

ジャンプ拡散過程を用いた オプション価格付けモデルについて

ひさた よしふみ
久田祥史

要 旨

本稿では、ジャンプ拡散過程を用いたオプション価格付けモデル（ジャンプ拡散モデル）の解説を行う。ジャンプ拡散モデルは、ブラック＝ショールズ・モデルに代表されるオプション価格付けモデルと異なり、原資産価格の非連続な変動を取り入れることができるうえ、市場で観察されるオプション価格をよりうまく表現することができるため、近年再び注目されている。

本稿では、代表的なジャンプ拡散モデルであるマートン・モデルを中心に、マートン・モデル以外のジャンプ拡散モデルを含めてサーベイを行い、ジャンプ拡散モデルの整理を行う。また、日経平均株価指数オプションの市場データに基づき、マートン・モデルのキャリブレーションを行い、ジャンプ拡散モデルの特徴を検証する。

キーワード：ジャンプ拡散過程、マートン・モデル、ポアソン過程、複合ポアソン過程、ブラック＝ショールズ・モデル、ボラティリティ・スマイル

本稿で示されている内容および意見は筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。

久田祥史 日本銀行金融研究所研究第1課（現 人事局）(E-mail: yoshifumi@hisata.org)

1 . はじめに

金融派生商品の代表的商品の1つであるオプションの理論価格を導出する数学的モデル（オプション価格付けモデル）は、1970年代初頭に、ブラックとショールズ（Black and Scholes [1973]）によって、またマートン（Merton [1973]）によって、おのおの独立に開発されたモデル（ブラック＝ショールズ・モデルまたはブラック＝ショールズ＝マートン・モデルと呼ばれる＜以下BSモデル＞）を基本としている。原資産価格の動きが拡散過程に従う等の仮定を置いたBSモデルでは、オプションの理論価格が比較的簡単な数式で表される。BSモデルの出現が、その後のオプション市場の急速な発展の最大の牽引役となったことはよく知られている。

しかし、BSモデルは、現実の市場が示す種々の特徴を十分に捉え切れないという限界をはらんでいる。このため、BSモデル以降、BSモデルが持つ仮定を緩和ないし変更することにより、現実の市場の特徴をよりうまく表現できるオプション価格付けモデルの開発が多く行われてきた。本稿では、こうしたBSモデルの各種拡張モデルの中で、原資産価格の動きが拡散過程にジャンプ過程を加えた複合過程（以下ジャンプ拡散過程）に従うと仮定したオプションの価格付けモデル（以下ジャンプ拡散モデル¹）に焦点を当てて、モデルの枠組みを解説するほか、モデルのキャリブレーションを行い、モデルの有効性等を考察する。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2節では、金融商品のヒストリカルデータから収益率分布の主要統計量を計算するほか、BSモデルの仮定と相反するボラティリティ・スマイル現象を示す。これにより、BSモデルが仮定している拡散過程が必ずしも妥当でないことを説明する。次に、3節では、ジャンプ拡散過程を説明した後、代表的なジャンプ拡散モデルのマートン・モデル（Merton [1976]）の枠組みを解説し、数値例を通じて同モデルの特徴を考察する。4節では、ジャンプ拡散過程のパラメータを推計し、拡散過程よりも原資産価格変動の表現力が向上することを確認する。またオプション価格データを用いて、マートン・モデルをキャリブレートし、留意点を整理する。さらに、ジャンプ拡散モデルのバリエーションを整理する。5節では、ジャンプ拡散モデルを用いる際に対応が必要となる非完備性を概説し、具体的な対応方法を整理する。6節では、ジャンプ拡散モデル以外で、ボラティリティ・スマイルを表現する等のために開発された各種手法も概説する。なお補論では、本文を補足するための、やや複雑な数式展開をまとめる。

1 厳密には、本稿では、拡散項を含む複合ポアソン過程（後述）を用いたモデルをジャンプ拡散モデルと呼称する。

2. ブラック＝ショールズ・モデルが捉え切れない市場の特徴

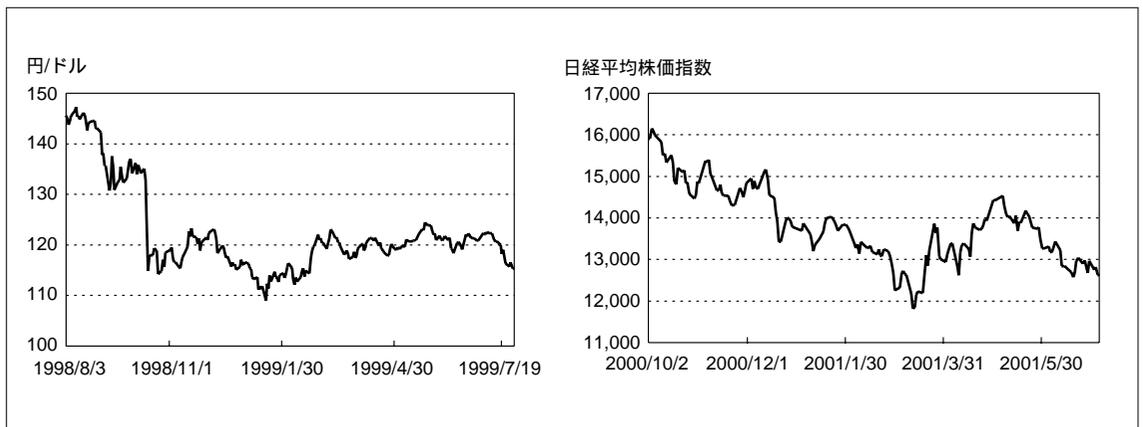
本節では、ジャンプ拡散モデルが考え出されることになった背景にある、BSモデルが捉え切れない市場の特徴をみていく。

(1) 原資産価格変動の分布

原資産価格の動きが拡散過程に従う、つまり原資産価格の収益率が正規分布に従うというBSモデルの仮定では、現実の市場が示す種々の特徴を十分に捉え切れないという限界が多くの文献によって指摘されている。例えば、金融商品の市場価格は時折大きな変動を起こすといわれている。本節では、まず株式市場や為替市場での現実の原資産価格変動をみてみよう。

円・ドル為替レートの推移（1998年8月～1999年7月、日次）と日経平均株価指数の推移（2000年10月～2001年9月、日次）を図表1に示す²。

図表1 円・ドル為替レート（1998年8月～1999年7月、左）と日経平均株価指数（2000年10月～2001年9月、右）



図表1からは、円・ドル為替レートは、1998年10月の数日間に約20円の大きな下落を示した一方³、その他の時期にはそれほど大きな変動はないという特徴がみとれる。同様に、日経平均株価指数も短期間で急激に変動している様子がみられる。短期間に相対的に大きな変動があるということは、これらの収益率分布が正規分布とは異なった分布である可能性を示唆している。実際に、これら収益率分布の主要統計量を図表2に示す。

2 比較的大きな原資産価格変動があった時期を選んだ。

3 正確には、10月6～8日の間に18円下落。

図表2 円・ドル為替レート（1998年8月～1999年7月）と
日経平均株価指数（2000年10月～2001年9月）の主要統計量

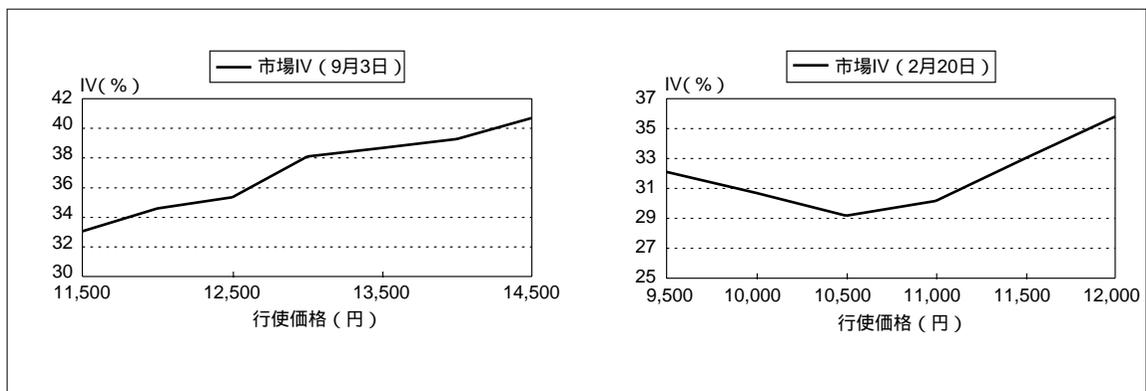
	平均	分散	歪度	尖度
円・ドル為替レート収益率	-0.09	1.56	-1.53	12.01
日経平均株価指数収益率	-0.20	3.15	0.29	4.93

図表2から、円・ドル為替レートでは尖度が12.01、日経平均株価指数では尖度が4.93となっており、正規分布（尖度3）とは異なった分布であることが読み取れる。すなわち、この例では、原資産価格が拡散過程に従っているという仮定は必ずしも適当ではないことになる。また、そうした拡散過程を仮定したBSモデルは、オプションを誤って価格付けしてしまう可能性がある。

（2）ボラティリティ・スマイル

株式、為替等のオプション市場では、ボラティリティ・スマイルと呼ばれる構造が観察される。ボラティリティ・スマイルとは、市場で観測されるオプション価格からBSモデルを用いて計算したボラティリティ（インプライド・ボラティリティ）と行使価格との間にみられる関係である。具体例として、図表3に2001年9月3日（左図）と2002年2月20日（右図）の日経平均株価指数コール・オプションのボラティリティ・スマイルを示す⁴（年率表記）。

図表3 ボラティリティ・スマイルの例



4 ボラティリティ・スマイルが比較的明確に観察された日を選択した。

右図からは、行使価格に対して下に凸となる関数のような関係が、左図からは、行使価格が小さくなるにつれてインプライド・ボラティリティが低くなるという概ね線形の関係があることがわかる。これらの関係がボラティリティ・スマイルである⁵。

BSモデルでは、原資産価格の変動が拡散過程に従い、そのボラティリティは定数であると仮定している。この仮定が実際に正しいとすると、オプションの市場価格から計算されるインプライド・ボラティリティは行使価格の水準によらず定数となるはずである。ところが、図表3からわかるように実際の市場価格から計算されるインプライド・ボラティリティは定数ではない。つまり、ボラティリティ・スマイルの存在は、BSモデルの仮定が妥当ではないことを示唆している。

3. ジャンプ拡散モデル

本節では、前節のBSモデルが捉え切れない市場の特徴に対応する方法の1つであるジャンプ拡散モデルを説明する。まず、複合ポアソン過程⁶ (compound poisson process) を用いたジャンプ拡散過程を説明する。次に、代表的なジャンプ拡散モデルであるマートン・モデルを解説し、数値例を通じてその特徴を整理する。

(1) ジャンプ拡散過程

ここでは、複合ポアソン過程を用いたジャンプ拡散過程の定式化を説明する。ここでは、ジャンプ変動を1個の複合ポアソン過程で表現することにする。具体的には、原資産価格 S_t の変動(収益率)が、標準ブラウン運動(拡散項) Z_t 、ポアソン過程 N_t を用いて次のようにモデル化されるとする^{7, 8}。

5 図表3左図のようにオプション価格が行使価格に概ね比例しているようにみえる形状をボラティリティ・スキューと呼ぶことがある。本稿では、ボラティリティ・スキューを含めインプライド・ボラティリティが行使価格に依存する構造を(広義の意味での)ボラティリティ・スマイルと呼ぶ(ただし、ボラティリティ・スマイルの形状に特に注目する際には、図表3右図の形状を狭義のボラティリティ・スマイル、図表3左図の形状をボラティリティ・スキューと区別する)。なお、本稿では、ボラティリティ・スマイルとボラティリティの期間構造とを区別している点に留意されたい。

6 ポアソン過程や複合ポアソン過程の詳細は補論1.を参照。

7 本稿では、拡散過程のパラメータは定数であるとする。なお、ここでは1次元のジャンプ拡散過程を考える。

8 なお、(1)式中の複合ポアソン過程をより正確に表記すると次のように書ける。本文の(1)式は直観的理解を優先するため表現をやや簡略化している点に留意されたい。

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = (\mu - \lambda k) dt + \sigma_B dZ_t + dY_t, \quad Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} (J_n - 1).$$

ただし、 $\{J_n; n=1, 2, \dots\}$ は、互いに独立で同一の分布に従う確率変数の列(ジャンプが起こった際のジャンプ幅率を表す確率変数)であり、 S_t が解を持つための技術的な条件を満たしていると仮定する。また、 Z_t 、 N_t 、 J_n はおのおの独立であるとする。

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - \lambda k) dt + \sigma_B dZ_t + (J - 1)dN_t. \quad (1)$$

ただし、

- ・ J はジャンプが起こった際のジャンプ幅率を表す確率変数⁹、
- ・ μ は原資産価格の期待収益率¹⁰（定数）、 σ_B は原資産価格の収益率のボラティリティ（定数）、 λ はポアソン過程の強度（定数）、 k はジャンプ幅率の期待値（ $k = E[J - 1]$ ¹¹）、
- ・ Z_t 、 N_t 、 J はおのおのの独立。

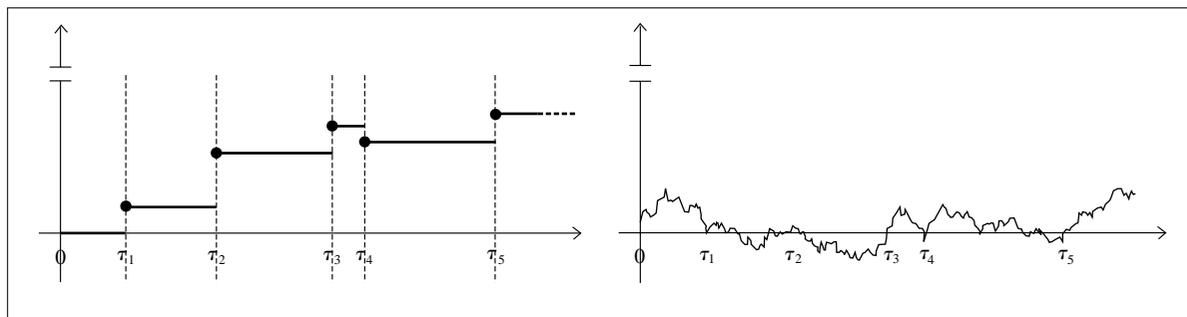
(1)式は、確定的なトレンドを示す項(右辺第1項)に、連続的な確率変動を示す拡散項(同第2項)とジャンプ項(同第3項)を加えた形になっている。

ジャンプ拡散過程には、拡散過程にさらに2つの確率変数が加えられている(N と J)。これらの確率変数は、「ジャンプが起こるか否か」、ジャンプが起こった場合に「どの程度の大きさでジャンプするのか」を表すものである。

N は強度を λ とするポアソン過程であり、ジャンプ事象が生じる確率的な頻度が λ で与えられている。また、 J はジャンプが起こった際のジャンプの比率を表している(脚注11参照)。

原資産価格のジャンプ項と拡散項による変動のイメージを図表4に示す。

図表4 原資産価格のジャンプ項による変動(左)と拡散項による変動(右)

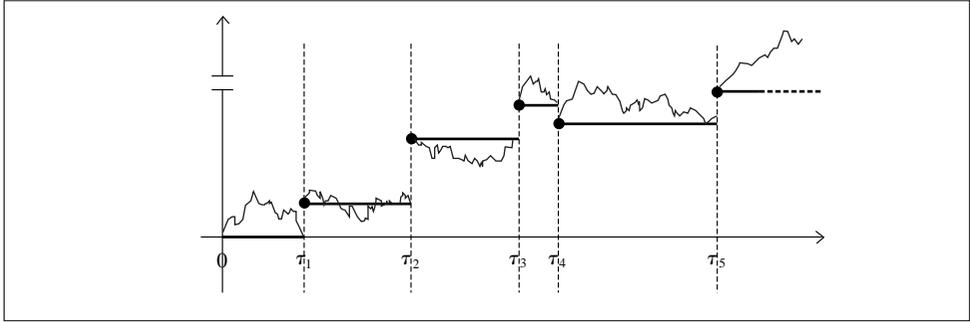


9 J は S_t が解を持つための技術的な条件を満たしているとする。なお、León *et al.* [2002]は、複合ポアソン過程を一般化したレヴィ過程で、この J に対する技術的条件を示している(レヴィ過程については、佐藤 [1990]が詳しい)。

10 (1)式の右辺第1項(ドリフト項)の係数が μ ではなく $(\mu - \lambda k)$ となっているのは、複合ポアソン過程の期待値($E[(J - 1)dN_t] = \lambda k dt$ 、もしくは $E[dY_t] = \lambda k dt$)を調整し、ジャンプ拡散過程のドリフト項に対する複合ポアソン過程の影響を平均的に0にするためである。

11 (1)式のポアソン過程の係数を $J - 1$ としているのは、 $J \cdot S$ をジャンプが起こった直後の原資産価格となるようにモデル化するためである。例えば、原資産価格を100円とし、ジャンプにより80円となるようにモデル化する場合、 $0.8 \times 100円 = 80円$ であるため $J = 0.8$ となる。したがって、この場合のポアソン過程の係数 $J - 1$ は $0.8 - 1 = -0.2$ 、つまり下側に20%ジャンプすることを表している。

図表5 ジャンプ拡散過程による原資産価格の変動



図表4に示したジャンプ項による変動と拡散項による変動（ブラウン運動）によって、図表5のようにジャンプ拡散過程（除く確定的なトレンド項）による原資産価格変動が構成されることがわかる。

(2) マートン・モデル 対数正規分布ジャンプ幅率モデル

ここでは、代表的なジャンプ拡散モデルであるマートン・モデルを取り上げ、ボラティリティ・スマイルが本モデルで表現できることを簡単な数値例により示す。

マートン（Merton [1976]）は、株価 S_t の変動過程としてジャンプ拡散過程を(1)式のように仮定し、同式内のパラメータ J が対数正規分布に従う場合（ $\ln J \sim \Phi(\mu_J, \sigma_J^2)$ ）を解析解が求められる例として取り上げている。ここでは、「ジャンプのリスクに対するリスク・プレミアムはゼロ」との仮定を置く¹²ことにより、行使価格を K 、満期を T とするコール・オプション価格 C の解析解((2)式)を導出できることを示した（導出は補論2参照）^{13, 14}。

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'T} (\lambda'T)^n}{n!} [S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-r_n T} \Phi(d_2)], \quad (2)$$

$$\lambda' = \lambda(1+k), \quad r_n = r - \lambda k + n \ln(1+k)/T, \quad \sigma_n^2 = \sigma_B^2 + n\sigma_J^2/T,$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{T}} [\ln(S_0/K) + (r_n + \sigma_n^2/2)T], \quad d_2 = d_1 - \sigma_n \sqrt{T},$$

ただし、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積確率密度関数、

$$k = E[J - 1] = \exp(\mu_J + \sigma_J^2/2) - 1.$$

12 この仮定に関しては5節でやや詳しく説明する。

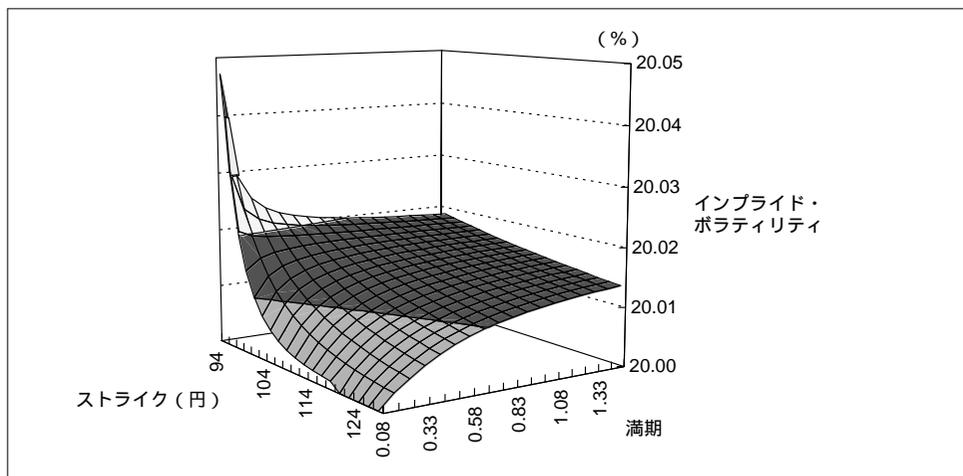
13 補論3.ではマートン・モデルの各種感応度の理論式も示す。

14 BSモデルに比べると解析解は複雑である。近年、再びジャンプ変動を含んだモデルが注目されるようになったのは、コンピュータの性能の進歩に伴い、より複雑な数式が比較的容易に扱えるようになったことも背景にあると考えられる。

さて、市場で形成されるオプションの価格が、マートン・モデルによる理論価格で、ある程度表現し得るのであれば、マートン・モデルによって求めたオプション価格からBSモデルで逆算したインプライド・ボラティリティは、ボラティリティ・スマイル構造を持つことが予想される。

そこで、マートン・モデルの解析解を用いて算出したコール・オプション価格から、(BSモデルを使って)インプライド・ボラティリティを算出した結果を図表6に示す¹⁵。ここでは、 $\lambda = 1.0\%$ 、 $E[J] = 80.0\%$ 、 $\sqrt{V[J]} = 5.0\%$ 、 $\sigma = 20.0\%$ と置いて、0.08～1.5年まで0.08年ごとの満期についてインプライド・ボラティリティを算出した。

図表6 ボラティリティ・スマイル・サーフェス



図表6からは以下のような特徴を指摘できる。まず、満期を一定とすると、インプライド・ボラティリティは、行使価格の水準によって変化するというボラティリティ・スマイルが観察される。その形状は満期によって変化し、特に満期が長くなると行使価格に徐々に依存しない形状となることがわかる。これは、満期が長いとそれだけジャンプの発生回数が確率的に増え、ジャンプによる価格変動が(1)式のトレンド項(dt の項)に平均的に吸収されていき、拡散項(dZ_t の項)による影響が相対的に大きくなるためであると考えられる。こうした特徴は、市場で観測される長期オプションのボラティリティ・スマイルをジャンプ拡散モデルが説明し切れない可能性を示していると考えられる。実際、いくつかの先行研究でも、この可能性が指摘されており(例えば、Bakshi, Cao and Chen [1997])、長期オプションのプライシングには、確率ボラティリティ・モデルを用いることも考えられる。なお、その一方で、短期オプションではジャンプ過程を加えるとモデルの説明力が格段に向上すると指摘されている(Bakshi, Cao and Chen [1997])。

15 Merton [1976] のオプション理論価格の挙動を数値例として考察したものに、Navas [2000] がある。

以上の簡単な数値例により、マートン・モデルは、原資産価格過程にジャンプの効果織り込むことによって、オプションのボラティリティ・スマイルを表現できる、という利点を持つことが示された。

4. 実際のデータによるジャンプ拡散モデルの検証

ここでは、まず、ジャンプ拡散過程のパラメータを推計し、拡散過程よりも原資産価格変動の表現力が向上することを確認する。また、オプション価格データを用いて、マートン・モデルのキャリブレーションを行う。さらに、マートン・モデルを含めた主要なジャンプ拡散モデルを概説する。

(1) ジャンプ拡散過程の推計

本節では、市場データを用いてジャンプ拡散過程の各種パラメータを推計し、ジャンプ拡散過程が、拡散過程に比べ相対的に正確に、原資産価格変動を記述できることを示す。

ジャンプ拡散過程を用いることで原資産価格の収益率分布に関する表現力が向上するかどうかを確認するため、日経平均株価指数と円・ドル為替レートの日次変動に、ジャンプ拡散過程、拡散過程¹⁶の2つの過程を仮定して、おのおののパラメータ推計を行った。ここでは、ジャンプ幅率 J が対数正規分布($\ln J \sim \Phi(\mu_J, \sigma_J^2)$)に従う、複合ポアソン過程を用いたジャンプ拡散過程を用いた(具体的には、(1)式に対応した(3)式¹⁷を推計した)。

$$\ln \frac{S_{t+1}}{S_t} = \mu_B + \sigma_B Z_t + \sum_{n=1}^{N_{t+1}-N_t} J_n, \quad \ln J_n \sim \Phi(\mu_J, \sigma_J^2). \quad (3)$$

ただし、 $\mu_B \equiv \mu - \lambda k - \sigma_B^2/2$ である。

その結果を図表7に示す^{18, 19}。データは、日経平均株価指数と円・ドル為替レートの過去5年間(1997年3月~2002年2月)の日次収益率を用いた。推計は、データ期間の違いによる差の有無も確認するため、1年間(2001年3月~2002年2月)と5年間(1997年3月~2002年2月)の2つの期間で行った。

次に、推計されたパラメータを用いたジャンプ拡散過程から算出される主要統計量と実際のデータから計算される統計量を示す(ジャンプ拡散過程の主要統計量の理論式は補論4.参照)。

16 ここでは、拡散過程として $\ln(S_{t+1}/S_t) = \mu_B + \sigma_B Z_t$ を仮定した。

17 (1)式は連続時点表現であるが、本稿では離散時点表現である(3)式を近似的に用いる。

18 推計に当たっては、Craine, Lochstoer and Syrtveit [2000] を参考にした。

19 データはBloombergより取得し、推計はGAUSSを用いて行った。

図表7 ジャンプ拡散過程（上段）と拡散過程（下段）の推計結果

ジャンプ拡散過程				
	日経平均株価指数		円・ドル為替レート	
	1年間(2001年3月～2002年2月)	5年間(1997年3月～2002年2月)	1年間(2001年3月～2002年2月)	5年間(1997年3月～2002年2月)
μ_B	-0.3950%	-0.0862%	0.0508%	0.0673%
σ_B	1.2042%	1.2032%	0.6014%	0.6027%
λ	0.8155%	0.3189%	0.0000%	0.1516%
μ_J	0.3941%	0.1290%	0.7601%	-0.3937%
σ_J	1.5978%	1.8836%	0.9816%	1.3099%
サンプル数	246	1,231	261	1,304
対数尤度	-500.71	-2,295.5	-236.71	-1,482.33
拡散過程				
	日経平均株価指数		円・ドル為替レート	
	1年間(2001年3月～2002年2月)	5年間(1997年3月～2002年2月)	1年間(2001年3月～2002年2月)	5年間(1997年3月～2002年2月)
μ_B	-0.0737%	-0.0451%	0.0508%	0.0076%
σ_B	1.9057%	1.6081%	0.6014%	0.8082%
サンプル数	246	1,231	261	1,304
対数尤度	-505.62	-2,329.6	-236.71	-1571.4

図表8 ジャンプ拡散過程による主要統計量（上段）と実際の統計量（下段）

	日経平均株価指数		円・ドル為替レート	
	1年間(2001年3月～2002年2月)	5年間(1997年3月～2002年2月)	1年間(2001年3月～2002年2月)	5年間(1997年3月～2002年2月)
平均	-0.0736	-0.0451	0.0508	0.0076
	-0.0737	-0.0451	0.0508	0.0076
分散	3.6587	2.5844	0.3617	0.6467
	3.6464	2.5881	0.3630	0.6537
歪度	0.3589	0.1056	0.0000	-0.6083
	0.2229	0.0763	-0.1614	-0.7794
尖度	4.3376	4.8199	3.0000	6.7868
	4.1027	4.8856	3.6289	8.0427

図表7をみると、ジャンプ拡散過程は、円・ドル為替レートの1年間（2001年3月～2002年2月）のデータ・セットを除き、拡散過程に比べて対数尤度がかかなり大きい。これより、ジャンプ拡散過程は拡散過程に比べて原資産価格変動に対する表現力が高いことがわかる²⁰。一方、円・ドル為替レートの1年間（2001年3月～2002年2月）のデータ・セットでは、拡散過程とジャンプ拡散過程で対数尤度に差はなく、通常の拡散過程で十分に原資産価格変動を表現できることを示している。

また、歪度や尖度は、拡散過程を仮定すると実際の分布によらずおのおの0、3となるが、図表8では、ジャンプ拡散過程による歪度と尖度は実際の分布のそれらに（拡散過程の場合に比べれば）近い値となることがみてとれる。したがって、ジャンプ拡散過程は、拡散過程が捉え切れない原資産価格変動の特徴を相対的にうまく捉えているといえる。なお、円・ドル為替レートの1年間（2001年3月～2002年2月）のデータ・セットでは、この期間の歪度や尖度は正規分布のそれらに比較的近く、この期間にはジャンプ過程で表現されるような大きな価格変動は生じていなかったと解釈できる。

(2) ジャンプ拡散モデル（マートン・モデル）のキャリブレーション

ここでは、代表的なジャンプ拡散モデルであるマートン・モデルを用いて、モデルによる理論価格が市場価格に適合するようにパラメータのキャリブレーションを行う^{21, 22}。

20 ジャンプ拡散過程は、拡散過程に比べてパラメータ数が多いため、対数尤度は相対的に大きくなる。ジャンプ拡散過程の表現力の方が優れていることを示すには、ジャンプ拡散過程の対数尤度 $\ln L_{JUMP}$ と拡散過程の対数尤度 $\ln L_{DIFF}$ の違いを検討する必要がある。そこで、各データ・セットで $2(\ln L_{JUMP} - \ln L_{DIFF})$ という統計量を算出した。統計量をみると、円・ドル為替レートの2001年3月～2002年2月のデータ・セットでは0となった（このデータ・セットでは、ジャンプ拡散過程が拡散過程に比べ説明力が高いとはいえない）ので、これを除き統計量が最も小さい日経平均株価指数の2001年3月～2002年2月のデータ・セットで尤度比検定を行ってみた。なお、ジャンプ強度(λ)を0とすると、ジャンプ拡散過程は拡散過程になり、ジャンプ項の残り2つのパラメータ(μ_j, σ_j)が任意となってしまうため、通常の尤度比検定を行うことができない（Garcia [1998] 等参照）。このため、本稿では、まず、統計量 $(2(\ln L_{JUMP} - \ln L_{DIFF}))$ が従う分布をシミュレーションにより算出し、統計量の10%有意水準を求めた。次に、帰無仮説を拡散過程、対立仮説をジャンプ拡散過程とし、10%水準で尤度比検定を行った。その結果、帰無仮説は棄却された。このことは、統計量が最も小さいデータ・セットで「ジャンプ拡散過程は拡散過程に比べ説明力が高い」ことを示しているため、統計量が相対的に大きいその他のデータ・セットでも同様のことがいえると考えられる（本稿では、その他のデータ・セットの尤度比検定は行っていない）。

21 マートン・モデルを用いたキャリブレーションの具体例を示した文献は少ない。ジャンプ拡散モデルを含む確率ポラリティ・ジャンプ拡散モデル（後述）のキャリブレーションを行っているものとしてBakshi, Cao and Chen [1997]がある。

22 1992年6月以降に満期を迎える日経平均株価指数オプションは、ヨーロピアン・オプションであるので、ヨーロピアン・タイプの価格形式であるマートン・モデル((2)式)をそのまま利用できる。

イ. データ

データは、日経平均株価指数オプション（コール）の、2001年9月3日（満期2001年10月12日）、2002年2月20日（満期2002年3月8日）の取引データを利用した²³。日経平均株価指数のコール・オプション市場では、極端なイン・ザ・マネー・オプションの流動性が極端に低いという問題点が指摘されている（齋藤・高木 [2000]）ことから、ここでは、取引高の少ないデータ²⁴は除外した。

ロ. キャリブレーション方法

具体的なキャリブレーションの方法は、S&P500オプションを対象にキャリブレーションを行っているBakshi, Cao and Chen [1997] を参考にした。Bakshi, Cao and Chen [1997] は市場価格とジャンプ拡散モデルから算出されるオプション理論価格の誤差2乗和（以下、SSE : sum of squared error）すなわち

$$SSE = \sum_{\substack{\text{キャリブレーションに} \\ \text{使用したオプション}}} \{ (\text{市場価格}) - (\text{ジャンプ拡散モデルの理論価格}) \}^2, \quad (4)$$

を目的関数とし、これを最小化することでパラメータをキャリブレートしている。これに対し本稿では、以下のSSE((5)式)を最小にするようにキャリブレートした((4)式とは異なり誤差率で計算)。

$$SSE = \sum_{\substack{\text{キャリブレーションに} \\ \text{使用したオプション}}} \left\{ \frac{(\text{市場価格}) - (\text{ジャンプ拡散モデルの理論価格})}{(\text{市場価格})} \right\}^2. \quad (5)$$

キャリブレートするパラメータは、ブラウン運動のボラティリティ係数 (σ_B)、ジャンプ強度 (λ)、ジャンプ幅率の平均 (μ_J)、ジャンプ幅率の標準偏差 (σ_J) の4つである²⁵。

ハ. キャリブレーションの結果

2001年9月3日と2002年2月2日の取引データにキャリブレートした各パラメータを図表9に示す。

23 大阪証券取引所が提供している「デリバティブ取引過去データ」を利用した。

24 具体的には、500単位以下の取引を除いた。なお、1単位は日経平均株価指数に1,000円を乗じた額である。

25 キャリブレーションには、Matlabの最適化ルーチン (fmincon) を利用した。なお、パラメータの初期値として、本節(1)の日経平均株価指数の1年間 (2001年3月～2002年2月) のデータ・セットで推定した値 (図表7参照) を用いた。

図表9 マートン・モデルのキャリブレーション結果

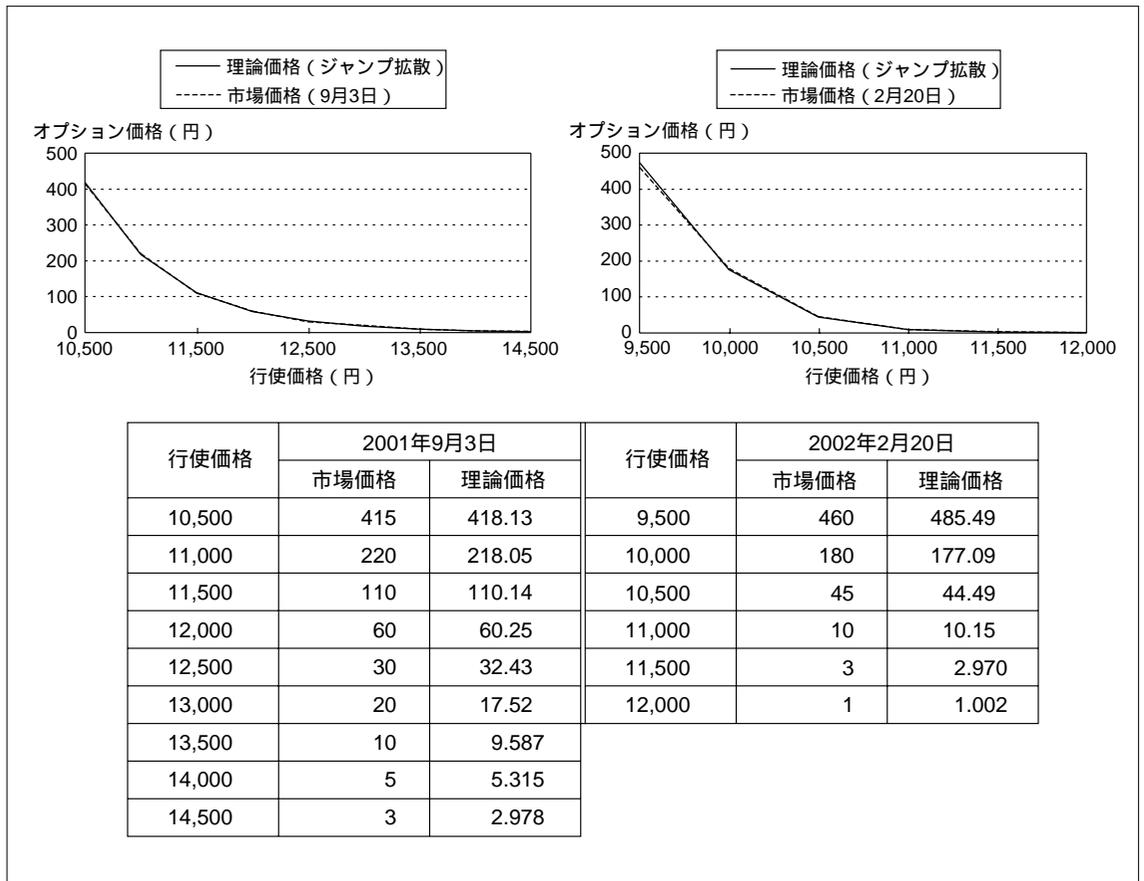
	2001年9月3日	2002年2月20日
σ_B	0.8486%	1.1898%
λ	2.4358%	1.5544%
μ_J	-4.3252%	-6.2768%
σ_J	10.939%	9.3979%

(市場価格との比較)

図表9のパラメータを用いて算出されるオプション理論価格が市場価格にどの程度適合しているかを図表10に示す。

図表10から、マートン・モデルは、市場価格にかなり適合するようにパラメータをキャリブレートできていることがわかる。

図表10 マートン・モデルから算出される理論価格と市場価格との比較

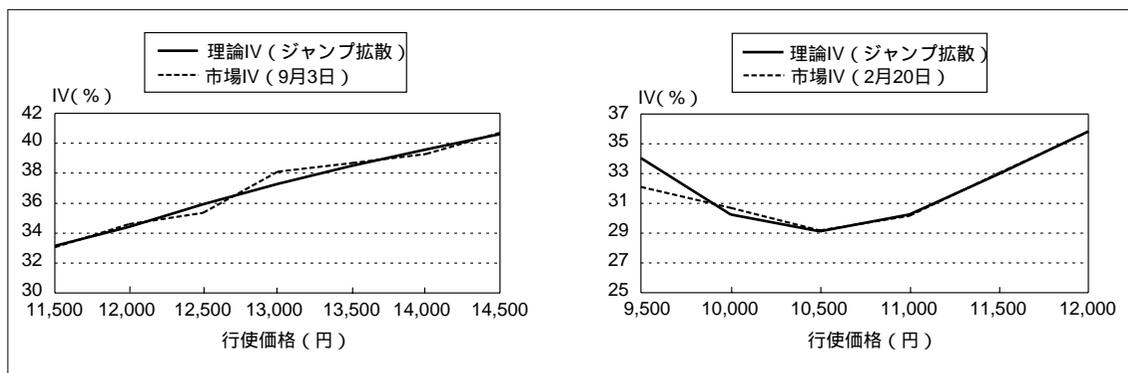


(ボラティリティ・スマイルの比較)

次に、市場で実際に観察されるボラティリティ・スキュー、(狭義の)ボラティリティ・スマイル(脚注5参照)を表現できるか否かを確認する。図表11に市場価格からBSモデルを用いて算出されるインプライド・ボラティリティと、マートン・モデル(図表9のパラメータを適用した)で算出される理論価格からBSモデルを用いて算出される同ボラティリティ(年率表記)を示す。

図表11左図は、2001年9月3日に観察されたボラティリティ・スキューであり、マートン・モデルはこれを比較的正確に再現している。さらに、図表11右図は、2002年2月20日に観察された狭義のボラティリティ・スマイルであり、やはりマートン・モデルはこれをかなり忠実に再現している。このことから、マートン・モデルは、市場で観察されるボラティリティ・スマイルをある程度正確に表現できることがわかる。

図表11 ボラティリティ・スマイルの表現



(キャリブレーションの留意点)

上記で示した簡単な事例では、ジャンプ拡散モデル(マートン・モデル)は、市場価格にうまく適合し、ボラティリティ・スマイルをかなりよく表現し得た。

しかし、本稿では具体的には示さなかったが、キャリブレーションの際には、与える初期値によって、キャリブレートされたパラメータが安定しないという問題が生じた。この背景には、SSE((5)式)の複雑な関数形により、キャリブレートされたパラメータがいわゆる局所解となっている可能性を指摘できる。実務で実際にジャンプ拡散モデルを利用する際には、特定の初期値のみではなく、幾つか初期値を変えてキャリブレーションを行い、それらの結果を比較検討する等の手続が必要であると考えられる²⁶。

26 また、本稿の事例では、同一の満期を持つオプションのデータのみでキャリブレーションを行ったが、本来は、市場で観測される、各種の満期を持つオプション・データを同時にキャリブレートすることが望ましい。ただし、本稿の作成過程では実際に各種の満期を持つオプション・データに上記のキャリブレーション方法を適用してみたが、必ずしも良好な結果は得られなかった。このため、実務で実際にキャリブレーションを行う際には、本稿で採用した方法以外の、より効率的な方法を検討する必要があると思われる。

(3) ジャンプ拡散モデルのバリエーション

ここでは、マートン・モデルを含めたジャンプ拡散モデル（複合ポアソン過程によるオプション価格付けモデル）のバリエーションをみていく。具体的には、ジャンプ拡散モデルのジャンプ幅率 λ にどのような確率変数を仮定するかによって、イ．定数ジャンプ幅率モデル、ロ．対数正規分布ジャンプ幅率モデル、ハ．ラプラス分布ジャンプ幅率モデルという3つのバリエーションに分けて簡単に解説する。

イ．定数ジャンプ幅率モデル

これは、(1)式のジャンプ幅率を定数としたモデルであり、Brockhaus *et al.* [1999] などにより提案された。このモデルの利点は、オプション価格の解析解を求めることができるうえ、ジャンプ・リスク・プレミアムを定数として簡便に導出できることにある。

ロ．対数正規分布ジャンプ幅率モデル（マートン・モデル）

マートン・モデルは、ジャンプ幅率に対数正規分布を仮定している。このモデルの利点は、「ジャンプ変動は分散可能であり、ジャンプ・リスク・プレミアムは0である」との仮定を置く²⁷ことで、オプション価格の解析解が求められ、ジャンプ幅率に不確実性を導入し得ることである。また、上述のように市場価格に整合的なボラティリティ・スマイルを表現することが可能である。

ハ．ラプラス分布ジャンプ幅率モデル

これは、Kou [2002] によって提案されたモデルで、ジャンプ幅率にラプラス分布（2重指数分布）を仮定する。このモデルの利点は、ファット・テール性のある分布を作成しやすいうえ、左右非対称な分布を作ることが可能な点である。なお、Lipton [2002] は、経路依存型のオプション（例えば、バリア・オプションなど）の価格付けに、ラプラス分布ジャンプ幅率モデルが有効であると指摘している。

27 この仮定に関しては5節でやや詳しく説明する。

5 . ジャンプ過程を導入することに伴う理論的問題とそれへの対応

前節までは、ジャンプ過程を導入することによるメリット（原資産価格変動分布の表現力向上、およびボラティリティ・スマイルの表現力向上）を解説した。本節では、ジャンプ過程を導入することにより生じる理論的な問題点を整理し、それに対してどのような対応が図られているかを整理する。

BSモデルでは、原資産価格過程の不確実性の根元は拡散項（ブラウン運動）のみである。このため、無リスク資産、原資産、オプションからなる市場では、原資産と無リスク資産からなるポートフォリオを各時点で組み替えることによりオプションのペイオフを“複製”することが可能である（この組み替え操作をダイナミック・ヘッジと呼ぶ）。つまりBSモデルは、いずれか2つの資産を用いて、残りの1つの資産を複製することが可能であることを前提としている。

一方、ジャンプ拡散モデル等のジャンプ過程を用いたモデルでは、(1)式のように Z_t 以外にポアソン過程 N_t による不確実性が存在する²⁸。このため一般的に原資産とそのオプションの2つだけでは、不確実性のないポートフォリオを構築することが不可能となる。したがって、無リスク資産、原資産、オプションからなる市場では、いずれか2つの資産を用いて、残りの1つの資産を複製することができなくなり、自己充足性と無裁定条件²⁹を使ってオプション価格を決定することはできない。つまり、ブラウン運動とポアソン過程の2つを不確実性の根元に持つ場合、リスク資産が原資産とそのオプションの2資産しかないときには、無リスク・ポートフォリオを構築できないという市場の非完備性の問題が生じる。

この問題に対応するため、マートン（Merton [1976]）は、「ジャンプのリスクは分散可能であり、プレミアムは要求されない（ジャンプのリスクに対してリスク中立性を仮定することができる）」というロジックを構築し、そのロジックのもとで、オプション価格付けモデルを考案した。これが前節までに検討してきたマートン・モデルである。

しかし、マートン・モデルの「ジャンプのリスクは分散可能であり、プレミアムは要求されない」というロジックの妥当性に関しては議論があり、マートン・モデルの出現後、投資家の要求するリスク・プレミアムを明示的に考慮しようとする各種アプローチが有効な手段として検討されている。

それらのアプローチの基本的な考え方は、確率測度（リスク中立測度）を明示的に扱うということである。リスク中立測度を求めるための幾つかの方法が考えられている。まず、投資家の効用関数を明示的に仮定して、リスク・プレミアムそのものを求めるという方法がある。また、投資家の効用関数を仮定せず、リスク中立測度に特定の仮定を置く形で投資家のリスク・プレミアムを織り込むというアプローチもある。

28 正確には、ジャンプ幅率に関する不確実性も存在している。

29 ここでは、複製ポートフォリオを構成する各資産の保有高を有限とする。

前者の投資家の効用関数を明示的に仮定するアプローチとしては、例えばBates [1991] によるモデルがある³⁰。Bates [1991] は、代表的投資家にべき型効用関数 (power utility function) を仮定して、オプション価格付けモデルを求めている。

後者のアプローチの例として、Miyahara [2001] は最小エントロピー・マルチンゲール測度 (MEMM³¹: minimal entropy martingale measure) という概念を利用し、より一般的なジャンプ変動を表現できる (幾何) レビイ過程を用いたオプション価格評価モデルを構築している³²。

6 . ジャンプ拡散モデル以外のオプション価格付け手法

本節では、BSモデルが表現し得ないボラティリティ・スマイルを表すことができるオプション価格付け手法のうち、ジャンプ拡散モデル以外の手法を概説する。

(1) ポアソン過程を複数用いたモデル

原資産価格の変動過程に(1)式で用いた複合ポアソン過程ではなく^{33, 34}、ポアソン過程を複数用いるモデルがある。例えば、León *et al.* [2002] は、レビイ過程上でオプション価格付けモデルを示した後、その具体例として複合ポアソン過程を複数個のポアソン過程で近似できることを利用して、原資産価格過程が複数個のポアソン過程からなるジャンプ変動過程を含んだ場合でのオプション価格の解析解を導出した。また、Samuelides and Nahum [2001] は、ポアソン過程の個数を2つに限定し、おのこのポアソン過程に正と負の定数ジャンプ幅率を対応させることで、

30 Bates [1991] では、1987年10月の米国株式相場の暴落 (いわゆるクラッシュ) を対象に市場参加者が株価暴落を予想していた可能性があるか否かを検証するために、ジャンプ拡散モデルを採用した。そこでは、原資産価格がジャンプ拡散過程に従うとの仮定を置き、1987年6~8月の間、S&P500先物オプション市場価格から求められる将来の予想原資産価格の確率分布にマイナス方向の裾が厚い性質 (negatively skewed) がみられること (つまりマイナス方向へのジャンプが予想されていたこと) 等を示し、クラッシュは市場で予測されていたと結論づけている。

31 MEMMは、ある情報量 (相対エントロピー) を最小とする確率測度である。Frittelli [2000] は、相対エントロピーの最小化が指数型効用関数 (exponential utility function) の最大化と関連が強いことを示している。なお、BSモデルでのリスク中立測度もMEMMとなっている。

32 Chan [1999] も同様の試みを行っている。

33 これらのほかに、グラスマン=コウ・モデル (Glasserman and Kou [2000]) は、複合ポアソン過程をさらに一般化したマーク付き点過程を用いている (マーク付き点過程については、Bremaud [1981] 等が詳しい)。ただし、グラスマン=コウ・モデルでは、オプション価格が複雑な表現となるため、解析解は複合ポアソン過程の場合のみ示されている。このモデルは、金利モデルの1つとして近年注目されているBGMモデル (Brace, Gatarek and Musiela [1997]) にジャンプ変動の効果を導入したものである (補論5. 参照)。

34 また、Madan, Carr and Chang [1998] は原資産価格のジャンプ変動を表現可能なモデルとして、バリアンス・ガンマ過程 (variance gamma process) と呼ばれる確率過程を用いたオプション価格付けモデルを提案している。

オプション価格の近似的解析解を提案している³⁵。

(2) ボラティリティ変動モデルを用いるアプローチ

ボラティリティが高い時期、低い時期がしばらくの間継続するという金融市場の傾向を踏まえ、ボラティリティに時間変動性を持たせたのがボラティリティ変動モデルである³⁶。ボラティリティ変動モデルは、さらに大きく2つに分割することができる。1つは、ある時点のボラティリティを直前の時点までに値がわかっている変数だけの確定的な関数として定式化するもので、ARCH (auto regressive conditional heteroskedasticity) モデルとその派生モデルがそれに該当する。もう1つは、ボラティリティ自身が確率過程に従い、ある時点のボラティリティが直前の時点までに値がわかっている変数だけではなく当該時点の確率変数の値に依存するというモデルで、確率ボラティリティ・モデル³⁷ (stochastic volatility model) と呼ばれている。例えば、Heston [1993] はフーリエ変換を用いて確率ボラティリティ・モデルでのオプション価格を導出している。

なお、ジャンプ拡散モデルと確率ボラティリティ・モデルを合わせたモデル (確率ボラティリティ・ジャンプ拡散モデル) も提案されている (Bates [1996]、Scott [1997])。

(3) インプライド・ツリー・アプローチ

原資産価格過程に明示的なモデルを仮定しない方法としては、インプライド・ツリーによるアプローチが考案されている (Derman and Kani [1994]、Rubinstein [1994])。インプライド・ツリーによるアプローチは、オプション価格理論における格子法を拡張した手法であり、市場で観測されるオプション価格からリスク中立測度下での満期における原資産価格分布を導出する。新たなオプションを価格付けする際には、この原資産価格分布を用いて、現在の市場価格と整合的にそのオプションの理論価格を算出する手法である。

35 ボラティリティ・スキューだけでなく狭義のボラティリティ・スマイルも表現可能であり、かつ扱いやすいという特徴を持つ。

36 ボラティリティ変動モデルの詳細は、渡部 [2000] を参照。

37 確率ボラティリティ・モデルに関しては、Wiggins [1987] や Hull and White [1987] 以降多くの研究が行われている。

(4) ファット・テール性を有する分布を仮定するモデル

その他の方法としては、例えば、原資産価格の収益率分布のファット・テール性に注目するモデルがある。Dempster and Pliska [1997] や Popova and Ritchken [1998] は、原資産価格の収益率分布に直接、ファット・テール性のある分布（例えば安定パレート分布（stable paretian distribution））を仮定しオプション価格付けを試みている。

7. おわりに

本稿では、BSモデルの各種拡張モデルの中で、原資産価格の動きが拡散過程にジャンプ過程を加えた複合過程（ジャンプ拡散過程）に従うと仮定したモデル（ジャンプ拡散モデル）に焦点を当て、モデルの枠組みやオプション価格の算出方法の解説、実際のデータを用いたキャリブレーション等を行い、モデルの有効性等を考察した。

ジャンプ拡散モデルは、原資産価格の変動をよりうまく表現できることやBSモデルの仮定と相反するボラティリティ・スマイルを説明し得るという点で、オプション商品等の価格付けには有用であると考えられる。ただし、ジャンプ拡散モデルを実際に実務で利用するに当たっては、モデルの妥当性（パラメータに対する仮定等）や具体的なキャリブレーションの扱い（キャリブレーション方法、使用するデータ等）といった点で、留意が必要である。

補論1 . ポアソン過程、複合ポアソン過程³⁸

ゼロ以上の整数値をとる計数過程³⁹ $\{N_t\}$, ($t \geq 0, N_0 = 0$)が、

$$P(N_t - N_s = n) = \frac{(\int_s^t \lambda(u) du)^n}{n!} \exp\{-\int_s^t \lambda(u) du\}, (n = 0, 1, \dots), \quad (A-1)$$

を満たすとき、 $\{N_t\}_{t \geq 0}$ を「強度関数⁴⁰ (intensity function) を $\lambda(\cdot)$ とするポアソン過程 (Poisson Process)」と呼ぶ⁴¹。ただし、 $\lambda(\cdot)$ は時間に関する確定的な関数で非負の値をとるものとする。

以下では、簡単化のため強度関数 $\lambda(\cdot)$ を時間に依存しない定数 λ とし、

$$P(N_t - N_s = n) = \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} \exp\{-\lambda(t-s)\}, (n = 0, 1, \dots), \quad (A-2)$$

を満たす計数過程 $\{N_t\}$ をポアソン過程と呼ぶ。

ジャンプが生じた回数をポアソン過程に対応させれば、時刻 t までに n 回のジャンプが発生する確率は、

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t), (n = 0, 1, \dots), \quad (A-3)$$

と計算できることになる。

さて、ポアソン過程では、対象とする事象が生じた際の計数の変化量は1と定められている。しかし、毎回のジャンプにおいてそのジャンプ幅が変化を考慮することができればより好ましい。そこで、ポアソン過程 $\{N_t\}_{t \geq 0}$ と互いに独立で同一の確率分布に従う確率変数列 $\{J_n; n = 1, 2, \dots\}$ を用いて、新しい確率過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ を次のように定義する(ただし、 $\{N_t\}$ と $\{J_n\}$ も互いに独立とする)。

$$Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} J_n. \quad (A-4)$$

$\{Y_t\}_{t \geq 0}$ を「複合ポアソン過程 (compound poisson process)」と呼ぶ。複合ポアソン過程は計数過程ではないが、ジャンプ幅の変化をモデル化することができるため、柔軟性が高い。

38 ここでの説明は、伏見 [1987] を参考にした。

39 計数過程とは、注目している特定の現象が起きた回数(例えば、ある時間内に電話が掛かってくる回数)の経時変化を表すものである。

40 強度は、直観的に次のように理解できる。観測対象とする事象が、時間区間 $[t, t + \Delta t]$ に発生する確率の1次近似は、 $\int_t^{t+\Delta t} \lambda(s) ds$ で与えられる。 Δt が微小であるとき、この積分は $\lambda(t)\Delta t$ と近似できる。したがって、強度は各時点でのその事象の「起こりやすさ」を表している。

41 $\lambda(\cdot)$ が時間の関数になっている場合を非斉次ポアソン過程、 $\lambda(\cdot)$ が時間によらず一定である場合を斉次ポアソン過程と呼び分けることもある。

$\{Y_t\}$ の分布を一般的に簡単な形で記述することは難しいが、 $\{Y_t\}$ の特性関数 ($\varphi_{Y_t}(u) = E[\exp(iu Y_t)]$)は $\{J_n\}$ の特性関数 $\varphi_J(u) = E[\exp(iu J_n)]$ を使って、以下のよう書くことができる。

$$\varphi_{Y_t}(u) = E[\lambda t \{\varphi_J(u) - 1\}] \quad (\text{A-5})$$

例えば、 $\{J_n\}$ の従う分布を正規分布とすると、 $\varphi_J(u) = \exp(i\mu u - \sigma^2 u^2/2)$ であるので、(A-5)式は、

$$\varphi_{Y_t}(u) = E[\lambda t \{e^{i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} - 1\}], \quad (\text{A-6})$$

となる。

補論2 . オプション価格の導出方法

ここでは、本論で示したマートン・モデルでの解析解((2)式)の導出方法を簡単に解説する。マートン・モデルでは、原資産価格が(1)式に従うと仮定している。

マートンは、原資産 S_t (以下、 S と記述することがある)の上に書かれた派生商品の価格 $C(S, t)$ (以下、 C 、 C_t と記述することがある)に伊藤の公式を利用すると、派生商品価格は次の確率微分方程式を満たさなければならないとした(以下では、(1)式の σ_B を σ と置き換えて表記する)。

$$\frac{dC(S, t)}{C(S, t)} = (\mu_C - \lambda k_C) dt + \sigma_C dZ_t + (J_C - 1) dN_t . \quad (\text{A-7})$$

ただし、

$$\begin{aligned} C(S, t) \mu_C &\equiv \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(S, t)}{\partial S^2} + (\mu - \lambda k) S \frac{\partial C(S, t)}{\partial S} \\ &\quad + \frac{\partial C(S, t)}{\partial t} + \lambda \mathbf{E}[C(JS, t) - C(S, t)] , \\ \sigma_C &\equiv \frac{\frac{\partial C(S, t)}{\partial S} \sigma S}{C(S, t)} , \quad k_C \equiv \mathbf{E}[J_C - 1] , \quad J_C \equiv \frac{C(JS, t)}{C(S, t)} . \end{aligned}$$

次に2つの資産 S 、 C から構成されるポートフォリオ $V_t(\theta_t)$ を考える。BSモデルにおけるデルタ・ヘッジの方法と同様に、

$$\theta_t \sigma + (1 - \theta_t) \sigma_C = 0 , \quad (\text{A-8})$$

という取引を考えれば、 Z_t に関する不確実性はこのポートフォリオから除去することができる。しかし、ポートフォリオは、

$$\frac{dV_t(\theta_t)}{V_t(\theta_t)} = [\theta_t(\mu - \lambda k) + \{1 - \theta_t\}(\mu_C - \lambda k_C)] dt + [\theta_t(J - 1) + \{1 - \theta_t\}(J_C - 1)] dN_t ,$$

という関係を満たし、ここには、依然としてジャンプに関する不確実性(dN_t の項)が残っている。

そこで、マートンは、「ジャンプ・リスクに対するリスク・プレミアムはゼロ」と仮定し、取引 θ_t を行う $V_t(\theta_t)$ の収益率は無リスク金利と等しい。すなわち、

$$\theta_t \mu + (1 - \theta_t) \mu_C - r = 0 , \quad (\text{A-9})$$

が成立するとした。よって(A-8) (A-9)式より θ_t を消去すれば、

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\mu_C - r}{\sigma_C}, \quad (\text{A-10})$$

となる。(A-10)式に(A-7)式を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(S, t)}{\partial S^2} + (r - \lambda k) S \frac{\partial C(S, t)}{\partial S} \\ + \frac{\partial C(S, t)}{\partial t} - rC(S, t) + \lambda \mathbf{E}[C(JS, t) - C(S, t)] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

となる。

後は、境界条件 $C(0, t) = 0$ 、 $C(S, 0) = \{S - K\}_+$ を満たすような解を見つけばよい。Merton [1976] では、(2)式は(A-11)式の偏微分方程式を満たしていることを示している。

次に、「リスク中立化法⁴²⁾」によるオプション価格の導出を示す。この手法は、何らかの方法でリスク中立測度を定めることができれば、偏微分方程式を利用しなくてもよいという利点がある⁴³⁾。まず、リスク中立測度 Q^* の存在を仮定し、リスク中立測度での原資産価格の確率過程を次のように仮定する。

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \lambda^* k^*) dt + \sigma dZ_t^* + (J^* - 1) dN_t^*.$$

ただし、 Q^* のもとで、 Z_t^* は標準ブラウン運動、 N_t^* は生起率 λ^* のポアソン過程とする (J^* は S_t が解を持つための条件を満たしていると仮定する)。

リスク中立化法によりコール価格は、

$$C_0 = \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T],$$

であるので ($\mathbf{E}^*[\cdot]$ は Q^* のもとでの期待値演算子を表す) ジャンプが起こった回数で場合分けを行えば、コール価格は、満期までにジャンプがちょうど n 回起こる確率を \mathbf{P}_n として、

$$C_0 = \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T] = \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T^0] \mathbf{P}_0 + \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T^1] \mathbf{P}_1 + \dots,$$

となる。したがって、

$$C_0 = \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T^n] \mathbf{P}_n,$$

42 リスク中立化法は、木島 [1999] 等を参照。

43 例えば、Jensen [1999] 等を参照。

と表現することができる。ただし、 C_T^n は満期までにジャンプが n 回起こった場合のコール・オプションのペイオフである。

ジャンプは生起率 λ^* のポアソン過程に従って起こるため、

$$P_n = \frac{e^{-\lambda^*T} (\lambda^*T)^n}{n!},$$

となる。したがって、

$$C_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^*T} (\lambda^*T)^n}{n!} \mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T^n], \quad (\text{A-12})$$

となる。

次に、満期までにジャンプが n 回起こった場合の原資産価格を S_T^n 、 i 回目のジャンプ幅率を J_i^* とすると、

$$\begin{aligned} S_T^n &= S_0 \exp[(r - \lambda^* k^* - \sigma^2/2)T + \sigma Z_T^* + \sum_{i=0}^n \ln J_i^*] \\ &= \exp[(r - \lambda^* k^* - \sigma^2/2)T + \sigma Z_T^* + \sum_{i=0}^n \ln J_i^* + \ln S_0], \end{aligned}$$

となる（ラムベルトン＝ラペール [2000] 参照）。

ここで、 $Y = (r - \lambda^* k^* - \sigma^2/2)T + \sigma Z_T^* + \sum_{i=0}^n \ln J_i^* + \ln S_0$ と置く。 $\ln J_i^* \sim \Phi(\mu_j^* - \sigma_j^2/2, \sigma_j^2)$ との仮定から、 Y は正規分布に従う。 Y の平均と分散をそれぞれ μ_Y 、 σ_Y^2 とすると、

$$\begin{aligned} \mu_Y &= (r - \lambda^* k^* - \sigma^2/2)T + n(\mu_j^* - \sigma_j^2/2) + \ln S_0, \\ \sigma_Y^2 &= \sigma^2 T + n\sigma_j^2, \end{aligned}$$

と表せる⁴⁴。

ここで、(A-12)式中の $\mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T^n]$ に注目すると次のようになる。

$$\mathbf{E}^*[e^{-rT} C_T^n] = \mathbf{E}^*[e^{-rT} \{S_T^n - K\}_+] = \mathbf{E}^*[e^{-rT} \{e^Y - K\}_+],$$

ただし、 $Y \sim \Phi(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ 。

以下では、まず $\mathbf{E}^*[e^{-rT} \{e^Y - K\}_+]$ を求める。 $\sigma_n^2 = \sigma^2 + n\sigma_j^2/T$ とおけば、 $\sigma_Y^2 = \sigma_n^2 T$ より、

44 仮定より、 Z_T^* と $\ln J_i^*$ は互いに独立である。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^*[e^{-rT}\{e^Y - K\}_+] &= \mathbf{E}^*[e^{-rT}\{e^{\mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{T}}Z_T^*} - K\}_+] \\
 &= \mathbf{E}^*[e^{-rT}\{e^{(r-\lambda^*k^* - \frac{1}{2}\sigma^2)T + n(\mu_j^* - \frac{1}{2}\sigma_j^2) + \ln S_0 + \sigma_n Z_T^*} - K\}_+] \\
 &= \mathbf{E}^*[e^{(-\lambda^*k^* + \frac{n}{T}\mu_j^*)T + \ln S_0 - \frac{1}{2}\sigma_n^2 T + \sigma_n Z_T^*} e^{-(r-\lambda^*k^* + \frac{n}{T}\mu_j^*)T - \ln S_0} K\}_+],
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $r_n = r - \lambda^*k^* + n\mu_j^*/T$ 、 $Y_n = -\sigma_n^2 T/2 + \sigma_n Z_T^*$ 、 $K_n = e^{-r_n T - \ln S_0} K$ と置くくと、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^*[e^{-rT}\{e^Y - K\}_+] &= \mathbf{E}^*[e^{(r_n-r)T + \ln S_0}\{e^{Y_n} - K_n\}_+] \\
 &= e^{(r_n-r)T + \ln S_0} \mathbf{E}^*[(e^{Y_n} - K_n)1_{\{e^{Y_n} \geq K_n\}}] \\
 &= e^{(r_n-r)T + \ln S_0} \mathbf{E}^*[e^{Y_n} 1_{\{e^{Y_n} \geq K_n\}}] - e^{(r_n-r)T + \ln S_0} K_n \mathbf{E}^*[1_{\{e^{Y_n} \geq K_n\}}],
 \end{aligned}$$

となる。

右辺第2項は、

$$\begin{aligned}
 e^{(r_n-r)T + \ln S_0} K_n \mathbf{E}^*[1_{\{e^{Y_n} \geq K_n\}}] &= e^{(r_n-r)T + \ln S_0} K_n \mathbf{P}\{Y_n \geq \ln K_n\} \\
 &= e^{(r_n-r)T + \ln S_0} K_n \mathbf{P}\left\{\frac{Y_n + \sigma_n^2 T/2}{\sigma_n \sqrt{T}} \geq \frac{\ln K_n + \sigma_n^2 T/2}{\sigma_n \sqrt{T}}\right\} \\
 &= e^{(r_n-r)T + \ln S_0} K_n \Phi\left(\frac{\ln(1/K_n) - \sigma_n^2 T/2}{\sigma_n \sqrt{T}}\right), \\
 Y_n &\sim \Phi(-\sigma_n^2 T/2, \sigma_n^2 T) \\
 &= e^{-rT} K \Phi\left(\frac{\ln(S_0/K) + (r_n + \sigma_n^2/2)T}{\sigma_n \sqrt{T}} - \sigma_n \sqrt{T}\right),
 \end{aligned}$$

となる。

次に右辺第1項を考える。新しい確率変数 $X_n \sim \Phi(\sigma_n^2 T/2, \sigma_n^2 T)$ を導入すると、右辺第1項は、

$$e^{(r_n-r)T + \ln S_0} \mathbf{E}^*[e^{Y_n} 1_{\{e^{Y_n} \geq K_n\}}] = e^{(r_n-r)T + \ln S_0} \mathbf{P}\{e^{X_n} \geq K_n\},$$

となる⁴⁵。したがって、右辺第2項の場合と同様に、

$$e^{(r_n-r)T + \ln S_0} \mathbf{E}^*[e^{Y_n} 1_{\{e^{Y_n} \geq K_n\}}] = S_0 e^{(r_n-r)T} \Phi\left(\frac{\ln(S_0/K) + (r_n + \sigma_n^2/2)T}{\sigma_n \sqrt{T}}\right),$$

となる。

したがって、 $d_1 = [\ln(S_0/K) + (r_n + \sigma_n^2/2)T] / (\sigma_n \sqrt{T})$ 、 $d_2 = d_1 - \sigma_n \sqrt{T}$ とおけば、

$$\mathbf{E}^*[e^{-rT} \{e^Y - K\}_+] = e^{-rT} [e^{r_n T} S_0 \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)]$$

となる。

この式を(A-12)式に代入することによって、以下のコール価格が求められる。

$$C_0 = e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^* T} (\lambda^* T)^n}{n!} [e^{r_n T} S_0 \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)].$$

.....
45 $\mathbf{E}^*[e^{Y_n} 1_{\{e^{Y_n} \geq K_n\}}] = \mathbf{P}\{e^{X_n} \geq K_n\}$ は次のように示すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*[e^{Y_n} 1_{\{e^{Y_n} \geq K_n\}}] &= \int_{\ln K_n}^{\infty} e^y \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma_n} \exp\left\{-\frac{(y + \sigma_n^2 T/2)^2}{2\sigma_n^2 T}\right\} dy \\ &= \int_{\ln K_n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma_n} \exp\left\{-\frac{(y - \sigma_n^2 T/2)^2}{2\sigma_n^2 T}\right\} dy = \mathbf{P}\{e^{X_n} \geq K_n\}. \end{aligned}$$

補論3 . マートン・モデルの各種感応度の理論式

マートン・モデル((2)式)Cの S_0 、 σ_B 、 T 、 λ 、 μ_J 、 σ_J に対する感応度を計算した (S_0 については、2次まで計算した) 。 その結果は以下のとおりである。

$$\frac{\partial C}{\partial S_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'T}(\lambda'T)^n}{n!} \Phi(d_1) . \quad (\text{A-13})$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S_0^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'T}(\lambda'T)^n}{n!} \frac{1}{\sigma_B S_0 \sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} . \quad (\text{A-14})$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma_B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'T}(\lambda'T)^n}{n!} \frac{\sigma_B}{\sigma_n} \sqrt{\frac{T}{2\pi}} S_0 e^{-\frac{d_1^2}{2}} . \quad (\text{A-15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'T}(\lambda'T)^n}{n!} & \left[\left\{ -\lambda' + \frac{n}{T} \right\} \{ S_0 \Phi(d_1) - K e^{-r_n T} \Phi(d_2) \} \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_B^2 S_0}{2 \sigma_n \sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} + K e^{-r_n T} (r - \lambda k) \Phi(d_2) \right] . \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'T}(\lambda'T)^n}{n!} & \left[\left\{ \frac{n}{\lambda} - (1+k)T \right\} \{ S_0 \Phi(d_1) - K e^{-r_n T} \Phi(d_2) \} \right. \\ & \left. - k T K e^{-r_n T} \Phi(d_2) \right] . \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

$$\frac{\partial C}{\partial \mu_J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'T}(\lambda'T)^n}{n!} (n - \lambda'T) S_0 \Phi(d_1) . \quad (\text{A-18})$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma_J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'T}(\lambda'T)^n}{n!} \sigma_J S_0 \left\{ (n - \lambda'T) N(d_1) + \frac{n}{\sigma_n \sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \right\} . \quad (\text{A-19})$$

補論4 . ジャンプ拡散過程の主要統計量の理論式

(3)式の主要統計量の理論式は以下のとおりである。

$$\text{平均} : \mu_B + \lambda \mu_J . \quad (\text{A-20})$$

$$\text{分散} : \sigma_B^2 + \lambda(\mu_J^2 + \sigma_J^2) . \quad (\text{A-21})$$

$$\text{歪度} : \frac{\lambda(\mu_J^3 + 3\mu_J \sigma_J^2)}{(\sigma_B^2 + \lambda\sigma_J^2 + \lambda\mu_J^2)^{\frac{3}{2}}} . \quad (\text{A-22})$$

$$\text{尖度} : 3 + \left[\frac{\lambda(\mu_J^4 + 6\mu_J^2 \sigma_J^2 + 3\sigma_J^4)}{(\sigma_B^2 + \lambda\sigma_J^2 + \lambda\mu_J^2)^2} \right] . \quad (\text{A-23})$$

補論5．グラサマン＝コウ・モデル (Glasserman and Kou [2000])

グラサマン＝コウ・モデルは、BGMモデル⁴⁶ (Brace, Gatarek and Musiela [1997]) を金利のジャンプ変動⁴⁷も勘案するように変更を加えたモデルである。グラサマンらは、マーク付き点過程によりジャンプ変動を記述し、特にそのなかでもジャンプ変動が複合ポアソン過程で記述される場合における、キャップ・フロア、スワプシヨンの解析解を導出した。また、それらによって、BGMモデルが理論的に表現することができない市場で観測されるスマイル構造を表現できることを計算例を通じて示した。グラサマン＝コウ・モデルでは、キャップの解析解とスワプシヨンの解析解はほぼ同一の枠組みで求めることが可能である。ここでは、キャップの解析解を紹介し、数値例を通じて考察を行う。

(1) キャップ・フロア価格の解析解

キャップは、キャプレット (コール・オプション) の集合体と考えることができるので、以下では個々のキャプレット価格の解析解を導出する。

まず、期間 $[T_n, T_{n+1}]$ に対応するフォワードLIBORを、 $L_n(t)$ と書く。期間が $[T_n, T_{n+1}]$ 、行使価格が K のキャプレットとは、時刻 T_{n+1} でペイオフ $\delta(L_n(T_n) - K)^+$ を得る証券のことである⁴⁸ (δ は利払い時点間の間隔 < 定数 >)。

フォワードLIBORの過程 $L_n(t) (n = 1, \dots, M)$ が、フォワード測度⁴⁹のもとで、以下の確率微分方程式に従うとする。

$$\frac{dL_n(t)}{L_n(t)} = \alpha_n(t)dt + \gamma_n(t)dW_n(t) + dJ_n(t), \quad 0 \leq t \leq T_n. \quad (\text{A-24})$$

ただし、 $\alpha_n(t)$ はドリフト⁵⁰、 $\gamma_n(t)$ は確定的で有界かつ区分的に連続な関数である。また、 $J_n(t)$ はジャンプを表す項で、 $\ln(Y_n - 1)$ が平均 m_n 、分散 s_n^2 の正規分布に従う独立な確率変数 Y_n を用いて以下の (A-25) 式で表される。

$$J_n(t) = \sum_{j=1}^{N_{T_n}} (Y_j - 1). \quad (\text{A-25})$$

以上の確率微分方程式に従い、ペイオフ $\delta(L_n(T_n) - K)^+$ を持つ証券 (キャプレット) の価格を、フォワード中立化法を使って求める。

46 BGMモデルについては、森本・吉羽 [1999] や石山 [2002] 等を参照。

47 金利変動にジャンプ変動を仮定したモデルとしては、Shirakawa [1991] 等がある。Shirakawa [1991] は、短期金利の変動過程に複数のポアソン過程を適用し、HJMモデル (Heath, Jarrow and Morton [1992]) の枠組みをジャンプ過程を含んだ枠組みへ拡張した。

48 $(A)^+ = \max(A, 0)$ と定義する。

49 フォワード測度や後述のフォワード中立化法の詳細は、木島 [1999] 等を参照。

50 後述する無裁定条件を満たす関数。

満期が T_{n+1} の割引債 $B(t, T_{n+1})$ を基準財とし、時刻 t での n 番目のキャブレット価格 $C_n(t)$ の相対価格がマルチンゲールとなるような測度(フォワード測度と呼ぶ)を選び、これを \mathbf{P}_{n+1} と書く。求めるキャブレット価格 $C_n(t)$ は満期 T_{n+1} でのペイオフの期待値をフォワード測度 \mathbf{P}_{n+1} のもとで計算することで得られる。 $B(T_{n+1}, T_{n+1}) = 1$ に注意すると、

$$\frac{C_n(t)}{B(t, T_{n+1})} = \delta \mathbf{E}^{T_{n+1}} \left[\frac{C_n(T_{n+1})}{B(T_{n+1}, T_{n+1})} \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbf{E}^{T_{n+1}} [\delta(L_n(T_n) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t], \quad (\text{A-26})$$

となる。ただし、 $\mathbf{E}^{T_{n+1}}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ はフォワード測度 \mathbf{P}_{n+1} 下での時刻 t での条件付き期待値演算を表す⁵¹。したがって、キャブレット価格 $C_n(t)$ は、

$$C_n(t) = \delta B(t, T_{n+1}) \mathbf{E}^{T_{n+1}} [L_n(T_n) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t], \quad (\text{A-27})$$

と表せる。

ジャンプ過程を考慮しない場合には、 $L_n(t)$ はフォワード測度 \mathbf{P}_{n+1} のもとで対数正規過程となるので、キャブレットの価格は次のブラックによる公式(Black [1976]、以下ブラック式)で表せる(ただし、 F はキャブレットの期間に対応するフォワード・レート、 K は行使価格、 σ は F の標準偏差、 b は満期 T の割引債価格、 Φ は標準正規分布の累積密度関数)。

$$BC(F, T, K, \sigma^2, b) = b \left[F \Phi \left(\frac{\log(F/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} \right) - K \Phi \left(\frac{\log(F/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right].$$

(A-28)

期間 $[T_n, T_{n+1}]$ のキャブレットの時刻 t での価格は(A-28)式を用いて、(A-29)式で表すことができる⁵²(ただし、 $\hat{\lambda}_n$ はフォワード測度 \mathbf{P}_{n+1} 下でのジャンプ強度を示すパラメータ、 $B(t, T_{n+1})$ を $B_{n+1}(t)$ と表記した)。

【キャップの評価式】

$$C_n(t) = \delta \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\hat{\lambda}_n(T_n-t)} \frac{(\hat{\lambda}_n(T_n-t))^j}{j!} BC(L_n^{(j)}(t), T_n-t, K, v_j(t)^2, B_{n+1}(t)).$$

(A-29)

51 \mathcal{F}_t は時刻 t までに起こり得る事象からなる σ -加法族で、直観的には時刻 t までに入手可能な情報を表す。

52 (A-29)式の導出の詳細は、Birge and Kou [1998]を参照。

ただし、 $L_n^{(j)}(t) = L_n(t) \cdot e^{-\hat{\lambda}_n m_n (T_n - t)} \cdot (1 + m_n)^j$ 、 $v_j(t)^2 = [\rho^2(t) + j s_n^2] / (T_n - t)$ 、

$$\rho^2(t) = \int_t^{T_n} \|\gamma_n(u)\|^2 du .$$

(A-29)式は、各 n に関して、単一のキャレットの価格式とよく似た形で表せている。推定の必要があるパラメータは、ジャンプの強度 $\hat{\lambda}_n$ 、ジャンプ幅の平均 m_n 、ジャンプ幅の分散 s_n^2 、及び拡散係数 $\gamma_n(t)$ である。市場で観測されるデータを用いて、これらのパラメータを推定すれば、(A-29)式からキャレット価格 $C_n(t)$ が求められる。

同様に、キャレット（コール・オプション）に対応するプット・オプションの価格は、以下のブラック式で表せるので、

$$BP = (F, T, K, \sigma^2, b) = b \left[K \Phi \left(-\frac{\log(F/K) - \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}} \right) - F \Phi \left(-\frac{\log(F/K) + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right].$$

(A-30)

フォワードLIBORに関するフロアの価格 $F_n(t)$ は(A-31)式となる。

【フロアの評価式】

$$F_n(t) = \delta \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\hat{\lambda}_n (T_n - t)} \frac{(\hat{\lambda}_n (T_n - t))^j}{j!} BP(L_n^{(j)}(t), T_n - t, K, v_j(t)^2, B_{n+1}(t)).$$

(A-31)

(2) キャップによるボラティリティ・スマイルの数値例

以下では、得られた(A-28) (A-29)式によって、ボラティリティ・スマイルを表現できることを具体的な数値計算例で示す。

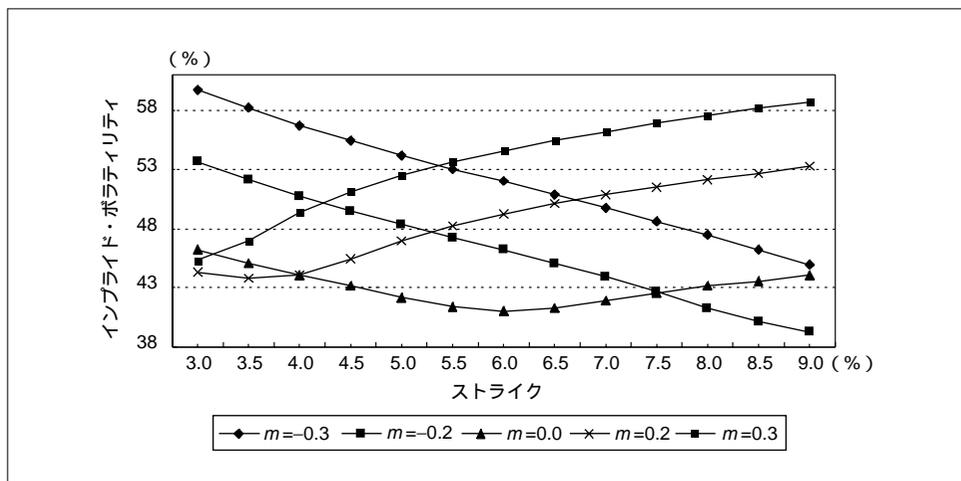
まず事前に各パラメータがモデルに与える影響を調べたところ、ボラティリティ・スマイルの形状に最も影響を与えるのはジャンプ幅の平均 m であったため、ここでは、ジャンプ幅の平均 m を-0.3から0.3までの5通りを与えることにした。数値計算に使用したパラメータの具体的な値は、以下のとおりである。

図表A-1 数値計算に使用したパラメータ

満期 (T)	2年
利払間隔 (δ)	0.5年
フォワード・レート (一定)	6.0%
ボラティリティ (γ : 定数)	0.05
生起率 ($\hat{\lambda}$)	1.0
ジャンプ幅平均 (m)	-0.30, -0.20, 0, 0.20, 0.30
ジャンプ幅標準偏差 (s)	0.45

図表A-1のパラメータを用いて、(A-28)、(A-29)式のジャンプLIBORモデルのキャブレット理論価格を算出し、そこからブラック式によってインプライド・ボラティリティを求めた。その結果をプロットしたものが以下の図表A-2である。

図表A-2 ボラティリティ・スマイル構造



$m = 0$ 、つまりジャンプ幅の平均が0であるジャンプを仮定するときには、人が微笑んでいるような形状（狭義のボラティリティ・スマイル）が表れている。

また、 $m < 0$ ($m > 0$) のとき、つまりジャンプが平均的に金利下落（上昇）方向に起こると仮定する場合には、右下がり（左下がり）のボラティリティ・スキュー（ストライクが低い＜高い＞方が、ボラティリティが高い）がみられる。

その他のパラメータ γ 、 $\hat{\lambda}$ 、 s の影響も調べた。その結果は、いずれのパラメータでも水準を上げると、インプライド・ボラティリティが形状はほとんどそのまま、ほぼ一様に増加するというものである。 γ はブラウン運動の計数、 $\hat{\lambda}$ はジャンプ発生の頻度（強度）、 s はジャンプ幅の標準偏差であることから、これらが大きくなるとボラティリティも大きくなるのは、直観と整合的である。

参考文献

- 石山幸太郎、「LIBORマーケット・モデルのインプリメンテーションについて 本邦の金利派生商品データを用いた具体例を基に」、『金融研究』第21巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、2002年、1～50頁
- 木島正明、『期間構造モデルと金利デリバティブ』、朝倉書店、1999年
- 齋藤 誠・高木真吾、「オプション取引データに基づいた状態価格密度の推計について：大阪証券取引所の事例 1」、解説資料、大阪証券取引所、2000年
- 佐藤健一、『加法過程』、紀伊國屋書店、1990年
- 伏見正則、『確率と確率過程』、講談社、1987年
- 森本祐司・吉羽要直、「BGM金利モデルの実用化に向けて」、IMES Discussion Paper Series, No. 99-J-39、日本銀行金融研究所、1999年
- ラムベルトン、D.、B. ラベール、『ファイナンスへの確率解析』、朝倉書店、2000年
- 渡部敏明、『ポラティリティ変動モデル』、朝倉書店、2000年
- Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen, “Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models,” *The Journal of Finance*, 52, 1997, pp. 2003-2049.
- Bates, D. S., “The Crash of '87: Was It Expected? The Evidence from Options Markets,” *The Journal of Finance*, 46, 1991, pp. 1009-1044.
- , “Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options,” *The Review of Financial Studies*, 9, 1996, pp. 69-107.
- Birge, J., and S. Kou, “Pricing of Electricity Options,” Working Paper, University of Michigan, 1998.
- Black, F., “The Pricing of Commodity Contracts,” *Journal of Financial Economics*, 3, 1976, pp. 167-179.
- , and M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, 1973, pp. 637-654.
- Brace, A., D. Gątarek, and M. Musiela, “The Market Model of Interest Rate Dynamics,” *Mathematical Finance*, 7, 1997, pp. 127-155.
- Bremaud, P., *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- Brockhaus, O., M. Farkas, A. Ferraris, D. Long, and M. Overhaus, *Equity Derivatives and Market Risk Models*, Risk Publishers, 1999.
- Chan, T., “Pricing contingent claims on stocks driven by Lévy Processes,” *Annals of Applied Probability*, 9, 1999, pp. 504-528.
- Craine, R., L. A. Lochstoer, and K. Syrtveit, “Estimation of a Stochastic-Volatility Jump-Diffusion Model,” Working Paper, University of California at Berkeley, 2000.
- Dempster, M. A. H., and S. R. Pliska, *Mathematics of Derivative Securities*, Publications of the Newton Institute, October 1997.
- Derman, E., and I. Kani, “Riding on a smile,” *RISK*, 7, February 1994, pp. 32-39.

- Frittelli, M., "The Minimal Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets," *Mathematical Finance*, 10, 2000, pp. 39-52.
- Garcia, R., "Asymptotic Null Distribution of the Likelihood Ratio Test in Markov Switching Models," *International Economic Review*, 39, 1998, pp. 763-788.
- Glasserman, P., and S. G. Kou, "The Term Structure of Simple Forward Rates with Jump Risk," Preprint, <http://www.ieor.columbia.edu/~sk75/GKMF.pdf>, 2000.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure Models: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, 60, 1992, pp. 77-105.
- Heston, S. L., "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *The Review of Financial Studies*, 6, 1993, pp. 327-343.
- Hull, J., and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *The Journal of Finance*, 42, 1987, pp. 281-300.
- Jensen, B., "Option Pricing in the Jump-Diffusion Model with a Random Jump Amplitude: A Complete Market Approach," Working Paper, University of Aarhus, Aarhus School of Business, 1999.
- Kou, S. G., "A Jump Diffusion Model for Option Pricing," *Management Science*, 48, 2002, pp. 1086-1101.
- León, J. A., J. L. Solé, F. Utzet, and J. Vives, "On Lévy processes, Malliavin calculus and market models with jumps," *Finance and Stochastics*, 6, 2002, pp. 197-225.
- Lipton, A., "Assets with jumps," *RISK*, 15, September 2002, pp. 149-153.
- Madan, D., P. Carr, and E. Chang, "The Variance Gamma Process and Option Pricing," *European Financial Review*, 2, 1998, pp. 79-105.
- Merton, R., "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 1973, pp. 141-183.
- , "Option Pricing When Underlying Stock Return Are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3, 1976, pp. 125-144.
- Miyahara, Y., "[Geometric Lévy Processes & MEMM] Pricing Model and Related Estimation Problems," *Asia-Pacific Financial Markets*, 8, 2001, pp. 45-60.
- Navas, J. F., "On Jump-Diffusion Processes for Asset Returns," Working Paper, <http://papers.ssrn.com>, 2000.
- Popova, I., and P. Ritchken, "On Bounding Option Prices in Paretian Stable Markets," *The Journal of Derivatives*, 5, Summer 1998, pp. 32-43.
- Rubinstein, M., "Implied Binomial Trees," *The Journal of Finance*, 49, 1994, pp. 771-818.
- Samuelides Y., and E. Nahum, "A Tractable Market Model with Jumps for Pricing Short-term Interest Rate Derivatives," *Quantitative Finance*, Institute of Physics Publishing, Research Paper, 1, 2001, pp. 1-14.
- Scott, L. O., "Pricing Stock Options in a Jump-Diffusions Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Applications of Fourier Inversion Methods," *Mathematical Finance*, 7, 1997, pp. 413-426.

- Shirakawa, H., "Interest Rate Option Pricing with Poisson-Gaussian Forward Rate Curve Processes," *Mathematical Finance*, 1, 1991, pp. 77-94.
- Wiggins, J., "Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates," *Journal of Financial Economics*, 19, 1987, pp. 351-377.

