CDOのプライシング・モデルとそれを用いたCDOの特性等の考察：CDOの商品性、国内市場の概説とともに

こみやきよたか
小宮清孝

要　旨

CDOのプライシングでは原資産の信用リスクの評価がポイントとなるが、これまでに、信用リスクのある金融商品のプライシングの考え方を基にCDOのプライシングを試みた研究成果が複数公表されている。本稿では、CDOの商品性や国内市場の動向を概説したうえで、CDOのプライシング・モデルの考え方を整理するとともに、実際にモデルを用いてCDOの損失額分布を計算した結果に基づいて、CDOの特性等を考察する。

キーワード： CDO、クレジット・デリバティブ、相関、2項展開法モデル、クレジット・メトリックス型モデル、コピュラ・モデル、デフォルト強度モデル

……………………………………

本稿の作成に当たっては、日本銀行金融市場局の中田勝紀氏、馬場直彦氏、細谷真氏、杉原慶彦氏、および同信用機構室の米山正夫氏から有益な示唆を頂いた。なお、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、全て筆者本人に属し、日本銀行あるいは東京三菱銀行の公式見解を示すものではない。

小宮清孝　東京三菱銀行 資金証券部（E-mail: kiyotaka_komiya@btm.co.jp）

1．はじめに

CDO（collateralized debt obligation）とは、社債やローン（貸出）等から構成されるクレジット・ポートフォリオを原資産ポートフォリオに持つ、資産担保証券の一種である。

CDOのオリジネーターは、それによって、資金調達を行えるほか、バランスシート圧縮による自己資本の効率化が図れる。また、CDOの購入主体である投資家は、CDOの購入を通じて、その原資産である社債やローン等に間接的に投資していることになり、投資家のポートフォリオにおけるリスク分散効果も享受できる。こうした点で、CDOは、発行体と投資家の双方から注目を集めている商品である。

通常の金融商品の場合と同様に、CDOの発行体、投資家の双方にとって、CDOの価格を客観的に評価するツールを持つことが重要である。CDOは比較的複雑な商品性を持つため、その価格を求めるためには何らかのプライシング・モデルが必要となる。CDOのプライシングでは、複数の原資産からなるポートフォリオの信用リスクの評価がポイントとなるが、これまでに、信用リスクのある金融商品のプライシングの考え方を基にCDOのプライシングを試みた研究成果が複数公表されている。

本稿では、CDOの商品性や国内市場の動向を概説したうえで、CDOのプライシング・モデルの考え方を整理するとともに、いくつかのモデルを用いてシミュレーション等を行い、その結果に基づいて、CDOの特性等を考察する。

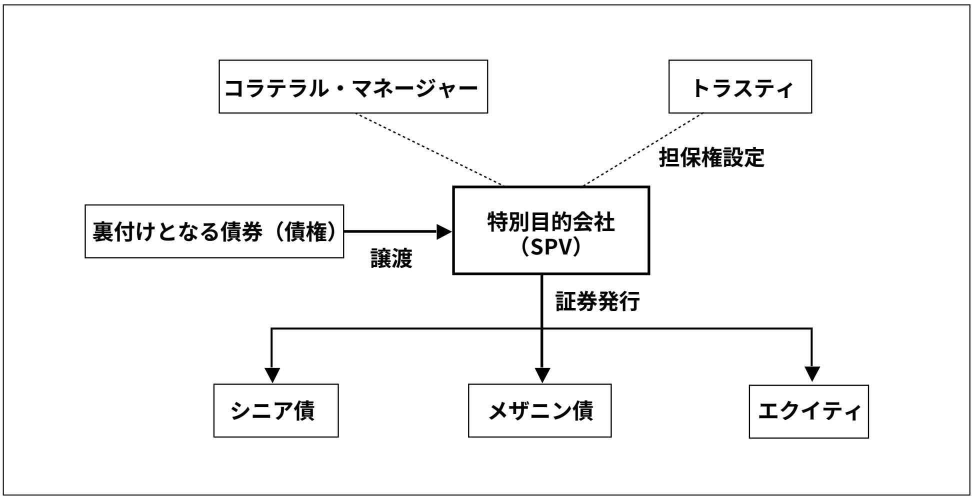
本稿の構成は以下のとおりである。まず2節でCDOの商品性を説明し、3節では、本邦のCDO市場の動向を中心に解説する。4節では、実際のプライシング・モデルのいくつかを、具体的なシミュレーション方法を含めて解説する。5節では、前節のプライシング・モデルを仮想的な原資産ポートフォリオに適用し、その結果を基にCDOの特性等を検討する。最後の6節では、簡単なまとめを述べる。

なお、CDOの商品性に関して基本的な知識を持つ読者は、4節から読んで頂いて差し支えない。また、4節については、信用リスクのある金融商品のプライシングやリスク計量の手法に関する初歩的な知識を前提にしていることを予めお断りしておく。

2．CDOの商品性

CDOとは、資産担保証券（ABS：asset backed securities）の一種で、社債やローン（貸出）等から構成されるクレジット・ポートフォリオを原資産（担保資産）に持つ。原資産が社債の場合にはCBO（collateralized bond obligation）、それがローンの場合にはCLO（collateralized loan obligation）と呼ばれることがある。また、最近ではクレジット・デリバティブを用いたシンセティック型CDOと呼ばれるCDO

図1　CDOの基本スキーム



の発行も増えている。1980年代末に米国で誕生したCDOは、当初はそのほとんどが社債とローンを原資産とするものであった。その後、1990年代半ば以降になって、欧米で投資家層が拡大してきたこともあり、ABSを原資産とするCDOが登場したほか、クレジット・デリバティブを用いたシンセティック型のCDOが組成される等、CDOの商品設計がより柔軟に行われるようになっている。

CDOには、原資産の種類、発行目的や取引形態によってさまざまなタイプが存在する。いずれのタイプも、元利金支払いに対して優先劣後構造を持つ複数のトランシェから構成される仕組みを持つ。この仕組みは、基本的にデフォルト等で原資産に損失が発生した場合に、支払優先度が低いトランシェから損失を負担していくというものである。CDOの基本スキームは図1のようになる[1]。

トランシェは、通常、格付を有するデットと格付を有しないエクイティに大別される。各トランシェのペイオフは原資産のペイオフに依存し、その優先度によってトランシェの格付が決定される。最も格付が高いものをシニア・トランシェ、その次に格付が高いものをメザニン・トランシェと呼ぶのが一般的である。最劣後部分がエクイティ・トランシェであり、これが原資産から発生する損失を最初に吸収し、デットの信用力を強化する働きを持つ[2]。なお、これらのトランシェで発行される証券をCDO証券と呼ぶこともある。

1　トラスティは、投資家のために原資産（担保資産）に担保権を設定する。
2　エクイティ投資家がペイオフを受け取れるのは、デットである上位トランシェの証券へのペイオフを差し引き、さらに上位トランシェの証券のペイオフを維持するための十分なバッファを確保した後に、そのうえで支払える現金がある場合に限られる。

CDOの分類は、①発行目的により、バランスシート型かアービトラージ型、②CDOのキャッシュ・フローの管理方法により、キャッシュ・フロー型かマーケット・バリュー型、③原資産の扱いにより、現物型かシンセティック型という切り口で行うことが一般的である[3]。以下では、この分類方法に基づいて、CDOの概要を整理する[4]。

(1) バランスシート型とアービトラージ型

バランスシート型CDOとは、オリジネーター（原資産を保有する主体〈銀行等〉）が保有している原資産をSPV（special purpose vehicle〈特別目的会社〉）に譲渡し、SPVがデットやエクイティによって資金調達を行うCDOを指す。このCDOは、オリジネーターの資金調達のほか、バランスシートの圧縮による、いわゆるBIS規制上のリスク・アセットの削減を目的として行われるため、このような名称で呼ばれている。なお、バランスシート型CDOのエクイティは投資家に販売されることもあるが、通常はオリジネーターが保有する。

オリジネーターが実際に保有する資産を基に組成されるバランスシート型CDOに対して、アービトラージ型CDOは、アレンジャー（CDOを組成する金融機関）が、SPVを使って、適当な債券やローンを市場から購入することによって組成される。アービトラージ型CDOは、実績配当のエクイティ投資家が、原資産のポートフォリオの期待利回りとデットの利回り（Libor＋αで固定等）の差（レバレッジ）に着目し、このレバレッジに基づいて組成を行うCDOであるため、「アービトラージ型」と呼称されている。なお、アービトラージ型CDOのエクイティは、投資家のみならずアレンジャーが保有することもある。

(2) キャッシュ・フロー型とマーケット・バリュー型

SPVがCDOの原資産から発生するキャッシュ・フローを管理する方法によって、CDOはキャッシュ・フロー型とマーケット・バリュー型[5]に分けられる。

キャッシュ・フロー型とは、CDOの元利返済を円滑に行うべく、原資産ポートフォリオからのキャッシュ・フローの創出に主眼をおいた管理手法である。SPVのコラテラル・マネージャー（アセット・マネージャー、CDOマネージャーとも呼ばれる）は、例えば、原資産ポートフォリオの中でデフォルトの可能性が高くなっ

3 このほか、スタティック型かマネージド型かという分類方法もある。スタティック型はSPVにおいて設定された原資産ポートフォリオが償還まで固定され、原資産の入れ替えが原則なされないものであり、マネージド型はコラテラル・マネージャーが原資産プールの入れ替えを機動的に行うことが可能なものである。

4 Fabozzi and Goodman［2001］、水野・河合［2002］、矢島［2003］を参考にした。

5 マーケット・バリュー型CDOの商品性に関する補足説明を補論で行う。

た債権を売却し、キャッシュ・フローを確保する等、限定された範囲の中で一定のルールに基づいて管理を行う。

一方のマーケット・バリュー型では、コラテラル・マネージャーは、自らの裁量で積極的に原資産の入れ替え等を行い、CDOのリターンの最大化を目指す。マーケット・バリュー型と呼ばれるのは、原資産ポートフォリオの価値に注目していることによる。各トランシェは満期一括ではなく、予め決められた償還方法に基づいて、担保資産の売却代金から返済されていく。コラテラル・マネージャーは、担保資産のクーポン収入よりもキャピタル・ゲイン（値上り益）を確保するため頻繁に売買を行う。

(3) 現物型とシンセティック型

社債やローン等の現物の原資産を対象としたCDOを現物（キャッシュ）型CDO、現物ではなくクレジット・デリバティブを対象としたCDOをシンセティック型CDO（シンセティック〈合成〉CDO）と呼ぶ。ここではシンセティックCDOの説明を行う。

シンセティックCDOでは、クレジット・デリバティブを用いて、参照資産[6]の信用リスクとリターンのみをSPVに移転する。ここで用いられるクレジット・デリバティブは、クレジット・デフォルト・スワップ（CDS：credit default swap）やトータル・リターン・スワップ（TRS：total return swap）である（以下の説明では、CDSを対象とする）。

シンセティックCDOの商品性を説明する前に、まずCDSの仕組みを簡単に説明する。CDSの買い手は、保有する債権（社債やローン）の信用リスクをヘッジするため、それらを参照資産とするプロテクション（損失補填契約）を売り手から購入する。参照資産に信用事由[7]が発生した場合は、プロテクションが発動される[8]。一方、売り手はそのプロテクションの対価として、一定のプレミアムを買い手から受け取る。

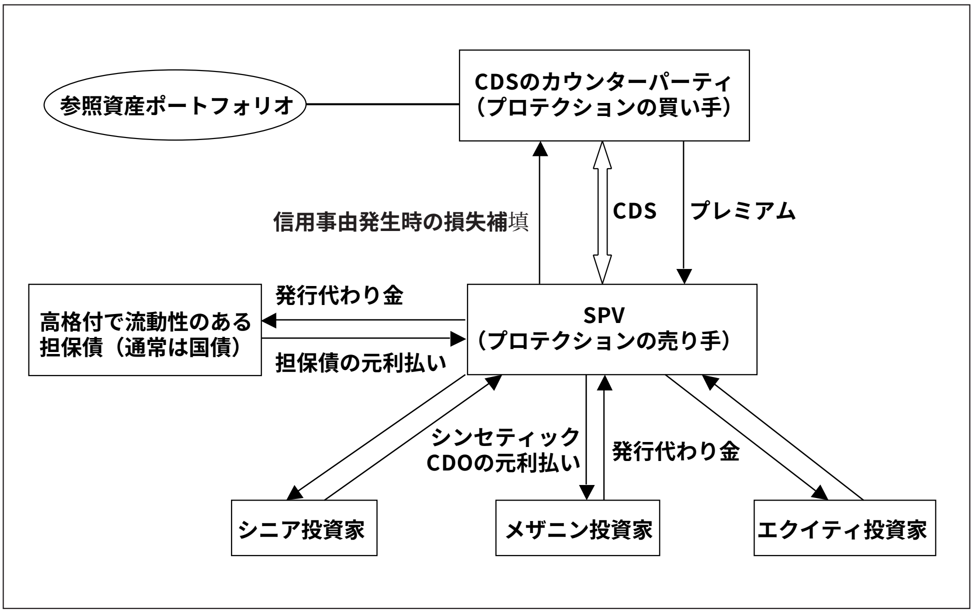
シンセティックCDOは、アービトラージ型とバランスシート型の両タイプが発行されているが、1つの案件の規模としては、通常は後者の方が大きい。図2にアービトラージ型シンセティックCDOの仕組みを示す。ここでは、SPVが原資産（参照資産）ポートフォリオを擬似的に保有していることになる。

6　クレジット・デリバティブの原資産となる資産を参照資産と呼ぶ。

7　信用事由は、倒産（bankruptcy）、支払不履行（failure to pay）、リストラクチャリング（restructuring）の3つを指すのが一般的である。詳細は、国際スワップ・デリバティブ協会（ISDA〈http://www.isda.org〉）作成のクレジット・デリバティブに関する定義集を参照。

8　この場合の決済方法には現物決済と現金決済がある。現物決済は、プロテクションの買い手が売り手に現物（社債やローン）を引き渡す代わりに額面金額を受け取る方法である。一方、現金決済は、参照資産の額面金額とその時点（信用事由発生後）の市場価格との差額（>0：値下り分）を売り手が買い手に支払うことで決済する方法である。シンセティックCDOで使われるCDSの場合、現金決済型であることが多い。

図2　アービトラージ型シンセティックCDOの仕組み

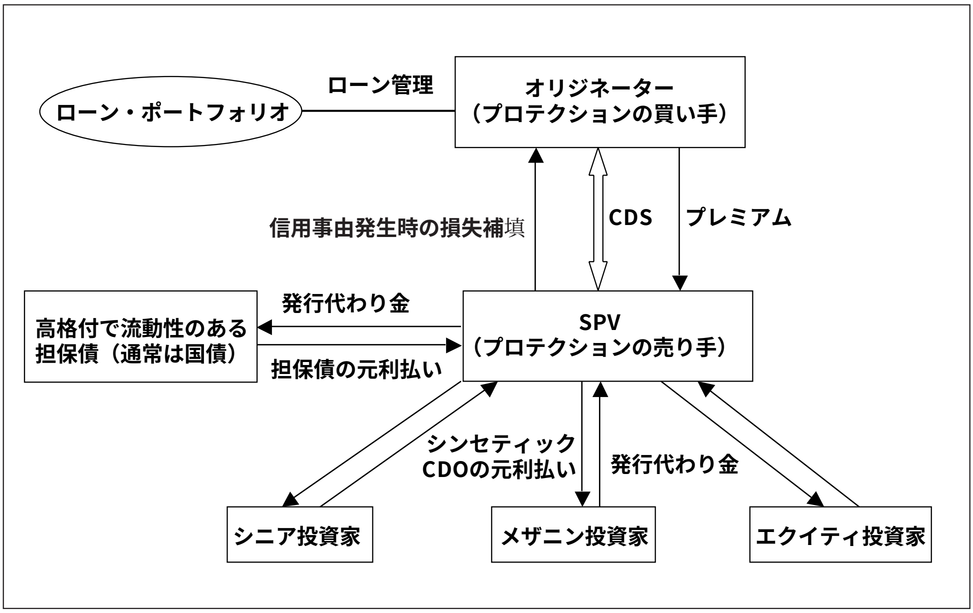


シンセティックCDOでは、投資家に発行されるCDOの金額は参照資産プールの額面金額を下回ることがある[9]。これは、シンセティックCDOの組成に用いられるCDS取引が、現物資産購入のための資金を必要としないためである。資金調達額（CDO発行額）と参照資産プールの額面金額との差額に当たる部分はスーパー・シニアと呼ばれ、通常は非常に高い信用度を有する。スーパー・シニアは、投資家に販売されないことが多い[10]。現在までに発行されているアービトラージ型シンセティックCDOでは、参照資産プールの約80%がスーパー・シニアに属し、残りの約20%がCDOとして投資家に販売される事例が多いようである。

次に、バランスシート型シンセティックCDOの仕組みを図3に示す。ここでは、オリジネーター（銀行等）がローン等の原資産ポートフォリオを、SPVに譲渡するのではなく、CDSを用いてSPVにリスク・リターンのみ移転する点がポイントとなる。ローン自体をSPVに譲渡する場合は、借り手の同意や承認を得る等の手続コストが生じるが、CDSを用いれば、このような手続は不要となる。

9 これを部分資金調達型と呼ぶことがある。
10 スーパー・シニアに関しては、その部分のポートフォリオ全体に対するCDS取引を投資家と直接行うことで、そのリスク・リターンが移転されることもある。

図3　バランスシート型シンセティックCDOの仕組み



３．国内におけるCDO市場の動向等

本節では、まず国内のCDO市場の動向を概観する。次に、投資家がCDOへ投資する理由や、オリジネーターがCDOを発行する背景を説明する。

(1) 国内CDO市場の歴史と最近の動向

国内CDO市場は、大きく分けて3つのステップを経て発展してきた。まず第1ステップとして、金融不安が生じた1997～98年にかけて、東京三菱銀行がユーロ市場で約1,000億円の貸出債権を証券化した[11]ことを皮切りに、邦銀がBIS規制対策としてバランスシート型CDOを相次いで発行した。このタイプのCDOの発行は銀行への公的資金導入の時期を境に下火となったが、1999～2000年にかけては、日本企業の私募債を主たる原資産にした、いわゆるプライマリーCBO[12]が盛んに発行されるようになった。これが第2ステップである。当時この商品は、社債による資金調達が不可あるいは困難な企業の資金調達手段という役割を担っていた。そして、第3ステップは、2002年になって、大手銀行が、自らのローン・ポートフォリオの一部をバランスシートから切り離す目的で、大型のシンセティックCDOを発行したことである。

11　日経金融新聞（1997年6月23日）を参照。
12　流通市場で対象資産を組み入れるのではなく、発行市場で組成することからこのように呼ばれた。

CDOのほとんどは私募形式で発行されるため、市場規模の正確な把握は難しいが、米格付会社であるムーディーズの調べ（ムーディーズ［2003］）によると、2002年の本邦CDO市場の発行金額は、2001年の4,000億円から3.14兆円と、大きな伸びを示した模様である。その主因は、銀行をオリジネーター[13]とするバランスシート型のシンセティックCDOが急増したことである。このうち特に市場で注目を集めたのは、2002年9月に発行されたみずほコーポレート銀行による1.3兆円のシンセティックCDOであり、スーパー・シニアを除く2,420億円が投資家向けに発行される大型案件であった[14、15]。また、2002年末には中堅・中小企業向け債権を裏付けとするシンセティックCDOも三井住友銀行によって組成されており[16]、2002年の発行規模を大きく押し上げる要因となった。2003年入り後も、3月にUFJ銀行が総額1兆円の中堅・中小企業向け債権を裏付けとする同様のシンセティックCDOを発行している[17、18]。

アービトラージ型CDOの発行規模も大きくなっているようだが、このタイプのCDOは実際にそれを購入した投資家以外への情報開示がほとんど進んでいないために具体的な取引案件の実態を正確に把握することは難しい。例としては、2001年の案件であるが、国内企業100社弱を参照法人とするCDSを用いたシンセティックCDOが外国系投資銀行を中心に組成されたケースがある[19]。このケースでは、投資家の要望に合わせて原資産を組み替えるなどオーダーメイドに近い商品となった模様である[20]。

13 従来、日本の証券化市場では、オリジネーターは、信販会社、リース会社等が中心だったが、最近になって生命保険や消費者金融に加えて、大型CDOの発行や住宅ローンの証券化を通して、銀行の比率が高まってきている。

14 ブルームバーグ・ニュース（2002年9月13日）を参照。

15 本件では、信用事由の定義が倒産と支払不履行に限定され、リストラクチャリングが含まれていなかった点も注目された。リストラクチャリングが含まれている場合、銀行がCDSにより取引先の信用リスクを投資家に転嫁したうえで、仮に債権放棄を実施したとすると、CDSの信用事由であるリストラクチャリングに該当するため、投資家が損失を被るという問題が発生する。なお、リストラクチャリングを信用事由から除外すると、原資産のデフォルト確率が低めに見積もられるため、より高い格付を取得しやすくなる。

16 ブルームバーグ・ニュース（2002年11月14日）を参照。

17 ブルームバーグ・ニュース（2003年2月20日）を参照。

18 中堅・中小企業向け債権を裏付けとするCDO（CLO）には、既存のローン・ポートフォリオを前提とするバランスシート型のほかに、CLO組成への参加を前提に借入を希望する中堅・中小企業を募集したうえで、参加条件に合致する企業に新規に行ったローンを基に組成されるケースがある。そうしたケースには、東京都や大阪府等の信用保証協会による保証付き中堅・中小企業向けローンを裏付けとするCLOのほか、大手銀行等による新規無担保ローンを裏付けとするCLOがある。

19 日経金融新聞（2001年11月13日）を参照。

20 従来、アービトラージ型CDOはスタティック型が主流であったが、最近は、マネージド型が増えている模様である（ブルームバーグ・ニュース〈2003年2月27日〉を参照）。

(2) CDOへの投資理由

CDOの投資家にとっては、複数の原資産からなるクレジット・ポートフォリオに投資できるという点が大きな利点である。投資家にとっては、新たな業種や地域に対するエクスポージャーを保有することが可能となる。シンセティックCDOの場合は、クレジット・デリバティブによって、例えば社債を発行していないような企業のクレジット・リスクを保有することもできる。

また、CDOは、流動性が乏しいものの、年限・格付が同一である社債と比べて利回りが高いため、現在のように低金利局面では注目される商品である。特に国内企業を参照資産とするCDSのプレミアムは、同企業の社債のスプレッドよりも大きいことが多いため[21]、このCDSを用いたシンセティック型CDOは投資家にとって魅力的な投資対象となる。

上位トランシェ（シニア、メザニン）の投資家にとっては、CDOを構成する原資産ポートフォリオの一部にデフォルトが生じたとしても、劣後部分がクッションとなるため、損失の発生は限定される。そのため、原資産単体での信用リスクは比較的高くても、損失発生リスクが低い投資を行えることも利点の1つとなる。

エクイティの投資家にとっては、上述のように、アービトラージ型CDOでは、原資産ポートフォリオの期待利回りとデットの利回りの差（レバレッジ）が投資の基準となるが、実績配当によって高いリターンを得られる可能性があることが魅力になる[22]。

(3) CDO組成の背景

次に、オリジネーターがバランスシート型CDOを組成する背景を述べる。2002年には、上述のように、銀行がオリジネーターとなって、CDSを組み合わせて大型のバランスシート型CDOを組成する動きがみられたが、その主たる理由はローンの信用リスクを投資家に転嫁することでBIS規制上のリスク・アセットを削減し、自己資本比率を改善させるところにある。

銀行がオリジネーターとしてシンセティックCDOを組成したとき、銀行にとってのBIS規制上の必要資本の算出方法は次のようになる（詳細はGoodman［2002］を参照）。ここで、CDOの具体的なスキームは、①スーパー・シニアのリスク・リターンはOECD諸国の銀行にCDSにより移転、②CDOの発行で調達した資金は国債

21 CDSのプレミアムが社債のスプレッドを上回る理由は、杉原・細谷・馬場・中田［2003］を参照。

22 ただし、実績配当であるエクイティへの投資に当たっては、リスクとリターンの分析をより詳細に行う必要がある。例えば、エクイティは原資産ポートフォリオの分散効果が大きくなるほど期待損失率が高くなる（詳細は5節）ため、「分散化されたポートフォリオ」はエクイティ投資家にとって必ずしも好ましい結果をもたらさない。こうしたエクイティのリスク・プロファイルを十分に認識することが、投資の前提条件である。

で運用、③エクイティはオリジネーターである銀行が保有とする。

CDOによる調達資金は国債（リスク・ウエイトは0）で運用されているので、これの必要資本は0である。資本が必要となるのは、エクイティとスーパー・シニアである。エクイティは、現行のBIS規制では、100%を資本から控除（つまり1250%のリスク・ウエイトを適用）することが課せられている。一方、スーパー・シニアはCDSのカウンターパーティのリスク・ウエイトを適用すればよいことになっている。OECD諸国の銀行がカウンターパーティとなるときのリスク・ウエイトは20%であるから、スーパー・シニアが全体の80%を占めるようなシンセティックCDOでは、1.28%（＝20%×80%×8%）の資本を要することになる。エクイティの比率を5%とすれば、最終的に必要な資本額は6.28%となり、ローンとしてバランスシート上に保有していた場合にBIS規制上必要とされる資本額（8%）を下回らせることが可能となる[23]。

4．CDOのプライシング・モデル

本節では、信用リスクのある金融商品の1つであるCDOの理論価格の算出方法を解説する。最初に（信用リスクのある）金融商品の理論価格算出の基本的な考え方や各種パラメータ（特に相関）の扱いを概説し、次に、具体的なCDOのプライシング手法を説明する。

(1) 信用リスクのある金融商品のプライシング

CDOを含め信用リスクのある金融商品の取引価格は、特に取引主体の数が少なかったり、市場の需要／供給のボリュームが大きくないようなケースでは、当該商品の客観的な商品性を前提として競争的に形成されるのではなく、取引主体のバーゲニング・パワーといった要因に依存して決まるといわれている。しかし、その一方で、当該商品の実際の取引価格を決める過程では、その重要な参考情報として、取引主体のバーゲニング・パワーといった客観的な商品性以外の要因の存在を捨象したうえで、当該商品の理論価格を求めることが行われている。以下では、この理論価格を求める手続をプライシングと称する。

信用リスクのある金融商品の理論価格の算出は、信用リスクのない金融商品の場合と同様に、基本的には、将来発生するキャッシュ・フローの割引現在価値の和の期待値を求めることで行われる。信用リスクのある金融商品のプライシング手法は、理論・実務の両面で発展してきており、解析的な方法からシミュレーションを用い

23 ただし、銀行は、CDOが満期を迎えると、リスク移転効果が消滅するため、新たにリスクの移転を行わない限り、信用リスクに再度直面することになる。

たアプローチ等、多くのバリエーションがある[24]。

CDOのような複数の原資産を持つ商品では、各原資産のデフォルト確率、債権額、デフォルト発生時の回収率に加えて、原資産の間の相関に関する情報がパラメータとして必要となる。プライシングに当たってはこれらのパラメータを確率的に変動させるモデルもあるが、簡単化のため、ここではそれらを確定値であるとして考える。このとき、デフォルト確率や回収率については、例えば倒産に関するヒストリカル・データを用いて具体的な水準を推定できる。

信用リスクのある金融商品で原資産間の相関を扱う場合、デフォルト事象そのものの相関であるデフォルト相関と企業の資産価値の相関であるアセット相関のいずれかをモデルのパラメータとして用いることが多い[25]。デフォルト相関とアセット相関は、原資産（企業）の資産価値の収益率が標準正規分布に従うと仮定すると、以下の(1)式と(2)式で、両者の関係をわかりやすい形で対応付けられる（詳細は、例えば家田・丸茂・吉羽［2000］を参照)。つまり、デフォルト確率をそれぞれ p_i と p_j とする2つの原資産 i と j が同時にデフォルトする確率 $p_{i,j}$ は、アセット相関を ρ_{ij}^{a} として、

$$p_{i,j}=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-{\rho_{ij}^{a}}^2}}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p_i)}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p_j)}\exp\left(-\frac{u^2-2\rho_{ij}^{a}uv+v^2}{2(1-{\rho_{ij}^{a}}^2)}\right)dudv\ , \qquad (1)$$

によって与えられる。ここで、uとvは2つの原資産の収益率、$\Phi^{-1}(\cdot)$は標準正規分布の分布関数の逆関数である。

また、原資産 i と j のデフォルト相関 ρ_{ij}^{d} は、

$$\rho_{ij}^{d}=\frac{p_{i,j}-p_i p_j}{\sqrt{p_i(1-p_i)}\sqrt{p_j(1-p_j)}}\quad , \qquad (2)$$

で与えられる。p_iとp_jを所与とすれば、(1)式と(2)式により、アセット相関とデフォルト相関は、一方の値が与えられれば他方の値も得られるという点で、1対1対応の関係にある。

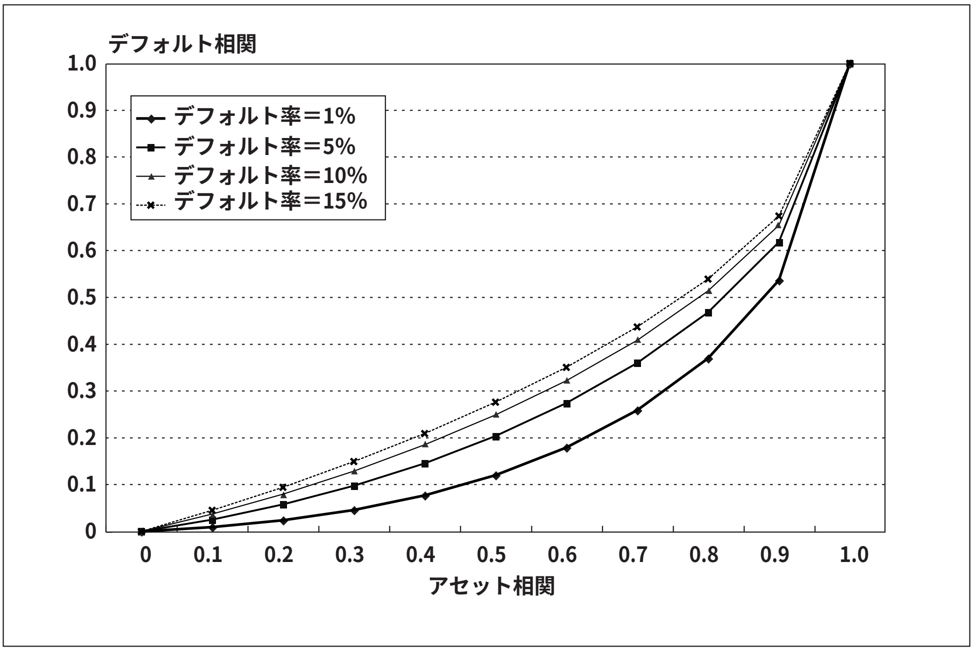
2つの原資産 i と j のデフォルト確率が等しく、それを1%、5%、10%、15%としたときのアセット相関 ρ_{ij}^{d} とデフォルト相関 ρ_{ij}^{d} の関係を図4に示した[26]。デフォルト相関の絶対値の方がアセット相関のそれよりも小さくなっており、特にデフォルト確率が小さいものほどその傾向が顕著に表れている。

24 信用リスクのある金融商品のプライシング手法に関する教科書は多数あるが、和書では、例えば木島［1998］、楠岡・青沼・中川［2001］がある。

25 各原資産のデフォルト率が確率的に変動するモデルでは、それらの確率変動に相関を持たせることで原資産間の相関を取り込むことができる。

26 ここでは、アセット相関の値を0から1としたときのデフォルト相関を示した。

図4　アセット相関とデフォルト相関の関係



以上、デフォルト相関とアセット相関の理論的な関係を概説したが、実務上はこれらの具体的な水準を求めることは容易でない。その最大の理由は、CDOの原資産ポートフォリオの各原資産（企業資産）自体が市場で取引されているわけではないので、相関を直接求めることはできないことである。この点、ある金融商品のペイオフが2つの企業の資産価値に依存して決まるのであれば、その金融商品の価格と適当なプライシング・モデルを用いて、それらの資産価値の間の相関に関する情報（相関係数）を得ることが可能である。しかし、実際の市場では、CDOの原資産ポートフォリオを構成する全ての原資産のペアについて、そうした金融商品が取引されているわけではない。

こうしたことから、実務では、多くの前提をおいたうえで、原資産間の相関を推定する方法が編み出されている。まず、アセット相関については、企業の株価収益率の相関を使って、各種の前提をおいたうえで、アセット相関を推定する方法がある（J. P. Morgan & Co.［1997］を参照）。また、デフォルトに関する十分なヒストリカル・データを用いて、一定の仮定のもとで、かなり粗い形ではあるが、原資産間のデフォルト相関を推定する方法もある（例えば、家田・丸茂・吉羽［2000］、Nagpal and Bahar［2001］を参照）。

したがって、原資産間の相関に関するパラメータが必要となるCDOのような商品をプライシングするに当たっては、相関の具体的な水準をどのように設定するかが重要なポイントの1つとなるのである。

（2）CDOのプライシング・モデル

ここでは、上述の信用リスクのある金融商品のプライシングに関する考え方をベースとしたCDOのプライシング手法に関する既存研究として、①2項展開法モデル（Cifuentes and O'Connor［1996］）、②クレジット・メトリックス型モデル（Finger［2000］）、③コピュラ・モデル（Finger［2000］、Li［2000］）、④デフォルト強度モデル（Duffie and Gârleanu［2001］）の4つを取り上げ、それぞれのモデルの内容を概説するとともに、そのシミュレーション方法にも具体的に考察を加える。予め各手法の主要な特徴を述べておくと、①はシミュレーションを用いず、近似によってプライシングを行う手法であり、②〜④はシミュレーションによって価格を求める手法である。また、①〜③はデフォルト確率等の各種パラメータを確定値としている一方、④はデフォルト確率が確率変動するモデルである。

なお、ここでは、簡単化のため、原資産から発生する元利払いは捨象し、原資産がデフォルトすることによって発生する損失額の確率分布を用いて、そこからキャッシュ・フローの割引現在価値、すなわち損失額の期待値（期待損失額）を求める[27]。

イ．2項展開法モデル

まず、Cifuentes and O'Connor［1996］の2項展開法モデル（binomial expansion technique model）を説明する。Cifuentes and O'Connor［1996］によれば、このモデルは、ムーディーズがCDOの格付を決定する際に実際に用いられている。

2項展開法モデルのメリットは、後述のように、デフォルト相関の扱いに工夫を加えたことで、損失額分布を2項分布で近似し、計算負荷の大きいシミュレーションを行う必要性を回避していることである。一方デメリットは、原資産数が少ないと計算誤差が無視できなくなることである。

2項展開法モデルは、CDOの原資産ポートフォリオの損失額分布を2項分布で近似的に考える。N個の原資産からなるポートフォリオで、確率変数X_iを資産がデフォルトすれば1、しなければ0と定義しよう。簡単化のため、資産iがデフォルトする確率はiによらずpであるとすると、N個の原資産のうちj個がデフォルトする確率は、

$$ {}_N C_j \, p^j (1-p)^{N-j} , \qquad (3) $$

となる。それぞれの原資産のデフォルトが独立であれば、デフォルト時の損失額と、(3)式で与えられる確率によりポートフォリオの損失額分布が求められ、期待損失額を算出できる。

27 原資産の信用度の悪化（格下げ、信用スプレッドの拡大）も信用リスクに含む場合もあるが、ここではデフォルトの発生リスクのみを信用リスクと考える。

しかし、原資産の間には何らかの相関関係がある。そこで、Cifuentes and O'Connor［1996］は、「分散指数（diversity score）」と呼ばれる指標を用いて、デフォルト相関の影響を取り込んだポートフォリオの損失額の期待値と分散の算出方法を考案している。

分散指数は、原資産ポートフォリオの損失額分布と同じ期待値と分散を持つ分布が、互いに独立なM個の「仮想的な」原資産で作られるとするときの値Mと定義される。この定義により、指数が大きいほど、ポートフォリオが分散化されていることになる。実際の原資産ポートフォリオを、互いに「独立な」仮想的な原資産ポートフォリオに近似的に読み替えることで、仮想的なポートフォリオではデフォルト相関を考える必要はなくなり、損失額分布は2項分布で近似されるというのが2項展開法モデルのポイントである。

まず、N個の原資産からなるポートフォリオの期待損失額と分散が、どのように表されるかを示す。ポートフォリオを構成する原資産i $(i = 1, 2, \ldots, N)$のデフォルト時刻をτ_i、CDOの満期をTとするとき、その損失額L_iは、デフォルト時の回収率をR_i、額面をn_iとして、$L_i(T) = (1 - R_i)n_i 1_{\{\tau_i \leq T\}}$となる[28]。ポートフォリオ全体の損失額$L(T)$は$\Sigma_{i=1}^{N} L_i(T)$である。原資産$i$の満期$T$での累積デフォルト確率を$p_i$とするとポートフォリオ全体の損失額の期待値は、

$$E[L(T)] = \sum_{i=1}^{N} (1 - R_i) n_i p_i \ , \tag{4}$$

分散（$V[L(T)]$）は、各原資産の分散$V[L_i(T)] = (1 - R_i)^2 n_i^2 p_i (1 - p_i)$を用い、

$$V[L(T)] = \sum_{i=1}^{N} V[L_i(T)] + \sum_{i,j,i \neq j}^{N} \rho_{ij}^{d} \sqrt{V[L_i(T)]V[L_j(T)]} \ , \tag{5}$$

となる。ただし、ρ_{ij}^{d}は原資産iとjのデフォルト相関である。ρ_{ij}^{d}は原資産iとjが同時にデフォルトする確率を$p_{i,j}$として以下で表される（(2)式の再掲）。

$$\rho_{ij}^{d} = \frac{p_{i,j} - p_i p_j}{\sqrt{p_i(1 - p_i)}\sqrt{p_j(1 - p_j)}} \ . \tag{6}$$

このポートフォリオの分散指数Mは、M個の独立な仮想的原資産からなるポートフォリオの損失額の期待値と分散が、それぞれ(4)式と(5)式と一致するという条件から求められる。そこでこのM個の仮想的原資産からなるポートフォリオの各資産の額面を$\tilde{N}$、回収率を$\tilde{R}$、デフォルト確率を$\tilde{p}$とすると、このポートフォリオの損失額の期待値と分散は、それぞれ以下のようになる。

$$E[\tilde{L}(T)] = (1 - \tilde{R})\tilde{N}M\tilde{p} \ , \tag{7}$$

$$V[\tilde{L}(T)] = (1 - \tilde{R})^2 \tilde{N}^2 M\tilde{p}(1 - \tilde{p}) \ . \tag{8}$$

28 $1_{\{\tau_i \leq T\}}$は、$\tau_i \leq T$ならば1、そうでなければ0をとる定義関数である。

（4）式と（7）式および（5）式と（8）式が一致するためには、$\tilde{N}=\Sigma_{i=1}^{N} n_i/M$、$\tilde{R}=\Sigma_{i=1}^{N} n_i R_i/(\tilde{N}M)$としたうえで、以下のようにすればよい。

$$\tilde{p}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(1-R_i)n_i p_i}{(1-\tilde{R})\tilde{N}M}\ , \tag{9}$$

$$M=\frac{E[L(T)]\left[(1-\tilde{R})\sum_{i=1}^{N}n_i-E[L(T)]\right]}{V[L(T)]}\ , \tag{10}$$

さらに、全ての原資産の額面を1とし、そのデフォルト確率およびデフォルト相関が全て等しい（$p_i=p_j$、$\rho_{ij}^{d}=\rho$）とすると、（10）式は、

$$M'=\frac{N}{1+(N-1)\rho}\ , \tag{11}$$

となる。これは「代替分散指数（alternative diversity score）」と呼ばれる[29]。

ロ．クレジット・メトリックス型モデル

イ．の2項展開法モデルでは、損失額分布を2項分布で近似しているため、ポートフォリオを構成する原資産数が相当程度大きくないと近似誤差が無視できないという問題がある。このような場合、実務上は、損失額分布をシミュレーションで直接求めるという手続が採用されることが多い。Finger［2000］は、クレジット・ポートフォリオのデフォルト相関を考慮したプライシング・モデルによるシミュレーションを用いて、CDOのプライシングを試みている。以下で説明するクレジット・メトリックス型モデルは、そこで取り上げられている最も簡単なモデルである。

クレジット・メトリックス型モデルのメリットは、損失額分布に特定の分布を仮定しないため柔軟性が高いほか、原資産のデフォルト／非デフォルトのみならず信用度変化による価値の変化を勘案する形に拡張可能であることである。一方、デメリットとしては、原資産間の相関を表すパラメータを推定する必要があることやシミュレーションの設定によっては計算負荷が重くなることが挙げられる。

まず、基本となる1期間のクレジット・メトリックス型モデルの枠組みの概要を説明する。原資産iの価値を表す確率過程を$\{X_i(t)\}$とし、時点tで$X_i(t)$が閾値$\alpha_i(t)$を下回るとデフォルトであるとする。$X_i(t)$が標準正規分布に従うとすると、デフォ

29 ムーディーズは、ポートフォリオの分散指数を求めるために、同一業種に属する原資産の数と分散指数の対応表（業種によらず1種類）を公表している（Backman and O'Connor［1995］）。ポートフォリオの分散指数は、業種間の相関を無視すれば、この対応表によって業種ごとに求めた分散指数の合計として求められる。

ルト確率は標準正規分布の分布関数を$\Phi(\cdot)$として$\Phi(\alpha_i(t))$となる。このモデルを用いて、満期1年のCDOの原資産ポートフォリオから発生する損失額を求めるシミュレーションのアルゴリズムは以下のとおりとなる。なお、デフォルトの判定は1年後（満期）でのみ行うとする。

① 原資産iの1年のデフォルト確率を$p_i(1)$として、$\Phi(\alpha_i(1))= p_i(1)$となる閾値$\alpha_i(1)$を求める。

② 原資産iとjのデフォルト相関がρ^d_{ij}となるような多変量正規乱数$Z_i(1)$を発生させる。

③ 各原資産iで、$Z_i(1)< \alpha_i(1)$ならばデフォルトと判定する。

④ デフォルトと判定した場合、その損失額をディスカウント・ファクターで割り引き、損失額の現在価値を算出する。

CDOは優先劣後構造を持っているため、原資産ポートフォリオから発生した損失はまず最劣後トランシェ（エクイティ）で吸収され、損失額がエクイティの額面を超えると、その超過した損失は上位トランシェ（メザニン）に吸収される。最上位のシニア・トランシェに損失が発生するのは、全ての劣後トランシェが全額毀損されたときのみである。したがって、モンテカルロ・シミュレーションで、各試行ごとに、各トランシェの損失額を算出し、最終的にその期待値を求めることで、各トランシェの期待損失額が求められる。これによって、トランシェごとのプライシングが可能となる。

次に、このモデルを多期間に応用して、デフォルトの判定を定期的に行う形でCDOをプライシングすることを考える。CDOの満期を5年とし、毎年デフォルトを判定するとする。まず、原資産ポートフォリオから発生する損失額を求めるシミュレーションのアルゴリズムは、前述の1期間のそれを繰り返し適用すればよい。具体的には、以下の①〜⑧のステップとなる。

① 原資産iの1年のデフォルト確率を$p_i(1)$として、$\Phi(\alpha_i(1))= p_i(1)$となる閾値$\alpha_i(1)$を求める。

② 原資産iとjのデフォルト相関がρ^d_{ij}となるような多変量正規乱数$Z_i(1)$を発生させる。

③ 各原資産iで、$Z_i(1)< \alpha_i(1)$ならば1年目でデフォルトと判定する。

④ 1年目にデフォルトしなかったサンプルに対して、2年目でのデフォルトを判定するために多変量正規乱数$Z_i(2)$を発生させる。 ただし$Z_i(2)$と$Z_i(1)$は互いに独立である。

⑤ 1年目にデフォルトせずに2年目でデフォルトする条件付き確率を$q_i(2)$として[30]、それに対応する閾値$\alpha_i(2)=\Phi^{-1}(q_i(2))$を求める。

⑥ 各原資産iで、$Z_i(2)<\alpha_i(2)$ならば、1年目にデフォルトせず、2年目にデフォルトしたと判定する。

30 原資産iのt年の累積デフォルト確率を$p_i(t)$とするとき、$(t-1)$年目にデフォルトせずにt年目にデフォルトする条件付き確率$q_i(t)$は$(p_i(t)-p_i(t-1))/(1-p_i(t-1))$によって求められる。

⑦ デフォルト時の損失額をディスカウント・ファクターで割り引き、損失額の現在価値を算出したうえで、1年目にデフォルトした損失額の現在価値と合算する。

⑧ 以下、満期の5年後まで同様の計算を繰り返す。

このアルゴリズムを用いれば、損失額のサンプルが多数求まるので、それに基づいて、CDOのトランシェごとに期待損失額を算出することができる。

ハ．コピュラ・モデル

ロ．のクレジット・メトリックス型モデルは、各原資産のデフォルト／非デフォルトを定期的に判定していくアルゴリズムを用いていたが、仮に各原資産のデフォルト時刻自体が求められれば、プライシングの手続はより簡単になる。そのためには、各原資産のデフォルト時刻の分布関数を周辺分布に持つ（デフォルト時刻に関する）同時分布関数の推定が必要となるが、ここでは、同時分布を2つの部分（相互依存構造と周辺分布）に分離する手法を基に、コピュラ（copula）と呼ばれる関数を用いて考える。

まず、コピュラを定義する。任意の確率変数$X_1,\dots,X_n$の周辺分布関数をそれぞれ$F_1,\dots,F_n$とすると、その同時分布関数Fは、

$$
\begin{aligned}
F(x_1,\dots,x_n) &= P\left[F_1(X_1) \le F_1(x_1),\dots,F_n(X_n) \le F_n(x_n)\right] \\
&= C(F_1(x_1),\dots,F_n(x_n)) \ , \qquad (12)
\end{aligned}
$$

で与えられ、このCをコピュラ[31]という。$F_1(X_1),\dots,F_n(X_n)$は確率変数で、それぞれ区間［0, 1］の一様分布に従うことから、コピュラCは区間［0, 1］の一様分布を周辺分布とする多変量分布関数と考えることもできる。コピュラを用いることによって、同時分布が相互依存構造と周辺分布に分離される。なお、コピュラは、周辺分布が全て連続であるとき、一意に存在することが保証されている。

コピュラを利用することで、デフォルト時刻の同時分布をモデル化できる[32]。原資産が1つのとき、デフォルト時刻の分布関数を$F(t) = P(\tau \le t)$とすると、一様乱数Uを与えれば、それに対応するデフォルト時刻τは$\tau = F^{-1}(U)$と求まる。この考え方を原資産が複数のとき、つまり互いに相関を持つ多変量のデフォルト時刻に適用する。個々の原資産のデフォルト時刻を表す周辺分布を$F_1,\dots,F_n$、互いに相関を持つ一様乱数のセットを$U_1,\dots,U_n$と発生できたとすると、

$$
P[\tau_1 \le t_1,\dots,\tau_n \le t_n] = P[U_1 \le F_1(t_1),\dots,U_n \le F_n(t_n)] = C(F_1(t_1),\dots,F_n(t_n)), \qquad (13)
$$

から、$\tau_1 = F_1^{-1}(U_1),\dots,\tau_n = F_n^{-1}(U_n)$を得る。

31　コピュラの性質や、各種のパラメトリックなコピュラの具体例は、Nelsen［1999］を参照。

32　詳細は、Li［2000］を参照。

このようにコピュラを用いてデフォルト時刻を表現できると、デフォルト時刻を直接シミュレート可能となるため、例えばロ．で説明した多期間のクレジット・メトリックス型モデルが、多期間にわたるデフォルト／非デフォルトの判定等のやや煩雑な手続を必要としたことに比べると、計算負荷が相対的に軽いというメリットを持つ。その一方で、コピュラ・モデルは、原資産間の相関に関する情報をモデルに組み込む必要があるほか、クレジット・メトリックス型モデルでは勘案可能であった、信用度の変化による原資産価値の変動を勘案できない等のデメリットを持つ。

以下では、（イ）で、正規コピュラを用いたシミュレーション法を説明した後、（ロ）で、正規コピュラ以外のコピュラの具体例として、ガンベル・コピュラを用いたシミュレーション法を解説する。

（イ）正規コピュラ

最も単純で、実務でも多用されているコピュラが正規（normal）コピュラである。正規コピュラは、分散・共分散行列Σの多変量正規分布の分布関数$\Phi^{(n)}(\cdot\ ;\Sigma)$を用いて、

$$C(u_1,\ldots,u_n)=P(U_1\le u_1,\ldots,U_n\le u_n)=\Phi^{(n)}(\Phi^{-1}(u_1),\ldots,\Phi^{-1}(u_n);\Sigma)\ , \qquad (14)$$

と表される[33]。ここで$\Phi^{-1}(\cdot)$は単変量標準正規分布の分布関数の逆関数である。

正規コピュラで表した同時分布から、デフォルト時刻をシミュレートするアルゴリズムを以下に示す。

① 原資産iとjのデフォルト相関がρ^d_{ij}になるような多変量正規乱数$Z^{(i)}$を発生させる。

② 標準正規分布の分布関数を用いて正規乱数を一様乱数に変換する。

$$U_i=\Phi\,(Z^{(i)})\ . \qquad (15)$$

③ 得られた一様乱数を周辺分布の逆関数に従って変換する。

$$\tau_i=F_i^{-1}(U_i)=F_i^{-1}(\Phi(Z^{(i)}))\ . \qquad (16)$$

このように、一様乱数を発生させることによって、正規コピュラで依存構造が表されるデフォルト時刻τ_1，$\tau_2,\ldots,\tau_n$を発生させることができる。また、例えば2つの原資産（iとj）がともにt年以内にデフォルトする確率も、$\Phi^{(2)}(\Phi^{-1}(F_i(t)),\Phi^{-1}(F_j(t))\ ;\Sigma)$で求められる。

33　2つの原資産間の相関係数をρ_{ij}とする正規コピュラから得られる同時デフォルト確率と、マートンのモデル（Merton［1974］）でアセット相関をρ^a_{ij}とするときに得られる同時デフォルト確率とが等しい場合、$\rho_{ij}=\rho^a_{ij}$である。詳細はSchmidt and Ward［2002］を参照。

また、デフォルトの発生が何年目で起こるかを判定するためには、次のアルゴリズムを用いればよい。

① 原資産iの各年の累積デフォルト確率$p_i(1), p_i(2), \ldots, p_i(T)$を与える。

② $k=1,\ldots,T$に対してデフォルトの閾値$\alpha_i(k)=\Phi^{-1}(p_i(k))$を求める。

③ 原資産iとjのデフォルト相関がρ_{ij}^dになるような多変量正規乱数$Z^{(i)}$を発生させる。

④ $\alpha_i(k-1)<Z^{(i)}\leq\alpha_i(k)$のとき、資産$i$は$k$年でデフォルトとする。

（ロ）ガンベル・コピュラ

（イ）の正規コピュラのシミュレーションでは、同時分布に正規性を仮定していたが、実際の金融データにおいては、正規性の仮定では、変量間の依存関係を必ずしもうまく表しきれないことがある。変量間の依存関係が正規分布のそれと異なる場合には、変量間の依存関係を表すために、正規コピュラ以外のコピュラが有用となる。例えば、変量間の依存関係が分布の裾部分で強い場合には、ガンベル（Gumbel）・コピュラを用いることが考えられる。

ガンベル・コピュラのデメリットに、原資産間の相関を1つのパラメータのみで表現するため、原資産間のデフォルト相関に、原資産の属性（業種等）に応じて異なる値を用いることができないことがある。したがって、ガンベル・コピュラをシミュレーションに使う際には、原資産の間の相関が一定であるとの仮定がおかれることになる。この仮定が現実的ではないとの判断がなされるならば、ガンベル・コピュラを使うべきではないが、例えば、何らかのストレス等で原資産間の相関が上昇しほぼ同水準になったとするときのCDO価格への影響を調べる「シナリオ分析」を行う場合には、ガンベル・コピュラは有効である。

さて、正規コピュラ以外のコピュラを用いたCDOのプライシングも、多変量正規乱数を発生させる代わりに、それぞれのコピュラに従う乱数を発生させればよい。ここでは、ガンベル・コピュラに従う乱数の発生方法を示す[34]。

ガンベル・コピュラCは、

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_p)=\exp(-\{(-\ln u_1)^{\gamma}+\cdots+(-\ln u_p)^{\gamma}\}^{1/\gamma}), \qquad (17)$$

と表される。ただし、γはパラメータで、$\gamma\geq 1$。n次元の乱数ベクトルを1つ発生させるには、次のような手続を踏めばよい。ただし、以下の方法は$\gamma>1$のときにのみ適用可能である。

① $[0, \pi]$の一様乱数Vと標準指数分布に従う乱数Wを独立に発生させ[35]、潜在変数θを以下の式によって生成する。

34 ここでのガンベル・コピュラに従う乱数の発生方法は、吉羽［2003］を参照した。

35 標準指数分布の分布関数は$F(x)=1-e^{-x}$で与えられるため、それに従う乱数wは、［0, 1］の一様乱数をuとして、$w=F^{-1}(u)=-\ln(1-u)$で生成できる。

$$\theta = \left(\frac{\sin((\gamma-1)V/\gamma)}{W} \right)^{\gamma-1} \frac{\sin(V/\gamma)}{\sin(V)^{\gamma}} \quad . \tag{18}$$

② 独立に［0, 1］の一様分布に従う乱数$U_1,\ldots,U_n$を発生させ、$k = 1,\ldots,n$に対して、以下の式で$X_1,\ldots,X_n$を生成する。

$$X_k = F_k^{-1}(\exp[-\{-\theta^{-1}\ln(U_k)\}^{1/\gamma}]) \quad . \tag{19}$$

このアルゴリズムはMarshall and Olkin［1988］による。このアルゴリズムの理論的な背景を概説すると、以下のとおりである。Marshall and Olkin［1988］では、同時分布関数が、潜在変数θとそのラプラス変換$LT(s)=E_\theta[e^{-s\theta}]$を用いて、

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= E_\theta[H_1(x_1)^\theta \cdot H_2(x_2)^\theta \cdots\cdot H_n(x_n)^\theta] \\ &= LT(LT^{-1}(F_1(x_1)) + \cdots + LT^{-1}(F_n(x_n))) \,, \end{aligned} \tag{20}$$

と表されるときのアルゴリズムを与えている。ガンベル・コピュラでは、$LT(s) = \exp(-s^{1/\gamma})$とすることで（20）式のようになる。また、Kanter［1975］ではラプラス変換$LT(s)$が$\exp(-s^{1/\gamma})$となる確率変数θは、安定指数$1/\gamma$の正値安定分布に従い、（18）式で求められることが示されている。一方、（20）式より、

$$H_k(x_k)^\theta = \exp(-\theta LT^{-1}(F_k(x_k))) \ \text{ for } \ k = 1,\ldots,n \,, \tag{21}$$

と対応しており、$H_k(X_k)^\theta$を確率変数と考えるとこれは［0, 1］の一様分布に従うことから、X_kを②のように求めればよいことがわかる。

なお、変量間の線形相関[36]ρとガンベル・コピュラのパラメータγの対応関係は、次のように与えられる[37]。

ρ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
γ	1	1.07	1.16	1.26	1.38	1.54	1.75	2.07	2.58	3.73	∞

参考のため、以下では、上述のアルゴリズムに従って、変量間の依存関係がガンベル・コピュラで表される乱数を発生させた結果を示す。図5は、いずれも、2つの変量が同一の周辺分布（標準正規分布とする）に従い、それらの線形相関係数を

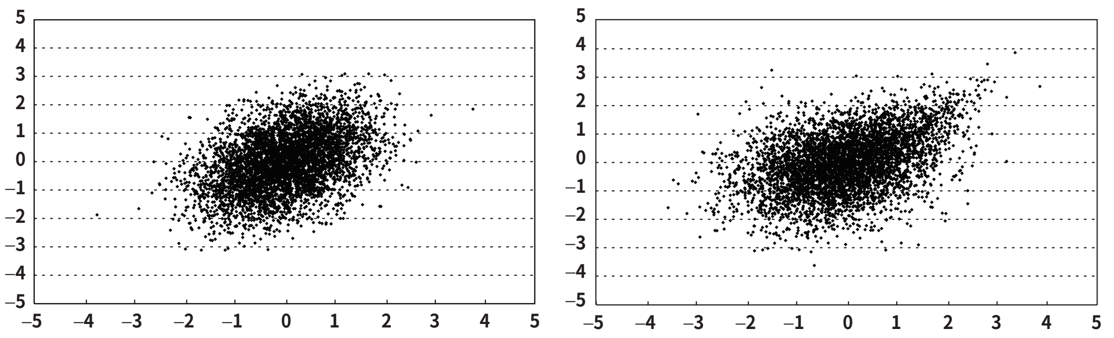
36 変量XとYの間の線形相関$\rho(X, Y)$は以下のように定義される。

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}} \,,$$

ただし、$\mathrm{cov}(X, Y)$はXとYの共分散、$V[\cdot]$は分散である。

37 Joe［1997］のTable 5.2を参照。

図5　同じ周辺分布と線形相関を持つ2変量分布（横軸X、縦軸Y）



0.4とする同時分布からシミュレートした5,000組のデータを散布図で示したものである[38]。右図は、変量間の依存関係がガンベル・コピュラで表される場合で、左図は、それが2変量正規分布で表される場合である。これらをみると、右図の右上部分でXとYの両者がともに大きな値となる傾向が強い（依存度合いが強い）ことが見受けられる。

ニ．デフォルト強度モデル

次に、Duffie and Gârleanu［2001］によるデフォルト強度（default intensity、微小時間内のデフォルト確率〈ハザード確率〉）を用いたモデルによるプライシング手法を解説する。ロ．のクレジット・メトリックス型モデルや、ハ．のコピュラ・モデルでは、原資産のデフォルト確率は確定値であったが、デフォルト強度モデルでは、デフォルト強度の確率過程をモデル化し、それから求められたデフォルト確率で、各時点でのデフォルト／非デフォルトを記述する。

デフォルト強度モデルは、デフォルト強度（デフォルト確率）が確率的に変動するという点で、デフォルト確率を確定値とするモデルの拡張と考えることができる。また、後述するように、デフォルト強度の確率過程にジャンプ過程を組み込んでいるため、モデルの表現力が高いこともメリットである。ただし、デフォルト強度モデルは、モデルの表現力が高い反面で、推定が必要なパラメータが多くなるほか、シミュレーションの計算負荷も大きいため、実務的には取扱いが煩雑になるというデメリットも有する。

まず、基本となるモデルとして、原資産が1つのケースを考える。原資産の時刻tでのデフォルト強度を$\lambda(t)$、デフォルト時刻をτとすると、tから微小時間Δtでのデフォルト確率は、以下のように書ける。

38　これは、周辺分布と（線形）相関係数が同じであっても、同時分布が一意に定まらないことを示している。この点は、Embrechts, McNeil and Straumann［1999］を参照。

$$P_t(t \le \tau < t + \Delta t) \cong \lambda(t)\Delta t \ . \tag{22}$$

ここでは、この$\lambda(t)$が、以下の(23)式で表される確率過程に従うものと仮定する。なお、この確率過程を、パラメータ$(\kappa,\ \theta,\ \sigma,\ \mu,\ l)$のベーシック・アフィン（basic affine）過程と呼ぶ。

$$d\lambda(t) = \kappa\left[\theta - \lambda(t)\right]dt + \sigma\sqrt{\lambda(t)}\,dW(t) + \Delta J(t)\ , \tag{23}$$

ただし、Wは標準ブラウン運動、$\Delta J(t)$は時刻tにおけるジャンプ過程（Wと独立）を表す。このジャンプ過程では、ジャンプの生起率lはポアソン過程、ジャンプ幅は平均μの指数分布に従い、ジャンプ幅とジャンプ時刻は互いに独立であるとする。

ベーシック・アフィン過程で、時刻tからみた$t+s$時点の生存確率は、その原資産のデフォルト時刻をτとするとき、

$$P_t(\tau > t + s) = E_t\left[\exp\left(\int_t^{t+s} -\lambda_u du\right)\right] = e^{\alpha(s)+\beta(s)\lambda(t)}\ , \tag{24}$$

と求められる[39]。ただし、ここでの$\alpha(s)$と$\beta(s)$は(25)式で表されるものであり、E_tは時刻tにおける期待値を意味する。

$$\alpha(s) = \frac{\kappa\theta(-c_1 - d_1)}{b_1 c_1 d_1}\ln\frac{c_1 + d_1 e^{b_1 s}}{c_1 + d_1} + \frac{\kappa\theta}{c_1}s$$

$$+\frac{l(a_2 c_2 - d_2)}{b_2 c_2 d_2}\ln\frac{c_2 + d_2 e^{b_2 s}}{c_2 + d_2} + \left(\frac{l}{c_2} - l\right)s\ ,$$

$$\beta(s) = \frac{1 - e^{b_1 s}}{c_1 + d_1 e^{b_1 s}}\ , \tag{25}$$

ただし、

$$b_1 = -\sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}\ ,\ c_1 = -\frac{\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}}{2}\ ,\ d_1 = \frac{\kappa - \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}}{2}\ ,$$

$$a_2 = \frac{d_1}{c_1}\ ,\quad b_2 = b_1\ ,\quad c_2 = 1 - \frac{\mu}{c_1}\ ,\quad d_2 = \frac{d_1 + \mu}{c_1}\ .$$

この関係式から、デフォルト時刻に関する分布関数をモデル化できる。

次に、このモデルを、CDOの原資産ポートフォリオに適用する。そのためにはデフォルト強度の相関を考慮する必要があるが、その際、次の定理が重要な役割を果たす（証明はDuffie and Gârleanu［2001］を参照）。

39 ベーシック・アフィン過程の詳細は、Duffie and Gârleanu［2001］またはDuffie and Singleton［2003］を参照。

ベーシック・アフィン過程の和に関する定理
Xをパラメータ$(\kappa,\ \theta_X,\ \sigma,\ \mu,\ l_X)$からなるベーシック・アフィン過程、$Y$を$(\kappa,\ \theta_Y,\ \sigma,\ \mu,\ l_Y)$からなるベーシック・アフィン過程とし、$X$と$Y$は互いに独立とする。このとき$X+Y$は、パラメータ$(\kappa,\ \theta,\ \sigma,\ \mu,\ l)$からなるベーシック・アフィン過程である。ただし、$\theta = \theta_X + \theta_Y$、$l = l_X + l_Y$である。

実際に、ポートフォリオを構成するN個の原資産にこのモデルを適用することを考えよう。それぞれの原資産はベーシック・アフィン過程に従うデフォルト強度$\lambda_1,\cdots,\lambda_N$を持っているとする。ここで相関を考えるために、各強度は、2つの状態変数を用いて、

$$\lambda_i = X_C + X_i \ , \tag{26}$$

と表されると仮定する。ここで、X_CはN個の原資産に共通の状態変数であり、X_iは原資産iに固有の状態変数であるとする[40、41]。X_C、X_iはそれぞれパラメータ$(\kappa,\ \theta_C,\ \sigma,\ \mu,\ l_C)$と$(\kappa,\ \theta_i,\ \sigma,\ \mu,\ l_i)$であるベーシック・アフィン過程で、$X_1,\cdots,X_N$と$X_C$はそれぞれ互いに独立とすると、ベーシック・アフィン過程の和に関する定理から、λ_iはパラメータ$(\kappa, \theta, \sigma, \mu, l)$のベーシック・アフィン過程に従うことになる。ただし、$\theta = \theta_C + \theta_i$、$l = l_C + l_i$である。

(23)式から、デフォルト強度の相関は時刻tによって変化することになるため、ここではλ_iとλ_jのジャンプの相関に相当する、

$$\rho_{jump} = \frac{l_C}{l} = \frac{l_C}{l_C + l_i} \ , \tag{27}$$

を、デフォルト強度λ_iとλ_jの相関の初期値として与えることにする[42]。このρ_{jump}は、$\sigma = 0$ならば、λ_iとλ_jのデフォルト強度の相関そのものを表す。

40 X_Cは、マクロ経済環境を表す状態変数と考えることができる。
41 (26)式を拡張し、業種、地域に関する状態変数を加えることも可能である(Duffie and Gârleanu[2001])。
42 ρ_{jump}はiによらず一定としている。このρ_{jump}が任意の2つの原資産iとjのジャンプ相関を表していることは、次のようにわかる。まず、X_C, X_i, X_jのジャンプ成分をそれぞれJ_C, J_i, J_jとして、原資産iとjのジャンプ過程を、

$$J_{\lambda_i} = J_C + J_i \ , J_{\lambda_j} = J_C + J_i \ ,$$

のように表す。このときジャンプ相関は、

$$\rho_{jump}(J_{\lambda_i}, J_{\lambda_j}) = \frac{\mathrm{cov}[J_{\lambda_i}, J_{\lambda_j}]}{\sqrt{V[J_{\lambda_i}]}\sqrt{V[J_{\lambda_j}]}} \ ,$$

と表され、独立性の仮定とポアソン過程の分散の性質を用いることにより、以下を得る。

$$\rho_{jump}(J_{\lambda_i}, J_{\lambda_j}) = \frac{l_C\,\Delta t}{\sqrt{l\,\Delta t}\sqrt{l\,\Delta t}} = \frac{l_C}{l} \ .$$

なお、ジャンプ相関を導入しないと、信用力の高い原資産の間のデフォルト相関の表現が困難となることが、Schönbucher[1998]により指摘されている。

Duffie and Gârleanu［2001］は、デフォルト強度過程と金利過程が互いに独立であるとすると、デフォルト時刻τがパラメータ$(\kappa, \theta, \sigma, \mu, l)$からなるベーシック・アフィン過程に従う満期$T$の割引債の現在価値$P_{0,T}$は、回収率を$\bar{f}$として、

$$P_{0,T} = \delta(T)e^{\alpha(T)+\beta(T)\lambda(0)} + \bar{f}\int_0^T \delta(u)\pi(u)du\ , \tag{28}$$

と表せることを示している。ここで、$\delta(T)$は信用リスクのない満期Tの割引債の価格を表し、

$$\pi(u) = -\frac{d}{du}P(\tau > u) = -e^{\alpha(u)+\beta(u)\lambda(0)}\left[\alpha'(u) + \beta'(u)\lambda(0)\right]\ ,$$

$$\alpha'(u) = \kappa\theta\beta(u) + l\frac{\mu\beta(u)}{1-\mu\beta(u)},\quad \beta'(u) = -\kappa\beta(u) + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2(u) - 1, \tag{29}$$

である。このことからベーシック・アフィン過程のもとでは、債券の理論価格を解析的に表現できるため、それが市場価格に適合するように各パラメータの推定を行うことが可能となる。

最後に、CDOを構成するポートフォリオ全体の期待損失額を計算するシミュレーション・アルゴリズムを示す。まず（23）式と（26）式に基づき、資産iのデフォルト強度λ_iを、共通ファクターと固有ファクターに分けて、それぞれ離散的に記述すると次のようになる。

$$X_C(t) = X_C(t-\Delta t) + \kappa(\theta_C - X_C(t-\Delta t))\Delta t + \sigma\sqrt{X_C(t-\Delta t)}\epsilon_C\sqrt{\Delta t} + \bar{J}_C(t)\ ,$$

$$X_i(t) = X_i(t-\Delta t) + \kappa(\theta_i - X_i(t-\Delta t))\Delta t + \sigma\sqrt{X_i(t-\Delta t)}\epsilon_i\sqrt{\Delta t} + \bar{J}_i(t). \tag{30}$$

ここでϵ_C、ϵ_iは独立な標準正規分布$N(0, 1)$に従う正規乱数であり、

$$\bar{J}_k(t) = \begin{cases} 1\times m_k, & pr = l\Delta t\ , \\ 0, & pr = 1 - l\Delta t\ , \end{cases} \tag{31}$$

である。またこの$m_k (k = C, i)$は平均μの指数分布に従う乱数[43]である。

各強度λ_iは（26）式のようにX_CとX_iの和で表されたので、これに（30）式を代入することで、時刻tからΔtの間のデフォルト確率が（22）式のとおり$\lambda_i(t)\cdot\Delta t$として求められる。つまり、シミュレーションの1回ごとの試行では、$N + 1$個の標準正規分布に従う乱数と、$N + 1$個の平均μの指数分布に従う乱数を用意しておけばよい。求められたデフォルト確率を基に、新たに[0, 1]の一様乱数を発生させることでデフォ

43　脚注35と同様に、Uを［0, 1］の一様乱数とするとき、$m_k = -\mu \ln(1-U)$で生成できる。

ルト／非デフォルトを判定し[44]、それによってCDOを構成するポートフォリオ全体の期待損失額を計算できる。

(3) 本節で取り上げたモデルのまとめ

上述のように、CDOのプライシングに用いられる4つのモデルは、それぞれ、実務的な観点でメリットとデメリットを持つ。ここでは、各モデルの特徴と主なメリット／デメリットを表1にまとめる。

表1　モデルの特徴とメリット／デメリット

手法 (損失額分布の表現)	特徴	主なメリット	主なデメリット
2項展開法モデル (2項分布で近似)	分散指数によって原資産間のデフォルト相関を考慮。	計算負荷が極めて軽い。デフォルト相関を明示的に扱う必要がない。	原資産数が少ない場合、近似誤差が無視できない。
クレジット・メトリックス型モデル (シミュレーション)	キャッシュ・フロー発生時に、原資産の価値が閾値を下回るとデフォルトと判定。	格付等の信用度の変化による原資産価値の変化を勘案する形に拡張可能。	キャッシュ・フローの発生回数が多いと、計算負荷が重くなる。
コピュラ・モデル (シミュレーション)	原資産のデフォルト時刻を多変量確率変数として、コピュラを用いて表現。	デフォルト時刻を直接シミュレートするため、計算負荷が軽い。	信用度の変化による原資産価値の変化を勘案できない。
デフォルト 強度モデル (シミュレーション)	原資産のデフォルト強度の変動を確率過程として記述。	ジャンプ過程を組み込んでいるため、モデルの表現力が高い。	デフォルト強度の過程にジャンプが含まれるため、パラメータ推定が困難。 計算負荷が重い。

5．プライシング・モデルによるCDOの分析

本節では、前節のプライシング・モデルのいくつかを用いて、仮想的な原資産ポートフォリオを持つCDOの損失率（トランシェの額面に対する損失額の比率）の分布を求め、それに基づいて考察を行う。具体的には、各トランシェのCDOの損失率分布の各種統計量を求め、それらの特徴を検討するとともに、プライシング・モデルおよび原資産ポートフォリオの分散度合い等の違いによって、求められた各種統計量にどのような違いが生じるのかを示す。さらに、その結果に基づいて、CDOへの投資やプライシングにおける留意点を考察する。

44　デフォルト確率がp%のとき、一様乱数が［0, p/100］内であれば、デフォルトと判定。

本節では、CDOの損失率分布を求めるための基本モデルとして正規コピュラ・モデルを採用する。また、モデル間の比較のために、2項展開法モデル、クレジット・メトリックス型モデルおよびガンベル・コピュラ・モデルでも計算を行う。なお、デフォルト強度モデルは、他のモデルと枠組みが相当異なり、計算結果の比較が困難であるため、ここでは使用しないことにする。

（1）分析の前提条件

CDOの原資産ポートフォリオとして、表2の4つのポートフォリオを仮定する。いずれのポートフォリオも原資産の合計金額は100億円であるとする。

これら4つのポートフォリオは、原資産の格付別比率でみると、いずれもAAA格が13%、AA格が27%、A格が50%、BBB格が10%で構成されている（「数値化した平均格付」はいずれも2.6）[45]。また、各ポートフォリオ内の原資産の業種の構成は、図6のとおりとした。

原資産の銘柄数ベースでは、ポートフォリオ1（4）、2、3の順に分散度合いが低い。また、銘柄数ベースの分散度合いが等しいポートフォリオ1と4では、業種分散の点では、後者の方が分散度合いが低い。

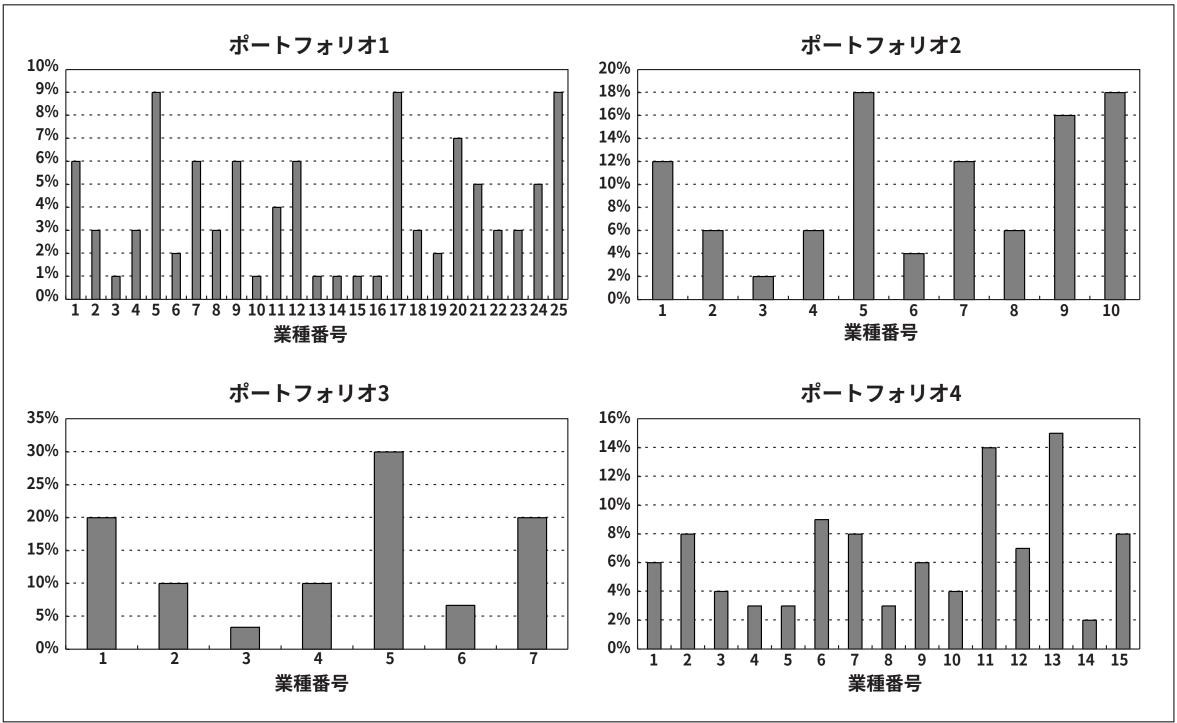
ポートフォリオ1～4のそれぞれを原資産ポートフォリオとするCDOを考える。それらCDOのトランシェは、シニア90%、メザニン3%、エクイティ7%の3つから構成されているとする。以下ではモンテカルロ・シミュレーション（試行回数5,000回）を行う場合には、各トランシェの損失率の分布を求め、各種統計量を算出する。原資産のデフォルトの判定は年1回行うものとする。

表2　仮想ポートフォリオ

	ポートフォリオ1	ポートフォリオ2	ポートフォリオ3	ポートフォリオ4
原資産銘柄数	100	50	30	100
業種数	25	10	7	15
1業種に占める最大構成比	9%	18%	30%	15%
数値化した平均格付（R&I）	2.6	2.6	2.6	2.6
満期	5年	5年	5年	5年
1銘柄への投資金額	1億円	2億円	3.33億円	1億円

45　格付は、日本格付投資情報センター（R&I）による。また「数値化された平均格付」は、AAA=1、AA=2、A=3、BBB=4とし、原資産額面で加重平均した値である。

図6　業種別構成割合



シミュレーションでは、別途指定がない限り、デフォルト確率はR&Iによる広義デフォルト率[46、47]、デフォルト時の回収率は10%とする[48]。また、デフォルト相関は、上述のように本来は推定が容易ではないが、ここではアプリオリに与えられているとし、別途指定がない限り、同業種資産の間で0.4、異業種資産の間で0.1[49]とする。

46 R&Iの広義デフォルト率は、債務不履行のほかに債権放棄、債務超過等を信用事由として算出されたもの。数値データを含め、詳細はhttp://www.r-i.co.jpを参照。

47 5年広義累積デフォルト確率が過去最大であった年を格付別にピックアップして、格付別・年別のデフォルト確率とした（下表参照）。

	1年後	2年後	3年後	4年後	5年後
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.99%	0.99%
A	0.35%	0.69%	1.04%	1.39%	1.74%
BBB	0.00%	1.15%	2.02%	3.75%	4.32%

48 本邦では、業績不振企業ではデフォルトを極力回避するため資産売却等を行う等の措置がとられ、実際に企業がデフォルトした時点では債務残高に対する企業価値は相当低くなるケースが多いと考えられる。

49 米国企業の倒産データを基に、同業種間のデフォルト相関の推定を試みたNagpal and Bahar［2001］の結果を参考に、それを0.4とおいた。異業種間のデフォルト相関は同業種間のそれよりも小さいと考えられることから、ここでは0.1と仮定した。

(2) 正規コピュラ・モデルによる計算結果

ここでは、基本モデルとして正規コピュラ・モデルを選び、(1)の仮想的な原資産ポートフォリオを持つCDOの損失率分布の各種統計量を求める。

表3は、ポートフォリオ1～4に関する計算結果である。ここでは、シニア（全体の90%）、メザニン（同3%）、エクイティ（同7%）およびそれらを合算した全体（「ポートフォリオ全体」と呼称）について、それぞれ、損失率の期待値（期待損失率）、標準偏差、95%点および99%点を求めた。

表3からは、いくつかの特徴を見出すことができる。ここで、原資産ポートフォリオの分散度合いは1、4、2、3の順に低いことを思い出そう。まず、期待損失率は、シニア、メザニン、エクイティの順に高くなっている。ポートフォリオ間で比較すると、シニア、メザニンおよびポートフォリオ全体では、分散度合いが最も高いポートフォリオ1の期待損失率が最も小さく、分散度合いが最も低いポートフォリオ3のそれが最も大きい。それとは対照的に、エクイティでは、ポートフォリオ1の値が最も大きく、分散度合いが最も低いポートフォリオ3のそれが最も小さい。標準偏差をみると、期待損失率と同様の傾向があることがわかる。パーセント点については、95%点では、エクイティに60%強～85%程度の損失が発生するが、上位のトランシェには損失は発生しない。一方、99%点になると、エクイティは全額が毀損されるほか、メザニンでも損失が発生する。メザニンの損失は、分散度合いが相対的に高いポートフォリオ1、4では5%程度であるが、ポートフォリオ2、3では65%程度と高くなっている。

また、同様の手法で、同業種内のデフォルト相関を0.7、異業種間のそれを0.4に引き上げたときのシミュレーション結果を表4に示す。

表3　正規コピュラ・モデルによる損失率の計算結果

	シニア				メザニン			
	ポートフォリオ1	ポートフォリオ2	ポートフォリオ3	ポートフォリオ4	ポートフォリオ1	ポートフォリオ2	ポートフォリオ3	ポートフォリオ4
期待値	0.002%	0.025%	0.046%	0.006%	0.473%	1.047%	2.091%	0.713%
標準偏差	0.074%	0.434%	0.665%	0.204%	5.743%	9.150%	12.749%	7.440%
95%点	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
99%点	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	4.501%	65.255%	66.589%	5.915%
	エクイティ				ポートフォリオ全体			
	ポートフォリオ1	ポートフォリオ2	ポートフォリオ3	ポートフォリオ4	ポートフォリオ1	ポートフォリオ2	ポートフォリオ3	ポートフォリオ4
期待値	17.072%	16.579%	16.448%	17.053%	1.211%	1.214%	1.255%	1.221%
標準偏差	20.427%	24.500%	28.312%	21.398%	1.509%	1.982%	2.426%	1.636%
95%点	63.752%	76.660%	85.345%	63.896%	4.463%	5.366%	5.974%	4.473%
99%点	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	7.135%	8.958%	8.998%	7.177%

表4　正規コピュラ・モデルによる損失率の計算結果（相関を高めた場合）

	シニア				メザニン			
	ポートフォリオ1	ポートフォリオ2	ポートフォリオ3	ポートフォリオ4	ポートフォリオ1	ポートフォリオ2	ポートフォリオ3	ポートフォリオ4
期待値	0.128%	0.179%	0.266%	0.157%	3.115%	3.144%	3.941%	3.340%
標準偏差	1.254%	1.862%	2.113%	1.418%	16.453%	16.520%	18.434%	17.074%
95%点	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	4.412%	0.000%	0.000%
99%点	3.826%	4.853%	8.825%	5.831%	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%
	エクイティ				ポートフォリオ全体			
	ポートフォリオ1	ポートフォリオ2	ポートフォリオ3	ポートフォリオ4	ポートフォリオ1	ポートフォリオ2	ポートフォリオ3	ポートフォリオ4
期待値	14.109%	13.486%	12.553%	13.923%	1.197%	1.200%	1.236%	1.216%
標準偏差	26.000%	27.128%	28.043%	26.287%	2.831%	3.270%	3.679%	3.001%
95%点	89.448%	100.000%	85.541%	89.609%	6.261%	7.132%	5.988%	6.273%
99%点	100.000%	100.000%	100.000%	100.000%	13.443%	14.368%	17.943%	15.248%

表4を表3と比較すると、基本的な傾向は同じであることがわかるが、特に注目すべき点は以下の諸点である。まず、ポートフォリオ全体では、期待損失率はデフォルト相関の水準によらずほぼ同様の水準にあることがわかる。この結果は、期待損失額を表す（4）式の右辺にデフォルト相関ρ_{ij}^{d}が含まれていないことからも明らかであろう。また、パーセント点をみると、99%点では、エクイティに加えメザニンも全額が毀損されているほか、シニアでも5%前後の損失が発生している。デフォルト相関の上昇に伴い、上位のトランシェでも損失が発生するリスクが高まったことになる。さらに、ここでも、エクイティの期待損失率のみで、分散度合いの最も高いポートフォリオ1の値が最も大きく、分散度合いが最も低いポートフォリオ3のそれが最も小さい傾向がある。

では、なぜ、ポートフォリオの分散度合いとエクイティの期待損失率に正の相関関係があるのだろうか。直観的には次のように考えられる。ポートフォリオの期待損失額をエクイティの額面未満とすると、無限に分散化されたポートフォリオ（損失額の標準偏差=0）では、ポートフォリオの期待損失額はエクイティのそれに一致する。次に、ポートフォリオの期待損失率を変えずに、分散度合いを下げると、損失率の標準偏差が大きくなり、ポートフォリオの損失の一部を上位トランシェが負担せざるを得なくなる。このため、エクイティの期待損失率は、ポートフォリオの分散度合いと正の相関関係を有すると推論される。以下では、前節で述べたムーディーズの分散指数を用いた2項展開法モデルを用いて、分散度合いと期待損失率の関係を具体的に定式化し、その関係をみる。

デフォルト相関を0としたときのポートフォリオ1の分散指数は原資産数に等しく100であり、エクイティの期待損失率$E[L_E]$は、加重平均デフォルト確率をpとすると、

$$E[L_E]=\sum_{k=0}^{7}{}_{100}C_7 p^k(1-p)^{100-k}\frac{9k}{70}+\sum_{k=8}^{100}{}_{100}C_k p^k(1-p)^{100-k}, \qquad (32)$$

と書ける。（32）式右辺第1項は、CDOの額面全体100に対してエクイティが7あること、およびそのうちkがデフォルトしたときに、回収率が10%なので額面に対する比率として$9k/70$（=（90/100）×（k/7））の割合が損失となることから求められる。同第2項は、回収率10%の仮定のもとでは、kが8以上になるとエクイティの損失率が100%になることから導かれる項である。

（32）式をより一般的に、分散指数をM、デフォルト時の回収率をR、エクイティの比率をqすると、$E[L_E]$は以下のように表される。

$$E[L_E] = \sum_{k=0}^{M} {}_M C_k p^k (1-p)^{M-k} \times \min\left(\frac{k(1-R)}{qM}, 1\right), \tag{33}$$

分散度合いとエクイティの期待損失率に正の相関関係があることを示すためには、Mが低下すると$E[L_E]$も低下する、すなわち$E[L_E]$がMの増加関数であることがわかればよい。そのためには（33）式で、任意の整数$M > 0$に対して、$E[L_E(M+1)] - E[L_E(M)] \geq 0$という関係が成立することを示す必要がある。ただし、（33）式を使って、この関係を解析的に示すことは容易ではない。そこで、ここでは回収率Rを10%、エクイティの比率qを7%としたときの、加重平均デフォルト確率pに応じた$E[L_E]$の挙動を、シミュレーションによって表す。pとして0.01、0.05、0.1の3通りを想定したときの$E[L_E(M)]$を図7に、$E[L_E(M+1)] - E[L_E(M)]$を図8にそれぞれ掲げた。

図7からは、$E[L_E(M)]$はMが相対的に小さいときには低い水準になることがわかる。また図8から、$E[L_E(M+1)] - E[L_E(M)] \geq 0$であることが確認できる。したがって、デフォルト相関が高まるとエクイティの期待損失率が低下することが示された。なお、これらの図からは、Mが十分大きいか、pが極端に小さい場合には、$E[L_E(M+1)] - E[L_E(M)]$は非常に小さくなるため、相関の水準は期待損失率にほとんど影響を及ぼさない一方、Mがかなり小さくなると期待損失率のMに対する依存度が高まることもわかる。

次に、ポートフォリオ1に正規コピュラ・モデルを用いて、デフォルト相関[50]と、期待損失率および損失率の標準偏差の関係を示したのが、それぞれ図9、図10である。デフォルト相関が大きくなると、シニアとメザニンの期待損失率は高まる一方、エクイティのそれは低くなることがわかる。分散度合いとデフォルト相関は負の相関を持つことから、エクイティの期待損失率がデフォルト相関と負の相関を持つことは自明であろう。一方、損失率の標準偏差は、デフォルト相関の増加につれて、いずれのトランシェでも増加する傾向がある。

50　ここでは全ての原資産間のデフォルト相関を一定としている。

図7　$E[L_E(M)]$

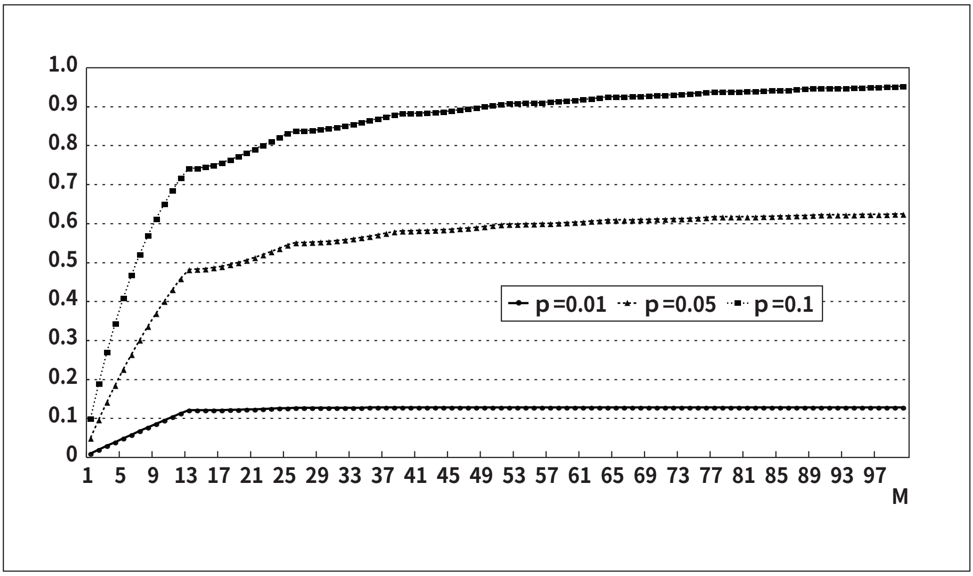


図8　$E[L_E(M+1)]-E[L_E(M)]$

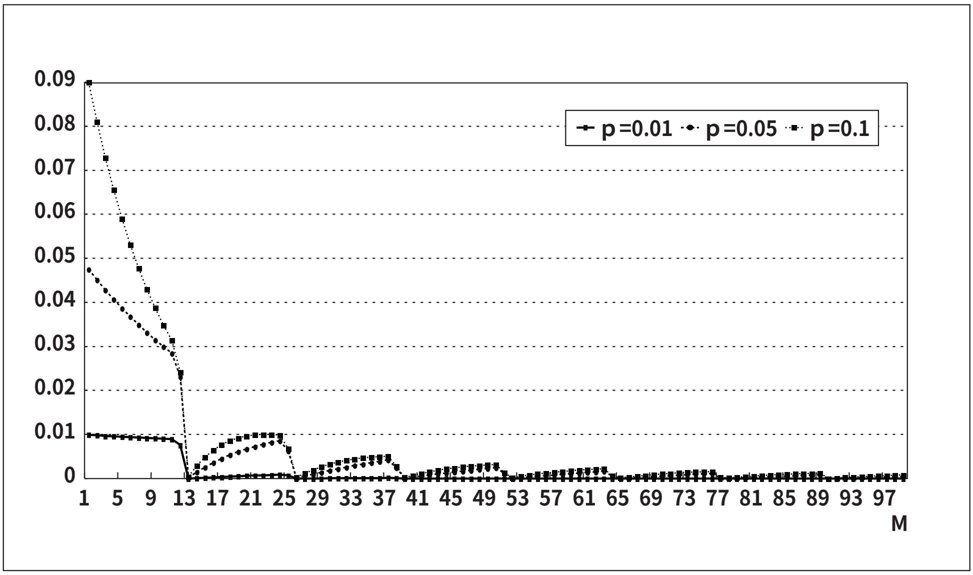


図9　デフォルト相関と期待損失率

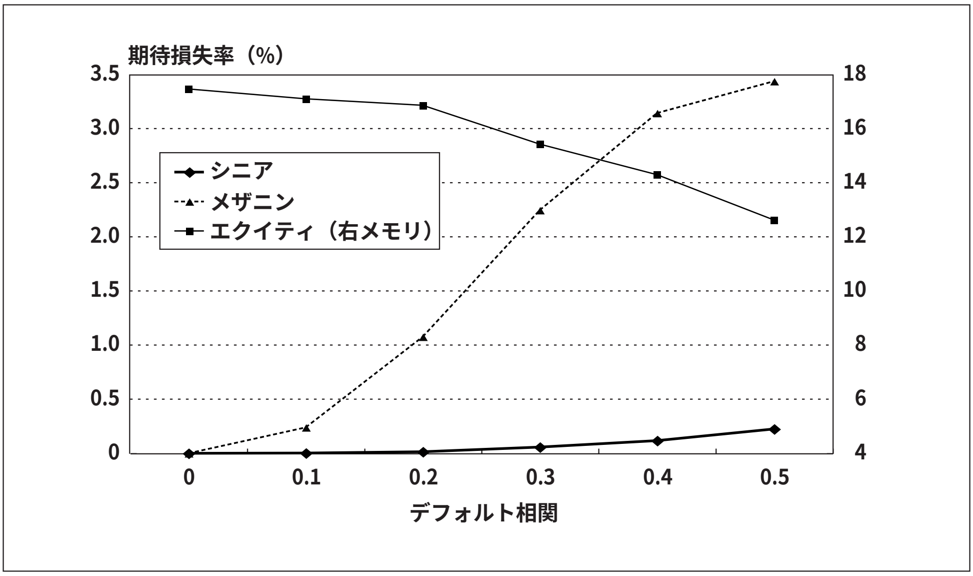
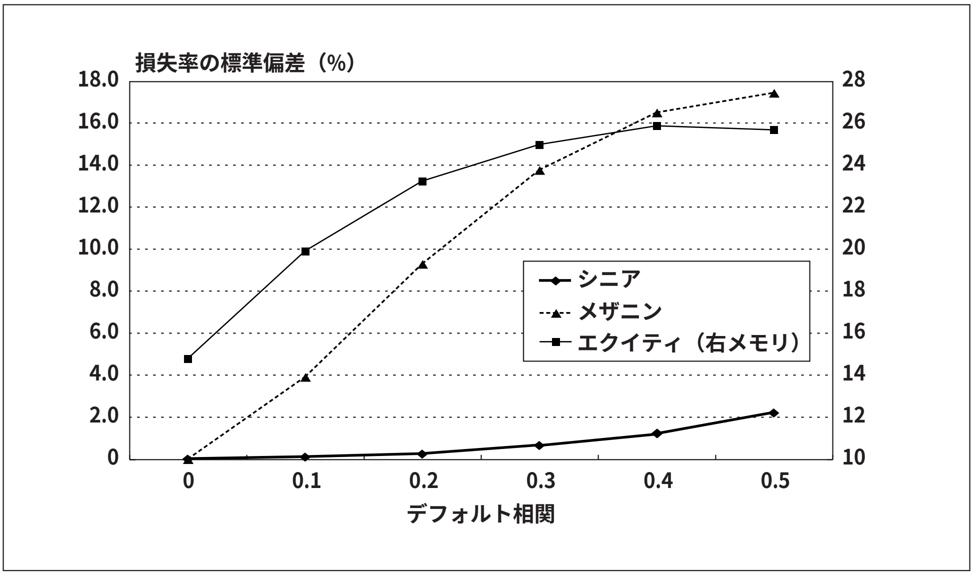


図10　デフォルト相関と損失率の標準偏差



(3) 正規コピュラ・モデル以外のモデルによる計算結果

次に、正規コピュラ・モデル以外のモデルを用いた計算結果を示す。

まず、表5はクレジット・メトリックス型モデルをポートフォリオ1に用いた結果である。正規コピュラ・モデルを用いた結果(表3)と比べると、プライシングに必要な期待損失率は、メザニンを除き、ほぼ同水準であることがわかる。標準偏差やパーセント点にも同様の傾向がある。

また、ガンベル・コピュラを用いたモデルをポートフォリオ1に適用した結果を示す。前節で説明したように、(17)式のガンベル・コピュラはパラメータγのみで表現されるため、シミュレーションでは、原資産間のデフォルト相関に、原資産の属性(業種)に応じて異なる値を用いることができない。そのため、ここでは原資産間のデフォルト相関を一律0.4として、シミュレーションを行った。その結果を、デフォルト相関が0.4となる正規コピュラを用いたモデルの結果とあわせて、表6に示す。

ポートフォリオ全体の期待損失率はほぼ同じであるが、パーセント点や標準偏差は、ガンベル・コピュラによる方が高くなっている。これは、4節でみたように、ガンベル・コピュラを用いると、多変量正規分布に比べて、同時分布の裾部分での強い依存関係が表現されることに基づいている。このようにガンベル・コピュラは、

表5　クレジット・メトリックス型モデルによる損失率の計算結果

クレジット・メトリックス	シニア	メザニン	エクイティ	ポートフォリオ全体
期待値	0.000%	0.041%	16.677%	1.169%
標準偏差	0.000%	1.669%	16.766%	1.181%
95%点	0.000%	0.000%	51.074%	3.575%
99%点	0.000%	0.000%	76.385%	5.347%

表6　コピュラ・モデルによる損失率の計算結果

ガンベル・コピュラ	シニア	メザニン	エクイティ	ポートフォリオ全体
期待値	0.395%	2.463%	10.478%	1.163%
標準偏差	4.199%	15.005%	21.415%	4.918%
95%点	0.000%	0.000%	63.656%	4.456%
99%点	11.805%	100.000%	100.000%	20.624%

正規コピュラ	シニア	メザニン	エクイティ	ポートフォリオ全体
期待値	0.117%	3.142%	14.294%	1.200%
標準偏差	1.195%	16.514%	25.874%	2.772%
95%点	0.000%	0.000%	89.405%	6.258%
99%点	2.832%	100.000%	100.000%	12.548%

表7　2項展開法モデルによる損失率の計算結果

2項展開法	シニア	メザニン	エクイティ	ポートフォリオ全体
期待値	0.000%	0.016%	14.246%	0.998%
標準偏差	0.003%	0.905%	18.115%	1.271%

保守的に同業種間のデフォルト相関を一律に用い、裾部分での依存関係を強くしたいときには有効な手法となる。

次に、2項展開法モデルをポートフォリオ1に適用した結果を示す[51]。ポートフォリオ1の分散指数を、同業種の原資産数から求めた分散指数の合計として算出すると55となった。5年の累積加重平均デフォルト確率をpとすると、55個の仮想的な原資産のうちi個がデフォルトする確率は${}_{55}C_i\,p^i(1-p)^{55-i}$となるので、これを用いて各トランシェの損失率の期待値と標準偏差を求めることができる。表7にその結果を示す。

これを表3と比較すると、メザニンを除き、損失率は、2項展開法モデルと正規コピュラ・モデルで極端に大きな差は発生していないことがわかる。シミュレーションを使わない近似手法である2項展開法モデルは、損失額分布の形状によらず、期待値と分散のみを用いて、2項分布で近似しているため、リスク量として用いられるパーセント点の算出に使うことは基本的に困難であるが、ここでの計算結果をみる限りは、CDOのプライシングには、ある程度は有用である可能性があると考えられる。

(4) インプライド・デフォルト確率を用いた計算結果

(3) までは、格付会社が公表している過去の累積デフォルト確率を用いたが、原資産のクレジット・スプレッド等に反映されているデフォルト確率（=インプライド・デフォルト確率）を用いる方が適当であるという考え方もある。実際、過去の累積デフォルト確率は、一般にはリスク中立ベースの確率ではないため、これをプライシング・モデルの入力パラメータに使うこと自体、理論的な厳密性に欠けていることも事実である。

社債価格やCDSのプレミアムを用いて、インプライド・デフォルト確率を算出する理論モデルは、例えば楠岡・青沼・中川［2001］に詳しいが、ここでは以下のように便宜的に求めることにする[52]。すなわち、取引価格100円の国債[53]のキャッシュ・

51　ムーディーズでは、2項展開法モデルを用いてCDOの各トランシェの期待損失率を算出し、さらに過去のデフォルト確率に一定のストレス・ファクターを乗じたものを勘案して、格付を付与している（Backman and O'Connor［1995］）。

52　ここでのインプライド・デフォルト確率の便宜的な算出方法は、実務でよく使われているものである。

53　国債はリスク・フリーな債券とみなす。

フローを社債価格から求めたディスカウント・ファクターで割り引き、その値と100円との差額を信用リスクが反映された部分と考え、その100円に対する比率をインプライド・デフォルト確率と便宜的に考える。なお、ここでのディスカウント・ファクターは「社債のスポット・レート＝国債のスポット・レート＋社債の対国債スプレッドー政府保証債の対国債スプレッド[54]」として求める。

以下では、ポートフォリオ1で、対国債スプレッド（格付ごとの平均値）から求めた格付別のインプライド・デフォルト確率を用いてシミュレーションを行った結果を示す。ここでは、市場でストレスが発生したときを想定し、直近でスプレッドが最も拡大した1998年10月1日のデータを用いる。算出したインプライド・デフォルト確率を表8に示す。

このインプライド・デフォルト確率の水準は、最近（2001〜02年）の社債スプレッドから求められるものに比べてかなり高い。なお、後者は、格付会社が公表している過去の累積デフォルト確率と比べると幾分高めである。

表8のデフォルト確率を正規コピュラ・モデルに適用して、ポートフォリオ1の損失率を求めた結果を表9に示す。

表9をみると、デフォルト確率が相対的に高いことを反映して、損失率も大きくなっていることがわかる。特にメザニンでは、99%点のみならず95%点でも全額が毀損されている。なお、シニアでこの水準まで期待損失率が高くなると、AAA格が付与される、あるいは維持される可能性は極めて小さくなる[55]。

表8　スプレッド拡大時におけるインプライド・デフォルト確率

	1年後	2年後	3年後	4年後	5年後
AAA	0.162%	0.290%	0.435%	0.530%	0.684%
AA	0.795%	1.407%	1.883%	2.581%	2.899%
A	1.435%	2.449%	3.793%	4.829%	5.819%
BBB	2.971%	5.045%	7.116%	10.155%	12.530%

表9　正規コピュラ・モデルによる計算結果（インプライド・デフォルト確率）

正規コピュラ	シニア	メザニン	エクイティ	ポートフォリオ全体
期待値	0.434%	14.869%	54.934%	4.682%
標準偏差	1.838%	32.801%	34.163%	4.087%
95%点	2.913%	100.000%	100.000%	12.622%
99%点	9.834%	100.000%	100.000%	18.851%

54 政府保証債のスプレッドは、ここでは、流動性プレミアム分として導入した。
55 2002年の米国CDO市場で、大手企業倒産を契機としたスプレッド拡大に伴って、多くのCDOが格下げされた。

一般に、同一水準の格付が付与されていても、個別の社債スプレッドやCDSのプレミアムには、格差が生じる[56]。このため、その格差が無視できないときは、CDOのプライシングやリスク評価に、格付会社が公表しているような格付ごとの平均的なデフォルト確率を用いることは必ずしも適当でないと考えられる。

（5）CDOへの投資やプライシングにおける留意点

以下では、（4）までのシミュレーション結果を踏まえ、CDOの各トランシェへ投資する際の留意点、およびCDOのプライシングにおける留意点を考察する。CDOは信用リスクのある商品であり、一般に信用リスクのある商品への投資やそのプライシングにおいては多くの留意点があり得るが、ここではCDOの商品性上で特有であると考えられる諸点を述べる。

イ．CDOへの投資上の留意点

（イ）エクイティ

本節の分析結果からは、エクイティの期待損失率は、シニアやメザニンのそれとは逆に、原資産ポートフォリオの分散度合いとの間に正の相関関係を持っていることがわかった。エクイティのこの性質は、エクイティが原資産ポートフォリオから発生する損失を最初に吸収する役割を持っていることに由来する。この性質を前提にすると、原資産ポートフォリオが分散化されているからといって、エクイティの期待損失率も小さいと考えることは極めて危険である。

また、エクイティのリスク（損失率の標準偏差やパーセント点）は、原資産ポートフォリオで原資産間の相関がなくかつ無限に分散化されているという条件が満たされれば、原理的にはゼロとなる。しかし、実際に組成されるCDOの原資産ポートフォリオで、そうした条件が近似的にも満たされることは、現実的にはほとんどないと思われる。したがって、本稿の仮想ポートフォリオによる計算例でみたように、エクイティのリスクは、通常は、非常に大きい水準にあるということを認識しておくべきであると考えられる。

（ロ）シニア、メザニン

シニア、メザニンは、エクイティに比べれば、期待損失率やリスクも小さく、相対的には安全度の高い投資対象である。しかし、上述のようにデフォルト相関やデフォルト確率が大きくなると、損失率の期待値が大きくなるだけでなく、リスクは、99%点でみると特にメザニンでその全額が毀損する場合があり、極めてリスクの大きい投資対象に変貌してしまうことになる。したがって、シニアやメザニンは購入時にはリスクが小さくとも、市場にストレスが発生する等の大きな変化があると、

56 以前は投資家がCDSのプレミアム情報を取得することは非常に困難であったが、最近は定期的に気配値を公表する証券会社等も増えている。

デフォルト相関やデフォルト確率の上昇によって、リスクの大きな商品になってしまう可能性がある。そうしたデフォルト相関やデフォルト確率の上昇が起こり得るような何らかのストレスの発生を仮定したシナリオ分析を行うことが重要であると考えられる。

ロ．CDOのプライシングにおける留意点

（イ）原資産間の相関の扱い

CDOは複数の原資産（ローン等）からなる原資産ポートフォリオを前提とするため、プライシングに当たっては、原資産間の相関に関する情報が必要となる。この点は、単体の原資産（参照資産）を持つクレジット・デリバティブのプライシングで、当該原資産と他の原資産との間の相関に関する情報を明示的には必要としないこととは大きな違いである。この違いが、実務上、CDOのプライシングを行うことを相対的に難しくしていることになる。

上述のように、実務上、原資産間の相関の具体的な水準を求めることは容易ではなく、多くの前提をおいたうえで、推定がなされているのが実態である。したがって、求められた水準については、ある程度、幅を持ってみることが適当であると思われる。

（ロ）メザニンの期待損失率

デフォルト強度モデル以外の各種プライシング・モデルによる計算結果からは、期待損失率は、シニア、エクイティではモデルによらず概ね同じ水準にある一方、メザニンではモデルによって相当の開きが生じた。このことは、メザニンが、エクイティが全て毀損された後に損失の吸収を開始するため、シミュレーションを行う場合、その前提となるモデルの違いによって、例えば、エクイティを完全に毀損するサンプルの数に格差が生じ得る等の複雑な要因に基づくものではないかと推察される。したがって、メザニンの期待損失率の算出に当たっては、その水準が、選択したプライシング・モデルによってかなり異なり得ることは予め認識しておく必要があると思われる。

なお、シニアでも、メザニン同様の要因から期待損失率の水準がプライシング・モデルに依存し得るが、シニアの期待損失率は、シニアの性質上、通常はほぼゼロであるので、モデルによる格差は許容の範囲内に収まると考えられる。

６．おわりに

本稿では、CDOの商品性や国内市場の動向を概説したうえで、CDOの複数のプライシング・モデルの理論面を整理するとともに、具体的な計算結果に基づいて、CDOの特性等を考察した。シミュレーションの結果から確認したように、CDOは優先劣後構造を持った商品であるため、通常のクレジット・ポートフォリオとは異

なるリスク・プロファイルを有している。CDOのプライシングに際しては、原資産間のデフォルト相関の度合いによって、各トランシェの期待損失率等が大きく異なり得るため、デフォルト相関の扱いには特に留意する必要がある。また、原資産ポートフォリオの分散度合いによっても、各トランシェの期待損失率等はかなり違ってくる。したがって、CDOに投資する場合には、格付のみを判断材料にするのではなく、原資産間のデフォルト相関および分散の度合い等もあわせて吟味することが肝要であることになる。

補論. マーケット・バリュー型CDOに関する補足

マーケット・バリュー型CDOの組成に際しては、通常、原資産を一括して市場から調達することは困難であることが多いため、ランプアップ期間[57]と呼ばれる期間の中で徐々に原資産が購入される。ランプアップ期間の終了後、原資産のポートフォリオは、再投資期間と呼ばれるスキーム期間の中で原資産の入れ替えが行われる。また、CDOの満期日と原資産の満期日は通常は一致しないため、各トランシェの償還が満期一括償還となることは少なく、ソフト・ブレット償還[58]、またはコントロールド・アモチゼーション償還[59]に基づいて、原資産の売却代金から返済されることが一般的である。

マーケット・バリュー型CDOの評価に当たっては、原資産の信用度とともに、コラテラル・マネージャーの運用能力が重要視されるが、原資産の信用度が悪化して一定の基準に達した場合に、トリガーが引かれて強制的に原資産ポートフォリオのリバランスが図られるといったリスク低減策が講じられているか否かもポイントとなる。以下では、代表的なトリガーを挙げる。

(1) アドバンス・レート

アドバンス・レートとは、原資産の時価に対して、どの程度のCDOが発行できるかを決める比率である。これは原資産の収益率のボラティリティや流動性に基づいて決められている。例として、米格付会社フィッチが示したアドバンス・レートを下表に示す（Howard, Lee and Mancini［1999］）。

表A-1　アドバンス・レート（%）

原資産カテゴリー	AAA	AA	A	BBB	BB	B
キャッシュ	100	100	100	100	100	100
AAA格社債	87	89	91	93	95	96
AA格社債	86	88	91	93	95	96
A格社債	84	87	89	92	94	96
BBB格社債	82	85	88	91	94	96
BB格ハイ・イールド債	77	82	86	90	92	94
エマージング債	27	40	50	71	78	85

資料：フィッチ

57 CDOのスキーム開始の数ヵ月前から、スキーム開始後半年程度を指すことが多い。
58 原資産が生み出すキャッシュ・フローのうち元本部分の合計が、償還予定額に達した場合に一括償還する償還形態。
59 予め決められた金額を予め決められたスケジュールに従って分割償還する償還形態。

この表から、ボラティリティが高く、流動性が低いものほどアドバンス・レートが低くなる傾向があることがわかる。例えば、AA格社債を原資産としてAAA格のCDOを組成する場合は、時価総額の86%までの発行が認められることになり、14%の価格下落のクッションが要求される。

（2）超過担保テスト

超過担保テスト（overcollateralization test〈OCテスト〉）とは、CDOの各トランシェを償還するのに十分な資産ポートフォリオが維持されているか否かを定期的にチェックする仕組みを指す。例えば、原資産を1,000億円のポートフォリオとするCDOで、AAA格を維持するためのアドバンス・レートが86%で、仮に800億円が発行されたとする。市場価格が下落し、1,000億円の原資産ポートフォリオの時価が1割下落した（900億円）とすると、アドバンス・レートに基づくAAA格の発行額は774億円（900億円×0.86）であるから、クッションとして26億円が不足となる。このように、ある格付で、CDOの発行額がアドバンス・レートに基づく資産価額を上回った場合、コラテラル・マネージャーは、アドバンス・レートの低いものから高いものへと原資産の入れ替えを行い、全体的なアドバンス・レートの上昇を図ることが要求される。そして一定の期間にその基準を満たすことができなくなった場合は、当該CDOはデフォルトの扱いとなり、CDOおよびその原資産の管理・処分権は優先債の保有者に移り、最も優先順位の高いトランシェから繰上償還されることになる。

（3）最低純資産テスト

最低純資産テスト（minimum net worth test〈MNWテスト〉）は、CDOが組成された時点からどの程度の原資産が毀損したか、つまりエクイティがどれだけ減少しているかをみるテストである。

トリガーの基準は案件によって異なるが、例えば「シニア債の格付を維持するためにはエクイティの60%は残っていなければならない」というような基準が設定される。この基準に抵触する場合、コラテラル・マネージャーは原資産の入れ替えを行って基準をクリアする必要が生じ、一定の期間に改善できない場合にはOCテストと同様に繰上償還が行われる。

参考文献

家田 明・丸茂幸平・吉羽要直、「与信ポートフォリオにおける信用リスクの簡便な算出方法」、『金融研究』第19巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2000年9月、109～144頁

木島正明、『金融リスクの計量化【下】クレジット・リスク』、金融財政事情研究会、1998年

楠岡成雄・青沼君明・中川秀俊、『クレジット・リスク・モデル』、金融財政事情研究会、2001年

杉原慶彦・細谷 真・馬場直彦・中田勝紀、「信用リスク移転市場の新たな展開 ── クレジット・デフォルト・スワップとCDOを中心に ──」、マーケット・レビュー 2003-J-2、日本銀行金融市場局、2003年

水野裕二・河合祐子、『詳細 信用リスク商品 ── クレジット・デリバティブと証券化の実務』、ISコム、2002年

ムーディーズ、「2002年の日本のCDO市場回顧と今後の見通し：日本の債務担保証券市場は銀行CLOを中心に前年の8倍に拡大」、Moody's Japan K.K.、2003年1月

矢島 剛、『CDO クレジット・デリバティブと証券化のコラボレーション』、金融財政事情研究会、2003年

吉羽要直、「ガンベル・コピュラに従う乱数の発生方法について」、mimeo、2003年

Backman, A., and G. O'Connor, "Rating Cash Flow Transactions Backed by Corporate Debt 1995 Update," Moody's Investors Service, 1995.

Cifuentes, A., and G. O'Connor, "The Binomial Expansion Method Applied to CBO/CLO Analysis," Moody's Investors Service, 1996.

Duffie, D., and N. Gârleanu, "Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations," *Financial Analyst Journal*, 57 (1), 2001, pp. 41-59.

———, and K. J. Singleton, *Credit Risk–Pricing, Measurement, and Management–*, Princeton University Press, 2003.

Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann, "Correlation: Pitfalls and Alternatives," *Risk*, 12 (5), May 1999, pp. 69-71.

Fabozzi, F. J., and L. S. Goodman, *Investing in Collateralized Debt Obligations*, John Wiley & Sons, 2001.

Finger, C. C., "A comparison of stochastic default rate models," Working Paper, The RiskMetrics Group, 2000.

Goodman, L. S., "Synthetic CDOs: An Introduction," *The Journal of Derivatives*, 9 (3), 2002, pp. 60-72.

Howard, D., J. Lee, and M. J. Mancini, "Market Value CBO/CLO Rating Criteria," Fitch Ratings, 1999.

Joe, H., *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, 1997.

J. P. Morgan & Co., "CreditMetrics™ Technical Document," April, 1997.

Kanter, M., "Stable Densities Under Change of Scale and Total Variation Inequalities," *The Annals of Probability*, 3 (4), 1975, pp. 697-707.

Li, D. X., "On Default Correlation: A Copula Function Approach," *The Journal of Fixed Income*, 9 (4), 2000, pp. 43-54.

Marshall, A. W., and I. Olkin, "Families of Multivariate Distributions," *Journal of the American Statistical Association,* 83 (403), 1988, pp. 834-841.

Merton, R., "On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates," *The Journal of Finance*, 29, 1974, pp. 449-470.

Nagpal, K., and R. Bahar, "Measuring default correlation," *Risk*, 14 (3), March, 2001, pp. 129-132.

Nelsen, R. B., *An Introduction to Copulas,* Springer, New York, 1999.

Schönbucher, P., "Term Structure Modelling of Defaultable Bonds," *Review of Derivatives Research*, 2 (2/3), 1998, pp. 161-192.

Schmidt, W., and I. Ward, "Pricing default baskets," *Risk*, 15 (1), January, 2002, pp. 111-114.