

# ウェーブレットによる経済分析

い なた まさかず か まだ こういちろう  
稲田将一 / 鎌田康一郎

## 要 旨

本稿は、近年、応用科学の分野で注目を浴びつつあるウェーブレット解析のエコノミスト向け入門書である。ここでは、ウェーブレット変換を一種の線形フィルタリングと解釈し、その基礎概念と活用法を解説する。さらに、多重解像度解析や周期別の回帰分析といった初歩的な分析から、構造変化検定や長期記憶過程の推計といった比較的高度な分析まで、わが国のデータを用いた実証例を交えながら紹介してゆく。

キーワード：ウェーブレット解析、フーリエ解析、時間周波数解析、線形フィルタリング、多重解像度解析、恒常所得仮説、フラクショナル・インテグレーション

本稿の作成過程で、日本銀行調査統計局の多くのスタッフから有益なコメントを頂戴した。また、匿名のレフェリーからのコメントも、本稿に改訂を重ねるうえで大いに役立った。この場を借りて、深く感謝の意を表したい。なお、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、筆者たち個人に属するものであり、日本銀行の公式見解を示すものではない。

稲田将一 日本銀行金融研究所研究第1課 (E-mail: masakazu.inada@boj.or.jp)

鎌田康一郎 日本銀行調査統計局経済調査課調査役

(E-mail: kouichirou.kamada@boj.or.jp)

## 1. はじめに

### (1) ウェーブレットの歴史

本稿は、近年、ファイナンスや経済学の分野でも、注目を浴びつつあるウェーブレット (wavelet) の入門書である。ウェーブレットの歴史は浅く、1982年頃、フランス人石油探査技師 J. モルレー (J. Morlet) が、不規則な信号を効率よく処理する手段として実用化を試みたのが始まりである<sup>1</sup>。その後、数学、物理学、工学などの分野で理論化が進められる一方、画像処理、音声処理をはじめ、信号処理一般に有効な手法であることが認識され、応用範囲を急速に拡大しつつある<sup>2</sup>。しかし、経済学やファイナンスへの応用は始まったばかりで、一部の海外中央銀行がウェーブレットに関連する論文を発表し始めているが、ほとんど未開拓のフィールドといってよい<sup>3</sup>。

われわれが直接観察できる経済データは、短期的な変動から長期的な変動まで、いくつもの成分が積み重なった結果であり、その動きは非常に複雑である。こうした複雑な信号を単純な時系列の和として表現する手法の1つに「フーリエ解析」がある。フーリエ解析では、任意のデータ系列を周波数の異なる複数の波 (三角関数) の和として表現する。フーリエ変換して得られる「スペクトル密度」を観察すれば、データの動きを支配している周波数を特定化することができる。しかし、フーリエ変換を行うと、時間に関する情報が失われてしまうため、時間の経過と共にデータの周波数特性が変化する場合、そうした変化を把握することができない (図表1(1))。

周波数特性の時間的変化を把握できないというフーリエ変換の欠陥を補う方法の1つに「窓フーリエ変換」がある<sup>4</sup>。D. ガボール (D. Gabor) は、小さな窓を作って、そこからみえる時系列データをフーリエ変換し、その窓を時間軸に沿ってスライドさせるという「時間周波数解析」を発案した。これによって、周波数特性の時間的変化を捉えることが可能になった (図表1(2))。ところで、窓の大きさ (時間枠) を小さくすれば、いくらでも詳細な情報が得られるのであろうか。答えはノーであることが、「不確定性原理」 (uncertainty principle) と同じロジックで証明されている<sup>5</sup>。すなわち、ある時系列データから時間と周波数の情報を抜き出

1 ウェーブレットの歴史は、新井 [2000]、榊原 [1995] などの入門書で触れられている。

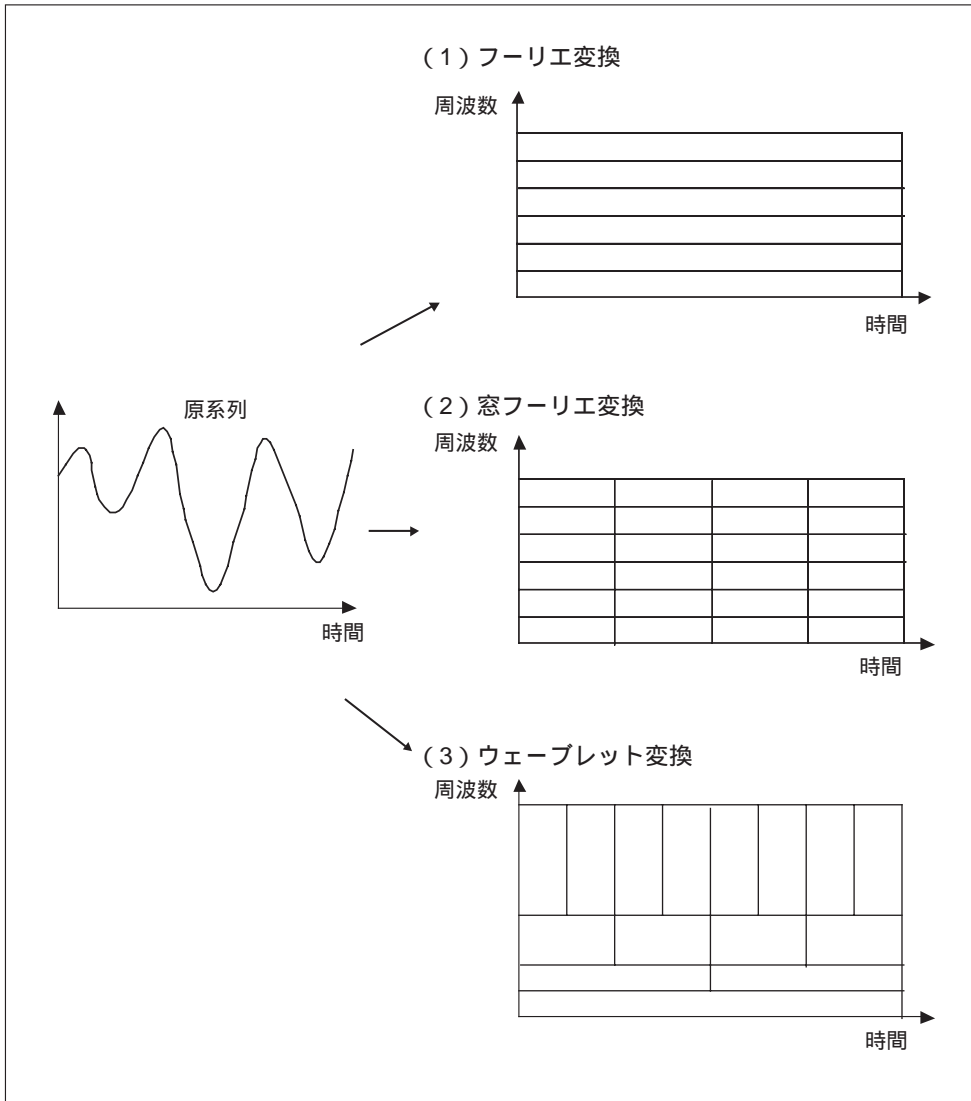
2 ウェーブレット解析は、さまざまな場所で実用化されている。例えば、米国連邦捜査局 (FBI) は、ウェーブレットを用いて、2,500万もの指紋を管理している。

3 海外中央銀行による研究論文に、ニュージーランド準備銀行の Conway and Frame [2000] やカナダ銀行の Schleicher [2002] がある。

4 窓フーリエ変換は、「短時間フーリエ変換」とか、発案者の名を冠して、「ガボール変換」と呼ばれることもある。

5 量子論でいう不確定性原理とは、「粒子の位置と運動量に関する情報は、同時に詳しく知ることができない」ということ。

図表1 ウェーブレット解析とフーリエ解析（その1）



すとき、時間的な詳細さと周波数的な詳細さの間にはトレードオフの関係があり、両者を同時に追求することができない。そこで、このトレードオフを所与として、窓フーリエ変換は効率的かという点が、次の問題となる。実は、周波数によらず、一定の時間枠を用いる窓フーリエ変換は、必ずしも効率的ではないことがわかって

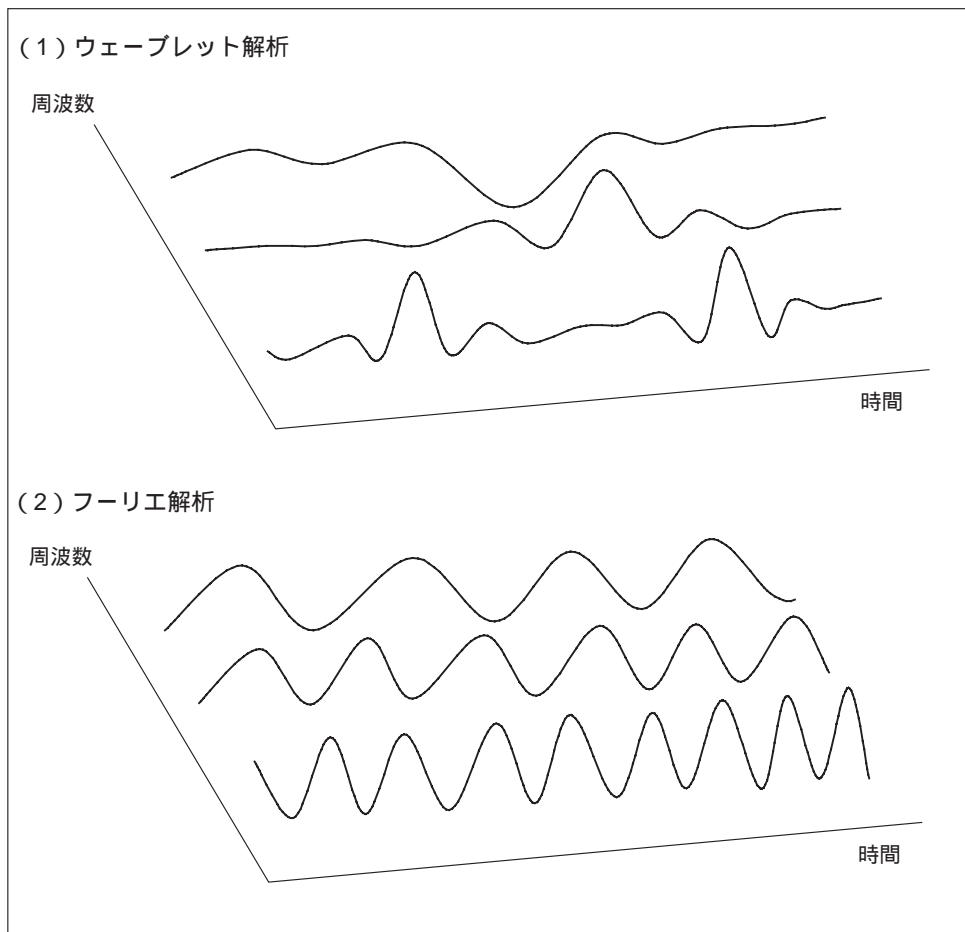
いる。  
 こうしたフーリエ解析の限界を補うものが、ウェーブレット解析である。窓フーリエ変換が非効率的なのは、周波数に関係なく同じ大きさの窓を使ったことが原因であった。したがって、周波数に応じて窓の大きさを変えてやれば、効率的な分解が可能になる。周期の長い低周波に対しては、窓の枠を大きくとってよいが、周期の

短い高周波に対しては、窓の枠を小さくとる必要がある。本稿で説明されるウェーブレット変換は、まさにそうした柔軟な対応を可能とする分析手法なのである(図表1(3))。なお、ウェーブレット解析では、周期の代わりに、「スケール」という言葉がしばしば用いられる。スケールが大きいということは、周期が長く、低周波であることを意味する。

## (2) フーリエ解析vs.ウェーブレット解析

ウェーブレットは、“wave”(波)と“let”(小さい)の合成語であり、「さざなみ」と訳される。ウェーブレットは、時間的な流れの中で、生まれては消えてゆく一時的な波であり、ウェーブレット解析は、任意の時系列データをウェーブレットの和として表現する手法である(図表2(1))。一方、フーリエ解析は、任意の時系列データを、無限に続く恒久的な波の和として表現するものである(図表2(2))。

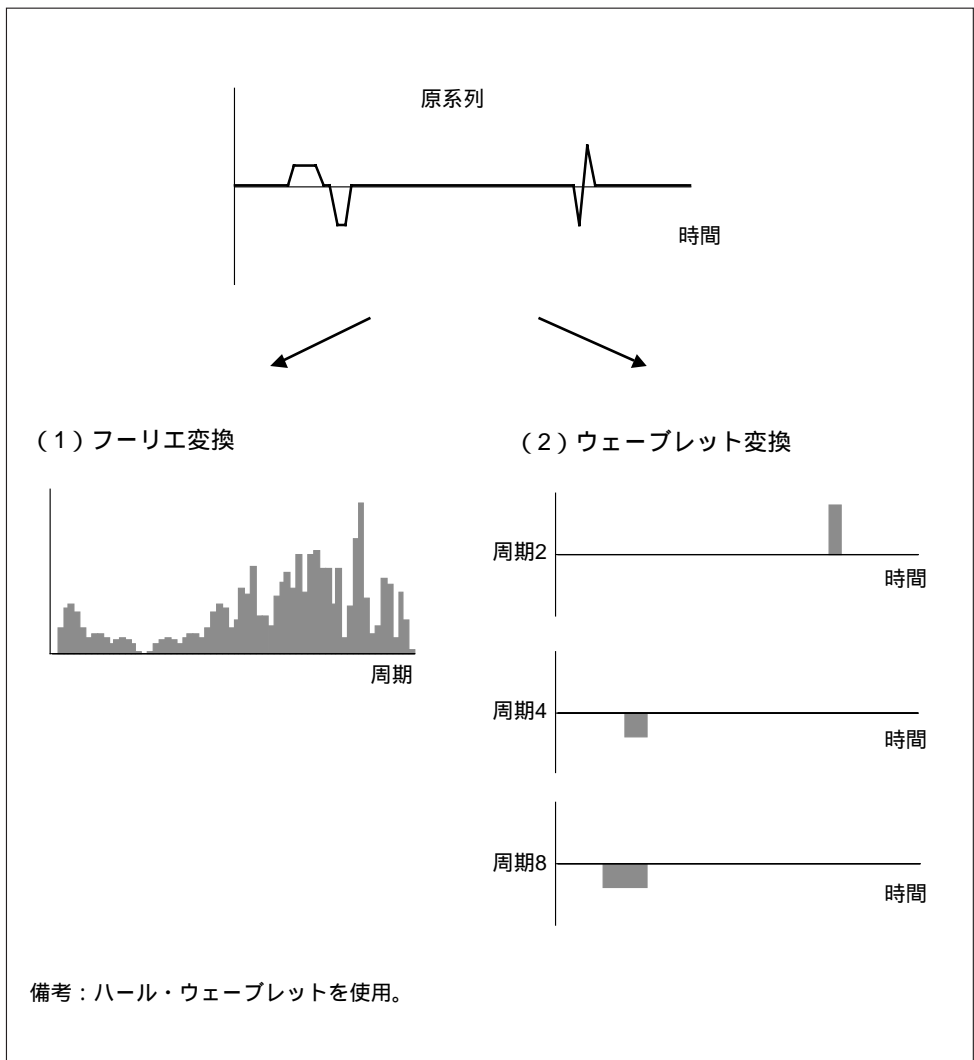
図表2 ウェーブレット解析とフーリエ解析(その2)



フーリエ変換とウェーブレット変換は、どちらか一方が他方に勝っているというわけではない。例えば、時系列特性が時間を通じて不変で、規則的な変動を繰り返すデータ（定常データ）に対しては、時間的な情報を無視して、詳細な周波数解析を行うフーリエ変換が効率的である。しかし、フーリエ変換は、不規則に発生するショック（非定常データ、トレンド系列を含む）を扱うのが苦手である。一方、ウェーブレット変換は、そうした不規則変動を示すデータに対して、威力を発揮する。逆に、規則的なデータに、わざわざ、ウェーブレット変換を適用する必要はない。

ウェーブレット変換が、不規則データの取扱いに強い点を、具体例を用いて解説しておこう。いま、図表3上段のように、山と谷が不規則な間隔で並んでいるデータを考える。これをフーリエ変換すると、図表3(1)のような「スペクトル密度関

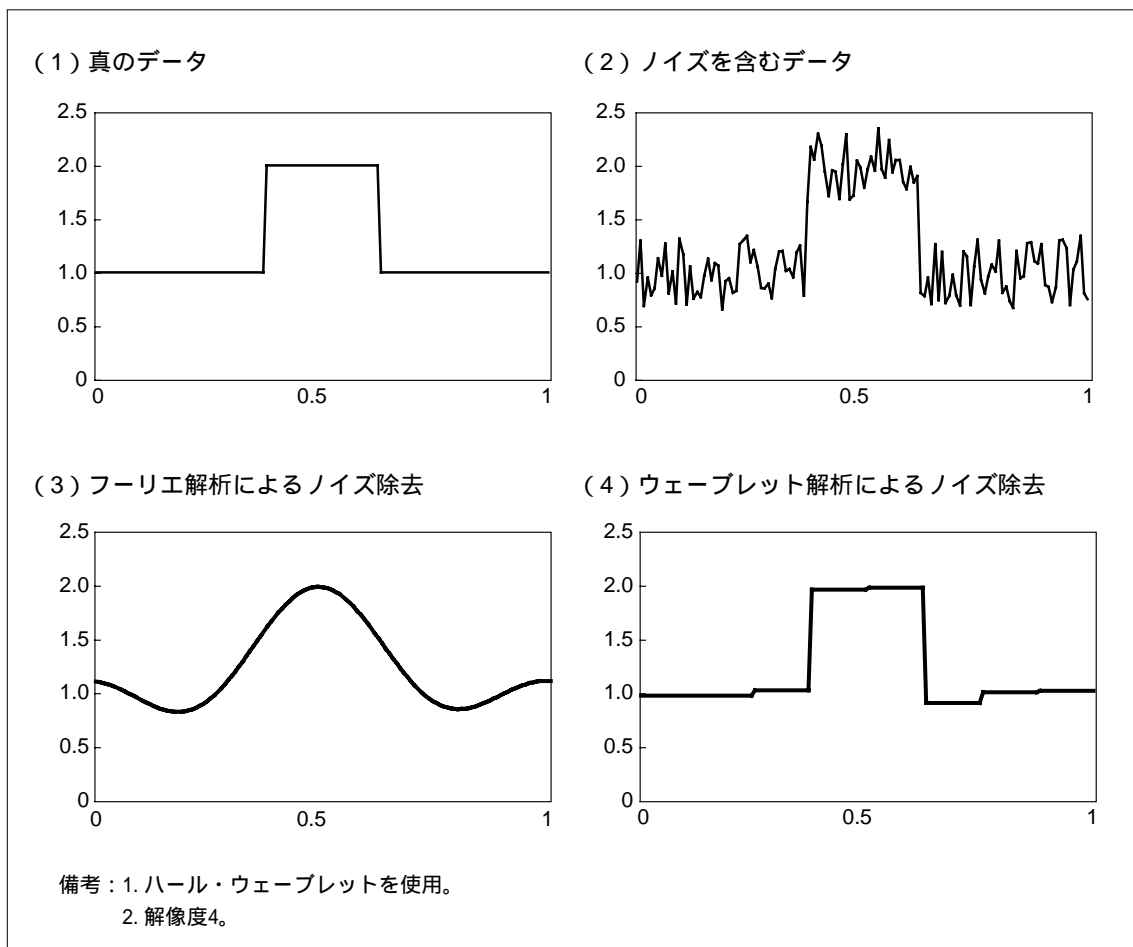
図表3 非定常データの解析例



数」が得られる。これは、あるデータに、周期の異なる複数の波が、どの程度含まれているかを示したものである。これをみると、たった4つの起伏しか持たないデータでも、フーリエ変換を使うと、無数の波から合成される必要があることがわかる。一方、図表3(2)は、同じデータをウェーブレット変換した結果である。これをみると、原系列が、2、4、8期という周期(スケール)を持った小さな波から合成されていることがわかる。しかも、それぞれの波がどの時点で生じたかが示されている。おそらく、多くの人にとって、フーリエ変換の結果よりも、ウェーブレット変換の結果の方が、自然に映るであろう。こうした自然な解釈が可能になったのは、ウェーブレット解析が、時間軸を新たに導入したからにほかならない。

ウェーブレット変換が、不規則データに強いことを示す第2の例として、ノイズ除去の問題を考えてみよう。いま、図表4(1)のようなステップ状の信号があるとす。しかし、実際に観測されたデータには、図表4(2)のように、ノイズが混入

図表4 ステップ関数のノイズ除去



しているとする。ここからノイズを除去して、真の信号を抽出したい。フーリエ解析を使ったところ、図表4(3)のように、緩やかな山が抽出されてしまった。一方、ウェーブレット解析を使ったところ、図表4(4)のように、かなり正確に、真の信号を抽出することに成功した。こうしたステップ状のデータは、現実の世界でも珍しくない。図表5(1)は、近年の原油価格（北海ブレント、スポット価格、月中平均）の動きをプロットしたものである。ウェーブレット変換を使って、ノイズ除去を行うと、図表5(2)のように、細かいノイズが消えて、特徴的な動きを強調することができる。

経済データのほとんどは、不規則にジャンプしたり、変動幅が時間の経過と共に減衰と拡大を繰り返す。何よりも、経済データの多くは非定常である。したがって、経済分析の領域において、定常性を前提とするフーリエ解析は、応用範囲が限られており、ウェーブレット解析の方が、応用範囲が広いことは、想像に難くない。本稿は、こうした魅力を備えたウェーブレット解析の基礎をエコノミストに馴染みやすい形で解説するものである。なお、経済データは離散時間でしか存在しないので、本稿でも、離散時間データの離散ウェーブレット変換（DWT: discrete wavelet transform）のみを取り上げ、連続時間データや連続ウェーブレット変換（CWT: continuous wavelet transform）の説明は割愛する。

本稿の構成は、以下のとおりである。2節では、数学的な厳密性に囚われずに、実践的な観点から、ウェーブレット解析の基礎概念と活用法を解説する<sup>6</sup>。また、ウェーブレット解析の経済分析への応用例として、3節で消費者物価、4節で家計消費、5節で円ドル相場を取り上げる。6節は結びである<sup>7</sup>。

6 ウェーブレットの数理を厳密に解説した入門書に、チューイ [1993] がある。

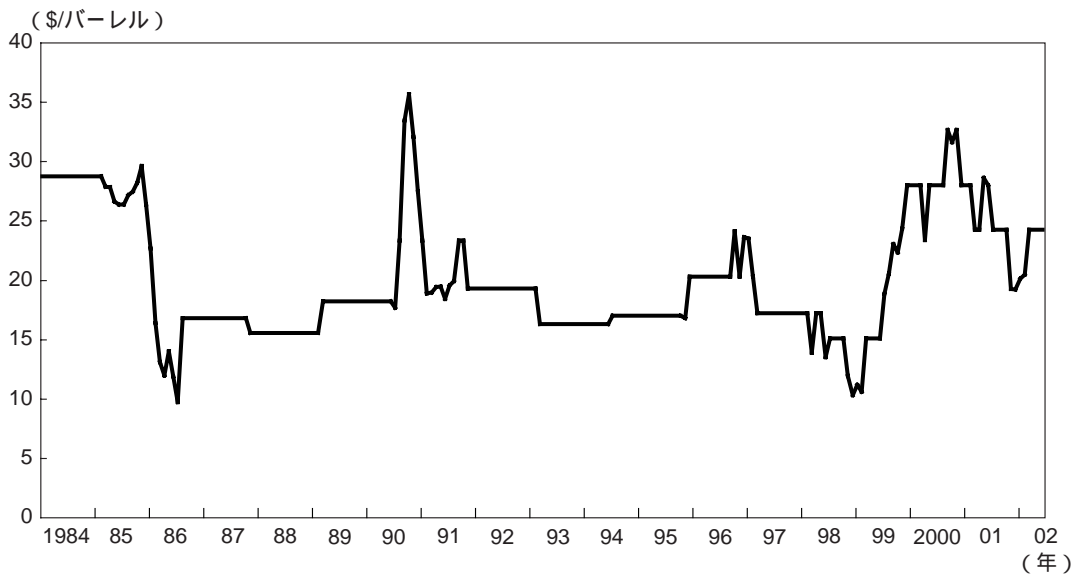
7 本稿の分析プログラムは、全てGAUSSで書かれたが、MATLAB、S-Plus、Mathematicaなど、他のソフトウェアを利用することも、もちろん可能である。また、これらのソフトウェアについては、既製のウェーブレット専用パッケージソフトが開発されている。日本語の文献としては、榊原 [1995] にプログラム解説付きのCD-ROMが添付されており、Mathematica上で利用できる。このほか、新井 [2000] には、ソフトウェア（有償・無償）の入手先のみならず、ウェーブレットを学ぶ際に役立つ書籍やインターネット上のサイトが数多く紹介されているので参照されたい。

図表5 原油価格データのノイズ除去

(1) 北海ブレント・スポット価格・月中平均



(2) ノイズ除去後



備考：1. ハール・ウェーブレットを使用。

2. 標準偏差1単位分を閾値とするハード・スレシヨールディング。



## 2. ウェーブレット入門

ここでは、ウェーブレット解析で用いられる基礎概念と実践的な活用法を解説する。最初に、ウェーブレット変換に欠かせない「ウェーブレット・フィルタ」のうち、代表的なものを選んで紹介する。次に、それらのフィルタを用いて、「ウェーブレット変換」が、どのように実行されるのかを解説する。後に詳述するが、変換によって得られた結果は、「ウェーブレット係数」と呼ばれる。続いて、この係数を原系列に戻す作業である「ウェーブレット逆変換」を解説する。

ウェーブレット係数にさまざまな加工を施し、それを逆変換することによって、原系列の持つ特徴点を明らかにすることができる。本節では、特に重要な応用事例である「多重解像度解析」を取り上げる。また、「ノイズ除去」や「エネルギー分析」の基本についても簡単に紹介する。最後に、ウェーブレット変換の拡張版ともいえる、MODWTについて触れる。ここで紹介されるウェーブレット解析の基本的な分析手法を組み合わせることによって、従来、別々にしか取り扱うことのできなかった周波数ベースの分析と時系列ベースの分析を自然な形で融合し、さまざまな経済問題に新たな光を投ずることができる。

### (1) ウェーブレット・フィルタ

ウェーブレット変換は、一種の線形フィルタリングと解釈できる<sup>8</sup>。このため、変換に用いられるウェーブレットは「ウェーブレット・フィルタ」と呼ばれる。ウェーブレット・フィルタ $h$ は、次の3条件を満たす必要がある。

$$\sum_{k=1}^L h_k = 0. \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^L h_k^2 = 1. \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^L h_k h_{k+2n} = 0. \quad (n \text{ はゼロ以外の整数}) \quad (3)$$

ここで、 $L$ はフィルタの長さである（「サポート」と呼ぶ）<sup>9</sup>。(1)式は、フィルタ要素を全て加えるとゼロになるという意味で、フィルタリングによって、原系列に「何も足さないし、何も引かない」ことを意味している。(2)式では、フィルタのエネルギーを1と標準化している<sup>10</sup>。最後に、(3)式は、偶数倍シフトさせたフィル

8 ウェーブレット変換を線形フィルタリングの観点から捉えるというアプローチはPercival and Walden [2000]やGençay, Selçuk and Whitcher [2002]でも採用されている。

9 (3)式で、 $k+2n > L$ となると、積を作れなくなる。その場合はゼロと考える。より厳密には、ゼロ要素を付加した $(\dots, 0, 0, h_1, \dots, h_L, 0, 0, \dots)$ という無限フィルタを想定すればよい。実は、「サポート」という用語は、このようにフィルタを定義した場合に、フィルタのゼロでない部分の長さを指す言葉である。

10 ある時系列が与えられたとき、その2乗和をその時系列の「エネルギー」と呼ぶ。

タと元のフィルタが、直交することを意味している<sup>11</sup>。(2)式は、シフトしなかった場合の内積が1であることを示しており、(3)式とあわせて、正規直交性(orthonormality)の条件という。

ウェーブレット変換を実行するには、ウェーブレット・フィルタと対をなすスケーリング・フィルタ $g$ が必要である。両者は、「直交鏡像関係」(quadrature mirror relationship)と呼ばれる次の関係式で結ばれている。

$$g_i = (-1)^i h_{L-i+1} \Leftrightarrow h_i = (-1)^{i-1} g_{L-i+1} \quad (4)$$

ここから、スケーリング・フィルタは、次の関係を満たすことが確認できる<sup>12</sup>。

$$\sum_{k=1}^L g_k = \sqrt{2} \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^L g_k^2 = 1 \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^L g_k g_{k+2n} = 0 \quad (n \text{ はゼロ以外の整数}) \quad (7)$$

さらに、ウェーブレット・フィルタとスケーリング・フィルタの間に、次の関係が成立していることが重要である。

$$\sum_{k=1}^L g_k h_{k+2n} = 0 \quad (n \text{ は整数}) \quad (8)$$

すなわち、2つの対をなすフィルタは、偶数倍のシフト(シフトしない場合を含む)に対して、互いに直交関係にある。

### イ．ハール・ウェーブレット (Haar wavelet)

ウェーブレット・フィルタの中で最も単純なものはハール・ウェーブレットである。このフィルタは、サポートを2として、先の(1)式と(2)式を連立方程式として解けば得られる。サポートが2なので、(3)式は当然に満たされる。また、(4)式と(5)式で符号を決定した。ウェーブレット・フィルタとスケーリング・フィルタを対にして書くと、次のようになる。

$$h = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \quad g = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (9)$$

11 本稿では、(3)式を満たすウェーブレット・フィルタに話を限定する。この場合のウェーブレット変換は、特に、直交変換と呼ばれる。もっとも、ウェーブレット変換には直交変換でないものもある。

12 (5)式の代わりに、 $\sum g_k = -\sqrt{2}$ もあり得るが、ここでは(5)式に統一する。

図表6(1)は、ハール・ウェーブレットを図示したものである。一般的に、スケーリング・フィルタが1つのなだらかな山を描くのに対して、ウェーブレット・フィルタは、切り立った山と谷がセットになっている。こうした特性によって、スケーリング・フィルタが周期の長い低周波を通す（低域通過フィルタ）のに対し、ウェーブレット・フィルタは周期の短い高周波を通すようになる（高域通過フィルタ）。図表6の右列にウェーブレット・フィルタをフーリエ変換して得られたスペクトル密度関数を示しておいた。右上がりの曲線は、ウェーブレット・フィルタが高域通過フィルタであることを示している。こうした2つのフィルタ特性の違いが、ウェーブレット解析の基礎となっているのである。

### ロ．ドビッシェー・ウェーブレット（Daubechies wavelet）

ハール・ウェーブレットと並んで頻繁に用いられるウェーブレット・フィルタに、ドビッシェー・ウェーブレットがある。本稿では、サポート $L$  ( $L$  は偶数) のドビッシェー・ウェーブレットを $D(L)$ と表記する。 $D(L)$ は、(1)~(3)式に加えて、次の $L/2-1$ 個の方程式を同時に満たすように決められる<sup>13</sup>。

$$\sum_{k=1}^L (k-1)^i h_k = 0. \quad (i=1, \dots, L/2-1) \quad (10)$$

これは、積率消滅（vanishing moments）条件と呼ばれ、原系列に含まれる $L/2-1$ 次以下の多項式トレンドは、ウェーブレット・フィルタを通過しないという条件である。裏返していうと、トレンド部分は、スケーリング・フィルタを通過する。

例えば、サポート4のドビッシェー・ウェーブレット $D(4)$ は、(10)式で $i=1$ とした場合の方程式を満たす。つまり、時系列データのうち、線形トレンドで表される部分は、ウェーブレット・フィルタを通過しないという条件が付け加わる。 $D(4)$ をスケーリング・フィルタとセットで表すと、次のようになる。

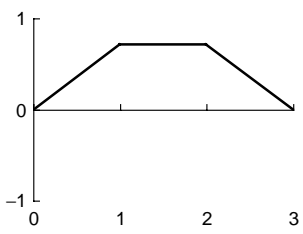
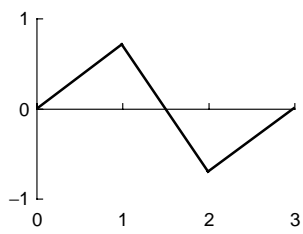
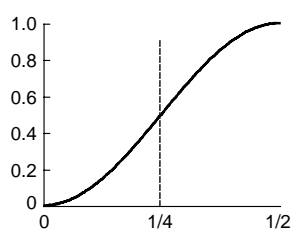
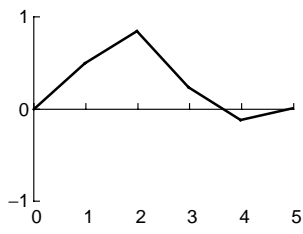
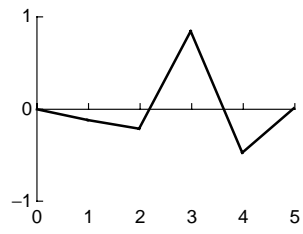
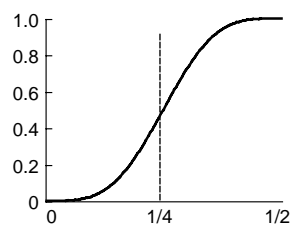
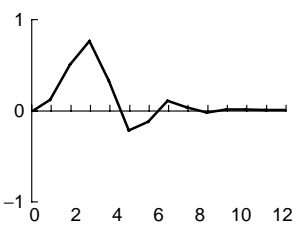
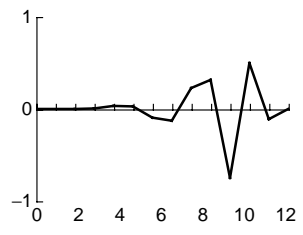
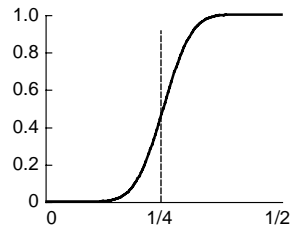
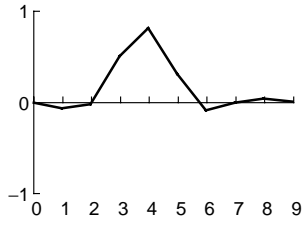
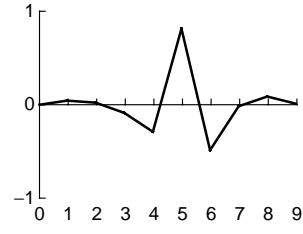
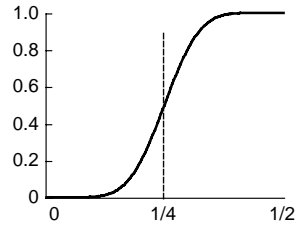
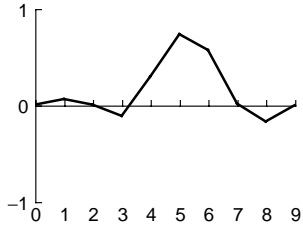
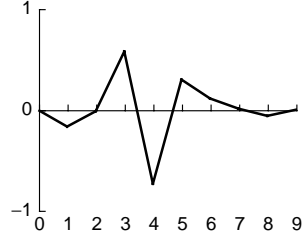
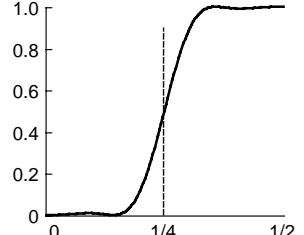
$$h = \left( \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{-3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{-1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right),$$

$$g = \left( \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right). \quad (11)$$

$D(4)$ を図示すると、図表6(2)のようになっている。ハール・ウェーブレットに比べ、複雑な形状をしているが、スケーリング・フィルタが1つのなだらかな山、ウェーブレット・フィルタが山と谷のセットという基本的な性質は変わらない。サ

13 形式上、ハール・ウェーブレットを $D(2)$ と呼ぶことも可能である。

図表6 ウェーブレット・フィルタとその周波数特性

	スケーリング・フィルタ	ウェーブレット・フィルタ	ウェーブレット・フィルタの スペクトル密度
(1) ハール			
(2) D(4)			
(3) D(12)			
(4) LA(8)			
(5) MB(8)			

ポートをさらに12にまで増やした結果が図表6(3)の $D(12)$ である。サポートの数が増えるにつれて、右列の周波数特性のグラフが1/4のところ、垂直に近付いている。これは、ウェーブレット・フィルタが理想的な高域通過フィルタ（高周波を全て通過させ、低周波を全く通過させないフィルタ）に近付いていることを示している。

このほかにも、さまざまなウェーブレット・フィルタが存在している。中でも、ドビッシー・ウェーブレットを対称形に近付けた $LA(L)$  (least asymmetric wavelet、図表6(4))、ドビッシー・ウェーブレットよりも小さなサポートでより高い解像能力を発揮する $MB(L)$  (minimum bandwidth wavelet、図表6(5))が代表的である。ここで紹介されたフィルタの具体的な数値については、図表7を参照されたい。分析者は、分析の目的とデータの性質に応じて、適切なウェーブレット・フィルタを選択することを求められる。こうした選択は、機械的に行えるものではなく、何度も試行錯誤を繰り返すのが普通である。

図表7 ウェーブレット・フィルタの具体的数値

	スケーリング・フィルタ	ウェーブレット・フィルタ
(1) ハール		
1	0.70710678	0.70710678
2	0.70710678	-0.70710678
(2) $D(4)$		
1	0.48296291	-0.12940952
2	0.83651630	-0.22414387
3	0.22414387	0.83651630
4	-0.12940952	-0.48296291
(3) $D(12)$		
1	0.11154074	-0.00107730
2	0.49462389	-0.00477726
3	0.75113391	0.00055384
4	0.31525035	0.03158204
5	-0.22626469	0.02752287
6	-0.12976687	-0.09750161
7	0.09750161	-0.12976687
8	0.02752287	0.22626469
9	-0.03158204	0.31525035
10	0.00055384	-0.75113391
11	0.00477726	0.49462389
12	-0.00107730	-0.11154074
(4) $LA(8)$		
1	-0.07576571	0.03222310
2	-0.02963553	0.01260397
3	0.49761867	-0.09921954
4	0.80373875	-0.29785780
5	0.29785780	0.80373875
6	-0.09921954	-0.49761867
7	-0.01260397	-0.02963553
8	0.03222310	0.07576571
(5) $MB(8)$		
1	0.06436345	-0.16736190
2	0.00710602	-0.01847751
3	-0.11086730	0.57257710
4	0.29478550	-0.73513310
5	0.73513310	0.29478550
6	0.57257710	0.11086730
7	0.01847751	0.00710602
8	-0.16736190	-0.06436345

資料：Gençay, Selçuk and Whitcher [ 2002 ]

## (2) ウェーブレット変換

ウェーブレット・フィルタにはさまざまな形があるが、フィルタをいったん決めてしまうと、ウェーブレット変換は、統一的な方法で実行される。ここでは、S. マーラ (S. Mallat) によって考案された実践的なウェーブレット解析の実行法である「ピラミッド・アルゴリズム」を紹介する。ピラミッド・アルゴリズムは高速で、しかも、ウェーブレット変換を一種の線形フィルタリングとみなす立場からは、直感的に理解しやすいというメリットがある。

原系列をウェーブレット係数に分解するプロセスを「ウェーブレット変換」、そして、ウェーブレット係数を原系列に再構成するプロセスを「ウェーブレット逆変換」と呼ぶ。以下、これら2つのプロセスを順に解説する。途中、ハール・ウェーブレットを用いた実例が紹介されるが、それらは大まかなイメージを得るためのものであり、あらゆるウェーブレット・フィルタに厳密に当てはまるものではないことに注意されたい。

### イ．ウェーブレット変換（分解）

原系列を  $x = (x_1, \dots, x_N)$  とする。ただし、 $N$  は2のべき乗の倍数である。ピラミッド・アルゴリズムの第1段階では、原系列をウェーブレット・フィルタ  $h$  に通して、レベル1のウェーブレット係数  $w_1$  を得る。具体的には、次の数式を用いて、フィルタリングを行う。

$$w_{1,t} = \sum_{k=1}^L h_k x_{\{(2t-k) \bmod N\}+1} \quad (12)$$

ここで、 $N$  は原系列の長さ、 $t$  は1から  $N/2$  までの整数である。 $A \bmod N$  は、 $A$  から  $N$  の倍数を引いて（あるいは足して）、 $0 \sim N-1$  の数字を作るという演算子である。同様に、原系列  $x$  をスケーリング・フィルタ  $g$  に通すと、レベル1のスケーリング係数  $v_1$  が得られる。具体的なフィルタリングの式は次のとおりである。

$$v_{1,t} = \sum_{k=1}^L g_k x_{\{(2t-k) \bmod N\}+1} \quad (13)$$

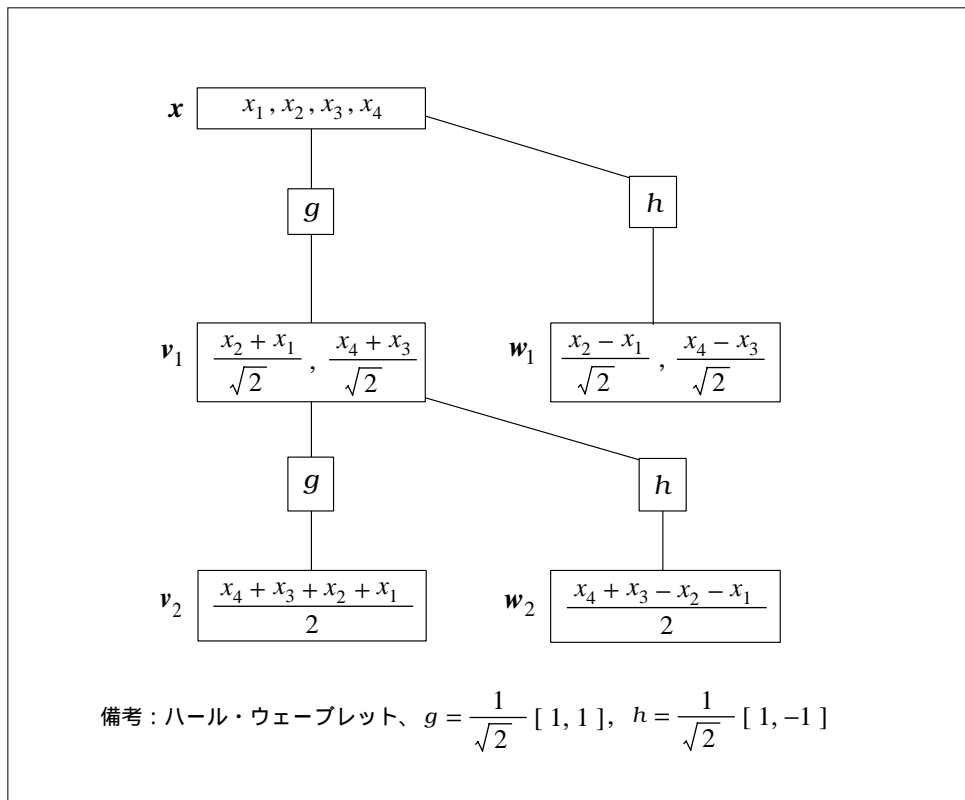
フィルタを通す際に、データが1個ずつではなく、2個ずつ進んでいくことに注意しよう。これは、「ダウン・サンプリング」と呼ばれる操作で、ウェーブレット変換の特徴の1つである。これによって、アウトプットであるウェーブレット係数とスケーリング係数の長さが、それぞれ原系列の半分 ( $=N/2$ ) になる。これを「データ圧縮」と呼ぶ。もっとも、ウェーブレット係数とスケーリング係数を合わせれば、 $N$  個のアウトプットが得られていることになり、全体としての情報量は失われていない。なお、技術的なことであるが、原系列をフィルタに通す際、フィルタを反転させていることに注意されたい。これは「畳込み」と呼ばれる演算で、反転せずにフィルタを掛け合わせる「内積」と異なる。

ハール・ウェーブレットを例として、ウェーブレット変換の特徴点を探ってみよう。図表8は、変換のプロセスをイメージ化したものである。ウェーブレット・フィルタはデータの一階差をとる操作、スケーリング・フィルタはデータの二期移動平均をとる操作と類似していることに注意しよう。ただし、ウェーブレット・フィルタは、一階差をとった後、 $\sqrt{2}$ で割っている点が、通常の一階差と異なる。また、スケーリング・フィルタは、平均をとった後、 $\sqrt{2}$ を掛けていることが、二期移動平均と異なる。もちろん、ダウン・サンプリングによって、データの長さが半分になることも、通常の階差や移動平均と異なっている。

ウェーブレット・フィルタが階差と、スケーリング・フィルタが移動平均と類似しているという点は、スケーリング・フィルタは1つの山、ウェーブレット・フィルタは山と谷のセットという先の議論の裏返しである。すなわち、スケーリング・フィルタは、やや長い目で見たときのデータの趨勢を捉えるものであり、ウェーブレット・フィルタは、データの趨勢的な流れからの乖離を捕捉している。そして、これら2つが合わさって、原系列に含まれる情報が保存されるのである。

ピラミッド・アルゴリズムの第2段階に進もう。第1段階で得られたウェーブレット係数 $w_1$ は、大まかにいうと、原系列の変動のうち、周期が2の部分をつえたもの

図表8 ピラミッド・アルゴリズム（ハール）





である。一方、スケーリング係数 $v_1$ には、周期が2よりも長い原系列の全ての動きが入り交じっている。そこで、 $v_1$ を周期の短い動き $w_2$ と長い動き $v_2$ に再び分解することが考えられる。それには、先と同じ変換を $v_1$ に施せばよい。データが長い場合には、スケーリング係数をさらに分解していくことができる。

いま、 $v_0 \equiv x$ と定義すると、ウェーブレット変換は、次のような一般形で書くことができる。

### ウェーブレット変換

レベル $i-1$ のスケーリング係数 $v_{i-1}$ を、ウェーブレット・フィルタ $h$ に通して、レベル $i$ のウェーブレット係数 $w_i$ を得る。

$$w_{i,t} = \sum_{k=1}^L h_k v_{i-1, \{(2t-k) \bmod N/2^{i-1}\}+1} \quad (14)$$

レベル $i-1$ のスケーリング係数 $v_{i-1}$ を、スケーリング・フィルタ $g$ に通して、レベル $i$ のスケーリング係数 $v_i$ を得る。

$$v_{i,t} = \sum_{k=1}^L g_k v_{i-1, \{(2t-k) \bmod N/2^{i-1}\}+1} \quad (15)$$

先に説明したとおり、ウェーブレット変換は、データをダウン・サンプリングする。このため、レベル $i$ の係数 $w_i$ 、 $v_i$ の長さは、いずれも $N/2^i$ に減少している。

ハール・ウェーブレットを使って、さらに理解を深めよう。図表8に戻って、ウェーブレット係数 $w_2$ をみると、これは、先に計算した二期移動平均の一階差をとったものになっている。これに対し、スケーリング係数 $v_2$ は、二期移動平均をさらに二期移動平均したのものになっている。もし原系列のサンプル・サイズがいまの2倍（8個）なら、 $v_2$ をさらにウェーブレット変換できて、 $w_3$ が周期8程度の変動を捉え、 $v_3$ がそれよりも長い原系列の動きを捕捉することとなる。

### ロ・ウェーブレット逆変換（再構成）

先に、ウェーブレット変換を施しても、原系列が持っている情報量は失われないことを指摘しておいたが、実際、変換によって得られたウェーブレット係数とスケーリング係数から、原系列を復元することができる。この操作は、「ウェーブレット逆変換」と呼ばれる。

ウェーブレット逆変換は、文字どおり、ウェーブレット変換の逆をいく。ここでは、レベル $i+1$ のウェーブレット係数 $w_{i+1}$ とスケーリング係数 $v_{i+1}$ から、レベル $i$ のスケーリング係数 $v_i$ を再構成する方法を説明する。まず、ダウン・サンプリングにより減少したデータを水増しするために、「0」を $w_{i+1}$ と $v_{i+1}$ のデータの間を織り込んでいく。つまり、 $w_{i+1}^0 = (0, w_{i+1,1}, 0, w_{i+1,2}, \dots)$ と $v_{i+1}^0 = (0, v_{i+1,1}, 0, v_{i+1,2}, \dots)$ というデータを作る。これをアップ・サンプリングと呼ぶ。

### ウェーブレット逆変換

$i+1$ レベルのアップ・サンプリングされたウェーブレット係数  $w_{i+1}^0$  をウェーブレット・フィルタ  $h$  に通し、レベル  $i+1$  のアップ・サンプリングされたスケール係数  $v_{i+1}^0$  をスケールリング・フィルタ  $g$  に通し、2つのアウトプットを足すと、レベル  $i$  のスケールリング係数  $v_i$  を得る。

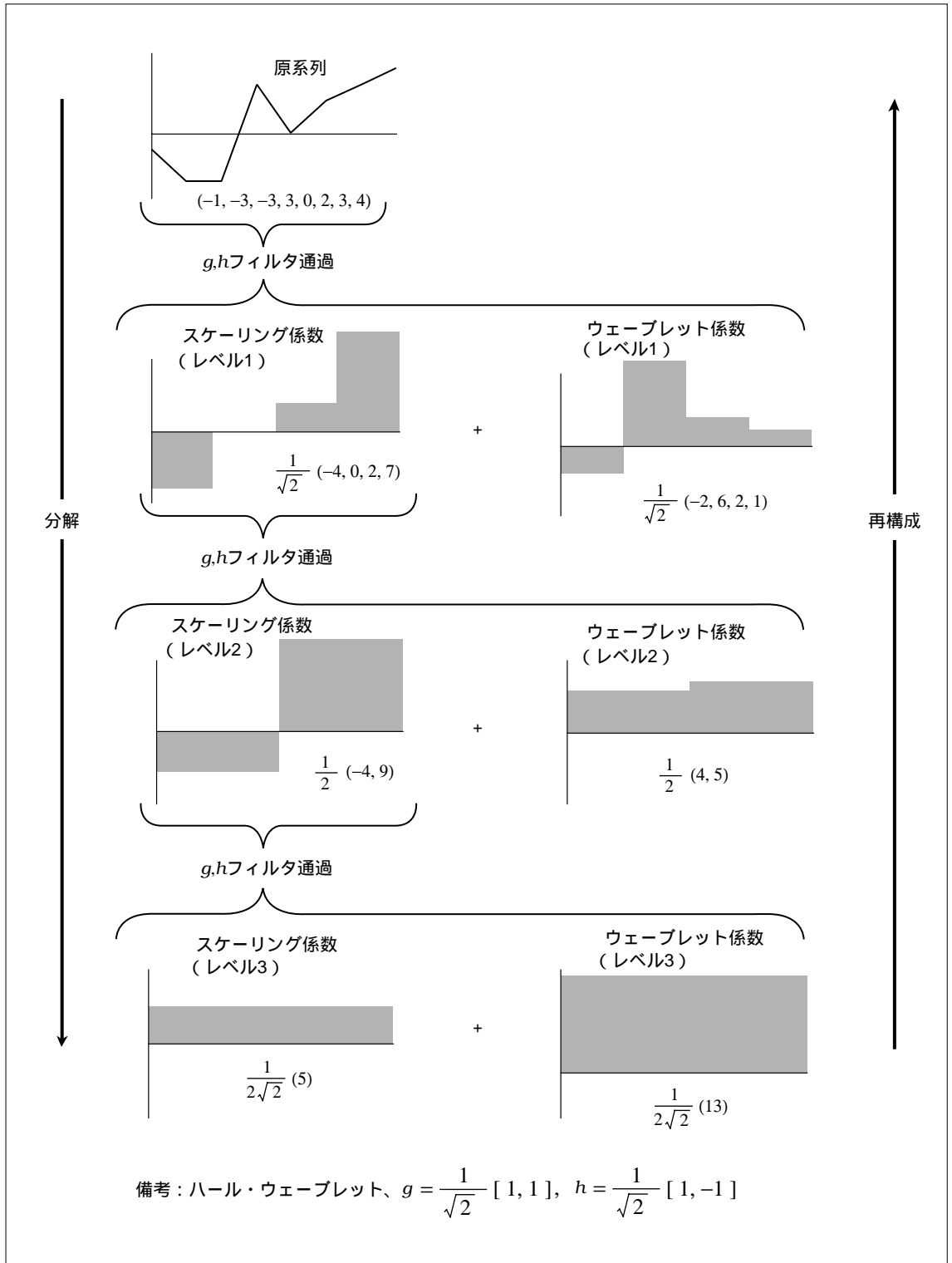
$$v_{i,t} = \sum_{k=1}^L h_k w_{i+1, \{(t+k-2) \bmod N / 2^i\} + 1}^0 + \sum_{k=1}^L g_k v_{i+1, \{(t+k-2) \bmod N / 2^i\} + 1}^0 \quad (16)$$

技術的なことであるが、ウェーブレット逆変換ではフィルタを反転せず、単なる内積を用いる。これは「畳込み」を行うウェーブレット変換と異なるので注意されたい。

ハール・ウェーブレットによるウェーブレット逆変換は、図表8を下から読むことに等しい。サンプル・サイズが8の場合の数値例を図表9に掲載しておいたので、これまで抽象的に説明された議論をより具体的な数値で理解できると思われるので利用されたい。

一般に、ウェーブレット・フィルタのサポートが2よりも大きい場合には、端点部分のウェーブレット変換が難しくなる。これは、リアルタイムな経済分析を必要とする場合には重大な問題となる。解決策として、データの前後に架空のデータを付け足すことが、しばしば行われる。データを付け足す方法に、何ら定説があるわけではない。最も頻繁に行われる方法は、単に元のデータを一から継ぎ足すというものである。しかし、この方法だと、データがトレンドを持っている場合には、データの端点部分で段差が生じてしまい、これがウェーブレット変換の結果を著しく歪めてしまう。そこで、本稿では、原系列そのものではなく、原系列のミラー・イメージを作って、原系列に付け足すという方法を採用している。これによって、端点部分に段差ができなくなるので、変換結果の歪みを緩和できる。もっとも、架空のデータを付け加えている点に変わりはなく、サポートが2よりも大きいウェーブレット・フィルタを使用する際には、端点部分の変換結果をある程度の幅を持って評価するのが妥当である。

図表9 分解・再構成の数値例（ハール）



## 八．ウェーブレット変換の行列表示

行列表示を用いて、これまでに説明したウェーブレット変換と逆変換を整理しておこう。実際に計算する際には、(14)~(16)式を用いた方が、計算スピードが速いし、コンピュータ・メモリの節約にもなる。しかし、ウェーブレット変換と逆変換の数理的な関係を理解するには、行列表示を用いた方が見通しがよい。

ウェーブレット変換から始めよう。具体的には、レベル*i*-1のスケーリング係数 $v_{i-1}$ から、レベル*i*のウェーブレット係数 $w_i$ とスケーリング係数 $v_i$ を求めるプロセスについて考える<sup>14</sup>。まず、ウェーブレット・フィルタとスケーリング・フィルタを用いて、次のような2つの行列（いずれも $N/2^i \times N/2^{i-1}$ ）を用意する。なお、ここでは、サポート4の例を紹介する。

$$\begin{aligned}
 W_i &\equiv \begin{pmatrix} h_2 & h_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & h_3 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \end{pmatrix}, \\
 V_i &\equiv \begin{pmatrix} g_2 & g_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_4 & g_3 \\ g_4 & g_3 & g_2 & g_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_4 & g_3 & g_2 & g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & g_4 & g_3 & g_2 & g_1 \end{pmatrix}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

これらの行列を用いると、次に示すように、ウェーブレット変換をシンプルに表現することができる。

$$w_i = W_i v_{i-1}, \quad v_i = V_i v_{i-1}. \quad (18)$$

$W_i$ と $V_i$ を縦に連結させて、 $U_i$ という新しい行列（ $N/2^{i-1} \times N/2^{i-1}$ ）を定義すると、さらにコンパクトな表現が可能となる。

$$\begin{pmatrix} w_i \\ v_i \end{pmatrix} = U_i v_{i-1}, \quad U_i \equiv \begin{pmatrix} W_i \\ V_i \end{pmatrix}. \quad (19)$$

これらが(14)式と(15)式に対応していることは、実際に計算してみれば、容易に確認することができる。

14 ウェーブレット係数 $w_i$ とスケーリング係数 $v_i$ は、いずれも、列ベクトルである。

次に、ウェーブレット逆変換の行列表示について考える。その前に、正規直交性の条件（すなわち、(2) (3) (6) (7)式）は、行列表示すると、 $UU^T = U^TU = I$ と書けることに注意しよう（ $U^T$ は $U$ の転置行列、 $I$ は単位行列）。これを使って、(19)式第1式の $i$ を $i+1$ に1レベルだけ前進させ、両辺に左から $U_{i+1}^T$ を掛け合わせると、次の関係式が得られる。

$$U_{i+1}^T \begin{pmatrix} w_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = v_i \quad \Leftrightarrow \quad W_{i+1}^T w_{i+1} + V_{i+1}^T v_{i+1} = v_i \quad (20)$$

これが、行列で表現したウェーブレット逆変換、すなわち、(16)式である。

もっとも、(20)式と(16)式とでは、両者の間にかなり距離がある。そこで、両者の関係を明確化するために、以下に示すように、 $U_{i+1}^T$ に $h_i$ 、 $g_i$ 、 $0$ で構成された列ベクトルを挟み込んで、行列 $U_{i+1}^{0T}$  ( $N/2^i \times N/2^{i-1}$ )を作る。同様に、 $w_{i+1}$ と $v_{i+1}$ についても、 $0$ を適当に織り込んだベクトル $w_{i+1}^0$ と $v_{i+1}^0$ を準備し、縦方向に連結する（長さ $N/2^{i-1}$ ）。

$$U_{i+1}^{0T} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & 0 & 0 & g_1 & g_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & g_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & h_4 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_4 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & h_3 & h_4 & 0 & 0 & \dots & g_3 & g_4 \\ h_4 & 0 & \dots & h_2 & h_3 & g_4 & 0 & \dots & g_2 & g_3 \\ h_3 & h_4 & \dots & h_1 & h_2 & g_3 & g_4 & \dots & g_1 & g_2 \\ h_2 & h_3 & \dots & 0 & h_1 & g_2 & g_3 & \dots & 0 & g_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_{i+1}^0 \\ v_{i+1}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w_{i+1,1} \\ \vdots \\ 0 \\ w_{i+1,N/2^i} \\ 0 \\ v_{i+1,1} \\ \vdots \\ 0 \\ v_{i+1,N/2^i} \end{pmatrix} \quad (21)$$

(21)式の $U_{i+1}^{0T}$ では、奇数列が新たに加えられた列ベクトルで、偶数列が元の行列を構成していた列ベクトルである。これらの行列とベクトルを用いると、(20)式を次のように書き換えることができる。

$$U_{i+1}^{0T} \begin{pmatrix} w_{i+1}^0 \\ v_{i+1}^0 \end{pmatrix} = v_i \quad (22)$$

特に、 $U_{i+1}^{0T}$ を縦に真ん中から2分割し、左右の $N/2^i \times N/2^i$ 行列をそれぞれ $W_{i+1}^{0T}$ 、 $V_{i+1}^{0T}$ と定義すると、さらに、(22)式を次のように書き表すことができる。

$$W_{i+1}^{0T} w_{i+1}^0 + V_{i+1}^{0T} v_{i+1}^0 = v_i \quad (23)$$

これは、(16)式を行列表示したものにほかならない。

### (3) 多重解像度解析

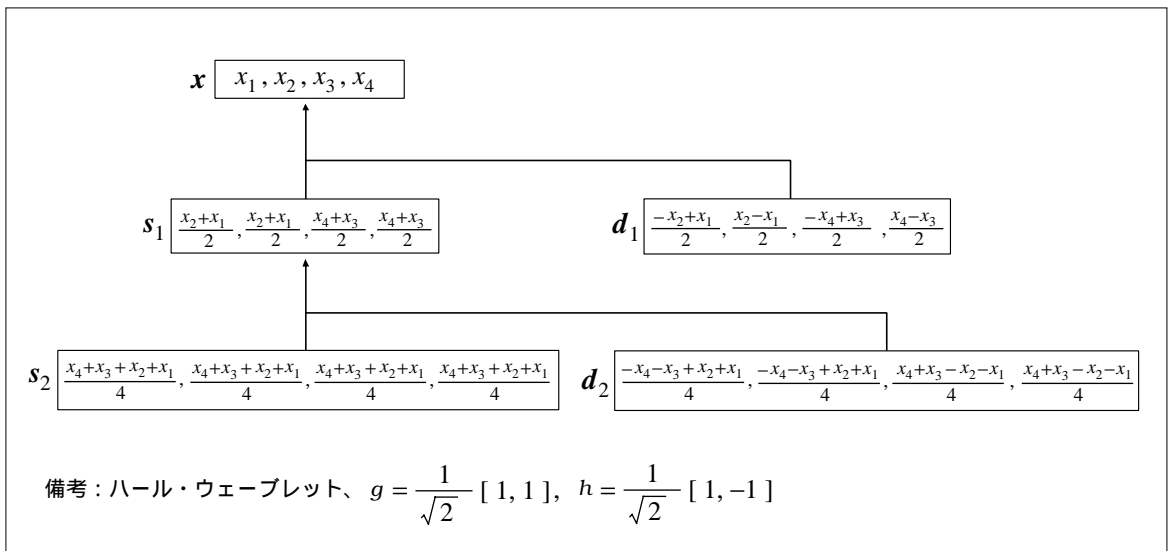
これまでの説明からもわかるように、ウェーブレット変換が行っているのは、大まかにいうと、データの階差と移動平均を何度も繰り返すことである。ここでは、マールによって考案された「多重解像度解析」を解説しながら、こうしたプロセスが持つ実的な意味を考えてみよう。

まず、多重解像度解析のキーとなる、「ウェーブレット・スムーズ」と「ウェーブレット・ディテール」を定義しよう。いま、原系列をウェーブレット変換した結果、多段階の $v_i$ と $w_i$ が求められたとする。このとき、 $w_1$ 以外の全ての $v_i$ と $w_i$ をゼロと置き換え、ウェーブレット逆変換を行う。レベル1のウェーブレット・ディテールとは、こうして得られた原系列と同じサンプル・サイズの時系列であり、 $d_1$ と表記される。図表10にハール・ウェーブレットを用いた場合の結果が示されている。右中段の4個のデータからなる数列が $d_1$ である。また、 $v_1$ 以外の全ての $v_i$ と $w_i$ をゼロと置き換え、ウェーブレット逆変換を行うと、レベル1のウェーブレット・スムーズが得られ、 $s_1$ と表記される（図表10左中段）。同様にして、 $v_i$ に対応してレベル $i$ のスムーズ $s_i$ 、 $w_i$ に対応してレベル $i$ のディテール $d_i$ を求めることができる。

ここで、 $s_2$ に $d_2$ を加えると $s_1$ と等しくなり、 $s_1$ に $d_1$ を加えると原系列 $x$ が得られるという関係が成立していることに注意しよう。 $s_0 \equiv x$ とすると、一般的に、次の式が成立する。

$$s_{i-1} = d_i + s_i \quad (24)$$

図表10 多重解像度解析（ウェーブレット・ディテールとスムーズ）



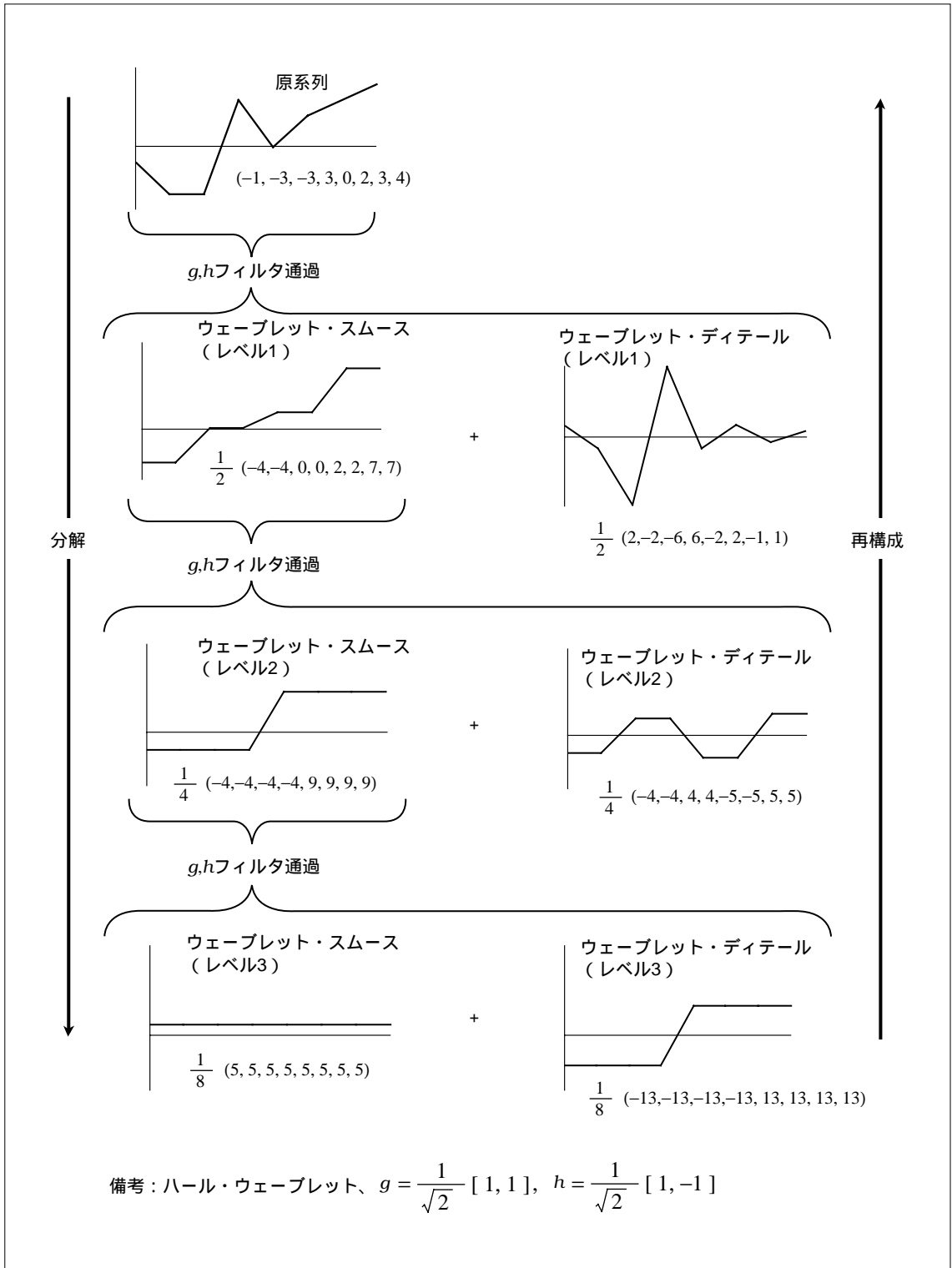
特に、 $r_i = \sum_{k=1}^i d_k$  (「ウェーブレット・ラフ (wavelet rough)」と呼ぶ) とすると、次のような関係が成り立っている。

$$x = r_i + s_i . \quad (25)$$

図表10の例に戻ると、左下段の $s_2$ は、4つのデータから構成されているが、値は全て等しく、最も単調なデータである。これに $d_2$ を加えて得られた $s_1$ には、2つの異なる値が含まれ、多少起伏のあるデータとなった。これにさらに $d_1$ を加えて得られた $s_0$ は、データそのものである。このように、最も粗く単調なデータに、起伏のあるデータを少しずつ積み上げていくことによって、原系列を再現するプロセスは、「多重解像度解析」と呼ばれており、ウェーブレット解析の最も重要な活用法の1つである。

単純な例を用いて、多重解像度解析のイメージをよりビジュアルに理解することとしよう。図表11は、図表9のウェーブレット係数とスケーリング係数から、ウェーブレット・ディテールとスムースをそれぞれ計算したものである。まず、レベル3のウェーブレット・スムース( $s_3$ )をみると、そこには水平のグラフがある。そこからは、原系列がどうやら平均的にプラスであるとわかるだけである。レベル2のウェーブレット・スムース( $s_2$ )は、これに右最下段のレベル3のウェーブレット・ディテール( $d_3$ )を加えて得られる。これをみると、原系列が、全体的に右上がりのトレンドを持っていることがわかる。同様に、次々とウェーブレット・ディテールを付け加えていくと、起伏に富んだ元のデータが再現される。

図表11 多重解像度解析の数値例（ハール）





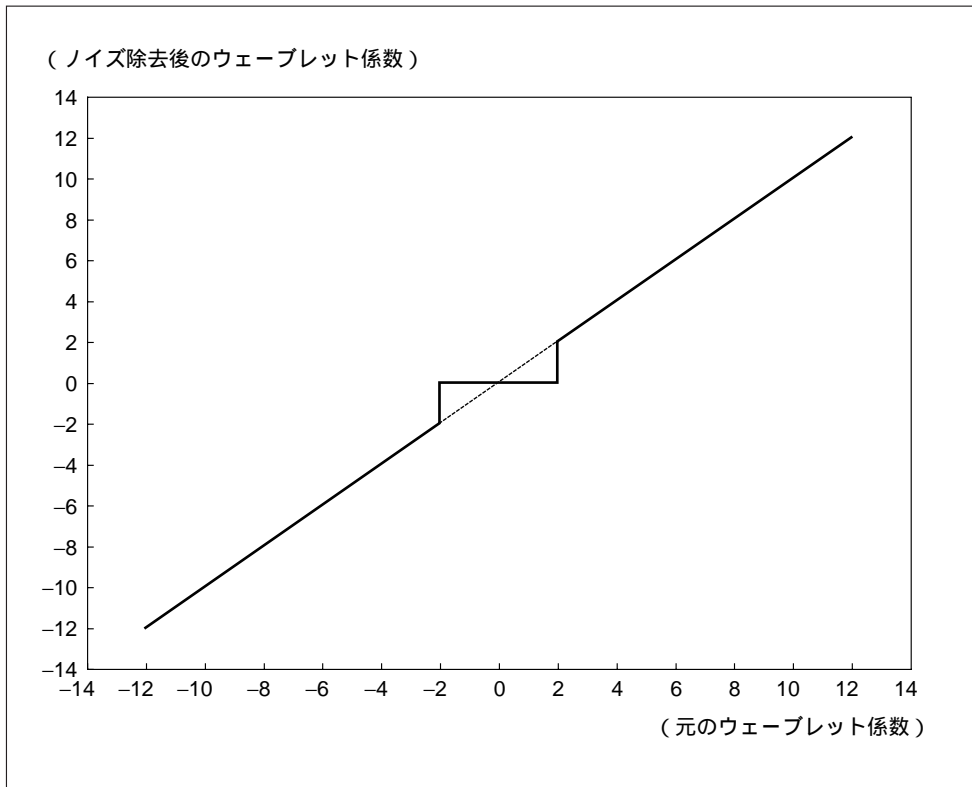
#### (4) ノイズ除去

多重解像度解析を行う際、予め「ノイズ」を取り払って復元した方が、原系列の特徴がより鮮明に把握できることがある。これが「ノイズ除去」と呼ばれる操作である。また、この手法は、経済データを趨勢変動、季節変動、ノイズに分けてそれぞれの要因を探る際の出発点となるべきものでもある。

ノイズの除去にはさまざまな方法があるが、操作手順は基本的に同じである。したがって、ここでは、最も基本的なノイズ除去の手法であるハード・スレシヨールディング (HT: hard thresholding) を紹介しておけば十分である<sup>15</sup>。この手法は、ウェーブレット係数のうち、ある大きさに満たないものをゼロに置き換えるというものである (図表12)。数式的には、次のように表現される。

$$HT(w_{i,j}|\alpha_i) = \begin{cases} w_{i,j} & \text{for } |w_{i,j}| > \alpha_i, \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (26)$$

図表12 ノイズ除去のルール (ハード・スレシヨールディング)



15 このほかにも、ソフト・スレシヨールディング (soft thresholding) といったノイズ除去ルールやユニバーサル・スレシヨールディング (universal thresholding) といった閾値設定方法など、多くのバリエーションが提案されている。詳しくは、Gençay, Selçuk and Whitcher [2002] を参照。

ここで、 $w_{i,j}$ はレベル*i*のウェーブレット係数の*j*番目の要素、 $\alpha_i$ はレベル*i*のウェーブレット係数に対する閾値である。

$\alpha_i = 1.5$  (全ての*i*)として、図表9のデータをHTでノイズ除去してみよう。まず、ウェーブレット係数を(26)式のルールに従って書き直すと図表13のようになる。ここで、 $w_1$ をノイズ除去した $w_1^{HT}$ は、2番目のデータ以外が全て0に変わっている。それ以外のウェーブレット係数は、ノイズ除去前と変わらない。 $w_1^{HT}$ に対応するウェーブレット・ディテール $d_1^{HT}$ は、先に説明した方法によって計算できる。これを $s_1^{HT}(=s_1)$ に加えると、ノイズを除去した新たな系列 $x^{HT}$ (最上段、実線)が得られる(破線は原系列)。

多重解像度解析も、周期が短いものをカットするという意味で、一種のHT型ノイズ除去とみなすことができる。例えば、レベル*i*の解像度を得る場合には、次のように考えているわけである。

$$\alpha_k = \begin{cases} \infty & \text{for } k \leq i \\ 0 & \text{for } k \geq i+1. \end{cases} \quad (27)$$

ノイズ除去でポイントとなるのは、閾値 $\alpha_i$ の選択である。先の例では、分解の程度にかかわらず、1.5という一律の閾値を適用したが、恣意性を排除するためにも、ある程度の指針を作っておくことが望ましい。1つの方法は、ウェーブレット係数の標準偏差を閾値とする方法である。

$$\alpha_i = \sigma(w_i). \quad (28)$$

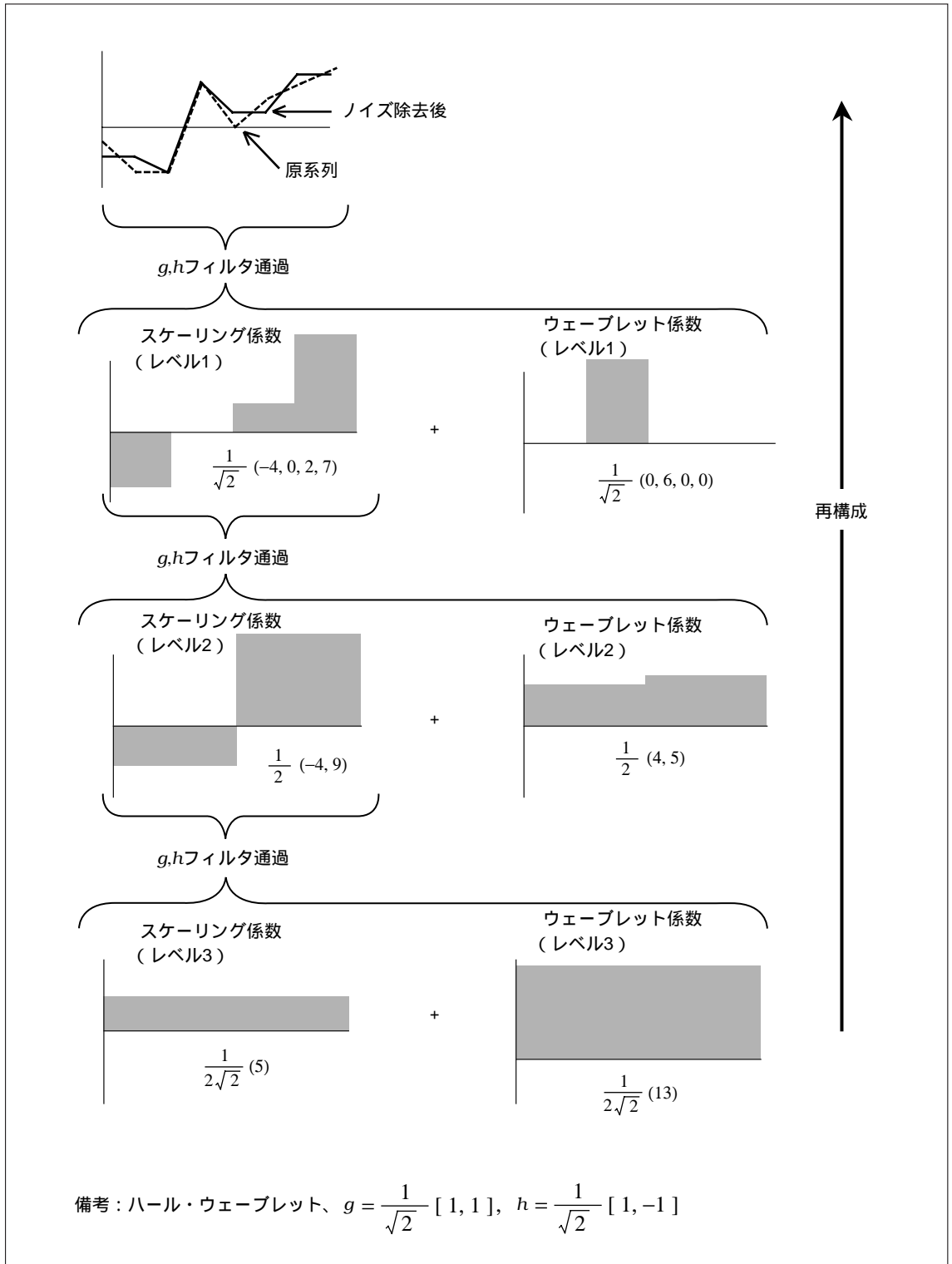
実は、1節で例に挙げた原油価格のノイズ除去(図表5)は、この方法で作られたものである。

## (5) エネルギー分析

先に、ウェーブレット解析とは、原系列の持つ情報を失うことなく、データを趨勢とそこから乖離という2系列に分解する手法の一種であることを指摘した。実際、ウェーブレット変換は、「エネルギー保存の法則」を満たすことが知られている<sup>16</sup>。その他にも、ウェーブレット係数やスケーリング係数は、段階的にエネルギーを分割・合成するための情報を過不足なく備えており、原系列の情報を集約する手段として大変便利である。以下、ウェーブレットを用いたエネルギー分析について、基本的な性質をまとめておこう。

16 Walker [1999]は、ハール・ウェーブレットを例にして、エネルギー保存の法則が実際に成立することを簡単な数式を用いて証明している。

図表13 ノイズ除去の数値例（ハール）



ある時系列 $z$  (列ベクトル) のエネルギーを構成データの2乗和と定義し、 $\|z\|^2$ で表すこととしよう。これは、ベクトルの内積を用いれば、 $\|z\|^2 \equiv z^T z$ と計算することができる。まず、レベル $i$ のスケーリング係数のエネルギーは、レベル $i+1$ のウェーブレット係数のエネルギーとスケーリング係数のエネルギーの和に等しいことを示す。この点は、正規直交行列の性質 ( $UU^T = U^T U = I$ ) と(20)式を用いれば、容易に確認することができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \|v_i\|^2 &= v_i^T v_i = (w_{i+1}^T, v_{i+1}^T) U_{i+1} U_{i+1}^T \begin{pmatrix} w_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} \\ &= w_{i+1}^T w_{i+1} + v_{i+1}^T v_{i+1} = \|w_{i+1}\|^2 + \|v_{i+1}\|^2. \end{aligned} \quad (29)$$

特に、 $v_0 \equiv x$ であることを想起すると、 $i=0$ として、次式が成立する。

$$\|x\|^2 = \|w_1\|^2 + \|v_1\|^2. \quad (30)$$

このように、原系列をウェーブレット分解しても、エネルギーは保存される。これをウェーブレット変換に関する「エネルギー保存の法則」という。

次に、スケーリング係数のエネルギーとウェーブレット・スムーズのエネルギーは等しいことを示そう。(20)式を使って、ウェーブレット逆変換を実行する際に、 $w_i = \dots = w_1 = 0$ とおくと、ウェーブレット・スムーズが次式のように得られる。

$$s_i = V_1^T \dots V_i^T v_i. \quad (31)$$

(6)式と(7)式から $VV^T = I$ なので、ウェーブレット・スムーズのエネルギーは、

$$\begin{aligned} \|s_i\|^2 &= (V_1^T \dots V_i^T v_i)^T V_1^T \dots V_i^T v_i \\ &= v_i^T V_i \dots V_1 V_1^T \dots V_i^T v_i = v_i^T v_i = \|v_i\|^2. \end{aligned} \quad (32)$$

これで、スケーリング係数のエネルギーとウェーブレット・スムーズのエネルギーは等しいことが示された。

最後に、ウェーブレット係数とウェーブレット・ディテールのエネルギーが等しいことを示す。先と同じ議論を繰り返すと、ウェーブレット・ディテールは、次のように書くことができる。

$$d_i = V_1^T \dots V_{i-1}^T W_i^T w_i. \quad (33)$$

(2)式と(3)式から $WW^T = I$ であり、これを $VV^T = I$ とあわせて用いると、ウェーブレット・ディテールのエネルギーは、

$$\begin{aligned} \|d_i\|^2 &= (V_1^T \cdots V_{i-1}^T W_i^T w_i)^T V_1^T \cdots V_{i-1}^T W_i^T w_i \\ &= w_i^T W_i V_{i-1} \cdots V_1 V_1^T \cdots V_{i-1}^T W_i^T w_i = w_i^T w_i = \|w_i\|^2 . \end{aligned} \quad (34)$$

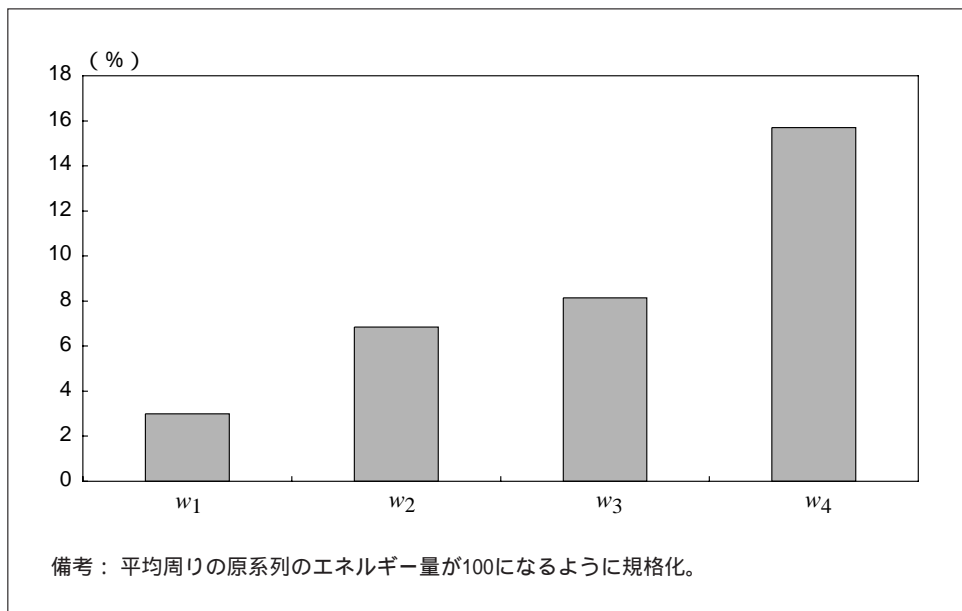
このように、ウェーブレット係数とウェーブレット・ディテールのエネルギーは等しくなる。

原系列の平均的な水準 ( $\bar{x}$ ) に対して、そこからの変動が小さい場合、原系列をそのまま用いると、スムーズのエネルギーがディテールのエネルギーに対して異常に大きくなってしまい、両者の比較が意味を持たなくなってしまうことがある。そこで、本稿では、こうした問題を避けるために、エネルギー分析をする際、平均値周りの原系列 ( $x - \bar{x}$ ) を用いている。これによって、ウェーブレット・ディテールやウェーブレット・スムーズのエネルギーにいかなる影響が及ぶのか、簡単に触れておく。まず、ウェーブレット・ディテールのエネルギーは不変である<sup>17</sup>。したがって、異なるレベルのウェーブレット・ディテールのエネルギー比較は、全く影響を受けない。しかし、原系列のエネルギーは低下するので、その分ウェーブレット・スムーズのエネルギーは低下する。したがって、ウェーブレット・スムーズのエネルギーは、ウェーブレット・ディテールのエネルギーに対して、相対的に低下することとなる。

図表14は、原油価格を平均周りでエネルギー分析した結果である。ウェーブレット・ディテールのエネルギー分布をみると、最も細かいレベル1からレベル4へと、周期が長くなるほどエネルギーが大きくなっていることがわかる。さらに、レベル4までのウェーブレット・ディテールが持つエネルギーの合計は、総エネルギーの3分の1程度に過ぎず、残りはレベル4のウェーブレット・スムーズ（16ヵ月以上持続する変動）によって説明される。このように、原油価格の動きは、少なくとも1年以上継続する比較的大きな波によって支配されている。

17 固定値データをウェーブレット変換すると、(1)式から、ウェーブレット係数は必ずゼロになる。したがって、原系列から平均値を引いても、平均値の部分はゼロ評価されてしまうので、ウェーブレット係数は全く変化しない。このとき、ウェーブレット・ディテールのエネルギーが変化しないことは、(34)式から明らかである。

図表14 原油価格のエネルギー分析



## (6) MODWT

ウェーブレット変換するためには、原系列のサンプル・サイズが偶数である必要がある。一般に、サンプル・サイズが $2^i \times j$ と書けるならば、 $i$ 回までウェーブレット変換を繰り返すことができる<sup>18</sup>。別の言い方をすると、 $i$ 回までウェーブレット変換したいのならば、サンプル・サイズが $2^i$ の倍数である必要がある。これは、実際に経済データを扱う際に厄介な問題を提起する。特に、もともと利用可能なサンプル・サイズが小さい場合には、深刻な制約となり得る。MODWT (maximal overlap discrete wavelet transform) は、こうした弱点を補う手法であり、偶数サンプルに限らず、あらゆるサンプル・サイズの系列に適用することができる。

MODWTのウェーブレット・フィルタとスケーリング・フィルタは、通常のウェーブレット・フィルタとスケーリング・フィルタを使って定義することができる。

$$\tilde{h} = h/\sqrt{2}, \quad \tilde{g} = g/\sqrt{2}. \quad (35)$$

これらのフィルタを用いたMODWTの変換・逆変換は、次のピラミッド・アルゴリズムで実行することができる。なお、 $\tilde{v}_0 \equiv x$ である。

18 サンプル・サイズが $2^i$ という形で書けるのに、 $i$ 回まで分解を行わない場合、または、サンプル・サイズは偶数だが、 $2^i$ という形では書けない場合を指して、「部分ウェーブレット変換」と呼ぶことがある。

MODWTウェーブレット変換

レベル $i-1$ のスケーリング係数 $\tilde{v}_{i-1}$ を、ウェーブレット・フィルタ $\tilde{h}$ に通して、レベル $i$ のウェーブレット係数 $\tilde{w}_i$ を得る。

$$\tilde{w}_{i,t} = \sum_{k=1}^L \tilde{h}_k \tilde{v}_{i-1, \{t-2^{i-1}(k-1)-1 \bmod N\}+1} \cdot \quad (36)$$

レベル $i-1$ のスケーリング係数 $\tilde{v}_{i-1}$ を、スケーリング・フィルタ $\tilde{g}$ に通して、レベル $i$ のスケーリング係数 $\tilde{v}_i$ を得る。

$$\tilde{v}_{i,t} = \sum_{k=1}^L \tilde{g}_k \tilde{v}_{i-1, \{t+2^i(k-1)-1 \bmod N\}+1} \cdot \quad (37)$$

MODWTウェーブレット逆変換

レベル $i+1$ のウェーブレット係数 $\tilde{w}_{i+1}$ をウェーブレット・フィルタ $\tilde{h}$ に通し、レベル $i+1$ のスケーリング係数 $\tilde{v}_{i+1}$ をスケーリング・フィルタ $\tilde{g}$ に通し、2つのアウトプットを足すと、レベル $i$ のスケーリング係数 $\tilde{v}_i$ を得る。

$$\tilde{v}_{i,t} = \sum_{k=1}^L \tilde{h}_k \tilde{w}_{i+1, \{t+2^i(k-1)-1 \bmod N\}+1} + \sum_{k=1}^L \tilde{g}_k \tilde{v}_{i+1, \{t+2^i(k-1)-1 \bmod N\}+1} \cdot \quad (38)$$

ここで、MODWTは、変換時にダウン・サンプリングしないことに注意しよう。したがって、逆変換するとき、アップ・サンプリングもしない。通常のウェーブレット変換は、原系列に含まれている必要十分な情報量を維持していることを想起すると、MODWTによって得られるウェーブレット係数は、余分な情報を含んでおり、非効率な変換法である<sup>19</sup>。この点は、MODWTがサンプル・サイズを選ばないという利点を持っていることに対する代償といえよう。

19 これまでに説明したウェーブレット変換は直交変換であったが、MODWTはもはや直交変換ではない。

### 3. ウェーブレットを通して見た消費者物価

本節では、ウェーブレット解析を利用して、1990年代以降におけるわが国の消費者物価の変動を分析する。消費者物価ベースのインフレ率をみると、数年周期の比較的長い波と数ヵ月周期の短い波が折り重なるようにして変動していることがわかる。それぞれの波は、それぞれ異なる要因によって生成されたと考えられる。とりわけ、何がインフレ率の中長期的な流れを支配しているのかという点は、物価の安定をゴールとする金融政策にとっても、非常に興味深い論点である。

本節では、消費者物価総合（除く生鮮食品）の前月比（年率、%、季節調整済み、消費税調整済み）を用いる。サンプルは、月次で1983年11月～2002年6月の224個である。 $224 = 2^5 \times 7$ なので、最大5回の分解が可能である<sup>20</sup>。最初に、ハール・ウェーブレットを用いて、消費者物価インフレ率をウェーブレット解析してみよう。図表15は、ウェーブレット係数（レベル1～5）とスケーリング係数（レベル5）を時間軸に沿って示したものである。1990年代後半に注目すると、4ヵ月程度の循環を捉えたレベル2のウェーブレット係数が、2000年中に大きく出現している。これは、パソコン価格や被服価格の下落を反映したものと考えられる。また、8ヵ月程度の循環を捉えたレベル3のウェーブレット係数は、1995年に大きなショックがあったことを示しており、当時の円の乱高下を反映していると考えられる。

レベル4のウェーブレット係数は、16ヵ月程度の循環を捉えたものである。これをみると、資産バブルが弾けた1990年を境に、プラスからマイナスへと符号が逆転している。また、三洋証券、北海道拓殖銀行の経営破綻、山一証券の自主廃業など、金融システム不安が顕在化した1997年頃には、再びマイナス方向へのショックが発生している。このように、レベル4のウェーブレット係数は、全体として、景気循環に沿った動きを示している。同じ傾向は、32ヵ月程度の循環を捉えたレベル5のウェーブレット係数にも当てはまる<sup>21</sup>。

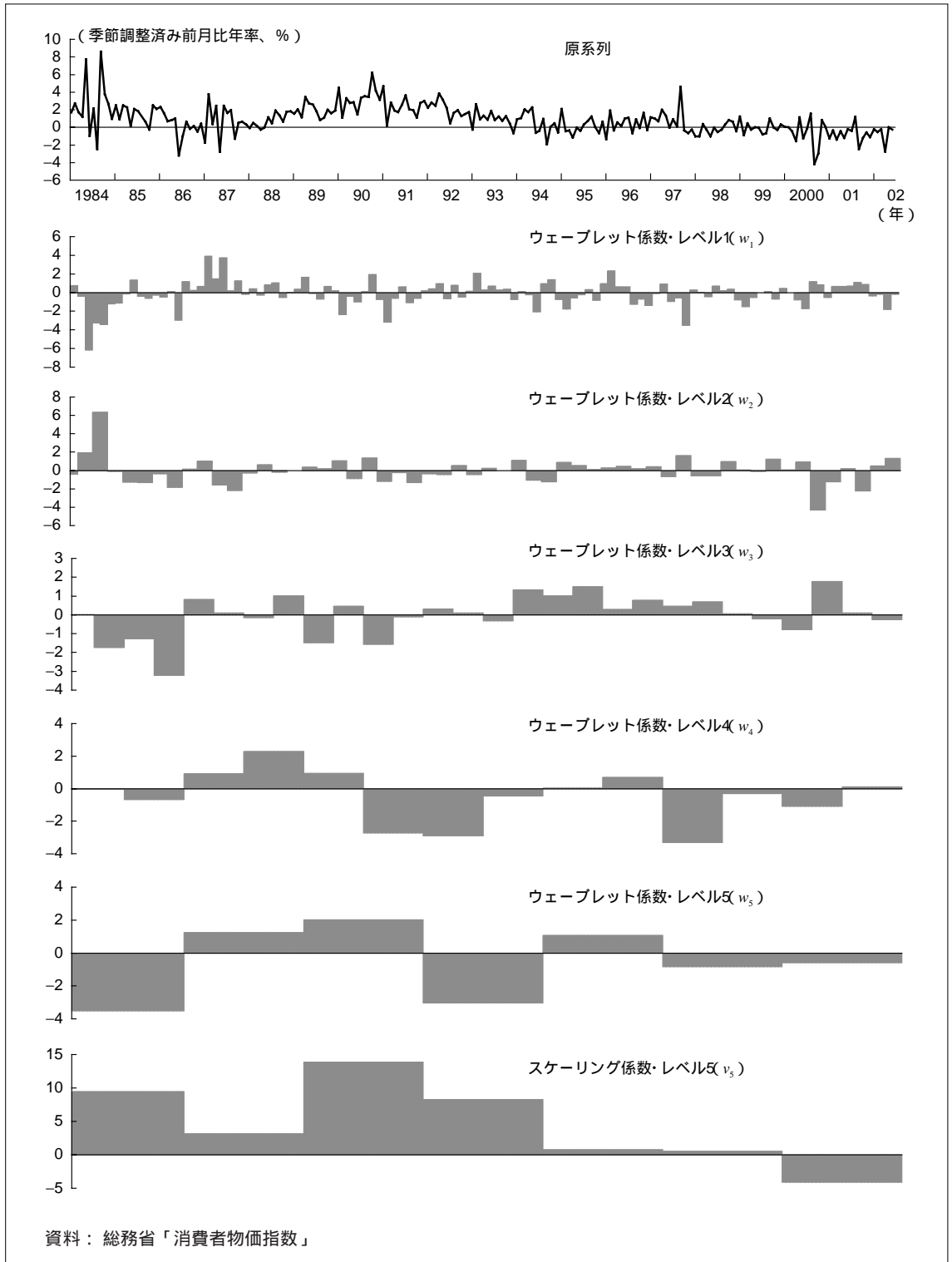
いまの場合、レベル5のスケーリング係数をさらに分解することはできない。ここには、32ヵ月を超える全ての循環とトレンドが混在しているが、ここまで分解が進むと、ほとんどはインフレ率のトレンドとみなしてよい。実際に変換結果をみると、1990年頃をピークに鈍化したわが国経済の成長過程を映し出しているようにみえる。

20 実際には、 $D(4)$ や $D(12)$ を扱うために、原系列のミラー・イメージを原系列に継ぎ足しているため、合計448個のデータを取り扱っている。この場合は、理屈の上では6回の変換が可能であるように思われるかもしれない。しかし、実際に意味のあるデータは224個であることに変わりはなく、したがって、6回以上の変換は意味がない。

21 景気基準日付でも、第10循環（1983年2月の谷）から第12循環（1999年1月の谷）まで、拡張期間・後退期間が平均32ヵ月（全循環64ヵ月）なので、ここでの結果は、こうしたデータとも整合的である。



図表15 消費者物価のウェーブレット係数・スケーリング係数 (ハール・DWT)



ウェーブレット係数とスケーリング係数に対応するウェーブレット・ディテールとスムーズが図表16に描かれている。これらの情報を利用すれば、「多重解像度解析」を行うことができる（図表17）。ここでは、レベル3のウェーブレット・スムーズに対応する解像度3の消費者物価から掲載してある<sup>22</sup>。階段状であるが、インフレ率の趨勢をぴったりと追跡している。解像度を2にまで上げて、2000年の物価の急激な下落が反映される程度であり、解像度を1に上げると、ほぼ原系列に一致する。こうしてみると、消費者物価の趨勢を捉えるには、解像度3（8ヵ月以上の循環）をみていけばよさそうである。

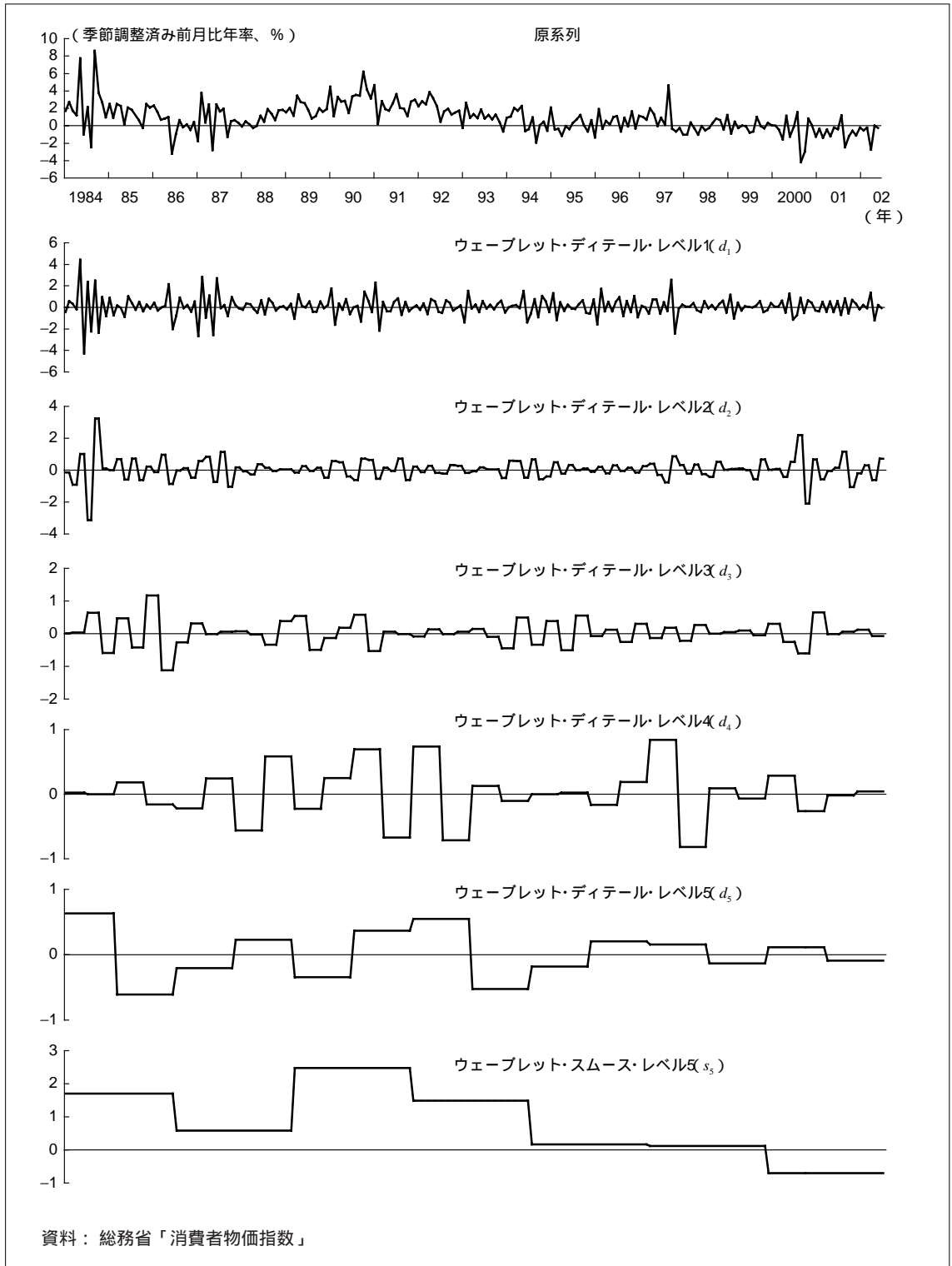
図表18は、解像度1の消費者物価をウェーブレット・スムーズとディテールの積上げグラフで表したものである。一番薄い部分がウェーブレット・スムーズで、濃くなるほど周期の短いウェーブレット・ディテールに対応する。1990年代前半は、周期の長い動きが消費者物価の動きを特徴づけていたが、後半に入ると、ウェーブレット・スムーズの寄与度は小さくなる。これが、2000年以降は、ウェーブレット・スムーズがマイナス方向に出て、レベル2のウェーブレット・ディテールが、攪乱要因として働くという構図になっている。

MODWTを用いて、これまでと同様に消費者物価の分析を行うことができる。図表19は、消費者物価をウェーブレット係数に分解したものである。MODWTは、ダウン・サンプリングを行わないので、分解の程度によらず、ウェーブレット係数やスケーリング係数の数は、常に原系列のサンプル・サイズに等しい。図表20は、これをウェーブレット・ディテールとスムーズで表示したものである。通常のウェーブレット変換に比べ、全体的に滑らかになっている。これらの情報を利用すれば、先と同様、「多重解像度解析」を行うことができる（図表21）。今回は、DWTでみられたような階段状のグラフではなくなっている。図表22は、消費者物価の変動をスケール別に寄与度分解したものである。グラフでは、レベル1のディテールを取り除いているが、それでも、消費者物価の細かい動きをかなり正確に追っている。

インフレ率は、さまざまな要因で変動していると考えられる。フィリップス曲線の考え方に従えば、物価の基調的な推移を規定するのは、需給ギャップであると考えられる。また、輸入物価の変動も、わが国の物価動向に影響を与えていると予想される。おそらく、消費者物価の超短期的な動きは、さまざまなノイズの影響を受けており、これらの要因のみで説明することは難しいであろう。しかし、ある程度の周期性を持った消費者物価変動は、輸入物価や需給ギャップの動向によって規定されると考えられる。どのスケールの消費者物価変動が、輸入物価と需給ギャップのいずれの要因から影響を受けるかは、興味深い問題であり、今後、厳密な議論が展開されることを期待する。

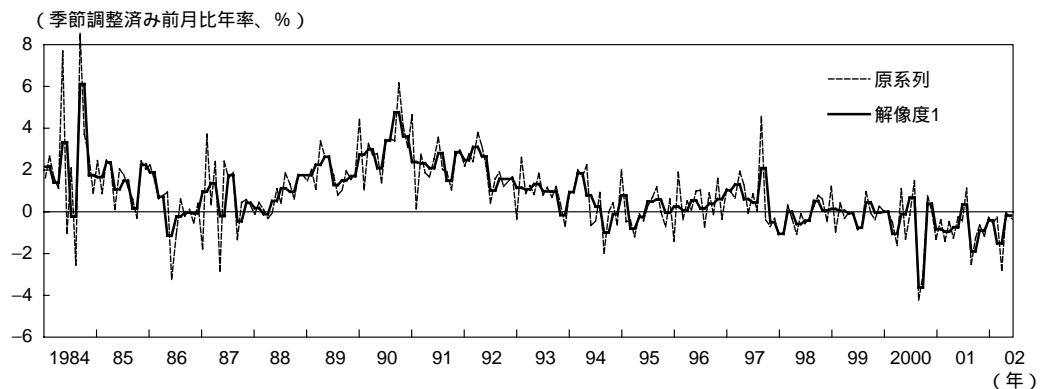
22 レベル3のスムーズとは、レベル5のスムーズにレベル5と4のディテールを加えたもの。

図表16 消費者物価のウェーブレット・ディテールとスムーズ（ハール・DWT）

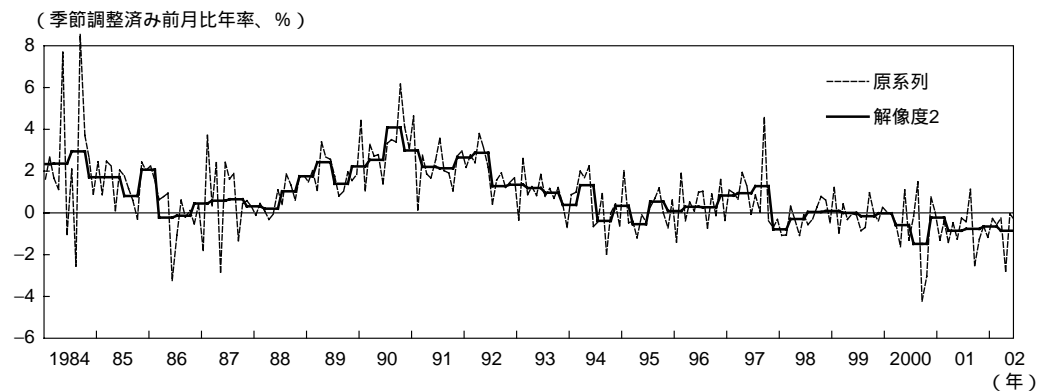


図表17 消費者物価の多重解像度解析（ハール・DWT）

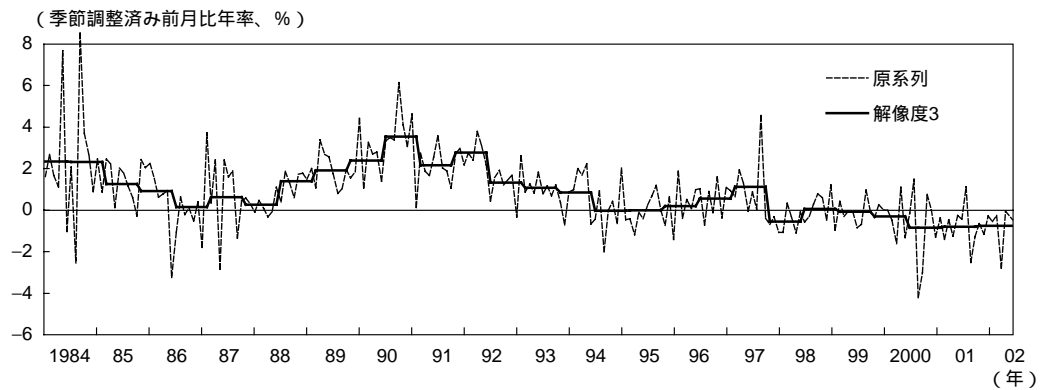
(1) 解像度 1



(2) 解像度 2

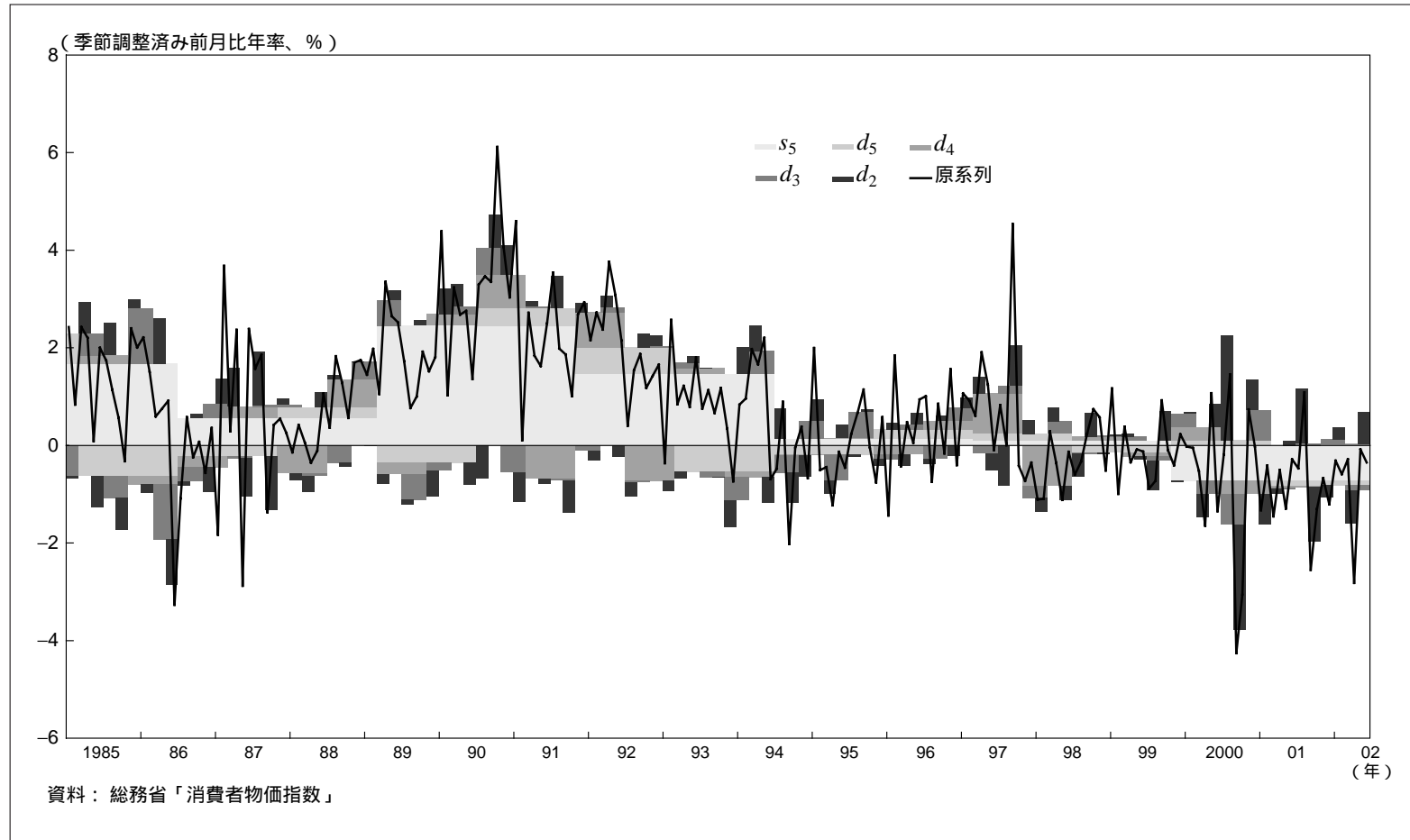


(3) 解像度 3

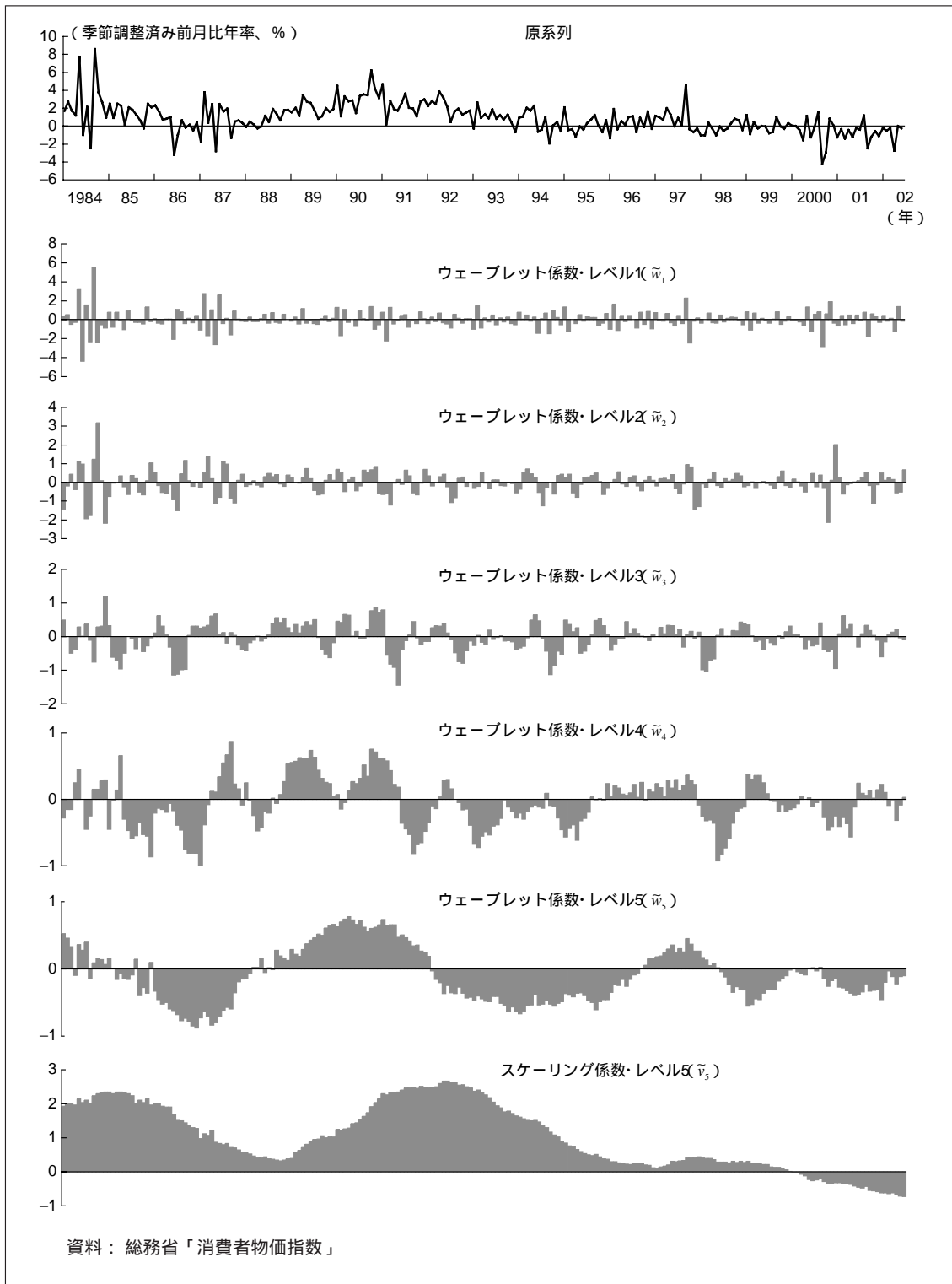


資料：総務省「消費者物価指数」

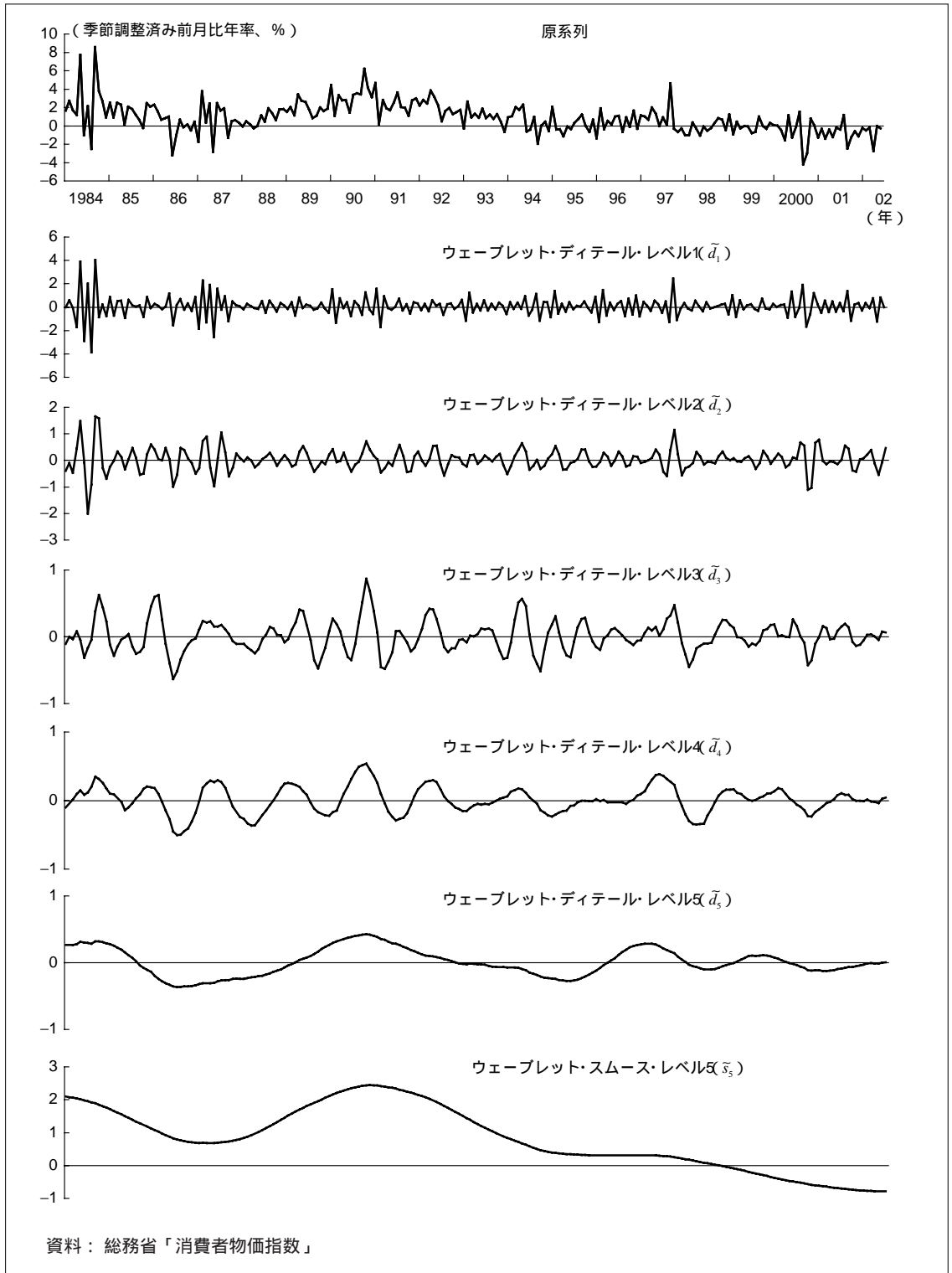
図表18 消費者物価の寄与度分解（ハール・DWT）



図表19 消費者物価のウェーブレット係数・スケーリング係数（ハール・MODWT）



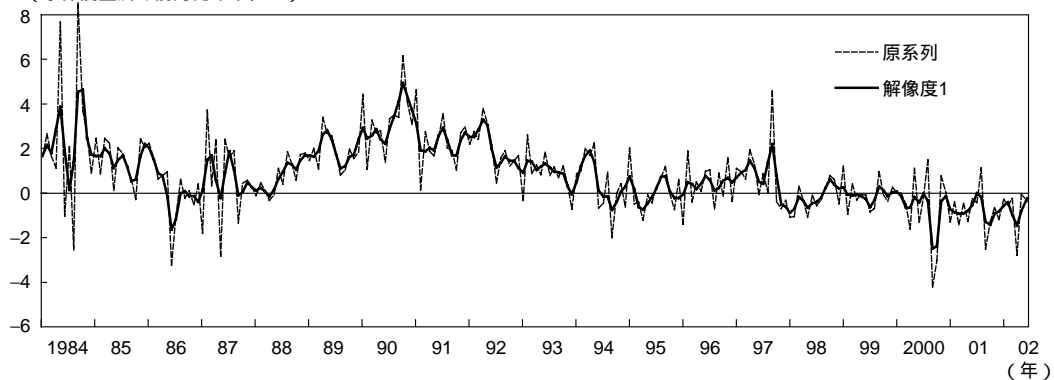
図表20 消費者物価のウェーブレット・ディテールとスムーズ（ハール・MODWT）



図表21 消費者物価の多重解像度解析（ハール・MODWT）

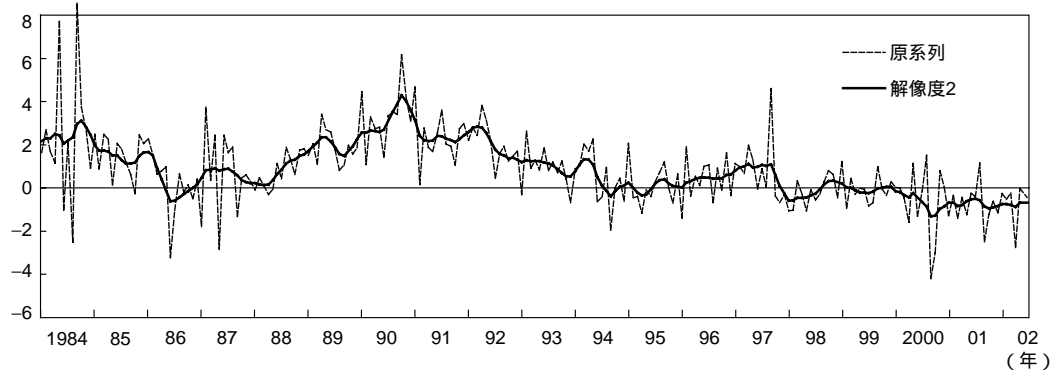
(1) 解像度 1

(季節調整済み前月比年率、%)



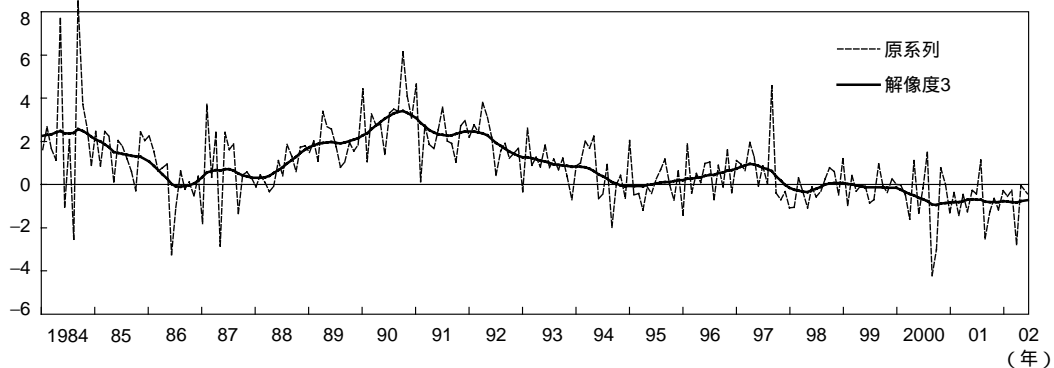
(2) 解像度 2

(季節調整済み前月比年率、%)



(3) 解像度 3

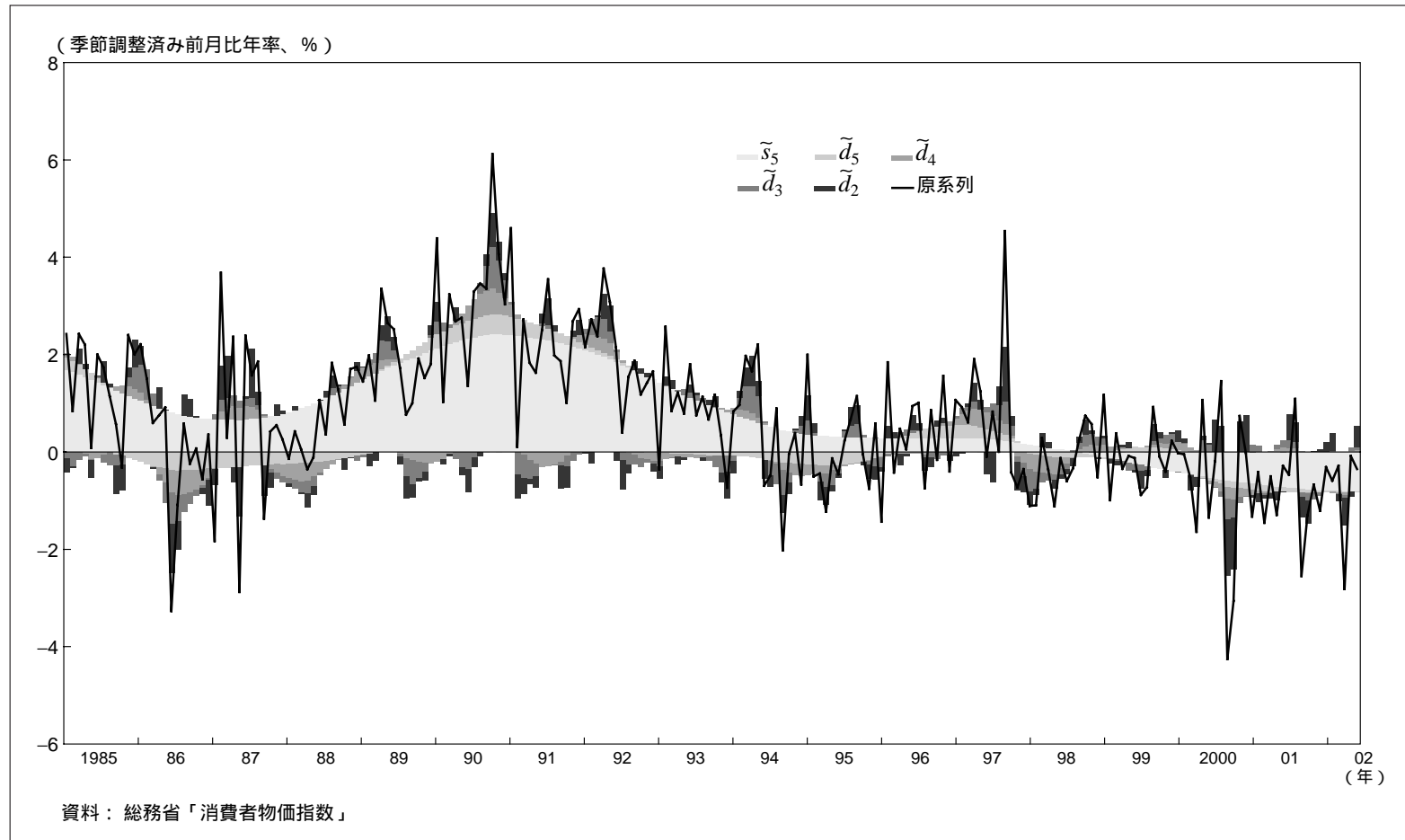
(季節調整済み前月比年率、%)



資料：総務省「消費者物価指数」



図表22 消費者物価の寄与度分解（ハール・MODWT）



## 4. ウェーブレットを通して見た家計消費

本節では、ウェーブレットによる経済分析の2つ目の例として、家計の消費と可処分所得の関係を取り上げる。恒常所得仮説によると、家計は、一時的に所得が増加しても、消費水準を引き上げることはしないが、恒久的な所得の増加に対しては、消費水準を引き上げるはずである。ウェーブレットを用いれば、この仮説を木目細かに実証することができる。具体的には、消費と所得をさまざまな周期変動に分解し、両者の間の傾きと周期の長さを関連づければよい。結果を先取りすると、所得が増加する期間が長くなるほど、消費の所得弾力性が増すことがわかった。これは、恒常所得仮説をよりエレガントな方法で実証するものであり、ウェーブレット解析を用いることによって初めて可能となった<sup>23</sup>。

以下の分析では、消費と所得を関連づける前に、これら2つの時系列データに含まれているトレンド要素をいかにして取り除くかという問題を議論する。これは、一般に、トレンド・データを扱う場合に、「見せかけの相関」を防止する重要なステップであり、ここでの分析に限らず、広範な問題に適用可能である。今後、ウェーブレット解析を利用して、経済分析を行う際に参考にされることを薦める<sup>24</sup>。

### (1) 家計消費と可処分所得のトレンド除去

最初に、1970年代以降の家計消費と所得の推移を『家計調査報告』を用いて確認しておこう。図表23は、家計の消費支出と可処分所得（名目、自然対数値）をプロットしたものである。両者とも、1980年代末にかけて、緩やかな上昇トレンドを辿った後、1990年代以降は、ほぼ横這いで推移している。ここで問題となるのは、消費と所得を直接比較すると、トレンドが「見せかけの相関」を生み出してしまうことである。この問題に対し、従来の時系列分析は誤差修正モデル（error correction model）という形で対処してきた。本稿では、代替的なアプローチとして、ウェーブレットを用いてトレンドを除去する新たな対処法を提案する。

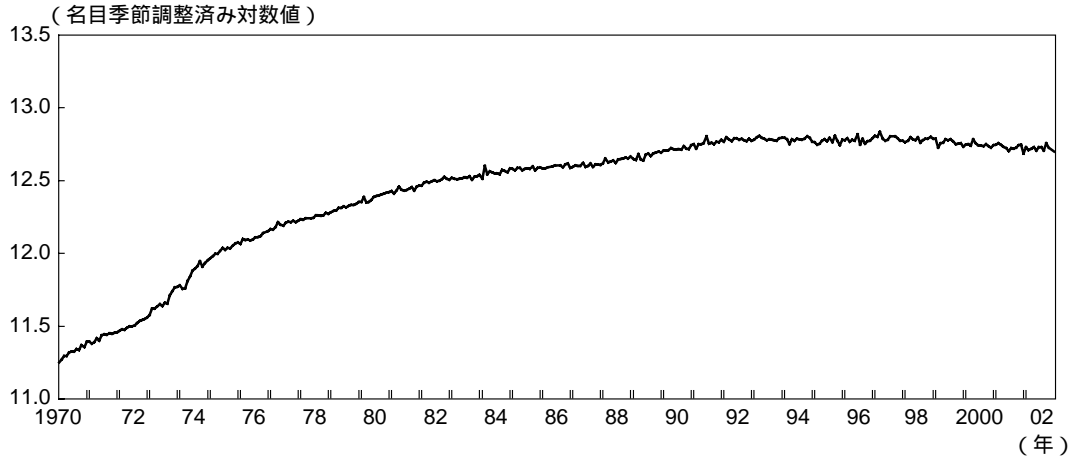
ウェーブレットを用いて、時系列データからトレンドを除去する際、どのウェーブレット・フィルタが相応しいかという問題がある。論点が2つある。トレンドと一口にいても、線形トレンド、2次関数トレンドなど、さまざまな形が存在する。原系列のどのような動きをトレンドとみなせばよいのか。トレンドの種類を決めたとして、どのウェーブレット・フィルタが最も効率よく、対象とするトレンドを抽出できるのか。フィルタの選択を誤ると、トレンド除去が不完全になってしまい、消費水準と所得水準の間にある見せかけの相関を完全に排除できない。

23 同様の分析を行っているものとして、Ramsey and Lampart [1998] がある。

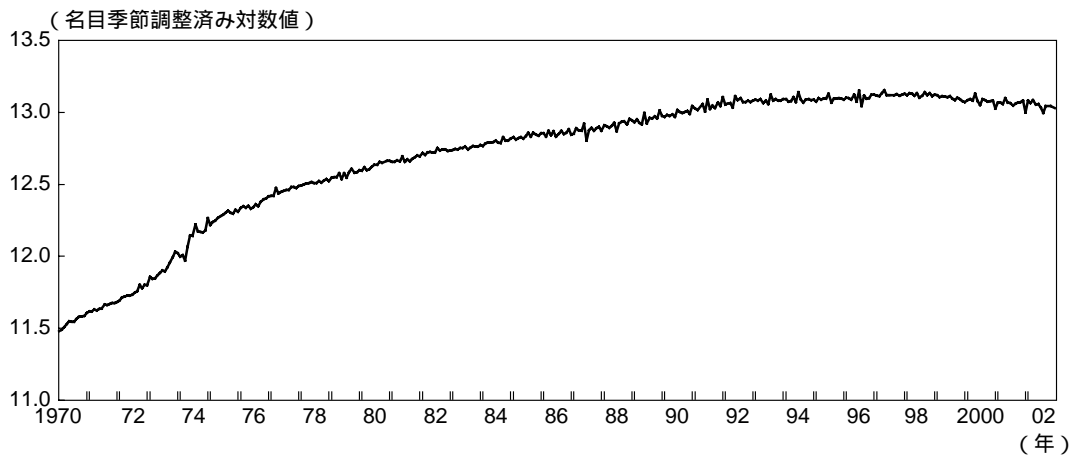
24 ここでは、トレンドが確率的ではなく、確定的であるとして議論を進めているが、トレンドが確率的か確定的かは、先験的に決められる問題ではなく、本来は、単位根検定などを用いて、十分に時系列特性を把握したうえで、分析を進める必要がある。

図表23 家計調査ベースの消費と可処分所得

(1) 消費 勤労者世帯



(2) 可処分所得 勤労者世帯



資料：総務省「家計調査報告」

の最適フィルタの問題を先に議論しよう。第2節で、サポートが4のドビッシー・ウェーブレット $D(4)$ を使うと、線形トレンドがウェーブレット・フィルタを通過できないことを指摘しておいた。この点を具体的に説明しておこう。 $D(4)$ は、(1)式に加え、(10)式を $i=1$ で満たす。

$$h_1+h_2+h_3+h_4=0 \quad (39)$$

$$0 \cdot h_1+1 \cdot h_2+2 \cdot h_3+3 \cdot h_4=0 \quad (40)$$

例えば、ある時系列の一部を取り出したところ、(3, 5, 7, 9)という一次トレンドであったとしよう。これをウェーブレット・フィルタに通すと、ウェーブレット係数はゼロになる。

$$\begin{aligned} & 9 \cdot h_1+7 \cdot h_2+5 \cdot h_3+3 \cdot h_4 \\ & =(-2 \times 0+9)h_1+(-2 \times 1+9)h_2+(-2 \times 2+9)h_3+(-2 \times 3+9)h_4 \\ & =-2 \times(0 \cdot h_1+1 \cdot h_2+2 \cdot h_3+3 \cdot h_4)+9 \times(h_1+h_2+h_3+h_4)=0 \quad (41) \end{aligned}$$

同様に、サポートが12のドビッシー・ウェーブレット $D(12)$ は、(1)式に加え、(10)式を $i=1, \dots, 5$ で満たす。これは、データ変動のうち、5次関数で表現できる部分をトレンドとして抽出できることを意味している。一方、ハール・ウェーブレットは、(10)式を $i=1$ で満たしているわけではなく、したがって、線形トレンドの一部は、ウェーブレット・フィルタを通過してしまう。

次に、何をトレンドと考えるべきかという問題を考えてみよう。図表23をみれば、1970年代から80年代にかけて、消費と所得が線形トレンドを辿っていたことに反論する者はいないであろう。ハール・ウェーブレットは、既に説明したとおり、線形トレンドを除去することができない。このため、トレンド除去手段としては不適格である。この点、ドビッシー・ウェーブレット $D(4)$ は、線形トレンドを除去するように設計されており、トレンド除去手段として合格ラインに達している。

再び図表23に帰ると、消費と所得のトレンドは、1990年代の初頭に屈折しているように見える。 $D(4)$ は、線形部分だけをトレンドとして把握し、こうした非線形な動きを「トレンド」とみなさない。この部分をトレンドとして抽出したいなら、 $D(12)$ のように、データの非線形な動きを追うことのできるウェーブレットが必要となる。ただし、5次関数はかなり微妙な動きを近似できるので、 $D(12)$ を使うと、トレンド除去が行き過ぎる危険性がある。そこで、以下では、 $D(4)$ と $D(12)$ で得られた結果を平等にみていく。いくつかの屈折点を除けば、消費と所得は線形トレンドを辿っており、そうした屈折点に注意を払いさえすれば、 $D(4)$ も十分利用価値があるからである。

実際のデータを用いて、これらの抽象的な議論を具体的に確認しておこう。今回のサンプルは、月次で1970年12月～2002年11月の384個である。 $384=2^7 \times 3$ なので、

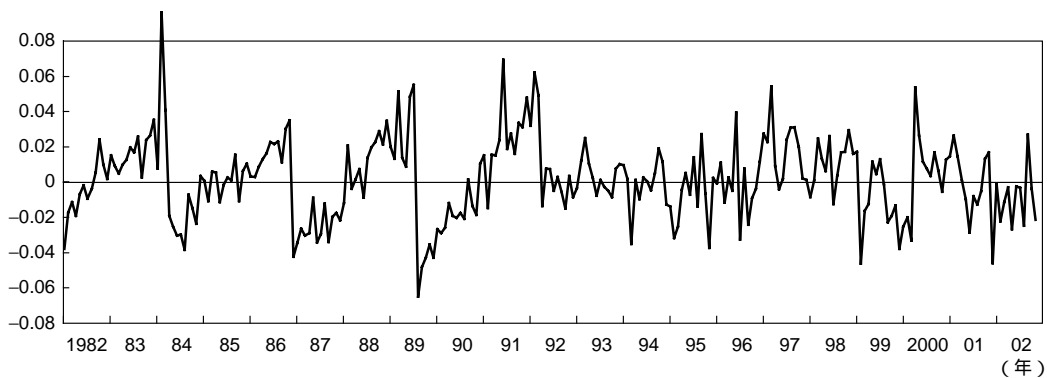
レベル7までの分解が可能であるが、レベル6のウェーブレット係数は6個、レベル7では3個しかなく、後に回帰分析をする際に自由度が少な過ぎるので、5回の分解にとどめた。消費支出の原系列からレベル5のウェーブレット・ラフ(=レベル1~5のディテールの積上げ、すなわち、レベル5のウェーブレット・スムーズを原系列から除去したもの)を図表24に、可処分所得について同様の結果を図表25に示した。消費について、ハール・ウェーブレットを用いた結果をみると(図表24(1))、1990年代の初頭まで、32ヵ月ごとに、上昇しては急落するというパターンを繰り返し、逆に、1990年代末頃から、程度は小さいが、下落しては急激に上昇するというパターンがみられる。これらは、それぞれ、1980年代にかけての上昇トレンドと1990年代末頃からの緩やかな下降トレンドが、ウェーブレット・ディテールに混入した結果である。同様のパターンは、可処分所得をハール・ウェーブレットでトレンド除去した結果にも表れており(図表25(1))、これらの結果を用いると、消費と所得の見せかけの相関を排除できなくなる。

ドビッシェ・ウェーブレットを用いてトレンド除去した結果をみてみよう(図表24(2),(3)、図表25(2),(3))。 $D(4)$ と $D(12)$ のいずれを用いても、ハール・ウェーブレットの場合にみられた規則的なパターンが消滅している。 $D(4)$ と $D(12)$ を比較すると、1991年頃に線形トレンドが屈折している部分では、 $D(4)$ では比較的大きめのこぶがみられるが、 $D(12)$ を用いると、多少小さくなる。しかし、全体として両者に大きな違いはみられない。

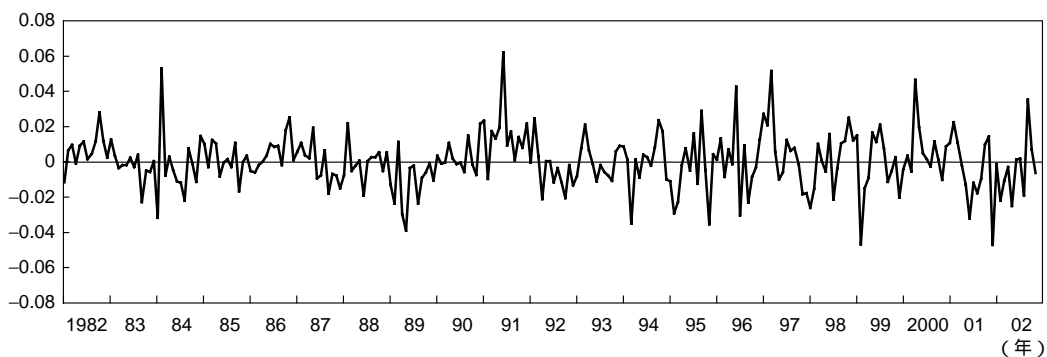
同様の分析結果は、エネルギー分析によって、さらに明確になる。図表26は、消費と所得をエネルギー分析(平均周り)した結果である。ハール・ウェーブレットを用いた結果をみると(図表26(1),(2))、レベル4と5のディテールに溜まったエネルギーが、レベル1~3のディテールに比べてかなり大きい。これは、レベル4と5のディテールの中に、トレンドの一部が混入した結果である。 $D(4)$ を用いると(図表26(3),(4))、レベル4のディテールに溜まったエネルギーはほぼ取り除かれるが、レベル5のディテールに溜まったエネルギーは、減少したとはいえ、相対的には大きい。 $D(12)$ を使えば、レベル5のディテールのエネルギーもかなり低下する(図表26(5),(6))。もっとも、レベル5のウェーブレット・ディテールのエネルギーを低下させることが本当に必要なのか、何をトレンドと考えるかは、究極的には恣意的な問題なのである。

図表24 名目消費のウェーブレット・ラフ

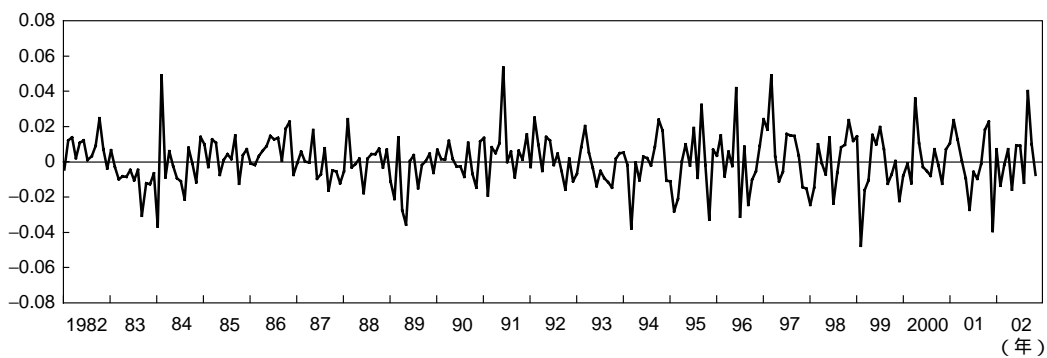
(1) ハール



(2)  $D(4)$



(3)  $D(12)$

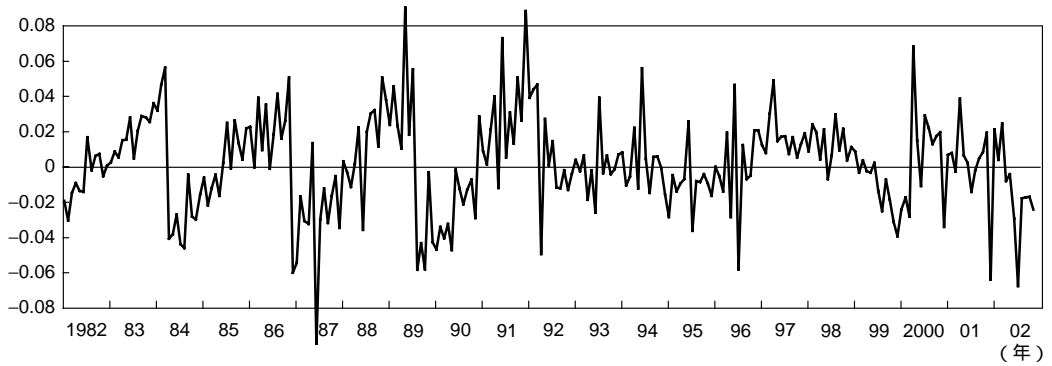


備考：ウェーブレット・ディテール・レベル1～5の和。

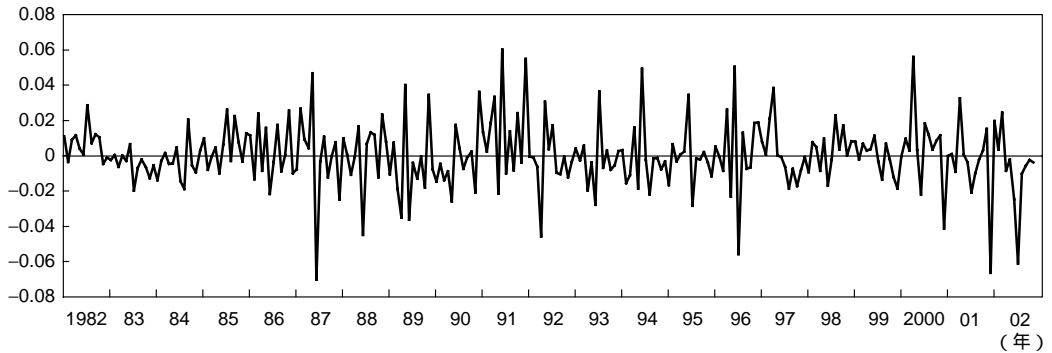
資料：総務省「家計調査報告」

図表25 可処分所得のウェーブレット・ラフ

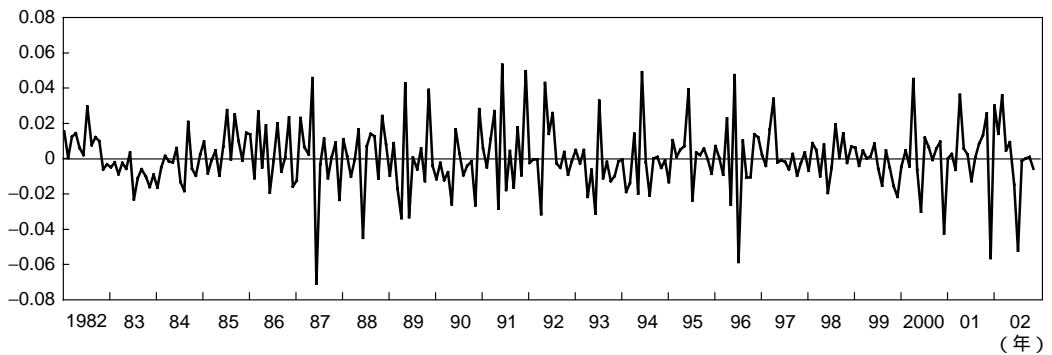
(1) ハール



(2)  $D(4)$



(3)  $D(12)$

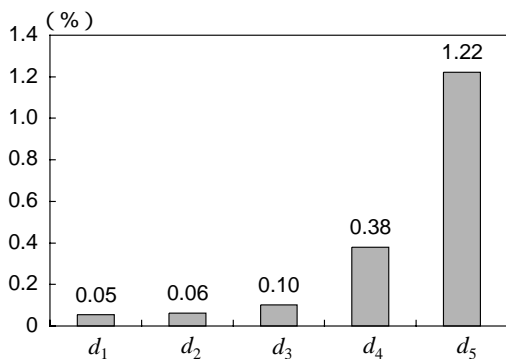


備考：ウェーブレット・ディテール・レベル1～5の和。

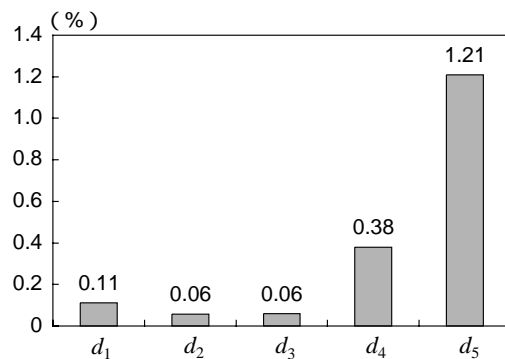
資料：総務省「家計調査報告」

図表26 消費・可処分所得のエネルギー分布

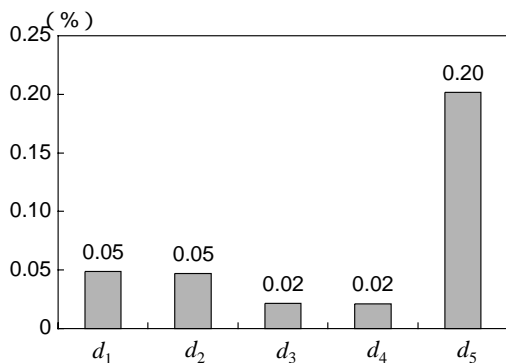
(1) ハール・消費



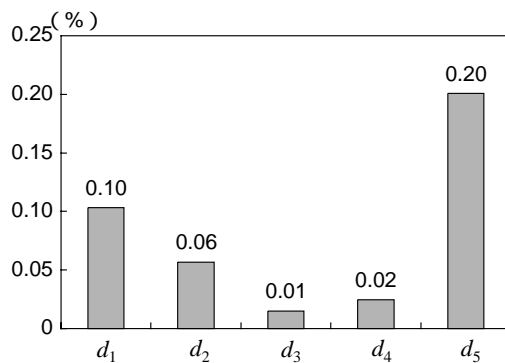
(2) ハール・可処分所得



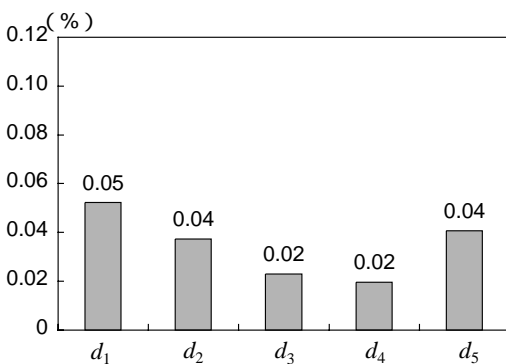
(3)  $D(4)$ ・消費



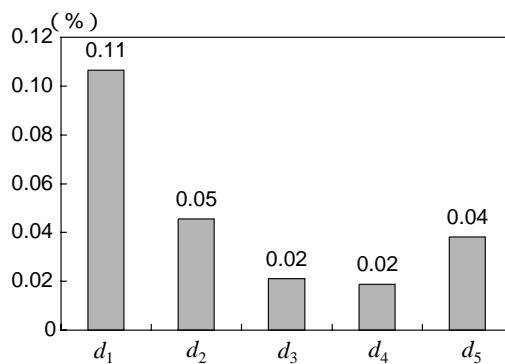
(4)  $D(4)$ ・可処分所得



(5)  $D(12)$ ・消費



(6)  $D(12)$ ・可処分所得



備考：平均周りの原系列のエネルギー量が100になるように規格化。

資料：総務省「家計調査報告」



## (2) スケール別家計消費関数の推計

ここでは、周期（スケール）ごとに家計消費を可処分所得に回帰し、両者がいかなる関係にあるかを分析する。これは、従来の消費関数の分析とよく似ているが、消費データと所得データをいったんウェーブレット変換し、周期ごとに回帰分析を行う点が新しい。これによって、より木目細かな消費関数の分析が可能となる。具体的には、次のような関係を想定する。

$$c_{i,t} = \theta_{0,i} + \theta_{1,i} \cdot y(p)_{i,t} + \eta_{i,t} \quad (42)$$

ここで、 $c_{i,t}$ は消費水準（季節調整済み、自然対数値）のレベル*i*のウェーブレット・ディテールおよびスムースである。 $y(p)_{i,t}$ は、可処分所得（季節調整済み、自然対数値）の*p*期ラグにウェーブレット変換を施し、それを基に、レベル*i*のウェーブレット・ディテールおよびスムースを作成したものである。これは、最初にウェーブレット変換を施し、ウェーブレット・ディテールとスムースを求め、その*p*期ラグをとって得られる $y_{i,t-p}$ とは異なるので注意しよう。ここでは、説明変数が1つのケースを分析したが、複数の説明変数を採用するなど、さらにモデルを拡張することも可能である。

ハール・ウェーブレット、 $D(4)$   $D(12)$ を使った回帰分析の結果が、図表27に掲載されている<sup>25</sup>。まず、決定係数をみて、見せかけの相関の可能性をみておこう。ハール・ウェーブレットを利用した回帰分析の結果をみると、レベル4以上のウェーブレット・ディテールに関する回帰分析の決定係数がほとんど1になっている。これまでの分析とあわせて考えると、ハール・ウェーブレットを使った場合の回帰分析の結果には、見せかけの相関が発生している可能性が濃厚である。 $D(4)$ や $D(12)$ の場合には、理論上、線形トレンドが取り除かれており、見せかけの相関の可能性を心配する必要はほとんどない。なお、 $D(4)$ と $D(12)$ のいずれを使った場合にも、周期が長くなるほど、決定係数が上昇している。特に、レベル3のディテールからレベル4のディテールに移行する際に、決定係数が飛躍的に上昇する。すなわち、周期が短いと、消費と所得の相関は不明瞭だが、周期を長くすると、両者は極めて密接に対応していることがわかる。

本節の冒頭で述べたとおり、ここでの回帰分析は、消費に関する恒常所得仮説の正否を確認するうえで、重要なインプリケーションを持つ。 $\theta_{1,i}$ は、消費の所得弾力性と呼ばれる。ここで、*i*の値が大きくなるほど、所得の増加あるいは減少が持

25 ハール・ウェーブレットを用いた場合、ウェーブレット・ディテール同士で回帰分析を行うと、定数項はゼロになる。しかし、ウェーブレット・スムース同士の回帰分析では、一般に、定数項はゼロにならない。また、サポートが2よりも大きいその他のウェーブレット・フィルタを用いた場合には、ウェーブレット・ディテール同士の回帰分析であっても、定数項は必ずしもゼロとはならない。

図表27 スケール別家計消費関数

	定数項 ( <i>t</i> 値)	可処分所得 係数 ( <i>t</i> 値)	ラグ	決定係数
(1) ハール				
ディテール・レベル1 ( $d_1$ )	0 (0)	0.263 (8.6)	1	0.162
レベル2 ( $d_2$ )	0 (0)	0.518 (14.7)	1	0.362
レベル3 ( $d_3$ )	0 (0)	0.787 (34.4)	1	0.756
レベル4 ( $d_4$ )	0 (0)	0.963 (158.7)	1	0.985
レベル5 ( $d_5$ )	0 (0)	0.916 (238.2)	2	0.993
スムーズ・レベル5 ( $s_5$ )	0.528 (13.1)	0.937 (298.2)	0	0.996
(2) $D(4)$				
ディテール・レベル1 ( $d_1$ )	- (-)	- (-)	-	0.1未満
レベル2 ( $d_2$ )	-0.000 (-0.0)	0.451 (12.1)	0	0.278
レベル3 ( $d_3$ )	0.000 (0.4)	0.433 (13.0)	3	0.307
レベル4 ( $d_4$ )	0.000 (0.5)	0.827 (30.6)	1	0.710
レベル5 ( $d_5$ )	-0.000 (-0.5)	0.927 (111.3)	0	0.970
スムーズ・レベル5 ( $s_5$ )	0.530 (13.4)	0.937 (300.4)	0	0.996
(3) $D(12)$				
ディテール・レベル1 ( $d_1$ )	0.000 (0.0)	0.212 (6.6)	0	0.103
レベル2 ( $d_2$ )	-0.000 (-0.1)	0.392 (10.2)	0	0.213
レベル3 ( $d_3$ )	0.000 (0.1)	0.464 (7.9)	1	0.140
レベル4 ( $d_4$ )	0.000 (0.1)	0.840 (28.2)	1	0.676
レベル5 ( $d_5$ )	0.000 (-0.8)	0.919 (58.7)	0	0.900
スムーズ・レベル5 ( $s_5$ )	0.530 (13.3)	0.937 (298.5)	0	0.996

備考：推計期間は1970年12月～2002年11月。

資料：総務省「家計調査報告」

続する期間が長くなる。恒常所得仮説が真ならば、所得増加の持続期間が長いほど、消費の所得弾力性が大きくなる、すなわち、 $\theta_{1,i}$  は  $i$  の増加関数となるはずである。こうした観点から回帰分析の結果を眺めると、いずれのウェーブレット・フィルタを用いても、分解レベルが高まるにつれて、消費の所得弾力性が上昇していることが観察され、恒常所得仮説が支持されることがわかった。

スケール別の消費の所得弾力性は、景気見通しや経済政策を立案する際に有益な情報となり得る。 $D(4)$ と $D(12)$ の結果をみると、レベル1のディテールにかかるパラメータは無視し得るほど小さい。レベル2と3のディテールにかかるパラメータはほぼ0.5であり、これは、4~8ヵ月程度のスパンで、1%の所得増が発生すると、消費が0.5%程度増加することを意味している。次に、レベル4のディテールにかかるパラメータは0.8、レベル5のディテールだと、パラメータは0.9と、ほぼ1になる。

## 5. ウェーブレットを通してみた円ドル相場

ウェーブレットを用いた分析は、さまざまな方向に展開されている。本節では、最初に、さまざまな議論の基礎となる「ウェーブレット分散」を定義し、その計算方法について解説する。その後、より高度なウェーブレット変換の利用方法として、構造変化検定と長期記憶過程の推計法を紹介する。これらを使った応用例として、アジア通貨危機や金融システム不安を挟んで、円ドル相場の変動がどのように変化したか、実証分析によって明らかにする。

### (1) ウェーブレット分散

ウェーブレット分散とは、ウェーブレット係数の分散のことである。例えば、MODWTで得られたウェーブレット係数を $\tilde{w}_{i,t}$ とすると、「ウェーブレット分散」は、その系列の分散 $\sigma^2(\tilde{w}_{i,t})$ として定義される。多くの場合、 $\tilde{w}_{i,t}$ の平均値 $E(\tilde{w}_{i,t})$ はゼロになるので、ウェーブレット分散は、ウェーブレット係数の2乗の期待値として算出できる<sup>26</sup>。

$$\sigma^2(\tilde{w}_{i,t}) = E(\tilde{w}_{i,t}^2) . \quad (43)$$

ウェーブレット分散が時間を通じて一定なら、それをサンプルから推計する方法の1つは、 $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_{i,t}^2 / N$ とすることである。

26 原系列 $x$ が定常過程の場合、あるいは、多項式トレンドを持っている系列に十分サポートの長いドビッシー・ウェーブレットを用いた場合、ウェーブレット係数の平均がゼロになることが知られている。

ウェーブレット係数を計算する際、原系列のミラー・イメージを原系列につないでいたことを想起されたい。このことは、ウェーブレット係数の端点のいくつかは、架空データの影響を受けていることを意味している。例えば、MODWTを用いて、レベル*i*のウェーブレット係数を1個計算するのに必要な原系列データの個数は $\tilde{L}_i \equiv (2^i - 1)(L - 1) + 1$ である。したがって、架空データの影響を受けていない $\tilde{w}_{i,t}$ は、 $t = \tilde{L}_i, \dots, N$ の場合に限られる。なるべく正確にウェーブレット分散を計算したいならば、これらの情報だけを用いた方がよい。そこで、次のような形で、ウェーブレット分散を計算するのが一般的である。

$$\hat{\sigma}^2(\tilde{w}_{i,t}) = \frac{\sum_{t=\tilde{L}_i}^N \tilde{w}_{i,t}^2}{N - \tilde{L}_i + 1} \quad (44)$$

DWTを使ってウェーブレット分散を算出することもできる。(43)式に対応するのは、 $\sum_{t=1}^{N/2^i} w_{i,t}^2 / (N/2^i)$ である。MODWTの場合と同様に、ウェーブレット係数の端点のいくつかは、架空データの影響を受けている。いま、 $L_i$ を $(L-2)(1-2^{-i})+1$ 以上の最小の整数と定義すると、架空データの影響を受けていない $w_{i,t}$ は、 $t = L_i, \dots, N/2^i$ の場合に限られる。そこで、それらの影響を取り除いて、ウェーブレット分散を計算するには、次のように考えればよい。

$$\hat{\sigma}^2(w_{i,t}) = \frac{\sum_{t=L_i}^{N/2^i} w_{i,t}^2}{N/2^i - L_i + 1} \quad (45)$$

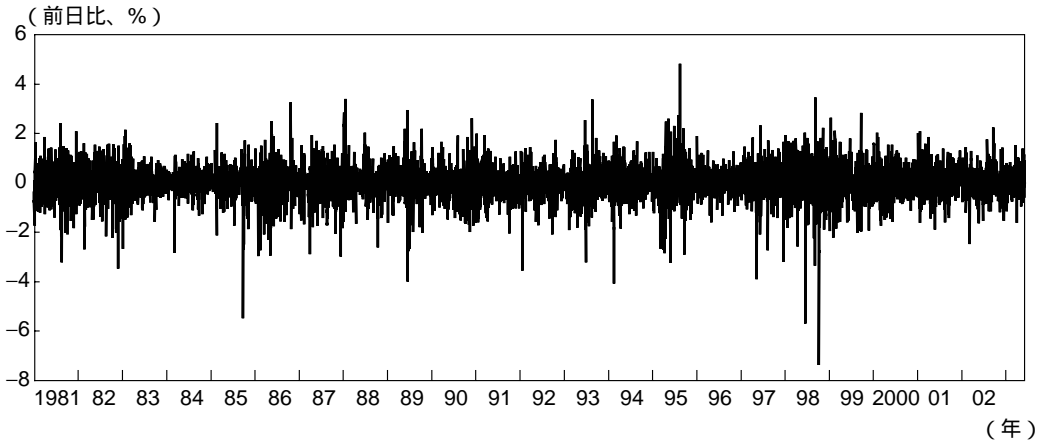
DWTベースの場合、レベルの違うウェーブレット分散を直接比較することはできない。また、レベルは同じでも、DWTベースのウェーブレット分散とMODWTベースのウェーブレット分散を直接比較することにも意味がない。しかし、DWTベースの分散を $\hat{\sigma}^2(w_{i,t})/2^i$ のように調整すれば、異なるレベルの分散を比較することができる。また、MODWTベースの分散と直接比較することが可能になる。

図表28(1)は、円ドル相場の日次変化率(1980年12月29日~2003年6月3日)をプロットしたものである。サンプル・サイズは8,192個であり、最大13回のウェーブレット分解が可能である。もっとも、架空データの影響を排除した調整後ウェーブレット分散を用いるには、分解レベルが上がるにつれて、犠牲となるデータの数が幾何級数的に増加する。しかも、ウェーブレット・フィルタのサポートが大きくなるほど、犠牲は大きくなる。例えば、 $D(12)$ はサポートが12もあり、 $\tilde{L}_i$ の式を用いると、レベル9で5,621個(=  $(2^9 - 1)(12 - 1)$ )のデータが犠牲となり、レベル10だと全てのデータが犠牲となってしまう。したがって、分解レベルを極端に上げないことが重要である。ここでは、レベル7までの分解にとどめることとした。それでも、スケールが128日(=  $2^7$ )と、約4ヵ月にわたる波を取り扱うことが可能である。

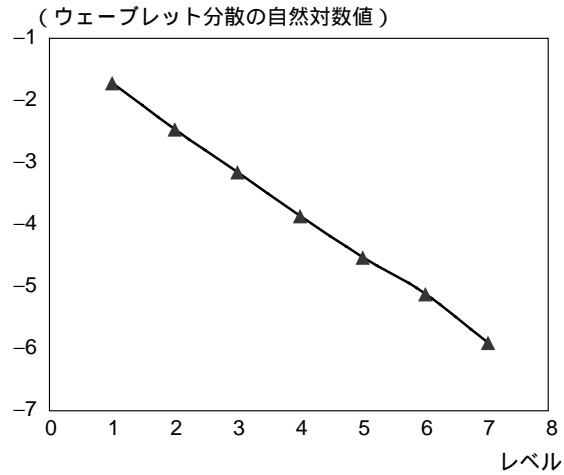
まず、図表28(2)は、 $D(12)$ を用いたMODWTに基づくウェーブレット分散の自然対数値を縦軸、分解レベルを横軸にとって、両者の関係をみたものである。第1

図表28 円ドル相場の変化率とウェーブレット分散

(1) 日次の変化率



(2) ウェーブレット分散



	レベル						
	1	2	3	4	5	6	7
DWTベース	-1.0067	-1.1133	-1.1353	-1.0567	-1.0340	-1.0238	-0.9003
調整後DWTベース	-1.6998	-2.4996	-3.2147	-3.8293	-4.4998	-5.1827	-5.7523
MODWTベース	-1.7237	-2.4685	-3.1569	-3.8617	-4.5355	-5.1204	-5.9040

の特徴として、分解レベルが高くなるにつれて、ウェーブレット分散が減少している。つまり、円ドル相場の変化率を特徴づけているのは、比較的短い周期性を持った動き（高周波）であることがみてとれる。第2に、ウェーブレット分散の対数値と分解レベルは、ほぼ線形関係にあることもわかる。この線形関係は、後述するように、円ドル相場変化率が「長期記憶過程」としてモデル化できる可能性を示唆するものとして、注目に値する。なお、最下段に参考として、ウェーブレット分散を、DWTベース、調整後DWTベース、MODWTベースで計算したものを掲載しておいた。ここから、調整後DWTベースのウェーブレット分散が、MODWTベースとほぼ等しくなることがみてとれる。

## (2) 分散構造変化の検定

為替相場の推移（図表28(1)を参照）を眺めると、いくつかの時点を境に、その変動幅が大きく変化していることに気づく。このことは、計量分析でしばしば暗黙に採用される時系列の分散一定の仮定が満たされていない可能性を示唆している。ここでは、ウェーブレット変換を用いて、原系列の分散が変化しているときに、どの周期（スケール）に、どのタイミングで変化が生じているのかを「反復累積平方和」（ICSS: iterated cumulative sums of squares）と呼ばれる手法（Inclán and Tiao [1994]）を使って検出する。

最初に、帰無仮説を「ウェーブレット分散は不変であった」、対立仮説を「ウェーブレット分散は $k$ 期に変化した」として検定を行う。対立仮説は、分散が1度だけ変化する場合を想定しているが、複数回変化する場合も以下で説明する手法を繰り返し適用することで、同様に分析可能である。

いま、 $p_i = L_i$ 、 $q_i = N/2^i$ として、次のような数値を考えよう。

$$C_{i,k} = \frac{\sum_{t=p_i}^k w_{i,t}^2}{\sum_{t=p_i}^{q_i} w_{i,t}^2} \cdot (k = p_i, \dots, q_i - 1) \quad (46)$$

この統計量は次のような性質を持っていると考えられる。仮定によって、ウェーブレット分散が時間と共に変化している可能性があるため、各時点のウェーブレット分散の推計値は、各時点のウェーブレット係数からしかわからない。つまり、 $\hat{\sigma}^2(w_{i,t}) = w_{i,t}^2$ と考えるよりほかない。この場合、 $C_{i,k}$ の分母は各時点のウェーブレット分散を $p_i$ から $q_i$ まで累積したもの、分子は $p_i$ から $k$ まで累積したものである。したがって、平均的に $C_{i,k}$ と $(k-p_i+1)/(q_i-p_i+1)$ は、帰無仮説のもとでは等しく、対立仮説のもとでは大きく乖離するはずである。

つまり、 $C_{i,k}$ の $(k-p_i+1)/(q_i-p_i+1)$ からの最大乖離幅をみれば、帰無仮説の妥当性をチェックすることができそうである。そこで、Percival and Walden [2000] にならって、次の統計量 $D_i$ を考える。

$$\begin{aligned}
 D_i &= \max(D_i^+, D_i^-), \\
 D_i^+ &= \max_k \left( \frac{k - p_i + 1}{q_i - p_i} - C_{i,k} \right), \\
 D_i^- &= \max_k \left( C_{i,k} - \frac{k - p_i}{q_i - p_i} \right).
 \end{aligned} \tag{47}$$

Inclán and Tiao [ 1994 ] は、 $\bar{D}_i$  が次の近似密度関数に従うことを示した。

$$P(D_i > z) \cong 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \exp[-j^2(q_i - p_i + 1)z^2]. \tag{48}$$

したがって、(47)式から算出された $D_i$ を $z$ に代入すれば、帰無仮説が正しいとした場合の $p$ 値が得られる。

いま、帰無仮説が棄却され、ウェーブレット分散がある時点で変化したという対立仮説が受け入れられたとしよう。その場合の変化点は、 $D_i$ を最大化する $k = k^*$ によって与えられる。しかし、DWTはダウン・サンプリングを繰り返すので、ショックの発生時点を大まかにしか捉えることができず、実際の時間軸でみた場合、どの時点で変化が生じたのかをピンポイントに特定化するのが難しい。その点、MODWTは常に時間軸と対応しているので、変化点の特定化にはこれを用いるのが便利である。いま、 $\tilde{p}_i = \tilde{L}_i$ 、 $\tilde{q}_i = N$ として、 $\tilde{C}_{i,k}$ と $\tilde{D}_i$ を次のように定義する。

$$\tilde{C}_{i,k} = \frac{\sum_{t=\tilde{p}_i}^k \tilde{w}_{i,t}^2}{\sum_{t=\tilde{p}_i}^{\tilde{q}_i} \tilde{w}_{i,t}^2}. \quad (k = \tilde{p}_i, \dots, \tilde{q}_i - 1) \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_i &= \max(\tilde{D}_i^+, \tilde{D}_i^-), \\
 \tilde{D}_i^+ &= \max_k \left( \frac{k - \tilde{p}_i + 1}{\tilde{q}_i - \tilde{p}_i} - \tilde{C}_{i,k} \right), \\
 \tilde{D}_i^- &= \max_k \left( \tilde{C}_{i,k} - \frac{k - \tilde{p}_i}{\tilde{q}_i - \tilde{p}_i} \right).
 \end{aligned} \tag{50}$$

これらの関係を利用すれば、 $\tilde{D}$ を達成する $k = \tilde{k}^*$ をもって、原系列時間軸上における、ウェーブレット分散の変化点と考えることができる<sup>27</sup>。

27 ここで、いっそMODWTで検定を行ってもよいのではないかという疑問が湧く。しかし、DWTによる検定は必要である。なぜなら、ここでの検定方法は、ウェーブレット係数が互いに独立の確率変数であるということ为基础として構成されている。幸い、DWTベースのウェーブレット係数 $w_{i,t}$ はほぼ独立の変数であるとみなすことができるのに対し、MODWTベースのウェーブレット係数 $\tilde{w}_{i,t}$ は強い系列相関を起こしている。このため、MODWTベースのウェーブレット係数は仮説検定には馴染まない。MODWTは、あくまで、時間を特定化するためにだけ用いるべきである。



変化点が複数ある場合も、変化点が1つしかないケースを繰り返し用いれば、取扱い可能になる。

(ステップ1)  $a = p_i$ 、 $\tilde{a} = \tilde{p}_i$ 、 $c = q_i$ 、 $\tilde{c} = \tilde{q}_i$ とする。

(ステップ2)  $w_{i,t}(t = a, \dots, c)$ を使って  $D_i$ を計算する。

(条件1) 帰無仮説が棄却されたら、対応する  $k$ を  $c$ とする。また、 $\tilde{w}_{i,t}(t = \tilde{a}, \dots, \tilde{c})$ を用いて、 $\tilde{D}_i$ を最大化する  $k$ を  $\tilde{c}$ とする。ステップ2の最初へ戻る。

(条件2) 帰無仮説が受け入れられたら、 $c$ と  $\tilde{c}$ を変化点  $b$ 、 $\tilde{b}$ として吐き出す。 $a = c$ 、 $\tilde{a} = \tilde{c}$ 、 $c = q_i$ 、 $\tilde{c} = \tilde{q}_i$ として、ステップ2の最初へ戻る。

(ステップ3) 変化点が  $m$ 個であったとする。これらを変化点として再チェックするため、 $b$ 、 $\tilde{b}$ の  $j$ 番目の要素を  $b_j$ 、 $\tilde{b}_j$ とし、 $w_{i,t}(t = b_{j-1}, \dots, b_{j+1})$ を使って  $D_i$ を計算する(ただし、 $b_0 \equiv p_i$ 、 $b_{m+1} \equiv q_i$ )

(条件1) 帰無仮説が棄却されたら、ステップ3の最初へ戻って、 $j+1$ 番目の要素を再チェックする。

(条件2) 帰無仮説が受け入れられたら、 $b_j$ と  $\tilde{b}_j$ を変化点から除去して、ステップ3の最初へ戻る。

先に触れたように、円ドル相場の変化率は、時期によって振幅の激しさに違いがあるように見える。そこで、これまでに説明したICSS法を用いて、分散構造変化を統計的に検出してみよう。有意水準を5%として、ウェーブレット・フィルタ  $D(12)$ を用いた結果が、図表29にまとめられている。例えば、上から4行目を読むと、レベル1の構造変化が、DWTベースのウェーブレット係数で数えて520個目、MODWTベースで数えて1,040個目、原系列の時間軸で1983年11月3日に発生している。そのときの  $p$ 値は0.03%であり、5%有意水準で構造変化が発生しなかったという帰無仮説が棄却される。また、1983年11月3日から次の構造変化点である1984年3月10日までのウェーブレット分散は、DWTベースで0.06、調整後DWTベースで0.03、MODWTベースで0.03である。

図表29をみると、比較的周期性が短い部分で頻繁に構造変化が起こっていたのに対し、周期性が長い部分(例えば、レベル4)では、1990年代後半に構造変化が集中していたことがわかる。サンプル全体を図表30(1)のように6期間に分け、この点をさらに詳しくみてみると、「超円高調整」<sup>28</sup>(1995年5月13日～1996年2月12日)、「アジア通貨危機」<sup>29</sup>(1997年7月6日～1998年9月7日)、「金融システム不安」<sup>30</sup>(1998年9月7日～1999年6月17日)という3つの時期にウェーブレット分散が著しく増大していたことがわかる。しかし、その後、ウェーブレット分散は、ほぼ通貨危機前の水準まで低下している。

28 1995年4月19日、円ドル相場が、79.2円/ドルをピークに急落。

29 1997年7月2日、タイ・パーツが変動相場制に移行。

30 1998年10月23日に日本長期信用銀行が、12月13日に日本債券信用銀行が、それぞれ一時国有化決定。

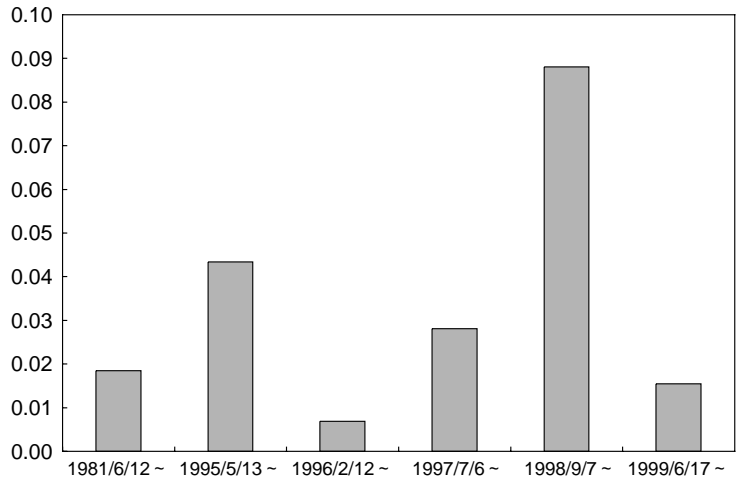


図表29 円ドル相場変化率の構造変化検定

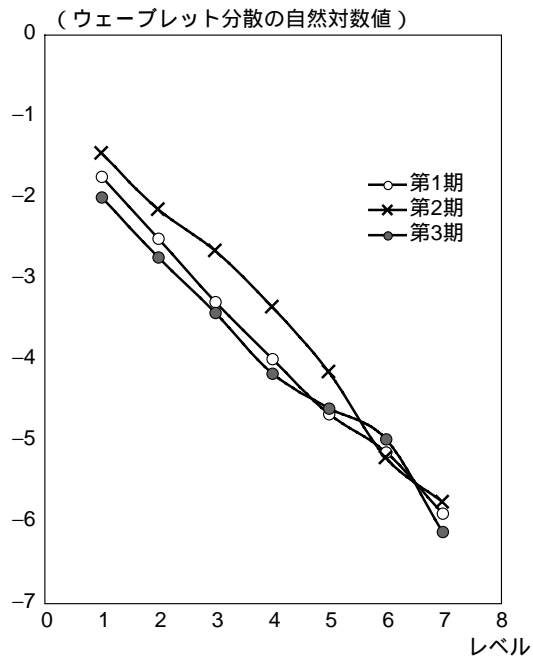
レベル	変化点			p 値(%)	ウェーブレット分散		
	DWT	MODWT	日付		DWT	調整後DWT	MODWT
1	6	12	1981/1/9	-	0.44	0.22	0.21
	328	656	1982/10/15	1.07	0.79	0.40	0.35
	409	819	1983/3/27	0.00	0.18	0.09	0.09
	520	1,040	1983/11/3	0.03	0.06	0.03	0.03
	584	1,168	1984/3/10	0.29	0.20	0.10	0.10
	866	1,732	1985/9/25	0.00	2.99	1.50	1.35
	874	1,749	1985/10/12	1.00	0.48	0.24	0.23
	1,293	2,587	1988/1/28	0.34	0.36	0.18	0.18
	1,893	3,787	1991/5/12	0.00	0.20	0.10	0.10
	2,282	4,565	1993/6/28	0.00	1.47	0.74	0.69
	2,294	4,588	1993/7/21	0.45	0.39	0.20	0.20
	2,330	4,661	1993/10/2	3.12	0.20	0.10	0.09
	2,395	4,790	1994/2/8	0.00	0.75	0.38	0.35
	2,436	4,872	1994/5/1	0.00	0.19	0.09	0.10
	2,593	5,186	1995/3/11	0.00	0.96	0.48	0.46
	2,701	5,403	1995/10/14	0.00	0.23	0.12	0.10
	2,771	5,543	1996/3/2	4.34	0.14	0.07	0.07
	2,991	5,983	1997/5/16	0.00	0.51	0.25	0.25
	3,189	6,379	1998/6/16	0.00	1.37	0.69	0.57
	3,255	6,511	1998/10/26	0.00	0.43	0.21	0.22
3,510	7,021	2000/3/19	0.00	0.24	0.12	0.12	
2	9	34	1981/1/31	-	0.39	0.10	0.11
	209	836	1983/4/13	0.00	0.17	0.04	0.04
	434	1,739	1985/10/2	0.07	0.33	0.08	0.08
	1,573	6,292	1998/3/21	0.00	0.76	0.19	0.21
	1,677	6,711	1999/5/14	0.04	0.38	0.09	0.09
	1,779	7,116	2000/6/22	1.22	0.23	0.06	0.05
3	10	78	1981/3/16	-	0.29	0.04	0.04
	785	6,281	1998/3/10	0.00	0.84	0.10	0.12
	862	6,903	1999/11/22	0.00	0.20	0.03	0.03
4	11	166	1981/6/12	-	0.28	0.02	0.02
	328	5,249	1995/5/13	1.26	0.80	0.05	0.04
	345	5,524	1996/2/12	0.01	0.13	0.01	0.01
	377	6,034	1997/7/6	0.93	0.45	0.03	0.03
	403	6,462	1998/9/7	1.10	1.71	0.11	0.09
	421	6,745	1999/6/17	0.00	0.28	0.02	0.02
5	11	342	1981/12/5	-	0.36	0.01	0.01
6	11	694	1982/11/22	-	0.36	0.01	0.01
7	11	1,398	1984/10/26	-	0.41	0.00	0.00

図表30 円ドル相場変化率のウェーブレット分散の変化

(1) レベル4のウェーブレット分散の推移



(2) レベル別・期間別ウェーブレット分散



レベル4以外のウェーブレット分散の変化について確認するために、超円高調整期までを第1期、金融システム不安解消までを第2期、それ以降を第3期として、ウェーブレット分散をスケールごとに推計してみた。推計結果は、図表30(2)のとおりである。これをみると、スケールが小さい部分(レベル1~5)では、明らかに、第2期のウェーブレット分散が増大している。これに対し、スケールが大きい部分では(レベル6と7)では、ウェーブレット分散はほぼ不変であった。また、第1期と第3期では、ウェーブレット分散の構造がほとんど同じであることも注目値する。このように、1990年代後半の超円高調整、アジア通貨危機、金融システム不安は、円ドル相場の変化のうち、比較的周期性の短いものに影響を与えたものの、周期性の長い動きには影響を与えていない。しかも、1999年6月17日以降、そうした影響は解消される方向にあり、今では、1990年代前半までの円ドル相場の変動プロセスに復している。

### (3) フラクショナル・インテグレーション・プロセスの推計

円高調整期と金融システム不安に挟まれた第2期、円ドル相場の変化率が変調をきたしていたとして、それは時系列プロセスのどのような変化として記述できるのだろうか。ここでは、円ドル相場変化率を「フラクショナル・インテグレーション・プロセス」としてモデル化し、プロセスを規定するパラメータを期間ごとに推計することによって、構造変化の内容を探ることを試みる。

いま、 $B$ をラグ・オペレータとすると(すなわち、 $Bx_t = x_{t-1}$ )「フラクショナル・インテグレーション・プロセス」は、次のような形で表現することができる。

$$(1-B)^\delta x_t = \epsilon_t \quad (51)$$

ここで、 $\delta$ は $-1/2 < \delta < 1/2$ を満たす実数、 $\epsilon$ はホワイト・ノイズである。これは、 $\delta$ が整数の場合には、ボックス=ジェンキンス流の時系列モデルそのものであり、したがって、フラクショナル・インテグレーション・プロセスは、これを $\delta$ が実数のケースに拡張したものと考えることができる。

$0 < \delta < 1/2$ のとき、 $x$ は「長期記憶過程」と呼ばれ、自己回帰過程と比較して、ショックの効果の減衰速度が非常に遅いのが特徴である。また、 $\delta = 0$ のとき、 $x$ はホワイト・ノイズになる。最後に、 $-1/2 < \delta < 0$ のとき、 $x$ は「短期記憶過程」と呼ばれ、この場合、ショックの効果は持続的ではない。このように、パラメータ $\delta$ の値をみれば、それによって $x$ の時系列特性がわかる。

フラクショナル・インテグレーションについての詳細な議論は、Hosking [1981]などに譲ることとして、ここでは、次の性質を理解すれば足りる。 $x$ をパラメータ $\delta$ のフラクショナル・インテグレーション・プロセスとする。このとき、次の近似式が成立する。

$$\sigma^2(\tilde{w}_{i,t}) \cong C(2^{i-1})^{2\delta-1} . \quad (52)$$

ここで、 $C$ は定数値である。いま、ウェーブレット変換を繰り返し、 $J$ 個のウェーブレット分散が得られたとする。これを被説明変数として、次の回帰式を推計しよう。

$$\ln(\sigma^2(\tilde{w}_{i,t})) = \beta_0 + \beta_1 \ln(2^{i-1}) + \eta_i . \quad (i=1, \dots, J) \quad (53)$$

ここから得られた推計結果を用いれば、フラクショナル・インテグレーション・パラメータを  $\delta = 1/2(\beta_1 + 1)$  という形で間接的に推計することができる。

先に算出したレベル7までのウェーブレット分散を用いて、フラクショナル・インテグレーション・パラメータを推計した結果が図表31である。最上段が、全サンプルを用いて推計した結果であり、第2～4行目はそれぞれ超円高調整期以前（第1期）、超円高調整期から金融システム不安まで（第2期）、金融システム不安解消以降（第3期）について、 $\delta$ を推計したものである。右端の列は、 $\delta$ の推計値の標準誤差である<sup>31</sup>。推計結果をみると、超円高調整期から金融システム不安の時期を除く第1期と第3期においては、円ドル相場変化率は長期記憶過程として描写することができそうであり、1999年6月17日以降は、長期記憶過程としての性格がさらに強まっている。一方、超円高調整期から金融システム不安に挟まれた第2期においては、円ドル相場変化率は短期記憶過程として描写されることがわかった。このように、1990年代後半の混乱期を通じて、円ドル相場の動きはより粘着性の薄いものであったことがわかる。もっとも、これらの結果は、統計的に有意といえるほど強いものではない。

図表31 円ドル相場変化率のフラクショナル・インテグレーション・モデルの推計

	期間	$\delta$ の推計値	標準誤差
全期間	1980/12/29 ~ 2003/6/3	0.0048	0.0063
第1期	1980/12/29 ~ 1997/7/6	0.0079	0.0137
第2期	1997/7/6 ~ 1999/6/17	-0.0278	0.0223
第3期	1999/6/17 ~ 2003/6/3	0.0360	0.0251

31  $Var(\delta) = 1/4 Var(\beta_1)$ として算出。

## 6 . 結び

本稿では、近年、応用科学の分野で注目を集めつつあるウェーブレット解析について、実践的な解説を行い、あわせて、経済学における応用可能性を探った。不規則な変動を示す経済データを時間周波数解析することを可能にするウェーブレット解析は、経済学の分野でも広く応用できる潜在性を有している。

本稿では、実際のデータを用いて、ウェーブレット解析が、現実の経済問題を取り扱ううえで、有益な示唆を与えてくれることを示した。消費者物価を多重解像度解析した結果は、物価変動の基調を捉える際、8ヵ月以上の波を観察しておけば、大体の趨勢を捉えることができることを示唆している。

また、スケール別回帰分析によって家計消費関数を推計したところ、所得の増加が持続する期間が長いほど、消費の所得弾力性が上昇することがわかった。これは、家計消費は、一時的な所得増加に対しては反応しないが、恒久的な増加に対しては反応するという恒常所得仮説を支持するものである。

さらに、ウェーブレット分散を計算することによって、アジア通貨危機や金融システム不安の頃、円ドル相場の日次変動が一時的に構造変化に見舞われていた可能性を検出することができた。また、為替相場変動をフラクショナル・インテグレーション・プロセスとして推計したところ、超円高調整期、アジア通貨危機、金融システム不安を経験した1990年代後半、日次変化率が長期記憶を失っていたかもしれないこともわかった。

もちろん、ウェーブレット解析の応用可能性は、本稿で紹介した分析にとどまらない。例えば、賃金変動と物価変動のスケールごとの相関をチェックするのも興味深い。とはいえ、ウェーブレット解析の経済学への応用は緒に就いたばかりであり、その潜在性を見極めるためにも、多くの実証研究が蓄積されることが望まれる。

## 参考文献

- 新井康平、『ウェーブレット解析の基礎理論』、森北出版、2000年
- 榭原 進、『ウェーブレット ビギナーズガイド』、東京電機大学出版局、1995年
- チューイ、C. K. (著) 桜井 明・新井 勉 (訳) 『ウェーブレット入門』、東京電機大学出版局、1993年 (Chui, C. K., *Introduction to Wavelets*, New York: Academic Press, 1992 )
- Conway, P., and D. Frame, “Spectral Analysis of New Zealand Output Gaps Using Fourier and Wavelet Techniques,” Reserve Bank of New Zealand Discussion Paper, DP2000/06, 2000.
- Gençay, R., F. Selçuk, and B. Whitcher, *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*, San Diego: Academic Press, 2002.
- Hosking, J. R. M., “Fractional Differencing,” *Biometrika*, 68 (1), 1981, pp. 165-176.
- Inclán, D., and G. C. Tiao, “Use of Cumulative Sums of Squares for Retrospective Detection of Changes of Variance,” *Journal of the American Statistical Association, Theory and Methods*, 89, 1994, pp. 913-923.
- Percival, D. B., and A. T. Walden, *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- Ramsey, J. B., and C. Lampart, “The Decomposition of Economic Relationships by Time Scale Using Wavelets: Expenditure and Income,” *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 3 (1), 1998, pp. 23-42.
- Schleicher, C., “An Introduction to Wavelets for Economists,” Bank of Canada Working Paper, 2002-3, 2002.
- Walker, J. S., *A Primer on Wavelets and their Scientific Application*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1999.