_t dt),$$

となる。

定義：フェルマー＝シュワルツ・ヘッジ・ストラテジー（Föllmer and Schweizer Hedging Strategy）　非完備市場におけるヘッジ・ストラテジーを優取引戦略の枠組みを用いて、

$$dY_t^1 = r_t Y_t^1 dt + dY_t^0 + ({}^1\pi_t)^* \sigma_t^1 \cdot (dW_t + \theta_t dt), \quad Y_T^1 = g(X_T), \tag{27}$$

と記述すると、Y_t^0はヘッジング・エラーとして認識される。この時、Y_t^0が$\int_0^\cdot \sigma_s^1 dW_s$に直交するマルチンゲールになるような（$Y$, ${}^1\pi$）をフェルマー＝シュワルツ・ヘッジ・ストラテジーと呼ぶ。

定義：最小マルチンゲール測度（Minimal Martingale Measure）　最小リスク・プレミアム（minimal risk premium）θ_t^1はムーア・ペンローズ（Moore-Penrose）の一般逆行列を用いて、

$$\theta_t^1 = (\sigma_t^1)^* [(\sigma_t^1)(\sigma_t^1)^*]^{-1} \sigma_t^1 \theta_t,$$

と記述できるリスク・プレミアムをいい、このリスク・プレミアムに対応する同値マルチンゲール測度を最小マルチンゲール測度と呼ぶ[11]。この時、最小リスク・プレミアムは、$\theta_t - \theta_t^1 \in Ker(\sigma_t^1)$となるように構成される。

注記　Hofmann, Platen and Schweizer［1992］では確率ボラティリティ問題（次節参照）をこの理論フレームで考察し、派生証券の価値を最小リスク・プレミアムθ_t^1を用いて計算している。

注記　上記の非完備市場の定義から、完備市場のモデルであっても、いくつかの原資産が流動性制約などで完全なヘッジ・ポートフォリオが組めなくなる場合には、非完備市場の枠組みで扱う必要がある。

11　最小マルチンゲール測度は相対エントロピー（relative entropy）

$$H(Q|P) = \begin{cases} \int \log\left(\frac{dQ}{dP}\right) Q(d\omega), & \text{if } Q << P \text{ and } \frac{dQ}{dP} \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P), \\ +\infty, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

をmean-variance trade-offプロセスで修正したものを最小にする測度として定義される。詳しくはDelbaen *et al.*［2002］を参照。

(3) 問題の拡張に関する議論

最適ポートフォリオ問題で、現実的な状況を反映させることによって問題が複雑になるケースも存在する。例えば、流動性の低い市場に支配的な投資家がおり、自身のポートフォリオによって資産の価格形成が左右されるようなケースがこれに相当する。

Cvitanić and Ma［1996］では、ヘッジ・ポートフォリオに関する議論にこのような状況を想定し、原資産価値プロセスXのドリフトとボラティリティを（Y, π）の関数とした問題をFBSDE'sの枠組みで扱っている。原資産プロセスのみを取り上げて(21)～(22)式と比較すると、次のように記述される。

$$dX_t^0 = r(t, Y_t, \pi_t) X_t^0 dt, \tag{28}$$

$$dX_t^i = b^i(t, X_t, Y_t, \pi_t)\, dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}(t, X_t, Y_t, \pi_t)\, dW_t^j, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{29}$$

彼らは、実際には$Y_t^0 = 0$として、Four Step Schemeを用いて問題を解いている。

また、最適ポートフォリオ問題で、効用Y_t^1に対して、ジェネレータ（generator）$f(\cdot)$を用いて

$$-dY_t^1 = f(t, c_t, Y_t^1)\, dt - Z^*_t \cdot dW_t, \quad Y_T^1 = Y^1, \tag{30}$$

という形で記述できる再帰的効用関数（recursive utility）の問題も議論されている[12]。例として、

- Standard Additive Utility ： $f(c, y) = u(c) - \beta y$.
- Uzawa Utility ： $f(c, y) = u(c) - \beta(c) y$.
- Kreps - Porteus Utility ： $f(c, y) = \dfrac{\beta}{\rho} \dfrac{c^\rho - y^\rho}{y^{\rho-1}}$.

などが挙げられる。また、効用関数が、以下のように、その時のポートフォリオ自身に依存する特殊な場合も考えることができる。

$$-dY_t^1 = f(t, c_t, Y_t^1, \pi_t)\, dt - Z^*_t \cdot dW_t, \quad Y_T^1 = Y^1. \tag{31}$$

さらには、Z_tに対して制約条件つきのプロセスを考慮しなければならない場合についてもFBSDE'sによる記述が自然に適用できる。

12 例えば、El Karoui, Peng and Quenez［1997］参照。

4．具体的問題の記述Ⅰ－非完備市場－

(1) 確率ボラティリティ問題

ここで、非完備市場の派生証券評価問題の例として、確率ボラティリティ（stochastic volatility）問題を取り上げる。Kijima and Yoshidaモデル［1993］では、確率ボラティリティ問題を以下のように離散時間と連続時間のマルコフ連鎖を用いてモデル化している。

イ．離散時間モデル

状態空間$\mathcal{S} = (1, 2, \cdots, m)$とし、状態変数$\{\varsigma_n,\ n = 0, 1, \cdots\}$が同値マルチンゲール測度のもとで推移確率行列$\mathbf{F} = (f_{ij}),\ f_{ij} = Pr\,[\varsigma_{n+1} = j \,|\, \varsigma_n = i\,]$に従うとする。いま、状態$i$にある原資産の価格プロセス$\{X_n\}$が次のように与えられるとする。

$$X_n = \begin{cases} u_i X_{n-1} : & q_i, \\ d_i X_{n-1} : & 1-q_i, \end{cases}$$

$$q_i = \frac{R-d_i}{u_i-d_i}\ ; \quad 1-q_i = \frac{u_i-R}{u_i-d_i}, \quad i \in \mathcal{S}.$$

ここで、$u_i \geq R \geq d_i$。この時、行使価格K、満期までの期間がnのヨーロピアン・コール・オプションの価格は次の再帰式を評価することによって与えられる。

$$C_i(n, X, K) = R^{-1} \sum_{j=1}^{m} f_{ij}\,[q_i\, C_j(n-1, u_i X, K) + (1-q_i)\, C_j(n-1, d_i X, K)]. \tag{32}$$

ここで、$C_i(0, X, K) = \max\{X-K,\ 0\}$。

ロ．連続時間モデル

上記の離散時間モデルに対して、次のような形の連続時間モデルを考える。

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu(\varsigma_t)\,dt + \sigma(\varsigma_t)\,dW_t, \tag{33}$$

ここで、$\{\varsigma_t\}_{t \geq 0}$は無限小生成作用素（infinitesimal generator）$\boldsymbol{Q} = (q_{ij}),\ q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$に従う連続時間のマルコフ連鎖とする。この時、ボラティリティが状態iにある原資産の上に書かれたヨーロピアン・コール・オプション$C_i(t, X, K)$は連立偏微分方程式、

$$\sum_{j=1}^{m} q_{ij}\, C_j + \frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\sigma_i^2 X^2 \frac{\partial^2 C_i}{\partial X^2} + rX \frac{\partial C_i}{\partial X} - rC_i = 0, \tag{34}$$

を解くことによって求められる。

注記　Kijima and Yoshida［1993］は、ボラティリティ・スマイルに対する1つの説明を与えている[13]。

ハ．問題の拡張可能性

Kijima and Yoshida［1993］において、オプション価格がボラティリティ関数$\sigma(\cdot)$、あるいは、無限小生成作用素$\mathbf{Q} = (q_{ij})$に影響を与える場合などに拡張するに際しては、FBSDE's、あるいは、EFBSDE'sの枠組みを用いて考察しなければならない。これは、既に3（3）で述べたように、流動性の低い市場などにおいて投資家がヘッジ・ポートフォリオを組むこと自体が原資産のボラティリティに影響を与えるような場合を想定することになる。

ただし、この場合には、パラメータにジャンプ・プロセスを内包するケースを考える必要があり、一般に陽にフォワード・プロセスにジャンプを許す場合も含めて、本稿で扱っている拡散系に関する議論を拡張する必要性がある。

（2）非完備市場におけるヘッジ戦略

非完備市場におけるヘッジ戦略に関して、確率ボラティリティ・モデルを例にあげ、Otaka and Yoshida［2003］をもとにFBSDE'sの枠組みで考える。X_t^1を株式の価格プロセス、X_t^2をボラティリティ・プロセスとし、次のようなFBSDEを仮定する。

$$dX_t^1 = X_t^1\left[b(X_t^1, X_t^2, t)\,dt + \sqrt{X_t^2}\,dW_{1,t}\right], \tag{35}$$

$$dX_t^2 = X_t^2\left[\mu(X_t^1, X_t^2, t)\,dt + \gamma(X_t^1, X_t^2, t)\rho_t\,dW_{1,t} + \gamma(X_t^1, X_t^2, t)\sqrt{1-\rho_t^2}\,dW_{2,t}\right]. \tag{36}$$

いま、$W_{1,t}$、$W_{2,t}$に対応するリスク・プレミアムをおのおの$\theta_t = (b(X_t^1, X_t^2, t) - r_t)/\sqrt{X_t^2}$、$v_t$とすると同値マルチンゲール測度$Q^v$は次のラドン・ニコディム微分を通して与えられる。

$$\frac{dQ^v}{dP} = \exp\left\{-\int_0^T \theta_s\,dW_{1,s} + \int_0^T v_s\,dW_{2,s} - \frac{1}{2}\int_0^T (\theta_s^2 + v_s^2)\,ds\right\}. \tag{37}$$

この測度のもとで、上記のプロセスは、

$$dX_t^1 = X_t^1\left[r_t\,dt + \sqrt{X_t^2}\,dW_{1,t}^v\right], \tag{38}$$

$$\begin{aligned} dX_t^2 = X_t^2\Big[&\left\{\mu(X_t^1, X_t^2, t) + \gamma(X_t^1, X_t^2, t)\left(-\rho_t\theta_t + \sqrt{1-\rho_t^2}\,v_t\right)\right\}dt \\ &+ \gamma(X_t^1, X_t^2, t)\rho_t\,dW_{1,t}^v + \gamma(X_t^1, X_t^2, t)\sqrt{1-\rho_t^2}\,dW_{2,t}^v\Big], \end{aligned} \tag{39}$$

13　Theorem 3.3 およびそれに関する記述を参照。

と記述できる。いま、時点tにおける満期T、行使価格Kのヨーロピアン・コール・オプション（European Call Option）を$C=C(t, x, K, T)$とすると、売り手のヘッジング・ポートフォリオのエラー$Y_t^0=-Y_t^1+\xi_t X_t^1+\eta_t$、$Y_0^0=0$は、

$$\begin{aligned} dY_t^0 &= -dY_t^1+\xi_t dX_t^1+d\eta_t \\ &= r_t Y_t^0 dt+A_t dW_{1,t}^\nu - B_t dW_{2,t}^\nu, \\ &\quad A_t := \sqrt{X_t^2} X_t^1 \left(\xi_t - \frac{\partial C}{\partial X_t^1}\right) - \gamma \rho_t X_t^2 \frac{\partial C}{\partial X_t^2}, \\ &\quad B_t := \gamma \sqrt{1-\rho_t^2} X_t^2 \frac{\partial C}{\partial X_t^2}, \end{aligned} \tag{40}$$

と記述できる。オリジナル測度のもとでの変動は、

$$\begin{aligned} dY_t^0 &= \left\{ r_t Y_t^0 + \theta_t \sqrt{X_t^2} X_t^1 \left(\xi_t - \frac{\partial C}{\partial X_t^1}\right) + \gamma p_t \sigma_t \frac{\partial C}{\partial X_t^2} \right\} dt + A_t dW_{1,t} - B_t dW_{2,t}, \\ &\quad p_t = -\rho_t \theta_t + \sqrt{1-\rho_t^2}\, \nu_t, \end{aligned} \tag{41}$$

となる。いま、ヘッジ・ストラテジーとしてフェルマー＝シュワルツ・ヘッジ戦略を考えると$A_t \equiv 0, \forall t \in [0, T]$であるから、

$$dY_t^0 = (r_t Y_t^0 + \nu_t B_t)\, dt - B_t dW_{2,t}, \tag{42}$$

となる。

5．具体的問題の記述Ⅱ－期間構造モデル－

(1) ブラックのコンソール・レート予想

ブラックのコンソール・レート予想（Duffie, Ma and Yong［1994］）は、代表的な短期金利と長期金利の2ファクター・モデルとして考えられていたブレナン＝シュワルツ・モデルがはたして整合性の取れているモデルかどうかというHogan［1993］の指摘から発生した問題である。

コンソール債の価格Y_tは、

$$Y_t = E\left[\int_t^\infty e^{-\int_t^s r_u du} ds \mid \mathcal{F}_t\right], \tag{43}$$

と定義される。いま、短期金利のプロセスがコンソール債のイールドに依存する場合を想定する。

$$dr_t = \mu(r_t, Y_t)\,dt + \alpha(r_t, Y_t)\cdot dW_t. \tag{44}$$

これに対して、ブラックのコンソール・レート予想は、（r_t, Y_t）のペアが整合的になるために、次のBSDE'sにおけるコントロール変数である$A(\cdot)$がαとμのどのような関数であればよいかという問題に関して提出された。

$$dY_t = (r_t Y_t - 1)dt + A(r_t, Y_t)\cdot dW_t. \tag{45}$$

いま、r_tが次のSDEを満足する状態変数X_tによって$r_t = l(X_t)$と記述できるとする。

$$dX_t = b(X_t, Y_t)dt + \sigma(X_t, Y_t)\cdot dW_t, \quad X_0 = x. \tag{46}$$

この問題をFBSDE'sの枠組みで記述すると、結局、

$$dX_t = b(X_t, Y_t)dt + \sigma(X_t, Y_t)\cdot dW_t,$$
$$dX_t = (l(X_t)Y_t - 1)dt + Z_t\cdot dW_t,$$

ここで、Yはa.s.で一様に有界、

を満足する（X, Y, Z）を求めることに帰着される。

（2）FBSDE's の枠組みにおける短期金利モデル

ブラックのコンソール・レート予想を踏まえて、短期金利に長期金利が影響する場合を含めた期間構造モデルを考える。Otaka and Yoshida［2000］[14]の枠組みで、FBSDE'sを用いて記述すると以下のようになる。いま、$\{W^1(t), t\geq 0\}$と$\{W^2(t), t\geq 0\}$を同値マルチンゲール測度のもとでの独立なウィーナー・プロセスとする。

この時、状態変数$X_t = ((X_t^1, X_t^2))$は次のFBSDE'sに従う。

$$dX_t = b(t, X_t, P(t,T))\,dt + \sigma(t, X_t)\cdot dW_t, \tag{47}$$

$$dP(t,T) = -h(t, X_t, P(t,T))dt + Z_t^*\cdot dW_t, \tag{48}$$

$$X_0^1 = x_0^1, \quad X_0^2 = x_0^2, \quad P(T,T) = g(X(T)) = 1, \tag{49}$$

$$h(t, X(t), P(t,T)) = -l(X_t^1)P(t,T) = -r_t P(t,T), \tag{50}$$

$$\sigma(t, X_t) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t, X_t) & \sigma_{12}(t, X_t) \\ 0 & \sigma_{22}(t, X_t) \end{pmatrix}, \tag{51}$$

$$\sigma_{11}(\cdot), \sigma_{12}(\cdot), \sigma_{22}(\cdot): \text{positive functions},$$

$$Z_t = (Z_t^1, Z_t^2)^*, \quad W_t = (W_t^1, W_t^2)^*.$$

14 数値計算に関しては、内田善彦氏（日本銀行金融研究所）に負うところが大きい。現在、内田・吉田は、線形バージョンのモデルに関して、状態変数の拡張、数値計算アルゴリズムの高度化を含めて検討中。

このモデルにおいて、

$$b(t, X_t, P(t, X(t))) = \begin{pmatrix} \kappa_1(t, X_t)(X_t^2 - X_t^1) \\ \kappa_2(t, X_t)(\psi(t, X_t, P(t, T)) - X_t^2) \end{pmatrix}, \tag{52}$$

とする。このとき、

1. Vasicekモデル : $X_t^1 = r_t$、$\kappa_2(\cdot) = 0$、$l(X_t^1) = X_t^1$、σ_{11}を正の定数、それ以外を0。

2. Cox, Ingersoll and Ross Model : Vasicekモデルの設定で$\sigma_{11}(t, X_t) = \sigma\sqrt{X_t^1}$。

3. Hull-Whiteモデル : Vasicekモデルの設定で$\kappa_1(t, X_t) = \kappa_1(t)$、
$\kappa_2(t, X_t)\psi(t, X_t, P(t,T)) = \psi(t)$、$\sigma_{22}(\cdot) = 0$。

4. Black-Karasinskiモデル : Hull-Whiteモデルの設定で$l(X_t^1) = \exp(X_t^1)$。

5. Duffie-Kanモデル : $h(t, X_t, P(t,T))$ の $P(t,T)$を複数の満期に対応するイールドにしたモデル。

（3）金融政策と期間構造モデル

X_t^1とX_t^2をおのおの国債市場のような市場金利、金融政策当局が用いる政策金利（インスツルメント）に関する状態変数と考えると、(52) 式における$\psi(\cdot)$は政策反応関数と考えることが可能となる。したがって、このモデル化に当たっては金融政策ルール（Monetary Policy Rules）に関する理論フレームを用いることができる[15]。

Svensson［1998］では、状態変数X_tおよびインスツルメント（instruments）i_tを次の形で与えている。

$$X_{t+1} = AX_t + Bi_t + \upsilon_{t+1},$$

$$i_t = fX_t .$$

ここで、υ_tは外生的に与えられる平均0、共分散行列$\Sigma_{\upsilon\upsilon}$を持つiidなショック、インスツルメントは$X_t$の線型関数。また、損失関数については次のように設定している。

$$E\left[(1-\delta)\sum_{\tau=0}^{\infty}\delta^{\tau}L_{t+\tau}|\mathcal{F}_t\right],$$

$$L_t = (Y_t - \hat{Y})^* K(Y_t - \hat{Y}), \qquad Y_t = CX_t + Di_t .$$

15 (52) 式のような平均回帰性を仮定するということは、例えば日本の場合、オーバーナイト・コール市場と国債市場が基本的にはセグメント化されており、緩やかな裁定状態にあることを意味する。詳しくはOtaka and Yoshida［2000］を参照。

ここで、$\delta\,(0<\delta<1)$ は割引率、C、D、K はおのおの適当な次元を持つ行列、$\hat{Y}$ はターゲット水準の行ベクトル。

イ．ターゲティング・ルール

（イ）インフレーション・ターゲティング

この理論フレームの中で、Svensson［1998］では、単純なモデルとして、π_t を t 年におけるインフレ率、y_tをアウトプット・ギャップ、インスツルメントi_t を短期名目金利とし、次のようなモデルをあげている。

$$\pi_{t+1}=\pi_t+\alpha_y y_t+\epsilon_{t+1}\,,$$
$$(\pi_{t+1|t}=E[\pi_{t+1}|\mathcal{F}_t]=\pi_t+\alpha_y y_t),$$
$$y_{t+1}=\tilde{\beta}_y y_t+\beta_z z_t-\beta_r(i_t-\pi_{t+1|t}-\bar{r})+\eta_{t+1}\,,$$
$$z_{t+1}=\gamma_z z_t+\theta_{t+1}\,.$$

ここで、$\alpha_y>0$、$\tilde{\beta}_y\geq 0$、$\beta_r>0$、$0\leq\gamma_z<1$、$\bar{r}$は平均実質金利、ϵ_tは平均0、分散行列 σ_ϵ^2を持つiidなコスト・プッシュ・ショック、η_tは平均0、分散σ_η^2を持つiidなデマンド・ショック、そしてθ_t は平均0、分散σ_θ^2 を持つiid なショックである。

さらに、一時点における損失関数は、

$$L_t=\frac{1}{2}\left[(\pi_t-\hat{\pi})^2+\lambda y_t^2\right].$$

ここで、$\lambda\geq 0$はアウトプット・ギャップの安定性に関する相対的なウエイト。この場合、最適反応関数は次のように記述できる。

$$i_t=\bar{r}+\hat{\pi}+\left(1+\frac{1-c(\lambda)}{\alpha_y\beta_r}\right)(\pi_t-\hat{\pi})+\left[\alpha_y\left(1+\frac{1-c(\lambda)}{\alpha_y\beta_r}\right)+\frac{\tilde{\beta}_y}{\beta_r}\right]y_t+\frac{\beta_z}{\beta_r}z_t\,,$$

$$c(\lambda)=\frac{\lambda}{\lambda+\delta\,\alpha_y^2\,k(\lambda)}\,,$$

$$k(\lambda)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda(1-\delta)}{\delta\alpha_y^2}+\sqrt{\left(1+\frac{\lambda(1-\delta)}{\delta\alpha_y^2}\right)^2+\frac{4\lambda}{\alpha_y^2}}\right)\geq 1\,.$$

（ロ）マネー・グロース・ターゲティング

いま、m_tを（log ベースで測る）マネタリー・アグリゲイト（monetary aggregate）とすれば、マネー・グロース（money growth）は$\mu_t=m_t-m_{t-1}$で与えられる。また、$\hat{\mu}$をマネー・グロースの目標値、損失関数を、

$$L_t=\frac{1}{2}(\mu_t-\hat{\mu})^2,$$

とする。いま、単純なマネー・デマンド（money demand）方程式を仮定すると、

$$\mu_{t+1} = m_{t+1} - m_t = \pi_{t+1} + \varphi_y(y_t - y_{t-1}) - \varphi_i(i_t - i_{t-1}) - (\zeta_{t+1} - \zeta_t),$$

ここで、$\varphi_y > 0$、$\varphi_i > 0$、そして、ζは平均0、分散σ_ζ^2のiidなショックである。一階の最適条件を用いると反応関数は次のようになる。

$$i_t - i_{t-1} = \frac{1}{\varphi_i}(\pi_{t+1|t} - \hat{\mu}) + \frac{\varphi_y}{\varphi_i}(y_t - y_{t-1}) + \frac{1}{\varphi_i}\zeta_t .$$

また、$\hat{\mu}$を時点tの情報で条件付けられたものとすれば、(i)の枠組みで$\hat{\mu}_{t+1|t}$は次のように与えられる。

$$\hat{\mu}_{t+1|t} = \pi_{t+1|t} + \varphi_y(y_t - y_{t-1})$$
$$-\varphi_i\left[\bar{r} + \hat{\pi} + \left(1 + \frac{1-c(\lambda)}{\alpha_y \beta_r}\right)(\pi_{t+1|t} - \hat{\pi}) + \frac{\tilde{\beta}_y}{\beta_r} y_t + \frac{\beta_z}{\beta_r} z_t - i_{t-1}\right] + \zeta_t .$$

ロ．インスツルメント・ルール

短期名目金利をインスツルメントとするインスツルメント・ルールの例としては次のようなものが挙げられる。

- テイラー・ルール（Taylor rule）

  $$i_t = \bar{i}_t + \pi_t + 0.5(\pi_t - \hat{\pi}) + 0.5\, y_t .$$

  ここで、$\bar{i}$ はインストルメントの平均。

- ヘンダーソン＝マッキビン・ルール（Henderson-McKibbin rule）

  $$i_t = \bar{i} + 2(\pi_t + y_t - (\widehat{\pi + y})) .$$

- QPMモデル（Bank of Canada, Reserve Bank of New Zealand）

  $$i_t = r_t^L + \gamma(E_Q[\pi_{t+T} | \mathcal{F}_t] - \hat{\pi}),$$

  ここで、$r^L(t)$は名目長期金利。

注記　金融政策ルールの文脈においては、(52)式はインスツルメントの値がスムージングの結果として決まることを意味し、実際には、目標値と現時点の値の荷重平均として与えられると考えることができる。また、インフレ率のプロセスなどをモデルに組み込むことで、より一般性を持たせる形に拡張することが可能である。

Otaka and Yoshida［2000］では、上記の議論を踏まえて次のようなモデルを考えている。すなわち、国債市場の瞬間的スポット・レートをr_t、インスツルメント（日本の場合はオーバーナイト・コール・レート）をr_t^{inst}とし、$(X_t^1, X_t^2) = (\ln r_t, \ln r_t^{inst})$とおく。さらに、インスツルメントの定常状態における目標レベルを次のようにモデル化する。

$$r_{target}^{inst} = i_t = -\ln P(t, T)/(T-t) - \beta^{T-t} = Y(t, T) - \beta^{T-t}\ , \tag{53}$$

ここで、$Y(t, T)$ は $(T-t)$イールド、β^{T-t}は対応するターム・プレミアム。実際のデータからOtaka and Yoshida［2000］では、

$$\beta^{T-t} = Y(t, T)(1 - e^{-\beta_1(T-t)})\ , \tag{54}$$

と仮定している。ここで、β_1 は正の定数。したがって、

$$\psi(t, X(t), P(t, T)) = \ln r_{target}^{inst} = \ln i_t = \ln Y(t, T) - \beta_1(T-t)\ . \tag{55}$$

注記　ここで、長期金利として、$Y(t, T)$の代わりに、スライディング・ボンド・イールド（sliding bond yield）$-\ln P(t, t+T)/T$を利用することも考えられる。しかしながら、JGBマーケットでは、流動性を持つある固定された銘柄のイールドがある期間指標として利用されていること、Heath-Jarrow-Mortonモデルのフレームワークでは、スライディング・ボンドの価格$D(t, T) = P(t, t+T)$のダイナミクス、

$$dD(t, T) = D(t, T)((r(t) - f(t, t+T))dt + \sigma(t, t+T)\cdot dW(t))\ ,$$

が明示的に瞬間的なフォワード・レート$f(t, T)$を含む（Rutkowski［1997］）ため、モデルに組み込むことがかなり難しくなること等を勘案すると上記のようなモデル化の妥当性がでてくる。

　この問題を具体的に解くために、Four Step Schemeを利用することを考える。イェンセン（Jensen）の不等式を用いると、

$$Y(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t} = -\frac{1}{T-t}\ln E_Q\left[e^{-\int_t^T r(u)\,du}|\mathcal{F}_t\right]$$

$$\leq E_Q[r^*(\omega)|\mathcal{F}_t] = C^*(r_t, t, T)\ .$$

ここで、$r^*(\omega) = \sup_{u\in[t, T]} r(u,\omega),\ \omega\in\Omega$ かつ $\lim_{T-t\to 0} C^*(r_t, t, T) = r_t$。一方、

$$C_*(r_t, t, T) = \hat{r}_*(t, T) = -\frac{1}{T-t}\ln\left[e^{-\hat{r}_*(t,T)(T-t)}\right]$$

$$= -\frac{1}{T-t}\ln E_Q\left[e^{-r_*(\omega)(T-t)}|\mathcal{F}_t\right] \leq Y(t, T)\ .$$

ここで、$r_*(\omega) = \inf_{u\in[t, T]} r(u,\omega),\ \omega\in\Omega$ かつ $\lim_{T-t\to 0} C_*(r_t, t, T) = r_t$。

仮定3.6　上記の評価に基づいて、ある区間$[L_1^T, U_1^T]$と$[L_2^T, U_2^T]$が存在し、時点Tまでに$X_1(t)$と$X_2(t)$がおのおのこの区間の外にある確率を0とみなせると仮定する。ここで、L_1^T、U_1^T、L_2^T、U_2^TはプロセスのパラメータとTに依存する定数。

したがって、定常状態におけるベース・モデルは次のように与えられる。

Problem　B_s

$$dX(t) = b(t, X(t), P(t,T))dt + \sigma \cdot dW(t), \tag{56}$$

$$dP(t,T) = -h(X(t), P(t,T))dt + Z(t)^* \cdot dW(t), \tag{57}$$

$$h(X(t), P(t,T)) = -e^{X_1(t)}P(t,T) = -r(t)P(t,T), \tag{58}$$

$$X_1(0) = \ln r(0) = \ln r_0, \qquad X_2(t) = \ln r^{inst}(0) = \ln r_0^{inst}, \tag{59}$$

$$P(T,T) = g(X(T)) = 1, \tag{60}$$

$$X(t) \in \mathcal{D} = \{X(t) \mid L_1^T \le X_1(t) \le U_1^T,\quad L_2^T \le X_2(t) \le U_2^T\},$$

ここで、

$$b(t, X(t), P(t, X(t))) = \begin{pmatrix} \kappa_1(X_2(t) - X_1(t)) \\ \kappa_2(\ln Y(t,T) - \beta_1(T-t) - X_2(t)) \end{pmatrix}, \tag{61}$$

$$\kappa_1 > 0, \tag{62}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ 0 & \sigma_{22} \end{pmatrix},\ \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22} > 0, \tag{63}$$

$$Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t))^*, W(t) = (W^1(t), W^2(t))^*. \tag{64}$$

一般には、Four Step Schemeは定理2.4にあるように、4つのステップから構成されるが、この問題の場合には、ボラティリティ関数が定数であることから、3 ステップで評価することが可能となる。

$P(t,T) = \theta(X(t), t)$と仮定する。伊藤のレンマを$P(t,T)$に適用すると、

$$\begin{aligned} dP(t,T) &= d\theta(X(t),t) \\ &= \Big[\theta_t(X(t),t) + \kappa_1(X_2(t) - X_1(t))\theta_{x_1}(X(t),t) \\ &\quad + \kappa_2(\ln(-\ln\theta(X(t),t)/(T-t)) - \beta_1(T-t) - X_2(t))\theta_{x_2}(X(t),t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2)\theta_{x_1x_1}(X(t),t) + \sigma_{12}\sigma_{22}\theta_{x_1x_2}(X(t),t) + \frac{1}{2}\sigma_{22}^2\theta_{x_2x_2}(X(t),t)\Big]dt \\ &\quad + \sigma_{11}\theta_{x_1}(X(t),t)dW^1(t) + (\sigma_{12}\theta_{x_1}(X(t),t) + \sigma_{22}\theta_{x_2}(X(t),t))dW^2(t). \end{aligned} \tag{65}$$

（65）式と問題B_sを比較すると、$\theta(X(t), t)$は以下を満足する。

$$\theta_t + \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2)\theta_{x_1x_1} + \sigma_{12}\sigma_{22}\theta_{x_1x_2} + \frac{1}{2}\sigma_{22}^2\theta_{x_2x_2} + \kappa_1(X_2(t) - X_1(t))\theta_{x_1}$$
$$+\kappa_2(\ln(-\ln\theta/(T-t)) - \beta_1(T-t) - X_2(t))\theta_{x_2} - e^{X_1(t)}\theta = 0,$$
$$\theta(X(T), T) = 1,$$
$$Z_t = \theta_x(X(t), t)^* \cdot \sigma.$$

したがって、問題B_sは次のステップを評価することによって解くことができる。

1. 次のPDEを解く。

$$\theta_t + \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2)\theta_{x_1x_1} + \sigma_{12}\sigma_{22}\theta_{x_1x_2} + \frac{1}{2}\sigma_{22}^2\theta_{x_2x_2} + \kappa_1(x_2(t) - x_1(t))\theta_{x_1}$$
$$+\kappa_2(\ln(-\ln\theta/(T-t)) - \beta_1(T-t) - x_2(t))\theta_{x_2} - e^{x_1(t)}\theta = 0, \tag{66}$$

$$\theta(x, T) = 1. \tag{67}$$

2. 前ステップで求めたθを用いて、次のフォワードSDEを解く。

$$dX_1(t) = \kappa_1(X_2(t) - X_1(t))\,dt + \sigma_{11}\,dW^1(t) + \sigma_{12}\,dW^2(t), \tag{68}$$

$$dX_2(t) = \kappa_2(\ln(-\ln\theta(X(t), t)/(T-t)) - \beta_1(T-t) - X_2(t))\,dt$$
$$+\sigma_{22}\,dW^2(t), \tag{69}$$
$$X_1(0) = \ln r(0) = \ln r_0, \quad X_2(0) = \ln r^{inst}(0) = \ln r_0^{inst}.$$

3. 次のように置く。

$$P(t, T) = \theta(X(t), t), \tag{70}$$

$$Z_t = \theta_x(X(t), t)^* \cdot \sigma. \tag{71}$$

6．結語

本稿では、数理ファイナンスにおける代表的な問題群を、BSDE’s、およびFBSDE’sという数学的表現形式を用いて統一的に記述することによって、その問題群に共通な構造を考察することを試みた。

従来の数理ファイナンスにおける問題の多く、例えば、最適ポートフォリオ問題、ヘッジ・ストラテジーを通しての派生証券の価格付けといった問題はBSDE’sによって記述することが可能である。これは、BSDE’sの構造が制御という概念と密接に結びついており、その結果として、最適プロセスのダイナミクスを表現できる

ことに起因している。

特に、非完備市場の派生証券の価格付けを考える場合には、投資家の効用関数を決める、同値マルチンゲール測度を決める、あるいは、ヘッジ・ストラテジーを決めなければ、価格を一意に決めることができない。このような問題を考えるうえでも、ヘッジ・ストラテジーの形態を考えることによって、BSDE'sの枠組みで自然に対応することが可能になる場合が多い。

さらに、市場メカニズムがそれら投資家の最適化の結果に影響を受ける場合、あるいは、金融政策当局等の意思決定が市場メカニズムとの相互作用を持つ場合などには、FBSDE'sの枠組みまで拡張して考えることによってモデル化が可能になる。本稿では、後者の場合について期間構造モデルを主たる対象に議論した。ただし、一般に、これらの問題を解くためには膨大な計算量を必要とすることが多くなる、要請されるテクニカル条件が厳しくなるなどの問題も抱えている。

本稿においては、EFBSDE'sの形式を用いなければ記述できない問題群は扱っていない。今後の課題の1つとして、そのような問題に関する発掘・発見と考察があるのではないかと考えている。同じく、プロセスに何らかの形でジャンプを含む場合についても本稿では取り扱っていない。今後の課題と考えている。

補論1．FBSDE’sの数学的基礎

（1）シュワルツ超関数

定義：シュワルツ超関数（Schwartz Distribution） 局所凸線形トポロジー空間（locally convex linear topological space）$\mathcal{D}(\Omega)$[16]上で定義される複素数値線形汎関数Tが連続性[17]を持つ時、Ω上で定義されるシュワルツ関数と呼ぶ。以下に例を示す。

1. $f(x)$をΩ上a.e.で定義されるルベーグ測度$dx = dx_1 dx_2,\cdots,dx_n$に関して局所可積分（locally integrable）な複素関数とする。この時、

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

で定義される超関数T_fは一般化関数（generalized function）とも呼ばれる。

2. $m(B)$を$\mathbf{R}^n$上の開集合ΩのBaire部分集合Bで定義される$\sigma-$有限で$\sigma-$加法的な複素測度（complex-valued measure）とする。この時、

$$T_m(\varphi) = \int_\Omega \varphi(x)m(dx), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

で定義されるT_mは超関数。

3. 2の特別なケースとして、

$$T_{\delta_p}(\varphi) = \varphi(p)、p\text{ は }\Omega\text{で固定された点、}\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

で定義されるT_{δ_p}はディラック超関数（Dirac distribution）。

定義：弱導関数（Weak Derivative） シュワルツ超関数の定義1における$f(x)$をC^k級とする。部分積分によって$T_{D^p f}(\varphi) = (-1)^{|p|}T_f(D^p\varphi)$が$|p| \le k$で成立する。この時、

$$(D^p T_f)(\varphi) = (-1)^{|p|}T_f(D^p)(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

16 $\mathbf{R}^n$の開集合Ωで定義される複素数値関数$\varphi(x)$に対して$\{x|\varphi(x) \neq 0\}$ の Ωにおける閉包を$\varphi(x)$の台（support）といい、supp(φ)で表す。この時、多重指数 $p = (p_1,\cdots,p_n)$に対して$|p| = p_1 + \cdots + p_n$とする。$|p| \le k$とし、$\varphi \in C^k$に対して$(D^p)\varphi(x) = \partial^{|p|}\varphi(x)/\partial x_1^{p1},\cdots,\partial x_n^{pn}$と記述する。ただし、$(D^{(0,\cdots,0)})\varphi(x) = \varphi(x)$。この時、$\mathcal{D}(\Omega)$は、コンパクトな台を持つ$\Omega$上の$C^\infty$級の複素数関数$\varphi(x)$の全体。

17 $\varphi_m \to 0$であれば、常に$T(\varphi_m) \to 0$. $\mathcal{D}(\Omega)$における収束の概念についてはYosida［1980］I-1-Proposition 7 を参照。

で定義する$D^p T_f$ をfに関する弱導関数、あるいは、超関数の意味での（偏）導関数（derivative in the sense of distribution）[18]と呼ぶ。

定義：パラメータを含む超関数（Schwartz Distribution with Parameters）パラメータt に超関数T_tが対応し、tは一般にはユークリッド空間を動くものとする。任意の$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$に関して$T_t(\varphi)$ が tについて連続な場合、$T_t(\varphi)$は tに関して微分可能である。また、T_tが実変数tに関して微分可能な時、$D_x^p T_t$も微分可能で$\partial D_x^p T_t / \partial t = D_x^p(\partial T_t / \partial t)$。さらに、$T_t$が区間$t \in [a, b]$で定義され、連続な場合には、$\mathcal{D}(\Omega)$に超関数を含めた空間$\mathcal{D}'(\Omega)$でパラメータに関する積分$T = \int_a^b T_s ds$が存在し、任意の$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$に対して、

$$T(\varphi) = \int_a^b T_s(\varphi)\, ds,$$

が成立する。

（2）マルチンゲール問題と弱解

定義：弱解（Weak Solution）（A-1）式の弱解とは次の1から4を満足する三つ組$\{(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \mathcal{F}_t\}$をいう。

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \cdot dW_t. \tag{A-1}$$

1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間で$\mathcal{F}_t$は通常の条件を満足するフィルトレーション（filtration）。

2. $X = \{X_t; 0 \le t < \infty\}$は連続で$\mathcal{F}_t$ –適合的な$\mathbf{R}^n$–値関数。$W = \{W_t; 0 \le t < \infty\}$ はd 次元ウィーナー・プロセス。

3. $P[\int_0^t \{|b_i(s, X_s)| + \sigma_{ij}^2(s, X_s)\}\, ds < \infty] = 1,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le d$。

4. $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \cdot dW_s,\ 0 \le t < \infty$をalmost surely で満足する。

また、$\mu(\Gamma) = P[X_0 \in \Gamma],\ \Gamma \in \mathcal{B}^n$を解の初期分布（initial distribution）という。

18 例として、$\mathcal{D}^p \delta = \delta^{(p)}$、$dx_+/dx = 1$、$x_+$は $x \ge 0$ でx、$x < 0$で0、$d\mathbf{1}(x)/dx = \delta$、$\mathbf{1}(x)$はヘビサイト（Heavisite）関数など。

定義：パスごとの一意性（Pathwise Uniqueness） $\{(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \mathcal{F}_t\}$ と $\{(\tilde{X}, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \tilde{\mathcal{F}}_t\}$は共通の（$\Omega, \mathcal{F}, P$）上で共通のウィーナー・プロセスを持つ（A-1）式の弱解であり、$P[X_0=\tilde{X}_0]=1$とする。このような弱解に対して、$P[X_t=\tilde{X}_t, \forall t<\infty]=1$となる時、パスごとの一意性が成立しているという。

定義：分布の意味での一意性（Uniqueness in Distribution） 2つの弱解$\{(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \mathcal{F}_t\}$ と$\{(\tilde{X}, \tilde{W}), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}), \tilde{\mathcal{F}}_t\}$が同一の初期分布を持つ、すなわち、

$$P[X_0 \in \Gamma] = \tilde{P}[\tilde{X}_0 \in \Gamma]; \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d),$$

であるとき、プロセスX、$\tilde{X}$が同一の分布を持てば、分布の意味での一意性（弱解の一意性（“WeakUniquness”ともいう）が成立しているという。

定義：調和関数（Space-Time-Harmonic Function） L_tを拡散演算子（diffusion operator）とする。この時、次を満足する$\varphi \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^n)$は調和（space-time-harmonic）と呼ばれる。

$$(\partial_t + L_t)\varphi(t, x) = 0. \qquad \text{(A-2)}$$

定理A.1.1：放物型演算子とセミマルチンゲール（Parabolic Operator - Semimartingale） n次元セミマルチンゲールX_tが（A-1）式を満足すると仮定する。この時、$P[X_t \in \Gamma]=1$、かつ、全てのtで$\varphi \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^n)$は次を満足する。

$$d\varphi(t, X_t) = (\partial_t + L_t)\varphi(t, X_t)\,dt + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}[\partial_i \varphi(t, X_t)\,\sigma_{ij}(t, X_t)] \cdot dW^j. \qquad \text{(A-3)}$$

φ_tが$E[\int_0^t (\partial_i \varphi(s, X_s)\,\sigma_{ij}(s, X_s))^2 ds] < \infty$を満足する場合には、$X_t^\varphi = \varphi(t, X_t) - \varphi(0, X_0) - \int_0^t (\partial_s + L_s)\,\varphi(s, X_s)\,ds$ はマルチンゲール（martingale）になる。

証明　von Weizsäcker and Winkler［1990］Theorem 12.1.4 参照。

定義：マルチンゲール問題（Martingale Problem） X_tを拡散過程（diffusion process）とする。次のプロセスが全ての$\varphi \in C(\mathbf{R}^n)$に対してマルチンゲールになるとき、確率測度$Q$はマルチンゲール問題を解くという。

$$X_t^\varphi = \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t L_s \varphi(X_s)\,ds. \qquad \text{(A-4)}$$

定理A.1.2：マルチンゲール問題と弱解（Martingale Problem-Weak Solution） νをR^n上の確率測度、Qを$C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^n)$上の確率測度とする時、次は同値となる。

1. 初期分布（initial distribution）vと$Q^v = \iint Z_T \, dP^x \nu(dx)$はマルチンゲール問題を解く。ここで、$Z_T = dQ^x / dP^x$。

2. 初期分布vとQ^vは全てのテスト関数$\psi \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^n)$に対してマルチンゲール問題を解く。すなわち、以下で与えられるプロセスがマルチンゲールになる。

$$\psi(t, X_t) - \psi(0, X_0) - \int_0^t (\partial_s + L_s)\, \psi(s, X_s)\, ds.$$

3. $(\Omega, \mathcal{F}, P), \mathcal{F}_t$のもとで$W_t$はウィーナー・プロセスとする。このとき、SDE、

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \cdot dW_t,$$

が弱解$\{(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, Q^v), \mathcal{F}_t\}$を持つ。

証明　von Weizsäcker and Winkler［1990］Theorem 12.6.2 参照。

注記　いま、オリジナル測度P^xのもとで$\{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t \le T\}, (\Omega, \mathcal{F})$が$n$次元のブラウニアン・ファミリー[19]とする。このとき、SDE、

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t, \quad P^x[X_0 = x] = 1,$$

を考える。ここで、$\| b(t, x) \| \le K(1 + \|x\|)$。このとき、以下のラドン・ニコディム微分によって定義されるQ^xのもとでW_tは$Q^x[W_0 = 0] = 1$であるウィーナー・プロセスとなる。ラドン・ニコディム微分$Z_T = dQ^x / dP^x$は、

$$Z_T = \exp\left\{\int_0^T b(s, X_s) \cdot dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T \| b(s, X_s) \|^2 ds,\right. \qquad \text{(A-5)}$$

で与えられる[20]。

注記　$a = \sigma\sigma^*$が正則でない場合には、次のように構成される。$\Omega = C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^n)$, $P = Q$として、$W_t = \int_0^t \sigma^* a^{-1}(s, X_s) \cdot dY_s$,ここで$Y_t = X_t - \int_0^t b(s, X_s)\, ds$。

19 Karatzas and Shreve［1991］Definition 2.5.8 などを参照
20 Karatzas and Shreve［1991］Proposition 5.3.6 参照。

（3）基本解とコーシー問題

定義：基本解（Fundamental Solution）$G(t, x; \tau, \xi)$, $0 \le t < \tau \le T$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ は、次を満足するとき基本解と呼ばれる。

$$(\partial_t + L_t) V(t, x) = kV(t, x). \tag{A-6}$$

この時、$G(t, x; \tau, \xi)$は全ての$f \in C_0(\mathbf{R}^n)$に対して、

$$V(t, x) = \int_{R^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\xi) d\xi, \tag{A-7}$$

$$\lim_{t \uparrow \tau} V(t, x) = f(x),$$

が成立する。この時、$G(t, x; \tau, \xi)$は推移確率密度（transition probability density）[21]とも呼ばれる。

定理A.1.3：コーシー問題（Cauchy Problem）関数$f(x)$：$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $g(t, x)$：$[0, T] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$を、

$$|f(x)| \le L(1 + \|x\|^{2\mu}), \mu \ge 1, \quad \text{あるいは} \; g(t, x) \ge 0;$$

$$|g(t, x)| \le L(1 + \|x\|^{2\mu}), \mu \ge 1, \quad \text{あるいは} \; g(t, x) \ge 0;$$

とする。この時、

$$(\partial_t + L_t) V(t, x) = kV(t, x) + g,$$

$$V(T, x) = f(x),$$

$$\max_{0 \le t \le T} |V(t, x)| \le M(1 + \|x\|^{2\mu}), M > 0, \mu \ge 1,$$

を満足する一意の解は次のように表現できる。

$$V(t, x) = \int_{R^n} G(t, x; T, \xi) f(\xi) d\xi + \int_t^T \int_{R^n} G(t, x; \tau, \xi) g(\tau, \xi) d\xi d\tau \tag{A-8}$$

$$= E_{t,x}\left[f(X_T) \exp\left\{ -\int_t^T k(\theta, X_\theta) d\theta \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int_t^T g(s, X_s) \exp\left\{ -\int_t^s k(\theta, X_\theta) d\theta \right\} ds \right]. \tag{A-9}$$

証明　Karatzas and Shreve［1991］Theorem 5.7.6 参照。

21　この時、初期時点tにおいてxを持つプロセス$X^{t,x}$の時点τにおける分布は、

$$P[X_\tau^{t,x} \in A] = \int_A G(t, x; \tau, \xi) d\xi,$$

と表現される。

補論2．μ_t の構造

補題A.2.1　$\mu\in\mathcal{M}([0, T]\times U)$ に対して、$\lambda_\mu(t, A)=\int_0^t \mu_s(A)\,ds$とおく。いま、$\lambda\in\mathbf{L}(\Omega)$と$\lambda'\in\mathbf{L}(\Omega')$が$\mathcal{L}([0, T]\times U)$–値確率変数として同一の分布に従うと仮定する。さらに、$\mu\in\mathbf{M}(\Omega)$、$\mu'\in\mathbf{M}(\Omega')$として、

$$\lambda(t, A, \omega)=\int_0^t \mu_s(A, \omega)\,ds, \qquad a.s.\ P,$$

$$\lambda'(t, A, \omega')=\int_0^t \mu'_s(A, \omega')\,ds, \quad a.s.\ P',$$

とする。いま、$P-a.e.\,\omega\in\Omega$に対して、

1. 全ての$A\in\mathcal{B}(U)$に対し、$(0, T]$において$\mu_\cdot(A, \omega)$は左連続、

2. 全ての$A\in\mathcal{B}(U)$に対し、$\lim_{t\downarrow 0}\mu_t(A, \omega)=\mu_0(A, \omega)$、

が成立しているとする。この時、初期時点のμ_0に対する変形（modification）$\mu'_0(A, \omega')$も$P'-a.e.\omega'\in\Omega'$に対して上記の1、2を満足し、$\mu_\cdot\in\mathbf{M}(\Omega)$、$\mu'_\cdot\in\mathbf{M}(\Omega')$は$\mathcal{M}([0, T]\times U)$–値で同一の分布に従う。

証明　Ma and Yong［1993］Lemma 2.1 参照。

注記　$\lambda_\mu(t, A)$は、

1. $\lambda_\mu(0, A)=0$、$\forall A\in\mathcal{B}(U)$、

2. $\lambda_\mu(t, U)=t$、$\forall t\geq 0$、

3. $\lambda_\mu(t, \cdot)$は$\mathcal{B}(U)$上の測度であり、tを超えない、

4. $\lambda_\mu(t, A)$は全ての$A\in\mathcal{B}(U)$でtに関して非減少な関数、

5. $\sup_{A\in\mathcal{B}(U)}|\lambda_\mu(s, A)-\lambda_\mu(t, A)|=|s-t|$、

を満足する。

参考文献

日本数学会編集、「数学辞典－第三版－」、岩波書店、1985 年

Bismut, J. M., "An Introductory Approach to Duality in Optimal Stochastic Control," *SIAM Review*, 20, 1978, pp. 62-78.

Cvitanić, J. and I. Karatzas, "Hedging Contingent Claims with Constrained Portfolio," *Annals of Applied Probability*, 3, 1993, pp. 652-681.

———, ———, and H. M. Soner, "Backward Stochastic Differential Equations with Constraints on the Gains-process," Working Paper, Columbia University, 1997.

———, and J. Ma, "Hedging Options for a Large Investor and Forward-Backward SDE's," *Annals of Applied Probability*, 6, 1996, pp. 370-398.

Delbaen, F., P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer, and C. Stricker, "Exponential Hedging and Entropic Penalties," *Mathematical Finance*, 12, 2002, pp. 99-123.

Dothan, M. U., *Prices in Financial Markets*, Oxford University Press, 1990.

Duffie, D., and L. Epstein, "Stochastic Differential Utility," *Econometrica*, 60, 1992, pp. 353-394.

———, J. Ma, and J. Yong, "Black's Console Rate Conjecture," *Annals of Applied Probability*, 5, 1994, pp. 356-382.

El Karoui, N., E. Pardoux, and M. C. Quenez, "Reflected Backward SDE's and American Options," *Numerical Methods in Finance*, ed. L. C. G. Rogers and D. Talay, 1997, pp. 215-231.

———, S. Peng, and ———, "Backward Stochastic Differential Equations in Finance," *Mathematical Finance*, 7, 1997, pp. 1-71.

Gilbarg, D., and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1998.

Harrison, M., and S. R. Pliska, "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and their Applications*, 11, 1981, pp. 215-260.

Hofmann, N., E. Platen, and M. Schweizer, "Option Pricing Under Incompleteness and Stochastic Volatility," *Mathematical Finance*, 2/3, 1992, pp. 152-187.

Hogan, M., "Problems in Certain Two-Factor Term structure Models," *Annals of Applied Probability*, 3, 1993, pp. 576-581.

Iwaki, H., M. Kijima and T. Yoshida, "American Put Options with a Finite Set of Exercisable Time Epochs," *Mathematical Computing and Modelling*, 22, 1995, pp. 89-97.

Jost, J., *Partial Differential Equations*, Springer, 2002.

Karatzas, I., and S. E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, 1991.

Kijima, M., and T. Yoshida, "A Simple Option Pricing Model with Markovian Volatilities," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 36, 1993, pp. 149-166.

Ma, J., and J. Yong, "Solvability of Forward Backward SDEs and the Nodal Set of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations," *IMA* preprint #1117, 1993.

———, P. Protter and ———, "Solving Forward-Backward Stochastic Differential Equations Explicitly - A Four Step Scheme," *Probability Theory and Related Fields*, 105, 1994, pp. 459-479.

———, and J. Yong, *Forward backward stochastic differential equations and their applications*, Springer, 1999.

Otaka, M., and T. Yoshida, “Study on Option Pricing Model in an Incomplete Market with Stochastic Volatility based on Risk Premium Analysis,” *Mathematical Computing and Modelling*, 38, 2003, pp. 1399-1408.

———, and ———, “Term Structure Models with an Interest Rate Controlled by the Monetary Authority,” *Proceedings of the Joint Conference of Quantitative Methods in Finance and Bernoulli Society 2000*, 2000, pp. 386-392.

Pardoux, E., and S. Peng, “Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation,” *Systems and Control Letters*, 14, 1990, pp. 55-61.

Peng, S., “Backward Stochastic Differential Equation and Its Application in Optimal Control,” *Applied Mathematics and Optimization*, 27, 1993, pp. 125-144.

Revuz, D., and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1991.

Rutkowski, M., “Self-financing Trading Strategies for Sliding, Rolling-horizon, and Consol Bonds,” Working Paper of University of New South Wales, 1997.

Svensson, L. E. O., “Inflation Targeting as a Monetary Policy Rule,” Working Paper of Stockholm University, 1998.

von Weizsäcker, H., and G. Winkler, *Stochastic Integrals*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesllschaft, 1990.

Yosida, K., *Functional Analysis*, Springer, 1980.