

日経225オプションデータを使った GARCHオプション価格付け モデルの検証

わたなべとしあき
渡部敏明

要 旨

本稿は、GARCHおよびそれを拡張したモデルを使って日経225オプション価格を計算し、どのモデルが実際のオプション価格の変動をうまく捉えることができるか比較を行ったものである。ボラティリティの定式化には、GARCHモデルに加え、前日に株価が上がったか下がったかによるボラティリティ変動の非対称性を捉えることのできるGJR、EGARCHモデルを用いている。期待収益率の定式化には、投資家の危険中立性を仮定し期待収益率が安全資産の利子率に等しいとするモデルと危険中立性を仮定せず期待収益率がボラティリティや過去の収益率に依存して変動するモデルを用いており、後者のモデルでは、Duan [1995] に従い、局所危険中立評価関係の仮定のもとでオプション価格を導出している。収益率の誤差項の分布には正規分布と t 分布を用いている。主な結論は以下のとおりである。(1)危険中立性を仮定せず期待収益率がボラティリティや過去の収益率に依存して変動するモデルを用いてDuan [1995] の方法で計算してもパフォーマンスは上がらない。(2)収益率の誤差項の分布を t 分布にしてもパフォーマンスは上がらない。(3)GARCH、GJR、EGARCHモデルの相対的なパフォーマンスはマネネスに依存する。(4)プット・オプションではすべてのGARCH型モデルが、コール・オプションではGJRモデルが、ほとんどすべてのマネネスでブラック＝ショールズ・モデルのパフォーマンスを上回る。

キーワード：オプション、危険中立性、局所危険中立評価関係、日経225株価指数、EGARCH、GARCH、GJR、 t 分布

本稿は、筆者が日本銀行金融研究所客員研究員の期間に行った研究をまとめたものである。日本銀行金融研究所の方々および北海道大学で行われた研究会「ファイナンスへの統計理論、時系列解析及びそれらの応用」の参加者から多くの貴重なコメントを頂いた。また、日本銀行金融研究所研究生の里吉清隆氏にはデータの整理および計算を手伝ってもらった。最後に、本研究に用いたオプションデータは大阪証券取引所から提供して頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。なお、本稿で示された見解はすべて筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

渡部敏明 東京都立大学経済学部 (E-mail: twatanab@bcomp.metro-u.ac.jp)

1 . はじめに

オプション価格の導出に用いられるBlack and Scholes [1973] モデル(以下BSモデル)では、ボラティリティと呼ばれる原資産価格変化率の2次のモーメントは満期まで一定であると仮定される。ところが、近年のファイナンスの計量分析では、ボラティリティは日々確率的に変動するという考えが主流になってきており、そうしたボラティリティの変動を明示的に定式化するボラティリティ変動モデルに注目が集まっている。ボラティリティ変動モデルの代表的なものに、Engle [1982] によって提案されたARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) モデルを一般化したBollerslev [1986] のGARCH (generalized ARCH) モデルがある。このモデルは最尤法によって簡単に推定できることから、資産価格に関する多くの実証分析に応用されてきた。本稿は、そうしたGARCHモデルおよびそれを発展させたモデル(本稿では、そうしたモデルを総称してGARCH型モデルと呼ぶ)を使って日経225オプション価格を計算し、どのモデルが実際のオプション価格の変動を捉えるのにパフォーマンスがよいか比較を行ったものである。

株式市場では、株価が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが古くから知られている(Black [1976], Christie [1982])。GARCHモデルはこうしたボラティリティ変動の非対称性を捉えられないので、その後、こうした現象を考慮に入れたモデルがいくつか提案されている。代表的なものに、Glosten, Jagannathan and Runkle [1993] によって提案されたGJRモデルとNelson [1991] によって提案されたEGARCH (exponential GARCH) モデルがあり、本稿では、これらのモデルを用いた分析も行っている。また、オプション価格を導出する際には、ボラティリティだけでなく、期待収益率の定式化も重要になる。本稿では、期待収益率の定式化として、投資家の危険中立性を仮定した定式化と仮定しない定式化を両方行っている。危険中立性を仮定する場合には、期待収益率は安全資産の利子率に等しくなければならない。これに対して、危険中立性を仮定しない場合には、期待収益率は安全資産の利子率と乖離してよいので、より柔軟に定式化することができる。本稿では、特に、リスクとリターンのトレード・オフと収益率の自己相関を考慮に入れ、期待収益率がボラティリティおよび過去の収益率に依存するものとして定式化している。GARCH型モデルの誤差項の分布には、通常、正規分布が用いられる。しかし、最近の研究から、スチューデントの t 分布の方がフィットがよいことが明らかになってきている(Bollerslev, Engle and Nelson [1994], Watanabe [2000], 渡部 [2000] 2.4.2節)。そこで、本稿では、誤差項の分布として、正規分布に加え、 t 分布を用いた分析も行っている。

オプション価格の導出方法は、投資家の危険中立性を仮定するか否かで異なる。危険中立性を仮定した場合には、日経225オプションのようなヨーロッパ・オプションの価格は簡単に導出できる。まず、推定されたGARCH型モデルを用いてオプションの満期における原資産価格のシミュレーションを行い、得られた値を使っ

て満期におけるオプション価格の期待値を求める。次に、それを安全資産の利率で割り引いて現在価値にすればよい。これに対して、危険中立性を仮定しない場合には、満期におけるオプション価格の期待値は危険中立確率測度のもとで求めなければならない。そこで、オプションの満期における原資産価格のシミュレーションは、推定されたモデルをそのまま用いるのではなく、危険中立確率測度のもとでモデルを変換したうえで行わなければならない。Duan [1995] は、局所危険中立評価関係 (locally risk-neutral valuation relationship) という仮定を置くことにより、GARCH型モデルを危険中立確率測度のもとで変換する方法を示しており、本稿でもこの方法を用いている。

本稿で得られた主な結論は以下のとおりである。(1)危険中立性を仮定せず期待収益率がボラティリティや過去の収益率に依存して変動するモデルを用いてDuan [1995] の方法で計算してもパフォーマンスは上がらない。(2)収益率の誤差項の分布を t 分布にしてもパフォーマンスは上がらない。(3)GARCH、GJR、EGARCHモデルの相対的なパフォーマンスはマネネス(原資産価格を権利行使価格で割ったもの)に依存する。(4)プット・オプションではすべてのGARCH型モデルが、コール・オプションではGJRモデルがほとんどすべてのマネネスでBSモデルのパフォーマンスを上回る。

以下、本稿は次のような構成になっている。2節では、本稿で分析に用いたGARCHモデルおよびそれを発展させたモデルについて説明した後、それらのモデルを使ったオプション価格の導出方法について解説する。続く3節で実証結果を説明する。最後に、4節において、結論と今後の発展について述べる。

2 . GARCHオプション価格付けモデル

(1) ボラティリティ変動の定式化

本稿では、ボラティリティ変動の定式化として、GARCH、GJR、EGARCHモデルを用いる。そこで、まず最初にこれらのモデルについて簡単に説明を行う¹。

まず、収益率(または、価格変化率) R_t を $t-1$ 期において予測可能な変動 μ_t と予測不可能な変動 ϵ_t の和

$$R_t = \mu_t + \epsilon_t, \quad (1)$$

として表す。以下では、 μ_t を期待収益率、 ϵ_t を予測誤差と呼ぶ。ボラティリティ変

1 これらのモデルを含むGARCH型モデルについてより詳しくは、Bollerslev, Engle and Nelson [1994]、渡部 [2000] を参照のこと。

動モデルでは、さらに予測誤差 ϵ_t を、常に非負の値をとる σ_t と期待値0、分散1の過去と独立で同一な分布に従う確率変数 z_t との積、

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}, \quad E(z_t) = 0, \quad \text{Var}(z_t) = 1, \quad (2)$$

として表す。この σ_t を R_t のボラティリティと呼ぶ。また、期待収益率 μ_t の定式化と z_t の分布をどうするかについては後で説明する。

ボラティリティ σ_t の変動の定式化として最もよく用いられているのは、Engle [1982]によって提案されたARCHモデルを一般化したBollerslev [1986]のGARCHモデルである。ボラティリティの変動を定式化するうえで必ず考慮に入れなければならないことは、ボラティリティのショックには持続性があり、ボラティリティが上昇(低下)した後はボラティリティが高い(低い)期間がしばらく続くことである。こうした現象はボラティリティ・クラスタリング(volatility clustering)と呼ばれ、あらゆる資産収益率の日次あるいは週次データで観測される。こうしたボラティリティに対するショックの持続性を考慮し、Engle [1982]がボラティリティの2乗を過去の予測誤差の2乗の線形関数として定式化するARCHモデルを、その後、Bollerslev [1986]がボラティリティの2乗の説明変数に過去の予測誤差の2乗だけでなく、過去のボラティリティの2乗を加えたGARCHモデルを提案した。本稿の分析では、次のようなGARCH(1,1)モデルを用いる²。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2, \quad \omega > 0, \quad \beta, \alpha \geq 0. \quad (3)$$

ここで、パラメータに非負制約を課すのは σ_t^2 の非負性を保証するためである。

GARCHモデルの基本となる仮定は、 t 期のボラティリティを $t-1$ 期に既に値がわかっている変数だけの関数として定式化するということである。この仮定さえ守れば、パラメータを最尤法によって簡単に推定できるため、GARCHモデルは多くの資産価格の実証分析に応用されるとともに、さまざまな改良が加えられてきた。GARCHモデルを改良するに当たって注目されたのが、株式市場で観測されるボラティリティ変動の非対称性である。株式収益率のボラティリティは、株価が上がった日の翌日よりも株価が下がった日の翌日の方が上昇する傾向があることが経験的に知られており、こうした前日に株価が上がったか下がったかによるボラティリティ変動の非対称性はGARCHモデルでは捉えることができない。そこで、その後、こうしたボラティリティ変動の非対称性を取り入れたモデルが登場することになる。そうしたモデルの代表的なものに、Glosten, Jagannathan and Runkle [1993]の提案したGJRモデルやNelson [1991]の提案したEGARCHモデルがある。

2 より一般的なGARCH(p, q)モデルは次のように定式化する。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2, \quad \omega > 0, \quad \beta_i, \alpha_j \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, p; j=1, 2, \dots, q).$$

GJRモデルでは、 ϵ_{t-1} が負であれば1、それ以外ではゼロであるようなダミー変数 D_{t-1}^- を用いることによって、ボラティリティ変動の非対称性を捉えようとする。本稿の分析では、次のようなGJR(1,1)モデルを用いる³。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \gamma D_{t-1}^-)\epsilon_{t-1}^2, \quad \omega > 0, \quad \beta, \alpha, \gamma \geq 0. \quad (4)$$

このモデルでも、 σ_t^2 の値が負にならないように、パラメータに非負制約が必要となる。前日の予測誤差 ϵ_{t-1} が正であれば、 $D_{t-1}^- = 0$ なので、(4)式は、

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2,$$

となる。これに対して、 ϵ_{t-1} が負であれば、 $D_{t-1}^- = 1$ なので、

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \gamma)\epsilon_{t-1}^2,$$

となる。そこで、 $\gamma > 0$ であれば、予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

これまでのARCH、GARCH、GJRモデルは、すべて左辺を σ_t^2 にしていた。これに対して、Nelson [1991] の提案したEGARCHモデルでは、左辺を $\ln(\sigma_t^2)$ にする。こうすることにより、パラメータに非負制約が必要なくなるだけでなく、負の値をとり得るような変数でも右辺に説明変数として加えることが可能になる。EGARCHモデルでは過去の収益率の予測誤差 ϵ_{t-1} をボラティリティ σ_{t-1} で割って基準化した z_{t-1} ($= \epsilon_{t-1} / \sigma_{t-1}$)を右辺に加えることにより、ボラティリティ変動の非対称性を捉えようとしている。本稿の分析では、次のようなEGARCH(1,1)モデルを用いる⁴。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma z_{t-1} + \alpha (|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)). \quad (5)$$

この式は、 $z_{t-1} > 0$ であれば、

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + (\alpha + \gamma)|z_{t-1}| - \alpha E(|z_{t-1}|),$$

3 より一般的なGJR(p, q)モデルは次のように定式化する。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q (\alpha_j \epsilon_{t-j}^2 + \gamma_j D_{t-j}^- \epsilon_{t-j}^2), \quad \omega > 0, \quad \beta_i, \alpha_j, \gamma_j \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, p; j=1, 2, \dots, q).$$

4 より一般的なEGARCH(p, q)モデルは、ボラティリティの変動は次のように定式化する。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q \theta_j [\gamma_j z_{t-j} + \alpha (|z_{t-j}| - E(|z_{t-j}|))], \quad \theta_1 = 1.$$

となるのに対して、 $z_{t-1} < 0$ であれば、

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + (\alpha - \gamma) |z_{t-1}| - \alpha E(|z_{t-1}|),$$

となる。そこで、EGARCHモデルでは、 $\gamma < 0$ であれば、予期せず価格が上がった日の翌日より予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

以上のGARCH、GJR、EGARCHモデルにおいて、ボラティリティに対するショックの持続性を測る指標はそれぞれ $\alpha + \beta$ 、 $\alpha + \beta + \gamma/2$ 、 β であり、これらの値が1に近いほどショックの持続性が高いことになる。これは、(3)、(4)、(5)式の両辺の $t-1$ 期の情報集合 I_{t-1} を条件とする期待値をとると、それぞれ、

$$E(\sigma_t^2 | I_{t-1}) = \omega + (\alpha + \beta) \sigma_{t-1}^2, \quad (6)$$

$$E(\sigma_t^2 | I_{t-1}) = \omega + (\alpha + \beta + \gamma/2) \sigma_{t-1}^2, \quad (7)$$

$$E(\ln(\sigma_t^2) | I_{t-1}) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2), \quad (8)$$

となることから確認できる。ただし、(7)式が成り立つためには、誤差項 z_t の分布が左右対称であるという仮定が必要である。

(2) 期待収益率の定式化と誤差項の分布

オプション価格の導出では、ボラティリティの定式化だけでなく、(1)式の期待収益率 μ_t をどのように定式化するかが重要になる。本稿では、投資家の危険中立性を仮定した定式化と仮定しない定式化を両方行う。

本稿では、原資産の $t-1$ 期から t 期の収益率（価格変化率）を $R_t = (S_t - S_{t-1}) / S_{t-1}$ で定義する。ただし、 S_t 、 S_{t-1} は t 期と $t-1$ 期の原資産価格を表す。収益率をこのように定義すると、投資家の危険中立性を仮定した場合には、期待収益率 μ_t は安全資産の金利 r と等しくなければならないので、(1)式は、

$$R_t = r + \epsilon_t, \quad (9)$$

となる⁵。ただし、これは $R_t = (S_t - S_{t-1}) / S_{t-1}$ と定義しているからで、もし連続複利計算（continuous compounding）を使って $R_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$ と定義すると(9)式は正

.....
5 本稿では、金利の変動は考えない。

しくない。その場合、例えば、 z_t が標準正規分布に従うなら、対数正規分布の性質から、

$$R_t = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad (10)$$

となる。ただし、(10)式の金利 r は連続複利であるのに対して、(9)式の r はそうではない。(10)式は尺度に関して不変ではなく、 R_t として%表示の収益率を用いるのと%表示でない収益率を用いるのでは推定結果が異なってしまう。また、 z_t が標準正規分布以外の分布に従う場合には、(10)式の右辺第2項を書き換えなければならないが、例えば、 z_t が t 分布に従う場合には、それを解析的に求めることができない。そこで、本稿では、 $R_t = (S_t - S_{t-1}) / S_{t-1}$ と定義し、(9)式を用いることにする⁶。

危険中立性を仮定しない場合には、期待収益率は安全資産の利子率と乖離して構わないので、柔軟な定式化ができる。Engle, Lilien and Robins [1987]は、リスクとリターンのトレード・オフを考慮に入れ、収益率を次のように定式化している。

$$R_t = a + c\sigma_t^2 + \epsilon_t.$$

収益率をこのように定式化し、ボラティリティをGARCHモデルによって定式化したモデルは、GARCH-Mモデルと呼ばれる。また、本稿の分析に用いる日経225のような株価指数は、指数を構成する銘柄の取引される頻度が異なる(non-synchronous trading)ために、変化率に正の自己相関が生じやすいことが知られている(Campbell, Lo and Mackinlay [1997] Section 3.1)。そこで、本稿では、危険中立性を仮定しない場合の収益率を次のように定式化する。

$$R_t = r + a + bR_{t-1} + c\sigma_t^2 + \epsilon_t. \quad (11)$$

$a = b = c = 0$ であれば、この式は(9)式になり、投資家は危険中立的であることになる。

これまで、誤差項 z_t は平均0、分散1の過去と独立で同一な分布に従うというだけで、具体的な分布については仮定してこなかった。資産収益率の分布は正規分布よりも裾が厚いことが古くから知られている(Fama [1965], Mandelbrot [1963])。GARCH型モデルの誤差項 z_t の分布には、通常、標準正規分布が用いられる。 z_t の分布が標準正規分布であっても、ボラティリティが日々変動するなら、収益率の分布は正規分布よりも裾が厚くなる(渡部 [2000] 1.4節)。しかし、それは z_t の分布が標準正規分布でよいということを意味しているわけではなく、実際、最近の研究で、

6 Hafner and Herwartz [2001]も同様の定義をし、GARCHオプション価格付けモデルの分析を行っている。

収益率の分布の裾の厚さはボラティリティの変動だけでは完全に説明することはできず、誤差項の分布にも裾の厚い分布を当てはめた方がフィットがよくなることが明らかになってきている。GARCH型モデルの誤差項 z_t の分布としてこれまでに用いられている裾の厚い分布には、学生t分布 (Bollerslev [1987]) とGED (generalized error distribution) (Nelson [1991]) があるが、Bollerslev, Engle and Nelson [1994]、Watanabe [2000]、渡部 [2000] 2.4.2節らは前者の方がよりフィットがよいとの結果を報告している⁷。そこで、本稿では、 z_t の分布として、標準正規分布だけでなく、分散を1に基準化した t 分布も用いる⁸。ただし、その場合には、 t 分布の自由度 ν も未知パラメータとして推定する。また、EGARCHモデル(5)式の右辺にある $E(|z_{t-1}|)$ は、 z_t が標準正規分布に従う場合には $\sqrt{2/\pi}$ 、基準化した t 分布に従う場合には $\sqrt{(\nu-2)/\pi} \Gamma((\nu-1)/2) / \Gamma(\nu/2)$ である。ただし、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数を表す。

以下、ボラティリティの定式化をGARCHモデル、誤差項 z_t の分布を標準正規分布、収益率の定式化を投資家の危険中立性を仮定した(9)式にしたモデルをGARCH-nモデル、収益率の定式化だけ危険中立性を仮定しない(11)式に変えたモデルをGARCH-m、誤差項 z_t の分布だけ基準化した t 分布に変えたモデルをGARCH-tモデルと呼ぶことにする。ここで、GARCH-mモデルは前出のGARCH-Mモデルとは異なるので注意すること。ボラティリティをGJRモデルで定式化した場合には、それぞれ、GJR-n、GJR-m、GJR-tモデル、EGARCHモデルで定式化した場合には、EGARCH-n、EGARCH-m、EGARCH-tモデルと呼ぶことにする。本稿で用いるGARCH型モデルは、以上9つのモデルである。GARCH型モデルのパラメータは最尤法により簡単に推定することができるので、本稿でもこれら9つのモデルのすべてのパラメータを最尤法によって推定する⁹。

(3) オプション価格の導出方法

投資家が危険中立的な場合、ヨーロッパ型オプションの価格は満期におけるオプション価格の期待値を安全資産の金利 r で割り引いた割引現在価値となる。すなわち、 $T + \tau$ 期が満期で権利行使価格 K のコール・オプション、プット・オプションの T 期の価格 C_T 、 P_T は次のように表される。

7 これら以外にGARCHモデルの誤差項 z_t の分布として用いられているものには、一般化 t 分布 (Bollerslev, Engle and Nelson [1994]、Watanabe [2000]、渡部 [2000] 2.4.2節)、一般化指数ベータ分布 (Wang *et al.* [2001])、ピアソンIV型分布 (Verhoeven and McAleer [2003]) などがある。

8 誤差項 z_t の分布に t 分布を用いてGARCHオプション価格付けモデルの分析を行っているものに、Hafner and Herwartz [2001]、Bauwens and Lubrano [2002] がある。

9 GARCH型モデルの最尤法以外の推定法にマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC : Markov chain Monte Carlo) 法を用いたベイズ推定法がある。この方法を用いてGARCHオプション価格付けモデルの分析をしているものに、三井・渡部 [2000]、Bauwens and Lubrano [2002] がある。

$$C_T = (1+r)^{-\tau} E [\text{Max}(S_{T+\tau} - K, 0)]. \quad (12)$$

$$P_T = (1+r)^{-\tau} E [\text{Max}(K - S_{T+\tau}, 0)]. \quad (13)$$

ここで、 $S_{T+\tau}$ はオプションの満期 $T + \tau$ 期の原資産価格である。GARCH型モデルの場合、右辺の期待値は解析的に求められないので、シミュレーションによって評価する。 $S_{T+\tau}$ のシミュレーションを行い、 $(S_{T+\tau}^{(1)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$ が得られたとする。 n が十分大きければ、期待値は以下の式によって評価できる。

$$E[\text{Max}(S_{T+\tau} - K, 0)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}(S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0), \quad (14)$$

$$E[\text{Max}(K - S_{T+\tau}, 0)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}(K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0). \quad (15)$$

そこで、例えば、GARCH-nモデルの場合、以下のアルゴリズムによりオプション価格 C_T 、 P_T を導出できる。

- [1] 標本 $\{R_1, \dots, R_T\}$ を使って、GARCH-nモデルの未知パラメータを最尤推定する。
- [2] 互いに独立な標準正規分布から $\{z_{T+1}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングする。
- [3] [2]でサンプリングされた値をGARCH-nモデルに代入して、 $\{R_{T+1}^{(i)}, \dots, R_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を計算する。ただし、未知パラメータの値は[1]で推定された値とする。
- [4] 次の式を使ってオプションの満期 $T + \tau$ 期における原資産価格 $(S_{T+\tau}^{(1)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$ を計算する。

$$S_{T+\tau}^{(i)} = S_T \prod_{s=1}^{\tau} (1 + R_{T+s}^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n.$$

- [5] 次の式からオプション価格 C_T 、 P_T を計算する。

$$C_T \approx (1+r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}(S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0),$$

$$P_T \approx (1+r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}(K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0).$$

GJR-n、EGARCH-nモデルでも同様にオプション価格を導出できる。

GARCH-tモデルの場合には、上のアルゴリズムの[1]~[3]を次のように書き換えるだけでよい。

- [1'] 標本 $\{R_1, \dots, R_T\}$ を使って、GARCH- t モデルの未知パラメータを最尤推定する。その際、 t 分布の自由度 ν も他のパラメータと同時に最尤推定する。
- [2'] 互いに独立な分散1に標準化された自由度 ν の t 分布から $\{z_{T+1}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングする。ただし、 ν は[1']で推定された値とする。
- [3'] [1']でサンプリングされた値をGARCH- t モデルに代入して、 $\{R_{T+1}^{(i)}, \dots, R_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を計算する。ただし、未知パラメータの値は[1']で推定された値とする。

GJR- t 、EGARCH- t モデルも同様である。

危険中立性を仮定しない場合には、(12)、(13)式の右辺の期待値は危険中立確率測度のもとで求めなければならない。そこで、オプションの満期における原資産価格のシミュレーションは、推定されたモデルではなく、それを危険中立確率測度のもとで変換したモデルを使って行わなければならない。Duan [1995]は、局所危険中立評価関係という仮定を置くことにより、GARCH型モデルを危険中立確率測度のもとでのモデルに変換する方法を示している¹⁰。局所危険中立評価関係とは、危険中立確率測度 Q と真の確率測度 P が以下の3つの条件を満たすことをいう¹¹。

1. $R_t | \mathcal{I}_{t-1}$ が確率測度 Q のもとで正規分布に従っている。
2. $E^Q(R_t | \mathcal{I}_{t-1}) = r$.
3. $\text{Var}^Q(R_t | \mathcal{I}_{t-1}) = \text{Var}^P(R_t | \mathcal{I}_{t-1})$ a.s. .

ここで、 \mathcal{I}_{t-1} は $t-1$ 期に利用可能な情報集合、 $E^Q(\cdot)$ は確率測度 Q のもとでの期待値、 $\text{Var}^Q(\cdot)$ 、 $\text{Var}^P(\cdot)$ はそれぞれ確率測度 Q 、 P のもとでの分散を表す。Duan [1995]は、こうした局所危険中立評価関係を仮定すると、危険中立確率測度 Q のもとでGARCH-mモデルが次のようなモデルに変換されることを示している¹²。

10 Duan [1995]の方法を用いてGARCH オプション価格付けモデルの分析を行っているものに、三井 [2000]、三井・渡部 [2000]、Hafner and Herwartz [2001]がある。

11 局所危険中立評価関係を使ってGARCH オプション価格付けができるのは、以下のような場合である。

- ・代表的投資家が相対的危険回避度一定の効用関数を持ち、かつ集計された消費の成長率 $\ln(C_t/C_{t-1})$ が平均、分散一定の正規分布に従う場合。
- ・代表的投資家が絶対的危険回避度一定の効用関数を持ち、かつ集計された消費の変分 $C_t - C_{t-1}$ が平均、分散一定の正規分布に従う場合。

ここで、 C_t は t 期の集計された消費を表す。詳しくは、Duan [1995]、金 [2003] 4節を参照のこと。

12 証明はDuan [1995] Appendixを参照。

$$R_t = \gamma + \sigma_t \xi_t, \quad \xi_t | \mathbf{I}_{t-1} \sim \text{i.i.d.} N(0,1), \quad (16)$$

$$\lambda_t = \frac{\mu_t - r}{\sigma_t}, \quad (17)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha (\xi_{t-1} - \lambda_{t-1})^2 \sigma_{t-1}^2. \quad (18)$$

ただし、(17)式の右辺の μ_t は期待収益率であり、本稿のGARCH-mモデルでは、 $\mu_t = r + a + bR_{t-1} + c\sigma_t^2$ と定式化している。

そこで、パラメータの推定はGARCH-mモデルを使って行い、満期におけるオプション価格の期待値を計算するためのシミュレーションは(16)~(18)式から成る危険中立確率測度 Q のもとでのモデルを使って行えばよい。したがって、この場合、上の危険中立性を仮定した場合のアルゴリズムの[1]~[3]を次のように書き換えればよい。

- [1"] 標本 $\{R_1, \dots, R_T\}$ を使って、GARCH-mモデルの未知パラメータを最尤推定する。
- [2"] 互いに独立な標準正規分布から $\{\xi_{T+1}^{(i)}, \dots, \xi_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングする。
- [3"] [2"]でサンプリングされた値を危険中立確率測度 Q のもとでのモデル(16)~(18)式に代入して、 $\{R_{T+1}^{(i)}, \dots, R_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を計算する。ただし、未知パラメータの値は[1"]で推定された値とする。

GJR-m、EGARCH-mモデルも同様である。ただし、GJR-m、EGARCH-mモデルを危険中立確率測度 Q のもとで変換すると、(16) (17)式はそのまま、(18)式をそれぞれ次のように置き換えたモデルになる。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \gamma D_{t-1}^{*-}) (\xi_{t-1} - \lambda_{t-1})^2 \sigma_{t-1}^2, \quad (19)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma (\xi_{t-1} - \lambda_{t-1}) + \alpha \left(|\xi_{t-1} - \lambda_{t-1}| - \sqrt{2/\pi} \right). \quad (20)$$

ただし、(19)式の D_{t-1}^{*-} は、 $\xi_{t-1} - \lambda_{t-1} < 0$ であれば1、それ以外は0のダミー変数である。

Duan [1999] は、局所危険中立評価関係の仮定を拡張することにより、誤差項 z_t が標準正規分布以外の分布に従うGARCH型モデルについても危険中立確率測度 Q のもとでのモデルに変換する方法を示している。 z_t が分散を1に基準化した t 分布に従う場合、その分布関数を $G(z_t)$ 、標準正規分布の分布関数を $\Phi(\cdot)$ で表すと、 z_t は以下のような変換により、標準正規分布に従う確率変数に変換することができる。

$$\Psi(z_t) = \Phi^{-1}[G(z_t)].$$

この変換を用いることにより、誤差項 z_t の分布を分散を1に基準化した t 分布にし、ボラティリティをGARCHモデル(3)式によって定式化したモデルは、危険中立確率測度 Q のもとでは以下のように変換される。

$$R_t = \mu_t + \sigma_t \Psi^{-1}(\xi_t - \lambda_t), \quad \xi_t \sim \text{i.i.d.} N(0,1), \quad (21)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \left[\Psi^{-1}(\xi_{t-1} - \lambda_{t-1}) \right]^2. \quad (22)$$

ここで、 λ_t は次の式の解である。

$$E^Q \left[\Psi^{-1}(\xi_t - \lambda_t) | I_{t-1} \right] = \frac{r - \mu_t}{\sigma_t}. \quad (23)$$

そこで、 λ_t を求めるためには(23)式を解かなければならないが、(23)式の左辺の期待値は解析的には求まらないので、シミュレーションによって計算しなければならない。そのシミュレーションは $\{\sigma_{T+1}, \dots, \sigma_{T+\tau}\}$ を新たにシミュレーションするたびに $t = T+1, \dots, T+\tau$ のすべての期で行わなければならないので、膨大な時間がかかり事実上実行不可能である。そこで、本稿では、誤差項 z_t の分布を t 分布にした場合の期待収益率の定式化には、危険中立性を仮定した(9)式だけを用いている。

本稿では、上のアルゴリズムに従ってオプション価格を計算する際に、分散減少法として負相関法 (antithetic variates) と制御変数法 (control variates) とを組み合わせさせて用いている。負相関法とは、上のアルゴリズムの[2][2']または[2'']で、 $\{z^{(i)}\}_{i=1}^n = \{z_{T+1}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ ($\{\xi^{(i)}\}_{i=1}^n = \{\xi_{T+1}^{(i)}, \dots, \xi_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$) がサンプリングされたたとすると、それにマイナスを付けた値 $\{-z^{(i)}\}_{i=1}^n$ ($\{-\xi^{(i)}\}_{i=1}^n$) も加えて[3]以降を行う方法である。ただし、そうすると、[3]以降の n は $2n$ になる。この方法を用いることにより、 $\{z^{(i)}\}_{i=1}^n$ ($\{\xi^{(i)}\}_{i=1}^n$) から計算される $\{S_T^{(i)}\}_{i=1}^n$ と $\{-z^{(i)}\}_{i=1}^n$ ($\{-\xi^{(i)}\}_{i=1}^n$) から計算される $\{S_T^{(i)}\}_{i=1}^{2n}$ との間高い負の相関が生じるので、それによって計算されるオプション価格の分散を小さくすることができる。また、制御変数法とは解析的に値を計算できる変数を制御変数とし、その解析的に計算した値とシミュレーションによって計算した値を使って分散を小さくする方法である。本稿では、BSモデルのオプション価格を制御変数とし、以下のように制御変数法を用いている。まず、[2][2'']でサンプリングされた $\{z^{(i)}\}_{i=1}^n$ ($\{\xi^{(i)}\}_{i=1}^n$) と $\{-z^{(i)}\}_{i=1}^n$ ($\{-\xi^{(i)}\}_{i=1}^n$) を使い、GARCH型モデルだけでなく、ボラティリティを一定としたBSモデルによっても満期における原資産価格 ($S_{T+\tau}^{(1)}, \dots, S_{T+\tau}^{(2n)}$) を計算し、それを用いてオプション価格を計算する。BSモデルからシミュレーションによって満期における原資産価格を計算するためには次の式を使えばよい。

$$S_{T+\tau}^{(i)} = \exp \left[r\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau + \sigma \sum_{t=T+1}^{T+\tau} z_t^{(i)} \right], \quad i=1, \dots, n, \quad (24)$$

$$\left(S_{T+\tau}^{(i)} = \exp \left[r\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau + \sigma \sum_{t=T+1}^{T+\tau} \xi_t^{(i)} \right], \quad i=1, \dots, n \right).$$

ただし、 σ には過去20日間の日経225株価指数日次変化率の標準偏差を用いている。同時に、BS公式¹³によってオプション価格の解析解も計算する。以下、GARCH型モデル、BSモデルからシミュレーションによって計算された満期 $T + \tau$ 期における原資産価格をそれぞれ $\tilde{S}_{\text{GARCH}}^{(i)}$ 、 $\tilde{S}_{\text{BS}}^{(i)}$ 、 T 期のコール・オプション価格をそれぞれ \tilde{C}_{GARCH} 、 \tilde{C}_{BS} と表す。また、 T 期のコール・オプション価格のBS公式による解析解を C_{BS} と表すことにする¹⁴。これらを使って、最終的なコール・オプション価格を以下のように計算する。

$$C_T = \tilde{C}_{\text{GARCH}} - \varphi \left(\tilde{C}_{\text{BS}} - C_{\text{BS}} \right). \quad (25)$$

ただし、 φ は $\{\text{Max} [\tilde{S}_{\text{GARCH}}^{(i)} - K, 0]\}_{i=1}^{2n}$ と $\{\text{Max} [\tilde{S}_{\text{BS}}^{(i)} - K, 0]\}_{i=1}^{2n}$ の標本共分散を後者の標本分散で割った値とする¹⁵。プット・オプションも同様である。ただし、誤差項 z_t の分布を t 分布にした場合には、 $[2^*]$ で、標準正規分布からではなく、自由度 ν の分散1に基準化された t 分布から $\{z_{T+1}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングすることになるが、自由度 ν の分散1に基準化された t 分布からサンプリングするためには、まず、互いに独立な標準正規分布と自由度 ν の χ^2 分布からそれぞれ $x_t^{(i)}$ と $w_t^{(i)}$ をサンプリングし、 $z_t^{(i)} = \sqrt{\nu - 2} x_t^{(i)} / \sqrt{w_t^{(i)}}$ を計算すればよい。この場合、制御変数法でBSモデルのオプション価格をシミュレーションにより求める際には、(24)式の右辺の $z_t^{(i)}$ の代わりに $x_t^{(i)}$ を使って計算する。以下の分析では、シミュレーションの回数は $n = 10,000$ としている。

13 $C_T = S_T \Phi(d_1) - K \exp(-r\tau) \Phi(d_2)$, $P_T = -S_T \Phi(-d_1) + K \exp(-r\tau) \Phi(-d_2)$,

$$d_1 = \frac{\ln(S_T/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S_T/K) + (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

ただし、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数を表す。シミュレーションによるBS解と整合的になるように、BS公式のボラティリティ σ にも過去20日間の日経225株価指数日次変化率を使って計算したヒストリカル・ボラティリティを用いている。

14 添え字の $T + \tau$ 、 T は省略する。

15 (25)式より、 C_T の分散は次のように表せる。

$$\text{Var}(C_T) = \text{Var}(\tilde{C}_{\text{GARCH}}) + \varphi^2 \text{Var}(\tilde{C}_{\text{BS}}) - 2\varphi \text{Cov}(\tilde{C}_{\text{GARCH}}, \tilde{C}_{\text{BS}}).$$

これを最小化する φ は、 $X_i = \text{Max} [\tilde{S}_{\text{GARCH}}^{(i)} - K, 0]$ 、 $Y_i = \text{Max} [\tilde{S}_{\text{BS}}^{(i)} - K, 0]$ とすると、

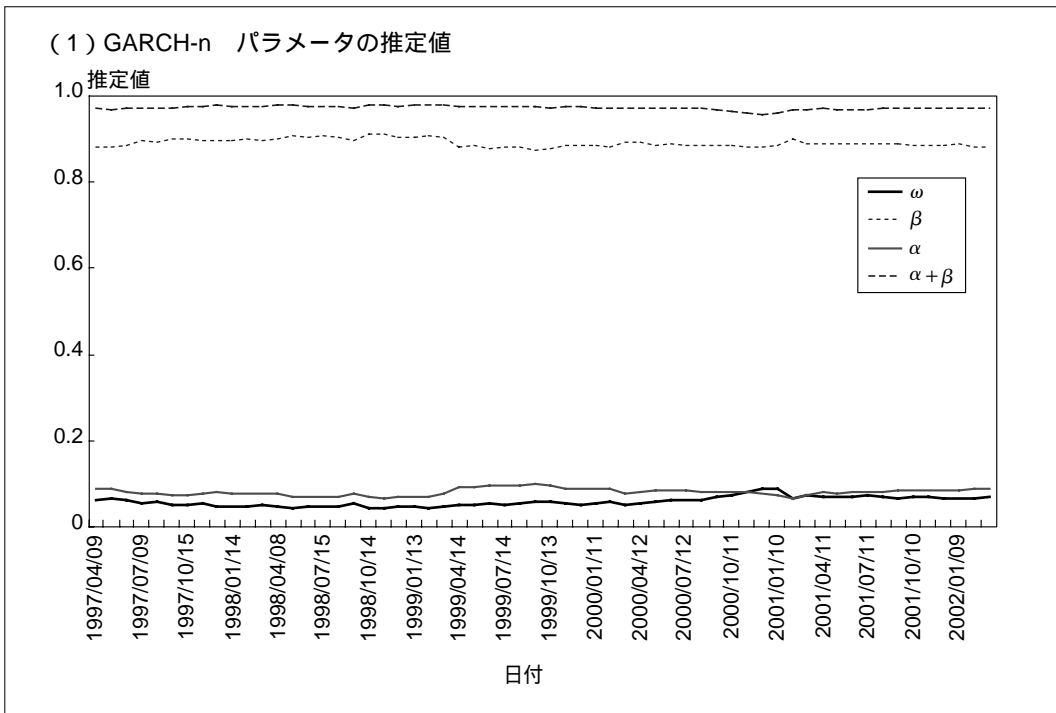
$$\varphi = \frac{\text{Cov}(\tilde{C}_{\text{GARCH}}, \tilde{C}_{\text{BS}})}{\text{Var}(\tilde{C}_{\text{BS}})} = \frac{\text{Cov}(X_i, Y_i)}{\text{Var}(Y_i)}.$$

3. 実証結果

(1) GARCH型モデルの推定結果

実証分析に用いたオプションは1997年5月限月から2002年4月限月までのすべての権利行使価格の日経225コール・オプション（計609）およびプット・オプション（計662）である。それらのオプションの満期から30日前の終値を分析対象とした。GARCH型モデルのパラメータは、満期の30日前からさらに1,500営業日前までの日経225株価指数日次変化率を用いて最尤法により推定を行った。すなわち、パラメータの推定に用いた標本の大きさは $T = 1,500$ である¹⁶。前節で述べたように、 S_t を第 t 日の日経225株価指数の終値とすると、第 t 日の日経225変化率は $(S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$ として計算している。ただし、GARCH型モデルの推定ではそれに100を掛けて%表示にしたものを用いている。また、1997年5月限月のオプションに対応したのものから2002年4月限月のオプションに対応したものまで異なる60の標本期間があるが、これら60の標本期間のすべてでGARCH型モデルの推定を行った。推定したGARCH型モデルは、GARCH-n、GARCH-m、GARCH-t、GJR-n、GJR-m、GJR-t、EGARCH-n、EGARCH-m、EGARCH-tの計9つである。推定結果は図1～3および表1～3にまとめ

図1 GARCH-n型モデルの推定結果



¹⁶ $T = 1,000$ とした推定も行ったが、結果はほとんど変わらなかった。

図1 (続き)

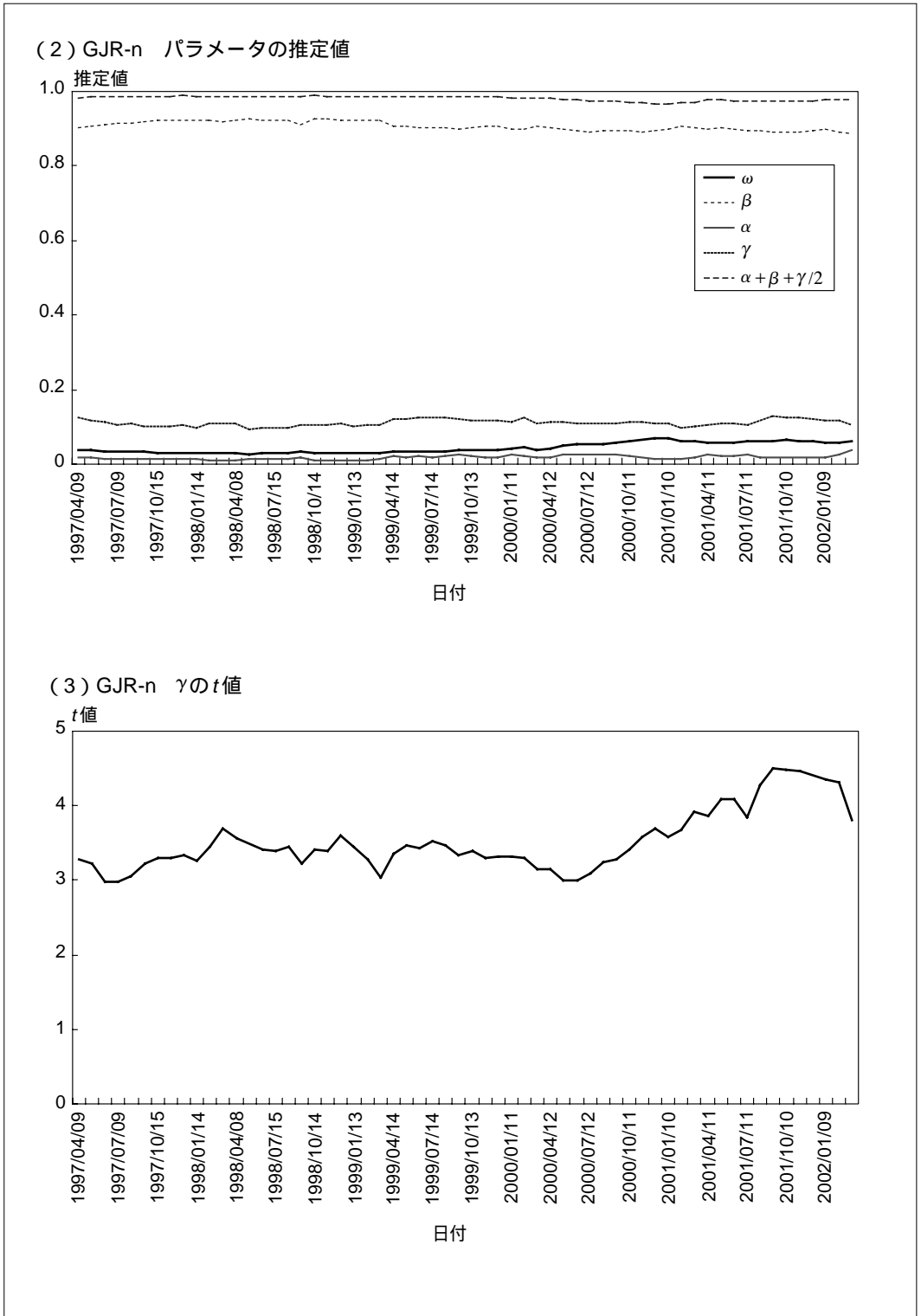
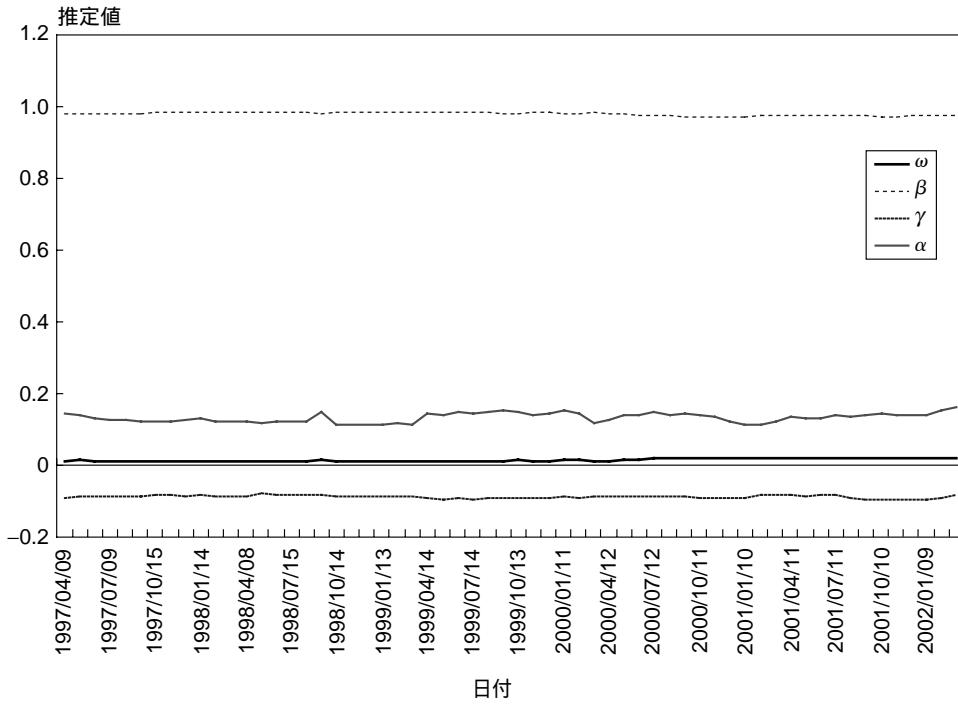
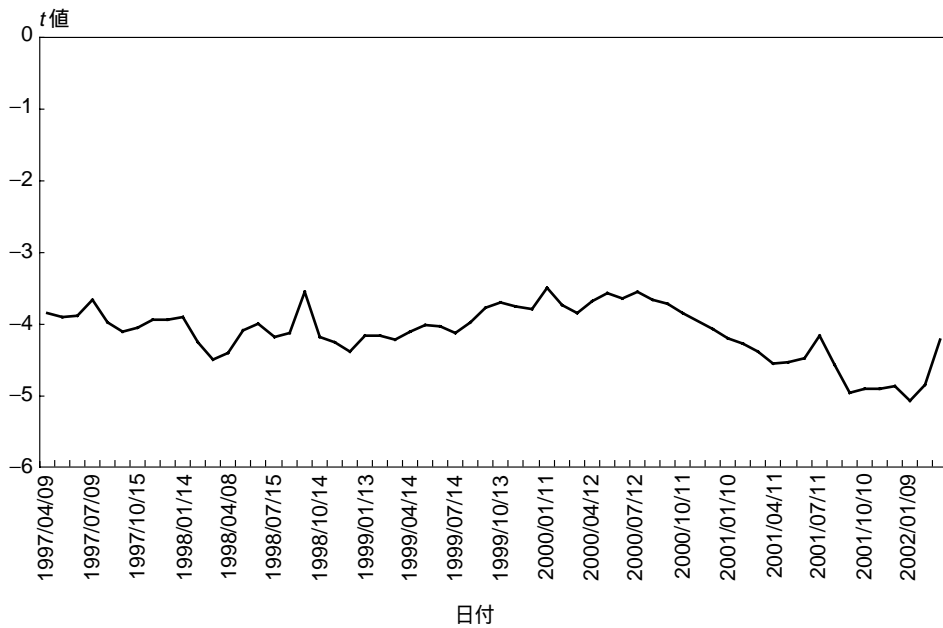


図1 (続き)

(4) EGARCH-n パラメータの推定値



(5) EGARCH-n γ のt値



られている。図1～3の横軸の日付は60の各標本期間の最終日に対応している。例えば、最初の1997年4月9日の推定値（あるいは t 値、尤度比）は、1997年4月9日からその1,500営業日前までの日経225日次変化率（%）を用いて推定した値である。

まず、図1はGARCH-n、GJR-n、EGARCH-n各モデルのパラメータの最尤推定値をプロットしたものである。また、表1には、それらの平均値、最小値、最大値が計算されている。これらの図1および表1より、すべてのパラメータの値は、各標本期間で比較的安定して推移していることがわかる。前節で説明したように、ボラティリティに対するショックの持続性は、GARCHモデルでは $\alpha + \beta$ 、GJRモデルでは $\alpha + \beta + \gamma/2$ 、EGARCHモデルでは β の値で測ることができる。図1にはそれらの推定値もプロットとしてあり、表1にはそれらの値についても平均値、最小値、最大値が計算されている。それらはすべて1に近い値が得られており、このことから、日経225株価指数のボラティリティもショックの持続性が高いことがわかる。GJR、EGARCHモデルで重要なパラメータは、ボラティリティ変動の非対称性を表す γ である。株式市場では、株価が上がった日の翌日より株価が下がった日の翌日の方がボラティリティが高まる傾向があることが知られている。GJRモデルは γ が正であれば、EGARCHモデルは γ が負であれば、そうした現象と整合的であることになる。そこで、 γ については、図1に推定値だけでなく、 t 値もプロットしてある。また、表1には γ の t 値の平均値、最大値、最小値が計算されている。ただし、 t 値を計算に使う標準誤差には、誤差項 z_t の分布が標準正規分布でない可能性を考慮に入れ、疑似最尤法の標準誤差（Bollerslev and Wooldridge [1992]、渡部 [2000] 2.2.3節）

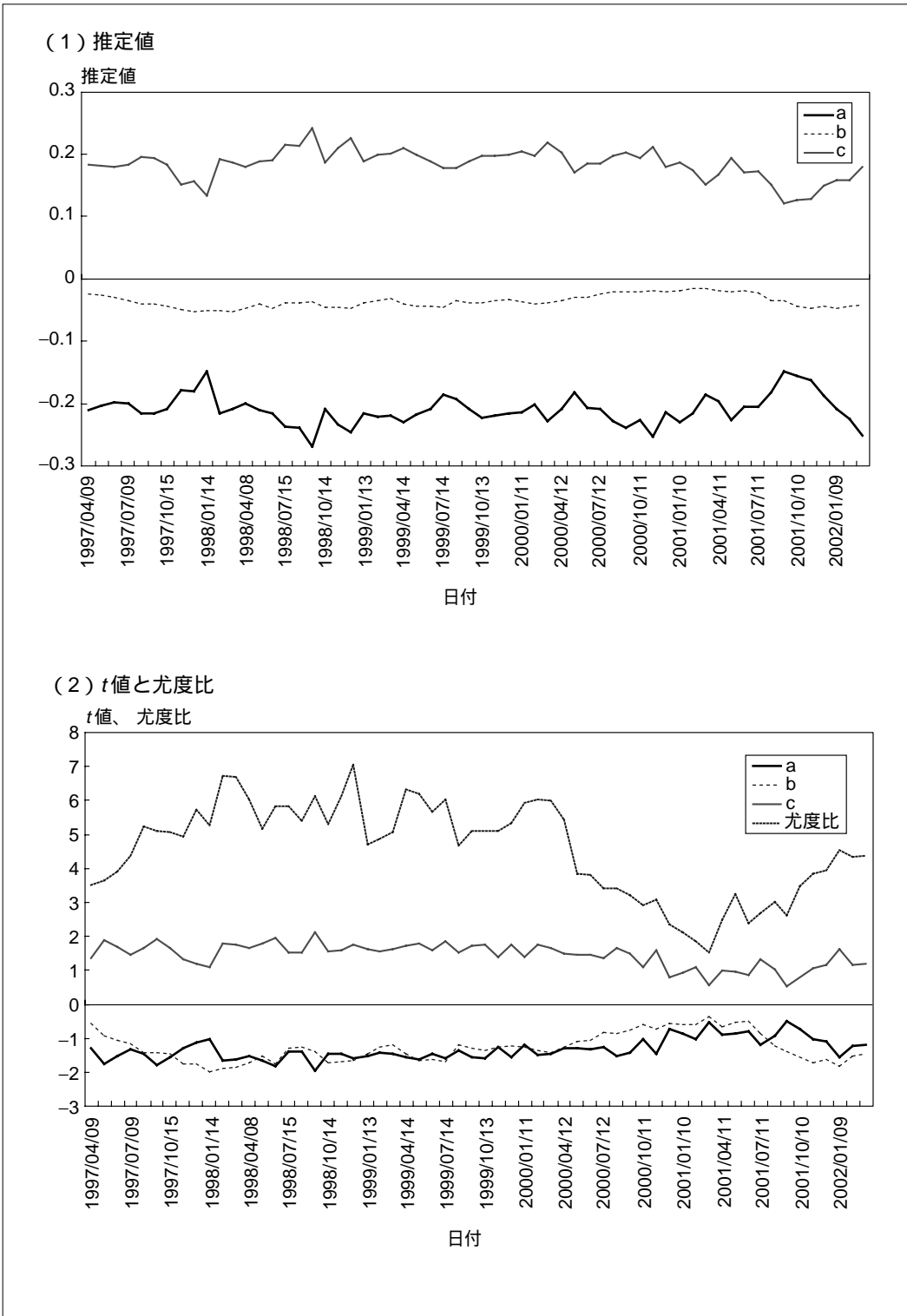
表1 GARCH-n型モデルの推定結果

GARCH-n				
	ω	β	α	$\alpha + \beta$
平均値	0.059	0.891	0.082	0.972
最小値	0.042	0.874	0.068	0.958
最大値	0.089	0.910	0.100	0.980

GJR-n						
	ω	β	α	γ	$\alpha + \beta + \gamma/2$	γ の t 値
平均値	0.045	0.907	0.019	0.112	0.981	3.52
最小値	0.029	0.888	0.010	0.095	0.967	2.98
最大値	0.072	0.926	0.037	0.128	0.989	4.50

EGARCH-n					
	ω	β	α	γ	γ の t 値
平均値	0.016	0.979	0.134	-0.086	-4.11
最小値	0.010	0.969	0.113	-0.094	-5.07
最大値	0.022	0.986	0.163	-0.077	-3.48

図2 GARCH-mモデルのパラメータ a、b、c の推定結果



を用いている。すべての標本期間で、 γ の推定値には、GJRモデルでは統計的に有意な正の値が、EGARCHモデルでは統計的に有意な負の値が得られており、このことから、日経225株価指数のボラティリティ変動にも他の株式市場と同様な非対称性があることがわかる。

次に、図2はGARCH-mモデルのパラメータ a 、 b 、 c の推定値、 t 値、また帰無仮説 $H_0: a = b = c = 0$ を検定するための尤度比統計量の値をプロットしたものであり、表2にはそれらの平均値、最小値、最大値および有意な標本の数が計算されている。 t 値および尤度比統計量の値より、ほとんどすべての標本期間でパラメータ a 、 b 、 c は統計的有意性が低いことがわかる。推定結果は省略するが、これはGJR-mモデルやEGARCH-mモデルでも同じである。 $a = b = c = 0$ であれば、Duan [1995] の方法と危険中立性を仮定する方法とは全く同じことになる。したがって、期待収益率の定式化に(11)式を用いてDuan [1995] の方法によりオプション価格を計算してもパフォーマンスはあまり改善されないものと予想される。GARCH-m、GJR-m、EGARCH-mモデルのボラティリティの式のパラメータの推定結果は、GARCH-n、GJR-n、EGARCH-nモデルとほとんど変わらないので省略する。

表2 GARCH-mモデルのパラメータ a 、 b 、 c の推定結果

	a	b	c
パラメータ			
平均値	-0.210	-0.036	0.184
最小値	-0.269	-0.053	0.122
最大値	-0.148	-0.015	0.241
t 値			
平均値	-1.31	-1.26	1.45
最小値	-1.95	-1.96	0.53
最大値	-0.48	-0.35	2.14
有意な標本の数			
10%有意水準	5	13	21
5%有意水準	0	1	1
1%有意水準	0	0	0
尤度比検定統計量 ($H_0: a = b = c = 0$)			
平均値	4.55		
最小値	1.52		
最大値	7.05		
有意な標本の数			
10%有意水準	4		
5%有意水準	0		
1%有意水準	0		

図3 GARCH- t 型モデルの自由度の推定結果

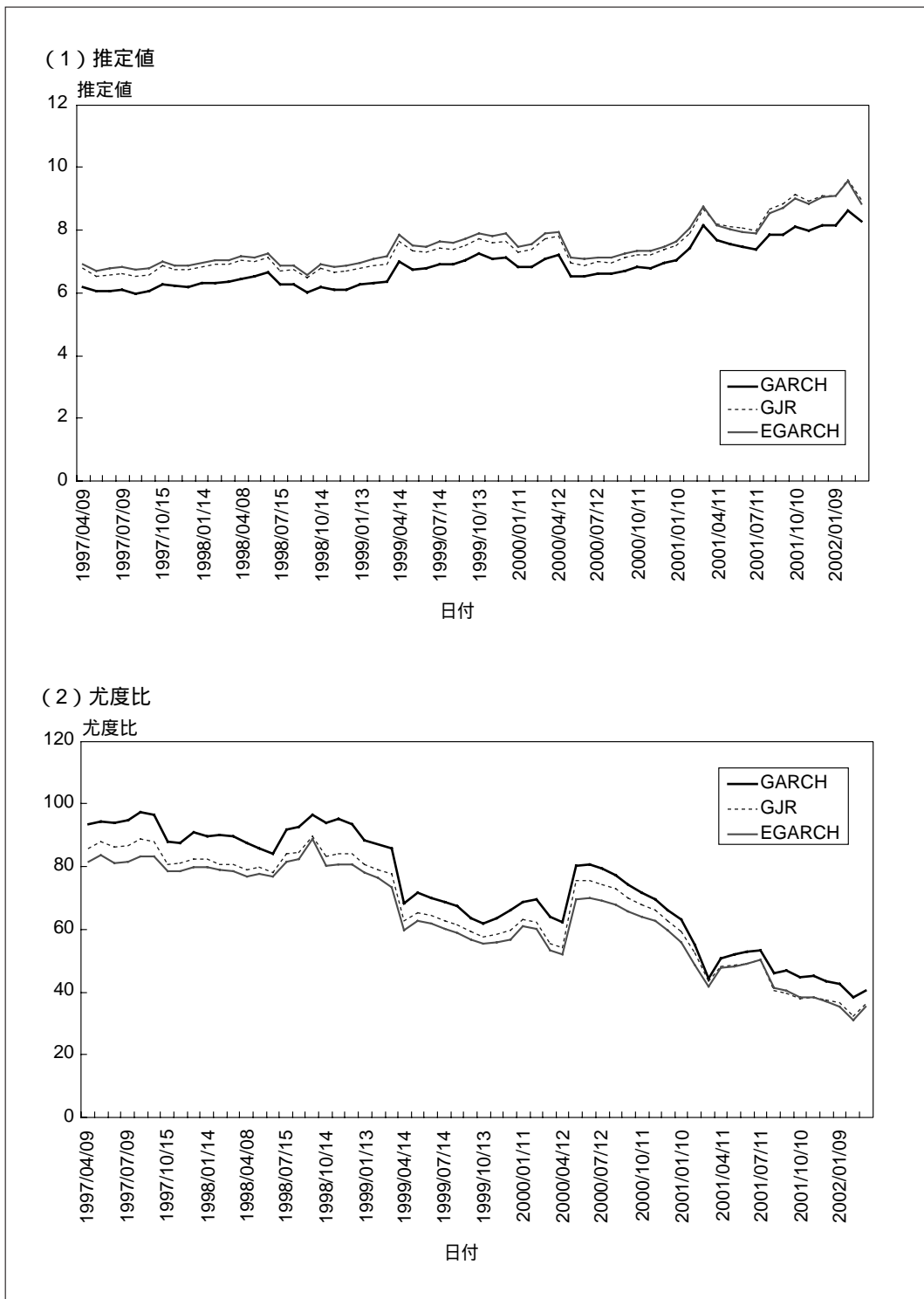


表3 GARCH- t 型モデルの自由度 ν の推定結果

	GARCH- t	GJR- t	EGARCH- t
パラメータ			
平均値	6.865	7.431	7.547
最小値	5.990	6.469	6.586
最大値	8.633	9.601	9.545
尤度比検定統計量 ($H_0: \nu = \infty, H_1: \nu < \infty$)			
平均値	72.91	66.68	64.11
最小値	38.21	32.32	31.07
最大値	97.40	89.80	88.77

最後に、図3は誤差項 z_t の分布を t 分布にしたGARCH- t 、GJR- t 、EGARCH- t 各モデルにおける自由度 ν の推定値と誤差項 z_t が標準正規分布に従うという帰無仮説 $H_0: \nu = \infty$ を基準化された t 分布に従うという対立仮説 $H_1: \nu < \infty$ のもとで検定するための尤度比統計量の値をプロットしたものである。また、表3にはそれらの平均値、最小値、最大値が計算されている。すべてのモデル、標本期間で尤度比統計量の値は大きく、誤差項の分布が標準正規分布であるという帰無仮説は有意水準1%でも棄却される。このことから、日経225変化率の分布の裾の厚さもボラティリティの変動だけでは説明できず、誤差項 z_t の分布に t 分布のような裾の厚い分布が必要であることがわかる。

(2) オプション価格の推定値の比較

次に、前節で説明したアルゴリズムを用いて各GARCH型モデルからオプション価格を導出し、どのモデルがパフォーマンスがよいか比較を行う。その際、安全資産の金利 r には1ヵ月物のコール・レート（無担保）を用いている。三井 [2000]、三井・渡部 [2000] に従い、どのモデルが実際のオプション価格の変動をよりうまく捉えられるかを比較する指標には、平均誤差率（MER：mean error rate）と平均2乗誤差率（RMSER：root mean square error rate）を用いている¹⁷。それらは、 C_i 、 \hat{C}_i をオプション i の実際の市場価格とその推定値とすると、それぞれ次のように定義される。

$$\text{MER} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\hat{C}_i - C_i}{C_i},$$

$$\text{RMSER} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{C}_i - C_i}{C_i} \right)^2}.$$

.....
 17 その他に、平均絶対誤差率（MAER：mean absolute error rate） $\text{MAER} = 1/m \sum_{i=1}^m |(\hat{C}_i - C_i)/C_i|$ も計算したが、RMSERと結果は変わらなかったため、省略する。

表4 マネネスによるオプションの分類

マネネス	コール	プット
$S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	deep-in-the-money (DITM)
$0.91 \leq S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)	in-the-money (ITM)
$0.97 \leq S/K \leq 1.03$	at-the-money (ATM)	at-the-money (ATM)
$1.03 < S/K \leq 1.09$	in-the-money (ITM)	out-of-the-money (OTM)
$S/K > 1.09$	deep-in-the-money (DITM)	deep-out-of-the-money (DOTM)

ここで、 m は分析に用いたオプションの標本の大きさであり、すべてのコール・オプションを用いた場合には $m = 609$ 、すべてのプット・オプションを用いた場合には $m = 662$ である。MERによってバイアスの有無を、RMSERによって実際のオプション価格との乖離度を比較する。

コール・オプション、プット・オプションをそれぞれすべて用いた場合だけでなく、Bakshi, Cao and Chen [1997] の定義に従い、表4のように各オプションをマネネス（原資産価格 S を権利行使価格 K で割ったもの）によって5種類のカテゴリーに分け、各カテゴリーごとにもMER、RMSERを計算し比較を行った¹⁸。各カテゴリーの標本数は、コール・オプションの場合、DOTMで140、OTMで115、ATMで108、ITMで94、DITMで152、プット・オプションの場合、DOTMで148、OTMで94、ATMで108、ITMで115、DITMで197であった。各カテゴリーおよび全体でのMERとRMSERの値は表5に計算されている。表5では、比較のため、BS公式によって計算したオプション価格についても、MER、RMSERを計算している。その際のボラティリティには、過去20日間の日経225日次変化率を用いて計算したヒストリカル・ボラティリティを用いている。

まず最初に、期待収益率の定式化や誤差項の分布によるパフォーマンスの違いをみてみよう。GARCH- n 、GARCH- m 、GARCH- t モデルの結果を比較すると、MERでみてもRMSERでみても、また、コールでもプットでも、ほとんどすべてのケースで、GARCH- m 、GARCH- t モデルのパフォーマンスはGARCH- n モデルと比べて同じかむしろ悪くなっている。GJR、EGARCHモデルでも同じことがいえる。このことから、危険中立性を仮定せず期待収益率をボラティリティや過去の収益率に依存させても、あるいは誤差項の分布を t 分布にしても、オプション価格の変動を捉えるうえでパフォーマンスはよくなるということがわかる。図2および表2のGARCH- m モデルの推定結果でパラメータ a 、 b 、 c の統計的有意性が低かったので、前者の結果は自然である。図3および表3のGARCH- t 、GJR- t 、EGARCH- t モデルの推定結果では、誤差項の分布には標準正規分布よりも t 分布の方がフィットがよかった。

18 “deep-out-of-the-money”は、実務では、“far-out-of-the-money”と呼ぶことが多いが、ここでは、Bakshi, Cao and Chen [1997] に従い、“deep-out-of-the-money” (DOTM) と呼ぶことにする。

表5 オプション・プレミアムの推定値の比較

MER コール・オプション											
	GARCH			GJR			EGARCH			BS	標本数
	n	m	t	n	m	t	n	m	t		
DOTM	1.042	1.274	1.463	0.148	0.258	0.370	0.100	0.223	0.152	0.115	140
OTM	0.521	0.621	0.536	0.333	0.385	0.336	0.386	0.463	0.389	-0.068	115
ATM	0.143	0.178	0.140	0.140	0.160	0.136	0.165	0.193	0.167	-0.052	108
ITM	0.038	0.051	0.040	0.057	0.065	0.059	0.068	0.078	0.070	-0.020	94
DITM	0.013	0.017	0.016	0.021	0.023	0.023	0.023	0.025	0.024	0.006	152
Total	0.372	0.454	0.472	0.136	0.176	0.187	0.141	0.191	0.155	0.003	609

プット・オプション											
	GARCH			GJR			EGARCH			BS	標本数
	n	m	t	n	m	t	n	m	t		
DOTM	-0.215	-0.041	-0.076	0.261	0.408	0.405	0.360	0.508	0.372	-0.711	148
OTM	0.072	0.154	0.076	0.193	0.244	0.199	0.273	0.341	0.276	-0.337	94
ATM	0.086	0.121	0.086	0.095	0.115	0.092	0.122	0.150	0.127	-0.101	108
ITM	0.034	0.045	0.039	0.019	0.026	0.021	0.023	0.031	0.026	-0.017	115
DITM	0.012	0.013	0.014	0.008	0.009	0.010	0.007	0.008	0.008	0.008	197
Total	-0.014	0.044	0.019	0.107	0.152	0.140	0.145	0.195	0.150	-0.224	662

RMSER コール・オプション											
	GARCH			GJR			EGARCH			BS	標本数
	n	m	t	n	m	t	n	m	t		
DOTM	1.580	1.862	2.127	0.853	0.944	1.168	0.799	0.901	0.920	1.476	140
OTM	0.736	0.848	0.763	0.544	0.594	0.589	0.612	0.688	0.639	0.547	115
ATM	0.212	0.241	0.209	0.191	0.210	0.195	0.214	0.239	0.220	0.211	108
ITM	0.100	0.107	0.103	0.107	0.113	0.110	0.112	0.119	0.115	0.112	94
DITM	0.075	0.076	0.075	0.075	0.076	0.076	0.075	0.076	0.075	0.075	152
Total	0.829	0.973	1.077	0.483	0.531	0.624	0.478	0.538	0.532	0.754	609

プット・オプション											
	GARCH			GJR			EGARCH			BS	標本数
	n	m	t	n	m	t	n	m	t		
DOTM	0.527	0.534	0.547	0.776	0.796	0.861	0.823	0.949	0.855	0.809	148
OTM	0.291	0.335	0.293	0.340	0.380	0.356	0.410	0.470	0.421	0.492	94
ATM	0.183	0.205	0.186	0.177	0.193	0.184	0.199	0.221	0.208	0.243	108
ITM	0.106	0.111	0.112	0.097	0.100	0.102	0.098	0.102	0.102	0.127	115
DITM	0.069	0.070	0.070	0.069	0.070	0.070	0.068	0.068	0.068	0.067	197
Total	0.288	0.300	0.297	0.399	0.414	0.439	0.430	0.494	0.446	0.441	662

にもかかわらず、誤差項の分布を t 分布にしてもオプション価格の変動をうまく捉えられるようにならないという結果が得られている。これは、満期におけるオプション価格の期待値が誤差項 z_t の分布の裾の厚さにそれほど影響を受けないからではないかと考えられる。そこで、GARCH-n、GJR-n、EGARCH-nモデルを用いた場合とGARCH- t 、GJR- t 、EGARCH- t モデルを用いた場合とで、満期におけるオプション価格の期待値をシミュレーションによって求め比較を行った。その際、各GARCH型モデルのパラメータの値は表1の平均値とし、 t 分布の自由度は7とした。また、 $S_T = 10,000$ 、 $K = 9,000, 9,500, 10,000, 10,500, 11,000$ 、 $r = 0$ としている。結果は表6に示されている。この結果からわかるように、誤差項 z_t の分布を標準正規分布から自由度7の t 分布に変えても満期におけるオプション価格の期待値はほとんど影響を受けていない。

次に、ボラティリティの定式化によるパフォーマンスの違いをみてみることにしよう。期待収益率の定式化や誤差項の分布を変えてもパフォーマンスはよくなるないので、以下ではGARCH-n、GJR-n、EGARCH-nモデルに注目して比較を行う。

MERは、コールではDOTMにおけるEGARCHモデル以外のすべてで、プットではDITMにおけるEGARCHモデル以外のすべてで、BSモデルよりもGARCH型モデルの方が高い値を示している。このことは、GARCH型モデルはBSモデルよりも平

表6 誤差項 z_t の分布による満期におけるオプション価格の期待値の違い

コール・オプション

$$E[\text{Max}(S_{T+\tau} - K, 0)]$$

K	GARCH		GJR		EGARCH	
	n	t	n	t	n	t
9,000	1038	1036	1061	1059	1019	1014
9,500	623	622	650	646	612	611
10,000	317	315	332	326	334	337
10,500	136	135	135	131	171	174
11,000	52	51	43	41	85	87

プット・オプション

$$E[\text{Max}(K - S_{T+\tau}, 0)]$$

K	GARCH		GJR		EGARCH	
	n	t	n	t	n	t
11,000	1052	1050	1046	1041	1084	1089
10,500	636	634	638	631	670	676
10,000	317	315	333	326	331	339
9,500	123	122	149	146	108	114
9,000	38	36	61	59	15	17

均的に高い値を計算しているということである。プット・オプションのDOTM、OTM、ATMではBSモデルに大きな下方バイアスがある。GARCH型モデルではこの下方バイアスが修正され、ATMのEGARCHモデル以外のすべてでBSモデルと比べバイアスが小さくなっている。それに対して、プット・オプションのITM、DITMおよびコール・オプションでは、BSモデルにそうした大きな下方バイアスがないので、GARCH型モデルはむしろ上方にバイアスを拡大してしまっている。ボラティリティ変動の非対称性を考慮しないGARCHモデルと非対称性を考慮したGJR、EGARCHモデルとを比べると、コール（プット）のDOTM、OTM、Total（ITM、DITM）では、GARCHモデルよりGJR、EGARCHモデルの方がバイアスが小さいのに対して、ITM、DITM（ATM、DOTM、OTM、Total）では逆になっている。コールのATMでは、GJRはGARCHよりバイアスが小さいが、EGARCHはGARCHよりバイアスが大きくなっている。また、GJRとEGARCHモデルを比較すると、コール（プット）のDOTM（DITM）でEGARCHの方がバイアスが小さくなっている以外はすべてのケースでGJRの方がバイアスが小さくなっている。

RMSERで比較すると、コールでBSモデルのパフォーマンスを上回っているのは、GARCHではITMとDITM、EGARCHではDOTMとTotalだけなのに対して、GJRではDITM以外のすべてである。プットでは、DOTMのEGARCHとDITMを除くすべてでGARCH型モデルがBSモデルのパフォーマンスを上回っている。RMSERで比較したGARCH、GJR、EGARCHモデルの相対的なパフォーマンスはMERで比較した場合とほぼ同じである¹⁹。

以上をまとめると、次のようになる。(1)コール（プット）では、DOTM、OTM（ITM、DITM）でGJR、EGARCHがGARCHのパフォーマンスを上回り、ITM、DITM（DOTM、OTM）でGARCHがGJR、EGARCHのパフォーマンスを上回る。(2)GJRとEGARCHモデルのパフォーマンスを比較すると、EGARCHが上回るのはコール（プット）ではDOTM（DITM）だけで、それ以外ではすべてGJRが上回る。(3)コール・オプションではGJRモデルが、プット・オプションではGARCH、GJR、EGARCHモデルのすべてが、ほとんどすべてのマネネスでBSモデルのパフォーマンスを上回る。図1および表1のGJR、EGARCHモデルの推定結果から、日経225株価指数でも指数が上がった日の翌日より下がった日の翌日の方がよりボラティリティが上昇する傾向があることが明らかになっている。しかし、(1)の結果は、こうした非対称性を考慮してGJR、EGARCHモデルを使っても日経225オプション価格の変動をうまく捉えられるようになるとは限らず、GARCHモデルとGJR、EGARCHモデルの相対的なパフォーマンスはマネネスに依存することを示しており、興味深い。

19 違いは、コールのTotalでGJRとEGARCH、プットのATMでGARCHとGJRの順位が逆転することだけである。

原資産価格が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティが上昇するなら、満期における原資産価格の分布 $S_{T+\tau}$ は右裾が薄く、左裾が厚くなる。そこで、そうしたボラティリティ変動の非対称性を考慮したGJRモデルやEGARCHモデルでは、非対称性を考慮しないGARCHモデルと比べて、権利行使価格 K が高い場合には、満期におけるコール・オプション価格の期待値、

$$E[\text{Max}(S_{T+\tau} - K, 0)] = \int_K^{\infty} S_{T+\tau} f(S_{T+\tau}) dS_{T+\tau},$$

が低くなる。GJR、EGARCHモデルの方がGARCHモデルより $S_{T+\tau}$ の期待値が高いとすると、権利行使価格 K が低い場合には、逆に満期におけるコール・オプション価格の期待値は前者の方が高くなる。プット・オプションの場合は逆になる。そのため、GJR、EGARCHモデルとGARCHモデルを比較すると、コール（プット）・オプションでは、DOTM、OTM（ITM、DITM）で後者の方が高い価格を計算し、ITM、DITM（DOTM、OTM）で前者の方が高い値を計算しているものと思われる。

これまでの分析では、オプションをマネネスによって分類したが、オプションの取引高については考慮しなかった。表7には、コール、プット各オプションの取引高の平均値、標準偏差、最小値、最大値が各カテゴリーごとと全体とで計算されている。取引高の最小値は、コール、プットともOTM以外すべて1桁である。こうした取引の少ないオプションでは価格形成が歪められている可能性があるので、そうしたオプションを取り除いた分析も必要であろう。図4はこれまでの分析で用いたコール、プット各オプションの取引高のヒストグラムである。横軸の取引高の数値はその階級の最大値を表しており、例えば、横軸の3,000の値に対応する縦軸の値は取引高が2,800から3,000の間であったオプションの数を表している。それによると、コール、プットともに取引高が200を下回るオプションが約半数を占めている。そこで、取引高が200を下回るオプションを除去したうえで、これまでと同様にMER、RMSEの計算を行った。結果は表8にまとめられている。取引高が200を下回るオプションを除去すると、標本数はOTMではプットは94で全く変わらず、コールも115から114に1つ減っただけであるが、それ以外ではかなりの数減っている。特に、ITMとDITMではコール、プットとも1桁に減少している。これはOTMのオプションは活発に取引されているのに対して、ITM、DITMのオプションはあまり取引されていないことを意味しており、このことは表7の数値からも確認できる。また、コール・オプション全体では609から313に、プット・オプションでは662から312に、いずれも標本数が半減している。しかし、表4と表8を比べればわかるように、標本数が極端に小さいITMとDITMで若干の違いがみられる以外は、取引高の低いオプションを削除しても結果はほとんど変わらない。

また、本稿の分析に用いた日経225株価指数は2000年4月24日に構成銘柄の入れ替えが行われ、225の構成銘柄のうち実に30銘柄が入れ替えられている。こうした大幅な銘柄入れ替えにより日経225株価指数の変動に構造変化が起きている可能性が

ある²⁰。もしそうであれば、銘柄入れ替えの日を含んだ標本期間でのGARCH型モデルの推定値はバイアスを含んでいる可能性がある²¹。そこで、銘柄入れ替え前に限月を迎えたオプションだけを使ってMER、RMSEの計算を行った。結果は表9にまとめられている。表4と表9を比べればわかるように、ここでも結果はほとんど変わっていない。

日経225オプション価格を用いてこうしたGARCHオプション価格付けモデルの分析を行っているものには、本稿以外に三井 [2000] と三井・渡部 [2000] がある。前者はGARCHモデルについてしか分析を行っていない。それに対して、後者は本稿と同様GARCH、GJR、EGARCHモデルすべてについて分析を行っているが、誤差項の分布を t 分布にした分析は行っていない。後者はモデルの推定に最尤法ではなくマルコフ連鎖モンテカルロ法を用いており、また、期待収益率の定式化や標本

表7 オプション取引高の基本統計量

コール・オプション					
	平均	標準偏差	最小値	最大値	標本数
DOTM	702.5	827.3	1	4665	140
OTM	1500.7	843.0	48	4073	115
ATM	743.7	760.1	3	3280	108
ITM	82.1	165.1	2	1011	94
DITM	42.5	104.6	1	747	152
Total	600.0	822.8	1	4665	609

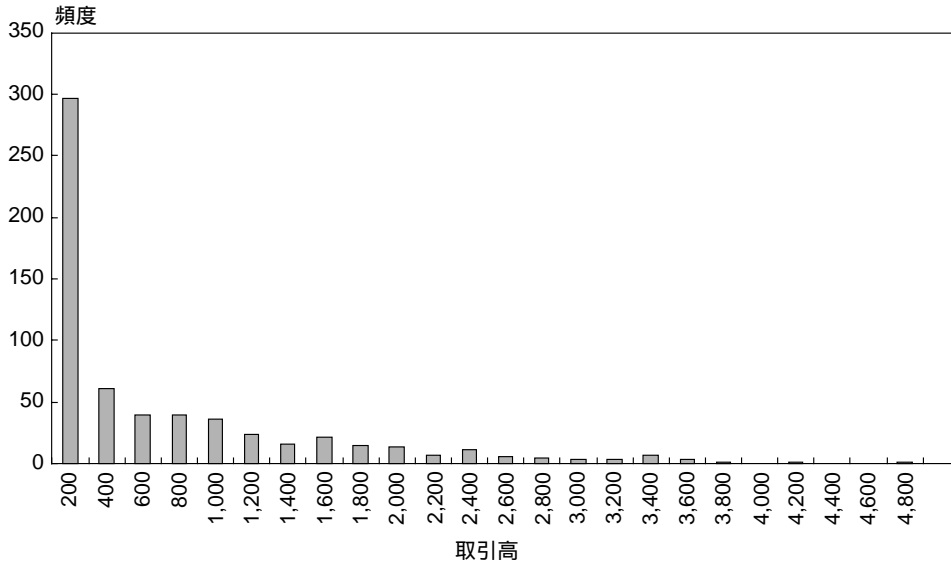
プット・オプション					
	平均	標準偏差	最小値	最大値	標本数
DOTM	718.1	626.3	2	3069	148
OTM	1680.8	1019.8	215	5340	94
ATM	785.6	719.5	7	3347	108
ITM	78.8	121.9	1	631	115
DITM	21.3	42.4	1	227	197
Total	547.4	799.8	1	5340	662

20 日経22株価指数の銘柄入れ替えの影響について分析したものに、齋藤・大西 [2001] がある。

21 GARCH型モデルでボラティリティのショックに高い持続性があるという推定結果が得られるのは、実際にボラティリティのショックに高い持続性があるからではなく、構造変化によってボラティリティの値がシフトしているからだとする意見もある。これについては、Diebold [1986]、Lamoureux and Lastrapes [1990] を参照のこと。

図4 オプションの取引高

(1) コール



(2) プット

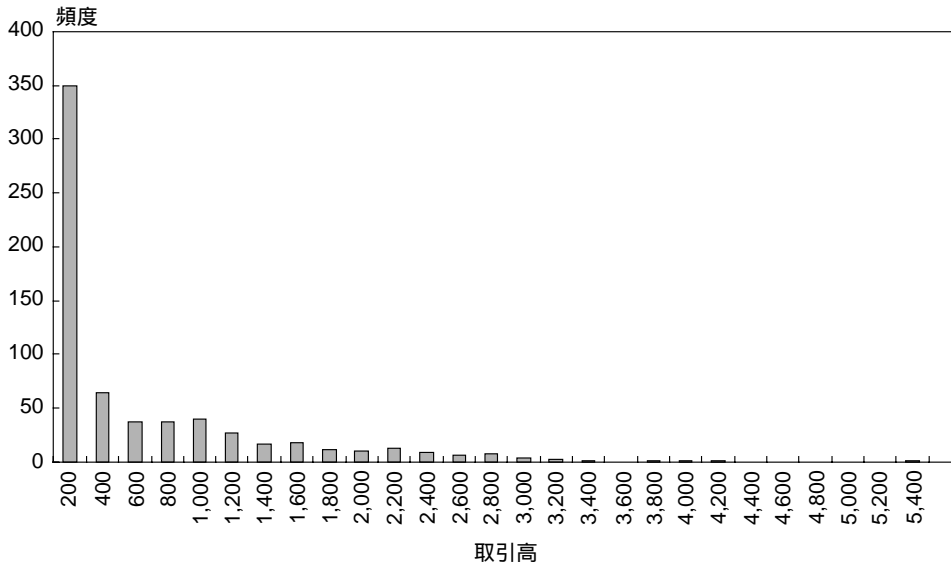


表8 取引高の低いオプションを除いた場合のオプションプレミアムの推定値の比較

MER コール・オプション											
	GARCH			GJR			EGARCH			BS	標本数
	n	m	t	n	m	t	n	m	t		
DOTM	1.123	1.352	1.437	0.264	0.376	0.467	0.213	0.337	0.269	0.220	99
OTM	0.502	0.600	0.514	0.319	0.371	0.321	0.371	0.447	0.375	-0.075	114
ATM	0.175	0.213	0.172	0.162	0.185	0.157	0.185	0.215	0.185	-0.034	83
ITM	0.080	0.093	0.077	0.069	0.077	0.066	0.080	0.089	0.075	0.008	9
DITM	0.043	0.047	0.044	0.053	0.057	0.054	0.056	0.058	0.053	0.029	8
Total	0.588	0.707	0.691	0.246	0.306	0.309	0.256	0.331	0.274	0.034	313

プット・オプション											
	GARCH			GJR			EGARCH			BS	標本数
	n	m	t	n	m	t	n	m	t		
DOTM	-0.184	-0.016	-0.075	0.286	0.423	0.395	0.370	0.526	0.389	-0.661	116
OTM	0.072	0.154	0.076	0.193	0.244	0.199	0.273	0.341	0.276	-0.337	94
ATM	0.083	0.120	0.080	0.103	0.123	0.100	0.134	0.163	0.140	-0.121	83
ITM	0.012	0.026	0.019	0.005	0.016	0.009	0.002	0.012	0.012	-0.061	15
DITM	0.018	0.021	0.017	0.016	0.017	0.015	0.021	0.022	0.019	-0.008	4
Total	-0.024	0.074	0.018	0.193	0.264	0.234	0.256	0.343	0.266	-0.382	312

RMSE コール・オプション											
	GARCH			GJR			EGARCH			BS	標本数
	n	m	t	n	m	t	n	m	t		
DOTM	1.658	1.953	2.102	0.872	0.971	1.209	0.794	0.911	0.934	1.446	99
OTM	0.697	0.802	0.711	0.517	0.567	0.559	0.582	0.656	0.614	0.546	114
ATM	0.233	0.266	0.229	0.208	0.229	0.212	0.232	0.260	0.239	0.222	83
ITM	0.113	0.124	0.109	0.109	0.113	0.107	0.123	0.130	0.121	0.068	9
DITM	0.084	0.089	0.085	0.096	0.101	0.096	0.096	0.098	0.094	0.071	8
Total	1.030	1.208	1.222	0.591	0.656	0.747	0.581	0.662	0.659	0.885	313

プット・オプション											
	GARCH			GJR			EGARCH			BS	標本数
	n	m	t	n	m	t	n	m	t		
DOTM	0.499	0.504	0.489	0.767	0.775	0.795	0.772	0.928	0.829	0.779	116
OTM	0.291	0.335	0.293	0.340	0.380	0.356	0.410	0.470	0.421	0.492	94
ATM	0.197	0.219	0.198	0.194	0.209	0.201	0.218	0.241	0.227	0.263	83
ITM	0.133	0.136	0.144	0.116	0.120	0.122	0.123	0.128	0.130	0.188	15
DITM	0.033	0.035	0.031	0.037	0.038	0.036	0.045	0.047	0.045	0.019	4
Total	0.359	0.377	0.355	0.514	0.529	0.534	0.534	0.635	0.569	0.564	312

表9 日経225株価指数構成銘柄入れ替え前のオプション・プレミアムの推定値の比較

MER コール・オプション

	GARCH			GJR			EGARCH			BS	標本数
	n	m	t	n	m	t	n	m	t		
DOTM	1.049	1.312	1.596	0.478	0.623	0.749	0.428	0.590	0.574	0.185	45
OTM	0.571	0.689	0.592	0.364	0.425	0.357	0.408	0.496	0.397	-0.066	72
ATM	0.147	0.186	0.146	0.134	0.157	0.124	0.156	0.187	0.153	-0.063	69
ITM	0.032	0.046	0.036	0.047	0.056	0.049	0.056	0.067	0.058	-0.030	60
DITM	0.029	0.032	0.032	0.034	0.037	0.037	0.037	0.040	0.038	0.020	82
Total	0.313	0.387	0.394	0.191	0.231	0.225	0.201	0.251	0.218	-0.003	328

プット・オプション

	GARCH			GJR			EGARCH			BS	標本数
	n	m	t	n	m	t	n	m	t		
DOTM	-0.202	-0.027	-0.024	0.151	0.297	0.306	0.287	0.435	0.285	-0.731	78
OTM	0.057	0.149	0.065	0.168	0.225	0.166	0.228	0.303	0.221	-0.372	60
ATM	0.081	0.121	0.086	0.084	0.107	0.078	0.108	0.139	0.109	-0.116	69
ITM	0.039	0.052	0.046	0.023	0.030	0.024	0.025	0.034	0.028	-0.016	72
DITM	0.011	0.013	0.017	0.006	0.008	0.009	0.004	0.006	0.008	0.004	58
Total	-0.010	0.058	0.037	0.088	0.138	0.123	0.135	0.192	0.135	-0.262	337

RMSER コール・オプション

	GARCH			GJR			EGARCH			BS	標本数
	n	m	t	n	m	t	n	m	t		
DOTM	1.457	1.721	2.182	0.935	1.062	1.240	0.854	0.983	0.989	1.392	45
OTM	0.809	0.945	0.837	0.607	0.665	0.642	0.671	0.757	0.685	0.568	72
ATM	0.209	0.242	0.204	0.180	0.202	0.175	0.200	0.228	0.199	0.200	69
ITM	0.067	0.075	0.071	0.071	0.079	0.074	0.080	0.089	0.082	0.079	94
DITM	0.062	0.064	0.064	0.064	0.065	0.066	0.065	0.066	0.066	0.060	82
Total	0.668	0.785	0.904	0.458	0.512	0.557	0.458	0.522	0.498	0.589	328

プット・オプション

	GARCH			GJR			EGARCH			BS	標本数
	n	m	t	n	m	t	n	m	t		
DOTM	0.476	0.485	0.491	0.610	0.675	0.747	0.727	0.800	0.691	0.826	78
OTM	0.256	0.310	0.265	0.291	0.343	0.303	0.321	0.392	0.322	0.513	60
ATM	0.174	0.201	0.183	0.159	0.179	0.166	0.173	0.198	0.181	0.247	69
ITM	0.099	0.106	0.107	0.094	0.099	0.100	0.090	0.095	0.095	0.117	72
DITM	0.061	0.062	0.065	0.059	0.060	0.061	0.057	0.057	0.060	0.063	58
Total	0.270	0.288	0.280	0.330	0.368	0.392	0.386	0.431	0.372	0.470	337

期間も本稿と異なるが²²、そこでも本稿とほぼ同じ結果が得られている。

4. 結論と今後の課題

本稿では日経225オプション価格を用いてGARCHオプション価格付けモデルのパフォーマンスについて実証分析を行った。本稿の分析で得られた主な結論は以下のとおりである。

日経225変化率の期待収益率と安全資産利子率として用いた1ヵ月物のコールレートとの差は統計的に有意ではないため、それらが乖離する可能性を考慮に入れ、Duan [1995] の方法を用いてオプション価格を求めても実際のオプション価格の動きをうまく捉えられるようにはならない。

日経225変化率でもGARCH型モデルの誤差項の分布を t 分布にした方がフィットがよくなるが、誤差項の分布を t 分布にしたモデルを使っても実際のオプション価格の動きをうまく捉えられるようにはならない。

株式市場では株価が上がった日の翌日より下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られているが、日経225変化率のボラティリティの変動にもそうした非対称性が存在する。そうしたボラティリティ変動の非対称性を考慮しないGARCHモデルと非対称性を考慮したGJR、EGARCHモデルの相対的なパフォーマンスはマネネスに依存する。具体的には、コール（プット）では、DOTM、OTM（ITM、DITM）でGJR、EGARCHがGARCHのパフォーマンスを上回り、ITM、DITM（DOTM、OTM）でGARCHがGJR、EGARCHのパフォーマンスを上回る。また、GJRとEGARCH

22 三井 [2000]、三井・渡部 [2000] で分析に用いているのは、1995年2月限月から1998年1月限月までのすべての権利行使価格の日経225コール・オプション（計262）およびプット・オプション（計269）である。また、そこでは、日経225変化率を連続複利 $R_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$ で定義し、投資家の危険中立性を仮定しない場合には、

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.N}(0, 1) \quad (26)$$

で、危険中立性を仮定した場合には、 $\mu = r$ 、 $\lambda = 0$ とした(10)式で定式化している。既に述べたように、(10) (26)式が成り立つのは誤差項 z_t の分布が標準正規分布の場合だけであり、別の分布にすると右辺の $-1/2\sigma_t^2$ の項は変わってしまう。 t 分布の場合にはそれを解析的に求めることができないため、三井 [2000]、三井・渡部 [2000] では z_t の分布を t 分布にした分析は行っていない。さらに、三井 [2000] では%表示の収益率、三井・渡部 [2000] では%表示でない収益率を使って分析を行っているが、既に述べたように、(10) (26)式は尺度に関して不変ではないので、%表示の収益率を用いるのと%表示でない収益率を用いるのとでは結果が異なる。実際、三井 [2000] では(10)式の λ に統計的に有意な正の値が得られているのに対して、三井・渡部 [2000] では λ は有意でない。三井 [2002] 第5章は三井 [2000] の分析を%表示でない収益率を使ってやり直しており、そうすると、やはり λ は有意ではなくなっている。本稿のように、収益率を $R_t = (S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$ で定義し、(9)もしくは(11)式を用いた場合には、尺度に関して不変になるので、そうした問題は生じない。

モデルのパフォーマンスを比較すると、EGARCHが上回るのはコール（プット）ではDOTM（DITM）だけで、それ以外ではすべてGJRが上回る。

コール・オプションではGJRモデルが、プット・オプションではGARCH、GJR、EGARCHモデルのすべてが、ほとんどすべてのマネネスでBSモデルのパフォーマンスを上回る。

これらの結果は、GARCH型モデルを使うとBSモデルよりもパフォーマンスがよくなる可能性はあるが、原資産価格の変動によりフィットのよいGARCH型モデルを用いたからといって必ずしもオプション価格の変動をうまく捉えられるようにはならないことを示している。今後は、他のオプションについても同様の分析を行い、こうした結果が日経225オプション固有のものなのかどうかを明らかにする必要がある。

本稿ではGARCH型モデルの推定に最尤法を用いたが、三井・渡部 [2000]、Bauwens and Lubrano [2002] はMCMC法を用いたベイズ推定法によってGARCHオプション価格付けモデルの分析を行っている。こうした推定法によるパフォーマンスの違いについても比較を行うべきであろう。また、本稿では離散時間のGARCH型モデルを使ってシミュレーションによりオプション価格を導出したが、Heston and Nandi [2000] は時間間隔を0にするとGARCH型モデルが連続時間ウィナー過程モデルに収束することを利用して閉じた解を導いている。彼らの閉じた解を利用した場合との比較も行うべきであろう。最後に、本稿ではGARCH型モデルに限定して分析を行ったが、ボラティリティの変動モデルにはもう1つ確率的ボラティリティ変動（SV：stochastic volatility）モデルがある²³。このSVモデルとの比較も重要である。

23 SVモデルを使って日経225オプション価格を分析したものに、三井 [1998] がある。

参考文献

- 金ヨンジ、 「ボラティリティ変動モデルのオプション・プライシング」、日本ファイナンス学会第7回研究観望会報告論文、2003年
- 齋藤 誠・大西雅彦、 「日経平均株価の銘柄入れ替えが個別銘柄の流動性に与えた影響について」、 『現代ファイナンス』 No.9、2001年、67～82頁
- 三井秀俊、 「日経225株価指数とオプション価格の確率的分散変動モデルによる分析」、 『ファイナンス研究』 No.24、1998年、23～40頁
- 、 「日経225オプション価格のGARCHモデルによる分析」、 『現代ファイナンス』 No.7、2000年、57～73頁
- 、 「ボラティリティ変動モデルによるオプション価格付けの実証研究 日経225オプション市場」、 東京都立大学社会科学研究所博士論文、2002年
- ・渡部敏明、 「バイズ推定法によるGARCHオプション価格付けモデルの分析」、 『日本統計学会誌』、近刊、2000年
- 渡部敏明、 『ボラティリティ変動モデル』、朝倉書店、2000年
- Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen, “Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models,” *Journal of Finance*, 52, 1997, pp. 2 003-2049.
- Bauwens, L., and M. Lubrano, “Bayesian Option Pricing Using Asymmetric GARCH,” *Journal of Empirical Finance*, 9, 2002, pp. 312-342.
- Black, F., “Studies of Stock Market Volatility Changes,” *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistical Section*, 1976, pp. 177-181.
- 、 and M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, 1973, pp. 637-654.
- Bollerslev, T., “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, 1986, pp. 307-327.
- 、 “A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rate of Return,” *Review of Economics and Statistics*, 69, 1987, pp. 542-547.
- 、 R. F. Engle, and D. B. Nelson, “ARCH Models,” R. F. Engle and D. McFadden, eds., *The Handbook of Econometrics*, 4, 1994, pp. 2959-3038, Amsterdam: North-Holland.
- 、 and J. M. Wooldridge, “Quasi Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances,” *Econometric Reviews*, 11, 1992, pp. 143-172.
- Campbell, J. Y., A. W. Lo, and A. C. Mackinlay, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press, 1997.
- Christie, A. A., “The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage, and Interest Rate Effects,” *Journal of Financial Economics*, 10, 1982, pp. 407-432.
- Diebold, F. X., “Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment,” *Econometric Reviews*, 5, 1986, pp. 51-56.
- Duan, J.-C., “The GARCH Option Pricing Model,” *Mathematical Finance*, 5, 1995, pp. 13-32.

- , "Conditionally Fat-Tailed Distributions and the Volatility Smile in Options," Working Paper, Department of Finance, Hong-Kong University, 1999.
- Engle, R. F., "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50, 1982, pp. 987-1006.
- , D. M. Lilien, and R. P. Robins, "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model," *Econometrica*, 55, 1987, pp. 391-407.
- Fama, E. F., "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business*, 38, 1965, pp. 34-105.
- Glosten, L. R., R. Jagannathan, and D. Runkle, "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks," *Journal of Finance*, 48, 1993, pp. 1779-1801.
- Hafner, C. M., and H. Herwartz, "Option Pricing under Linear Autoregressive Dynamics, Heteroskedasticity, and Conditional Leptokurtosis," *Journal of Empirical Finance*, 8, 2001, pp. 1-34.
- Heston, S. L., and S. Nandi, "A Closed-Form GARCH Option Valuation Model," *Review of Financial Studies*, 13, 2000, pp. 585-625.
- Lamoureux, C. G., and W. D. Lastrapes, "Persistence in Variance, Structural Change and the GARCH Model," *Journal of Business & Economic Statistics*, 8, 1990, pp. 225-234.
- Mandelbrot, B., "The Variance of Certain Speculative Prices," *Journal of Business*, 36, 1963, pp. 394-419.
- Nelson, D. B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, 1991, pp. 347-370.
- Verhoeven, P., and M. McAleer, "Fat Tails and Asymmetry in Financial Volatility Models," CIRJE Discussion Paper Series, F-211, University of Tokyo (forthcoming in *Mathematics and Computers in Simulation*), 2003.
- Wang, K.-L., C. Fawson, C. B. Barrett, and J. B. McDonald, "A Flexible Parametric GARCH Model with an Application to Exchange Rates," *Journal of Applied Econometrics*, 16, 2001, pp. 521-536.
- Watanabe, T., "Excess Kurtosis of Conditional Distribution for Daily Stock Returns: The Case of Japan," *Applied Economics Letters*, 7, 2000, pp. 353-355.