

市場ストレス時におけるバリュー・アット・リスクと期待ショートフォールの比較： 多変量極値分布のもとでの比較分析

やま い やすひろ よし ぼ としな お
山井康浩 / 吉羽要直

要 旨

この研究では、市場にストレスが発生しているときの2つのリスク指標 バリュー・アット・リスク (VaR) と期待ショートフォールの比較分析を行う。ここでは、多変量極値分布により市場ストレスが表現し得るとの前提に立ち、多変量極値分布のもとでVaRと期待ショートフォールがどのような性質を持つかをシミュレーションと実証分析によって検討する。その結果、以下の諸点がわかった。(1)裾が厚く大幅な損失の発生する可能性の高い証券であっても、VaRや期待ショートフォールではリスクが小さいと判断される場合がある。(2)異なる種類のコンピュータで表される依存関係の相違は、VaRや期待ショートフォールでは適切に捉えられない場合がある。

キーワード：バリュー・アット・リスク、期待ショートフォール、テイル・リスク、市場ストレス、多変量極値理論

本稿は、2001年12月に日本銀行金融研究所が開催した「金融リスクの計量とマーケット・マイクロストラクチャー」をテーマとする研究ワークショップへの提出論文に加筆・修正を施したものである。牧本直樹助教授（筑波大学）をはじめ、同ワークショップ参加者から貴重なコメントを頂戴した。また、2002年3月にBIS（国際決済銀行）で開催された“Risk Measurement and Systemic Risk”に関する第3回中央銀行共催リサーチ・コンファレンスの参加者からも貴重なコメントを頂戴した。記して感謝したい。もっとも、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、すべて筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

山井康浩 日本銀行金融研究所研究第1課（現考査局）(E-mail: yasuihiro.yamai@boj.or.jp)
吉羽要直 日本銀行金融研究所研究第1課（E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp）

1. はじめに

市場ストレス時には、市場リスクを計測するバリュー・アット・リスク (VaR) モデルがリスクを適切には捉えられないというのはよく知られた事実である。市場リスクを計測するVaRモデルは、平常時の資産の価格変動(リターン)を前提とすることが一般的であるほか、定義上VaRはその水準(分位点)を超えて発生する損失を考慮していないため、市場ストレス時に発生するような大幅な価格変動を捉えるという目的には基本的に使えない¹。

まず、一般的なVaRモデルでは、リスク計測の対象となる各資産のリターンが正規分布に従うと仮定し、それらのヒストリカル・データから得た分散共分散行列を用いて、リスクを推計するという手法が採用されている。しかし、実際のリターンの分布は、正規分布に比べて裾が厚いという性質(ファット・テイル性)を持つため、リターン分布に正規分布を仮定すると、ファット・テイル性を捨象することに伴い、大幅な価格変動が発生する確率を過小評価してしまうことになる。

次に、上述のように、VaRは分布の分位点のみを測るため、VaRを超える大幅な損失を考慮に入れていない。つまり、VaRは分布の裾に関する重要な情報を見落とす可能性がある。BISグローバル金融システム委員会[2000]は、この可能性を「テイル・リスク」として取り上げた。VaRのテイル・リスクは、オプションのショート・ポジションや集中が進んだ与信ポートフォリオなど、稀に大幅な損失が発生するような資産を扱う場合に顕著となる(山井・吉羽[2001a]参照)²。市場ストレス時には、平常時と比べて、損失額が一段と大きくなる傾向があると考えられるため、VaRのテイル・リスクが、最悪の場合、「リスク管理の失敗」とみなされる事態にまでつながる可能性がある。

このテイル・リスクに関する指摘は、Basak and Shapiro[2001]によって、理論的にも正しいことが証明されている。彼らによれば、株式と債券をダイナミックに取引する場合、VaRに基づくリスク管理は、逆に、期末時点で大きな損失が発生する確率を高めてしまう(分布の裾を厚くしてしまう)。

本稿では、上述のようなVaRを巡る問題点を踏まえて、特に市場ストレス発生時

1 BISグローバル金融システム委員会[1999]は、1998年秋の金融危機に関する市場参加者へのヒアリング結果をまとめたAnnex 1の中で、次のように述べている。

「多くのヒアリング先の指摘によると、昨秋[1998年秋]の金融危機は分布の『裾』に相当する事象であったため、VaRモデルによる市場リスクの計測およびモニタリングは無意味であった。」

2 Jorion[2000]は、ロング・ターム・キャピタル・マネージメント(Long-Term Capital Management <LTCM>)の破綻を分析する中で、以下のように述べている。

「(LTCMで採用されていた)投資戦略のペイ・オフは、オプションのショート・ポジションに類似していた。このため、仮にリスク計測が正しく行われたとしても、適切なリスク管理を行うのは難しかったであろう。」

における2つのリスク指標 VaRと期待ショートフォールの比較分析を行う³。ここでは、市場ストレスを極値の依存関係 (extreme dependence) と分布のファット・テイル性で特徴付け、多変量極値分布によって市場ストレス時の価格変動が表現されると考える。そして、多変量極値分布のもとでVaRと期待ショートフォールがどのような性質を持つかを数値シミュレーションと実際の市場データを用いた実証分析によって検討する。

まず、2節では、VaRと期待ショートフォールのテイル・リスクを山井・吉羽 [2001a,b,c] を基に紹介する。ここでは、市場ストレス時の性質に焦点を当てるため、それぞれのリスク指標が、分布の裾で発生する大幅な損失を織り込んでいるか否か (テイル・リスクがあるか否か) を考察する。3節では、コピュラ (copula) および多変量極値理論 (multivariate extreme value theory) の概要を紹介する。4節では、分布のファット・テイル性が、VaRと期待ショートフォールの一般的な性質にどのような影響を与えるかを単変量の枠組みで調べる。5節では、コピュラおよび多変量極値分布⁴を用いて、極値の依存関係がVaRと期待ショートフォールの性質にどのような影響を与えるかをシミュレーションを通じて調べる。6節では、過去に発生した金融危機で、実際にVaRや期待ショートフォールの問題点が発生し得たか否かを実証分析により検討する。具体的には、金融危機を含む過去8年間の為替レート変動の分布の裾を推計し、上記のシミュレーション結果と比較してVaRと期待ショートフォールのテイル・リスクを考察する。

2 . VaRと期待ショートフォールのテイル・リスク

(1) VaRのテイル・リスクの概念

まず、VaRのテイル・リスクの概念を説明する。本稿では「VaRがテイル・リスクを持つ」とは、「VaRが、損益額分布の裾部分に関する情報を完全には把握できないことに伴い、複数のポートフォリオ間の相対的な⁵リスクの大小関係を見誤る可能性があること」と定義する。つまり、与えられたポートフォリオの中で最適な

3 これまでのVaRと期待ショートフォールの比較分析では、主としておのおののリスク指標が劣加法性を満たすか否かに焦点が当てられてきた。例えば、Artzner *et al.* [1997, 1999] は、期待ショートフォールは劣加法性を満たす一方、VaRは劣加法性を満たさないことがあることを示している。Acerbi, Nardio, and Sirtori [2001] は、損益額分布が離散的である場合も期待ショートフォールが劣加法性を満たすことを証明した。また、Rockafeller and Uryasev [2000] は、期待ショートフォールの劣加法性に着目して、期待ショートフォールを比較的容易に最適化するアルゴリズムを提案した。

4 多変量極値理論の金融への応用は、Longin and Solnik [2001]、Embrechts, de Haan, and Huang [2000]、Hartmann, Straetmans, and de Vries [2000] を参照。

5 本稿で定義しているテイル・リスクの概念は、複数のポートフォリオ間の相対比較においてVaRが有効であるかどうかを論じる概念であるため、「VaRはリスク資本によってカバーされるべきか」といった、VaRの絶対量に関する問題は議論の対象外である。

ポートフォリオを選択する際に、VaRがポートフォリオのリスクに関するミスリーディングな情報を与え、どのポートフォリオのリスクが大きいかという相対的な判断を狂わせる場合を「VaRにテイル・リスクがある」と呼ぶことにする⁶。

VaRのテイル・リスクは、与えられた2つのポートフォリオの損失額分布が、VaRの信頼水準以上の点で交差する場合、つまり2つのポートフォリオが1次確率優越の意味で比較できない場合に発生する。こうした場合は、ポートフォリオ構成を変えて「裾の操作」を行うことにより、VaR自体は引き下げ一方で大幅な損失が発生する確率を高めることが可能となる。これは特に、ポートフォリオのペイ・オフが非線形性を持ち、分布関数が不連続になる場合などに顕著となる⁷。

(2) VaRのテイル・リスクの例

次に、VaRのテイル・リスクの例を2つ示す。

(例1) オプション・ポートフォリオ (Danielsson [2001])

ポートフォリオにオプションが含まれるとVaRにテイル・リスクが発生する場合がある。ここでは、この事実をDanielsson [2001] が示した例を使って説明する。

図表1の実線は、ある株式を保有したときの損益額分布を示したものである。このときのVaRは、「オプション売買前のVaR」として図で示された値となる。このVaRの値は、当該株式を原資産とするオプションを売買することで減らすことができる。具体的にはオプション売買前に計測されるVaRより少し低い値を行使価格とするコールの売りと、VaRより少し高い値を行使価格とするプットの買いを組み合わせればよい。株式とこれらのオプションを組み合わせたポジションの損益額分布は、図表1の点線となる。このときのVaRは「オプション売買後のVaR」として図に示されている。

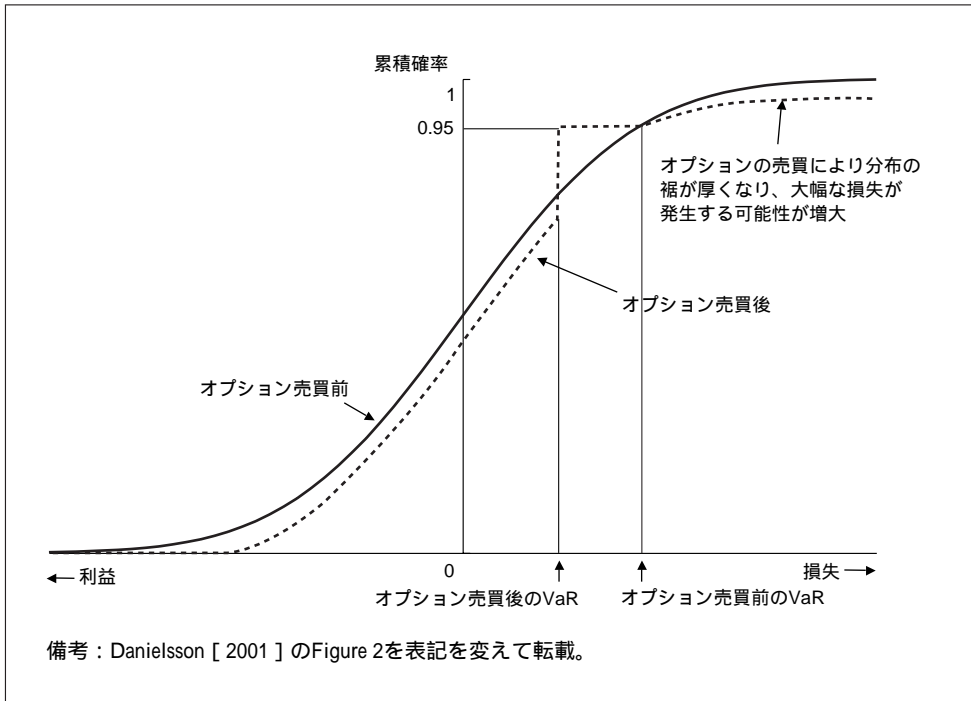
ここでは、オプションの売買によりVaRを任意の水準に引き下げられることがわかる⁸。また、VaRが引き下げられる代わりに、より大きな（オプション売買前のVaRを超える）損失が発生する確率が上昇している。これは、VaRが分布の裾を十分に捉えられていないという意味で、VaRにテイル・リスクが発生している例の1つである。

6 リスク指標一般のテイル・リスクの概念や定義など詳細は山井・吉羽 [2001c] を参照。

7 与えられたポートフォリオの損益額がすべて同じタイプの楕円分布に従う場合は、VaRにテイル・リスクは発生しないことがわかっている（山井・吉羽 [2001c]）。 t -分布、コーシー分布、安定分布は、いわゆる裾の厚い分布であるが、これらの分布は楕円分布族に含まれる。つまり、分布のファット・テイル性が直ちにVaRのテイル・リスクに結びつくわけではないことになる。

8 期待効用を最大化する投資家にとっては、こうしたオプション売買によるVaRの操作が最適戦略となることを2項モデルにより示したものとして山井・吉羽 [2001a] を参照。

図表1 オプションの購入に伴うVaRのテイル・リスク



(例2) 与信ポートフォリオ (Lucas *et al.* [2001])

VaRは、与信ポートフォリオにおけるデフォルトの相関の上昇を十分に捉えられず、与信集中により大幅な損失が発生する可能性を見逃す場合がある。これを、Lucas *et al.* [2001] の均一ポートフォリオ (後述) における計算例を用いて示す。

ルーカスらは、与信ポートフォリオの損失額分布の漸近的な近似解を導出した。彼らの枠組みでは、与信先企業の企業価値がある閾値を下回った場合にデフォルトが起こるというMerton [1974] の枠組みが用いられている。また、企業価値は、共通ファクターと固有ファクター (いずれも正規分布に従うと仮定) との線形和で表される (いわゆる「ファクター・モデル」) と仮定されている。

ルーカスらは、均一ポートフォリオを用いて簡単な計算例を示している。この例では、損失の認識はデフォルト・モードで行われる。また、企業価値に関する共通ファクター数は1と仮定されている。さらに、ファクター・センシティブリティとデフォルト率は各企業同一、各エクスポージャー額も同一⁹とされている (この点で、均一ポートフォリオである)。彼らは、この均一ポートフォリオの損失額が、与信

9 ポートフォリオ全体のエクスポージャー額は合計で1とされている。

先数を大きくしたときに全体のエクスポージャーを1として以下のCに漸近的に収束することを示した (Lucas *et al.* [2001] p.1643、(14)式)

$$C \approx \Phi \left(\frac{s - \rho Y}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right). \quad (1)$$

Φ : 標準正規分布の分布関数

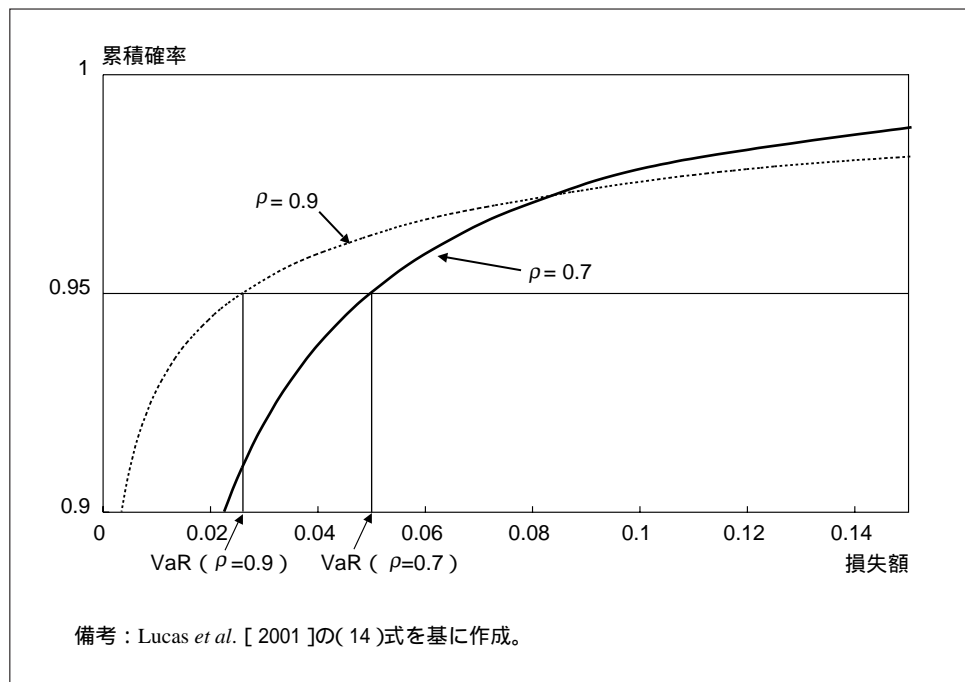
Y : 標準正規分布に従う確率変数

s : デフォルト率を p として $\Phi^{-1}(p)$ の値。ただし Φ^{-1} は標準正規分布の分布関数の逆関数

ρ : 企業価値同士の相関係数

図表2は、デフォルト率 p を1%として $\rho = 0.7, 0.9$ としたときの漸近的な損失額 C の累積分布をプロットしたものである。 $\rho = 0.9$ のポートフォリオは、 $\rho = 0.7$ のポートフォリオに比べて、与信集中がより進んでいることになるため、裾がより厚い分布となっており、大幅な損失が発生する確率も高くなっている。しかし、ここで、信頼水準95%のVaRをみることにすると、与信がより分散されている $\rho = 0.7$ のポートフォリオの方が、リスクは大きいと判断されてしまう。この例は、VaRでは、裾における損失発生確率を十分に捉えられない場合があることを示している。

図表2 与信ポートフォリオにおけるVaRのテイル・リスク



(3) 期待ショートフォールのテイル・リスク

期待ショートフォールのテイル・リスクも、VaRのテイル・リスクと同様に定義することができる。本稿では、大幅な損失が発生する可能性の高いポートフォリオの期待ショートフォールが小さくなる場合、期待ショートフォールは複数のポートフォリオ間の相対的なリスクの大小関係を見誤っているという点で、期待ショートフォールにテイル・リスクが発生していると定義する。

実際にテイル・リスクが発生する例をみてみよう。山井・吉羽[2001c]は、ある2つのポートフォリオに2次確率優越の関係がない場合に期待ショートフォールにテイル・リスクが発生する可能性があることを示し、次のような具体例を挙げた。

図表3で示される2つの簡単なサンプル・ポートフォリオAとBのリスクを期待ショートフォール（およびVaR）で計測する。ポートフォリオAとBのペイ・オフの期待値はいずれも97.05である。計算の簡単化のため、初期投資額はこの期待値に等しいとする。

ポートフォリオAでは、初期投資額が97.05であるので、損失が10を下回る確率（＝ペイ・オフが100ないし95となる確率）は99%である一方、1%の確率で初期投資額の半分近い損失（損失47.05）が発生する。ポートフォリオBでは、損失が10を下回る確率（＝ペイ・オフが98、97、90のいずれかになる確率）は約99.5%とAよりも高い一方、ごく僅かな確率（約0.4%）で初期投資額の半分以上が失われてしまう（損失77.05）。

信頼水準99%で、このポートフォリオの期待ショートフォール（およびVaR）を求めた結果が図表4である。

図表3 サンプル・ポートフォリオのペイ・オフ

ポートフォリオA			ポートフォリオB		
ペイ・オフ	損失額	確率	ペイ・オフ	損失額	確率
100	-2.95	50.000%	98	-0.95	50.000%
95	2.05	49.000%	97	0.05	49.000%
50	47.05	1.000%	90	7.05	0.457%
			20	77.05	0.543%

備考：ポートフォリオBのペイ・オフが90および20となる確率は四捨五入されており正確な値では表示されていない（実際には、これら2つの事象の確率の和が1%で、ポートフォリオのペイ・オフの期待値が97.05となるよう設定した）。

図表4 サンプル・ポートフォリオの期待ショートフォールとVaR

	ポートフォリオA	ポートフォリオB	備考
ペイ・オフの期待値	97.050	97.050	期待値は同じ
VaR（信頼水準99%）	47.050	7.050	VaRはAが大
期待ショートフォール（信頼水準99%）	47.050	45.050	期待ショートフォールはAが大

ポートフォリオAとBの期待ショートフォールを比較すると、ポートフォリオBの方がリスクが小さいと判断される。これは、ポートフォリオBにおける大幅な損失の発生確率が僅少であるため、潜在的に大きな損失が発生し得るポートフォリオBのリスクが小さいと期待ショートフォールでは判断してしまうからである。

このように、期待ショートフォールでも、本稿で定義する意味でのテイル・リスクが発生することがある。

しかし、期待ショートフォールのテイル・リスクとVaRのテイル・リスクには決定的な違いがある。それは、後者が信頼水準を超える損失を全く考慮していない一方で、前者はそれを考慮に入れているという点である。この点で、大幅な損失の発生の確率を定義上全く考慮しないVaRを用いる場合には、細心の注意が必要である。一方、期待ショートフォールでは、信頼水準を超える全ての損失事象に関してその金額と発生確率をセットにして考慮していることになるので、本稿で定義するようなテイル・リスクの発生があるとしても、その点自体はVaRの場合ほど大きな問題ではないとみなすことができる。

また、期待ショートフォールは、理論的にVaRよりも幅広い条件でテイル・リスクが発生しないリスク指標であることがわかっている（山井・吉羽 [2001c]）。

以上のことから、テイル・リスクという観点からリスク指標を考えた場合、期待ショートフォールはVaRよりも優れているということができよう。

3 . 多変量極値理論

本節では、本稿で活用する多変量極値理論、特に超過値の確率的性質について述べたPOT法（peaks-over-threshold method）を紹介する。以下では、まず、多変量極値理論を理解するための準備として、単変量の極値理論¹⁰、コピュラを簡単に説明する。次に、極値をモデル化する際に重要な概念となる裾における漸近的な依存関係（asymptotic dependence）の説明を行う。

なお、本稿では2変量極値理論を利用するため、コピュラおよび多変量極値理論の説明は2変量で行う。ただし、3変量以上の場合も基本的な考え方は2変量の場合と同じである。

10 極値理論の詳細は、Coles [2001]、Embrechts, Klüppelberg, and Mikosch [1997]、Kotz and Nadarajah [2000]、Resnick [1987]、森本 [2000]などを参照。

(1) 単変量極値理論

まず、単変量の超過値の確率的性質を説明する。 Z を確率変数、 F を Z の分布関数とする。閾値を θ ($\theta > 0$)としたときの Z の超過値を $m_\theta(Z) = \max(Z, \theta)$ と定義する。 Z が θ を超える確率を p とすると、 $p = 1 - F(\theta)$ が成り立つ。 θ を超えるという条件のもとで、 $(Z - \theta)$ の分布関数(ここでは「超過分布関数」と呼ぶ) F_θ は以下のとおり表される。

$$F_\theta(x) = \Pr\{Z - \theta \leq x | Z > \theta\} = \frac{F(x) - F(\theta)}{1 - F(\theta)}, \quad x \geq \theta. \quad (2)$$

一般に超過分布関数は分布関数 F が特定されない限り定まらないが、以下のピカンズ=バルケマ=デ・ハーン (Pickands-Balkema-de Haan) の定理により、 θ が大きくなればこの超過分布関数は一般化パレート分布 ($G_{\xi, \sigma}$) に収束することがわかっている^{11, 12}。

$$G_{\xi, \sigma}(x) = 1 - (1 + \xi \cdot \frac{x}{\sigma})^{-1/\xi}, \quad x \geq 0. \quad (3)$$

したがって、 θ が十分大きいときには、 $Z > \theta$ のときの Z 、つまり超過値 $m_\theta(Z)$ の分布 $F_m(x)$ は以下で近似することができる。本稿では、分布 $F_m(x)$ を「超過値分布」と呼ぶことにする。

$$F_m(x) \approx (1 - F(\theta))G_{\xi, \sigma}(x - \theta) + F(\theta) = 1 - p(1 + \xi \cdot \frac{x - \theta}{\sigma})^{-1/\xi}, \quad x \geq \theta. \quad (4)$$

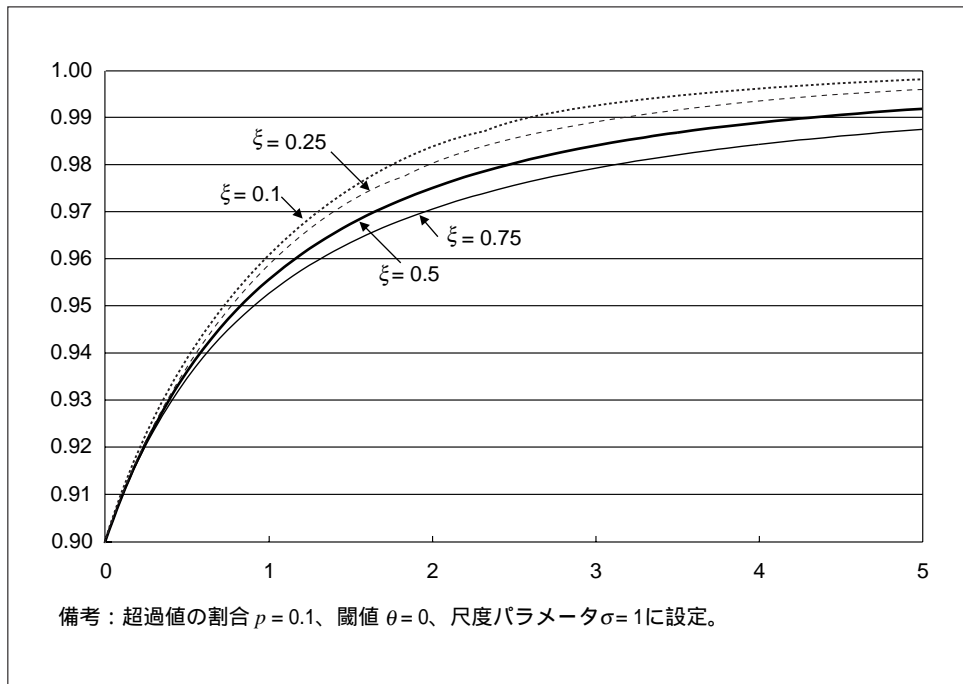
この分布で、裾指数 ξ は分布の裾の厚さを表し、 ξ が大きいかほど分布の裾は厚い(図表5を参照)。また、尺度パラメータ σ は分布の散らばり度合いを表し、 σ が大きいかほど分布の散らばり度合いが大きいか(図表6を参照)。

なお、VaRと期待ショートフォールの信頼水準 $(1 - \alpha)$ が p よりも小さければ、この超過値分布を用いて、これらのリスク量を求めることができる(具体的な算出方法は4節を参照)。

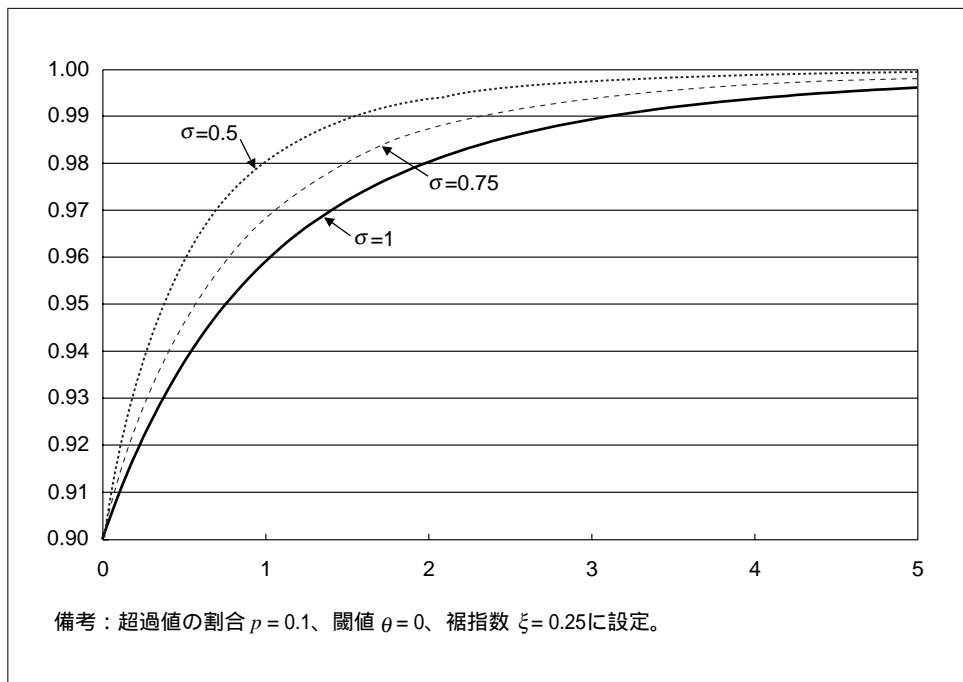
11 この定理の詳しい説明はColes [2001]、森本 [2000] を参照。

12 ここでは、 $\xi \neq 0$ として議論を進める。

図表5 裾指数の変化に対する超過値分布の分布関数の変化



図表6 尺度パラメータの変化に対する超過値分布の分布関数の変化



(2) コピュラ¹³

「コピュラ関数」とは、周辺分布が $[0,1]$ 上の一様分布となる多変量分布の分布関数となり得る関数のことを指す。つまり、 $[0,1]$ 上の一様分布に従う2つの確率変数 U_1, U_2 に対して、その分布関数 C がコピュラ関数となる。

$$C(u_1, u_2) = \Pr[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2] . \quad (5)$$

ここで、一様分布に従う確率変数として、2個の確率変数の周辺分布関数 $F_1(x_1), F_2(x_2)$ を用いて、以下のように2変量の分布関数 $F(x_1, x_2)$ を生成することができる。

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F(x_1, x_2) . \quad (6)$$

スクラー (Sklar) の定理は、この逆も成立することを示している。つまり、 $F(x_1, x_2)$ を2変量確率変数 (X_1, X_2) の同時分布関数とし、その周辺分布関数を $F_1(x_1), F_2(x_2)$ とすると、あるコピュラ関数が存在し、

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) , \quad (7)$$

として表される。しかも、 $F(x_1, x_2)$ が連続である場合は、 C は一意に決まる。この時、 $C(u_1, u_2)$ を (X_1, X_2) のコピュラと呼ぶ。

また、コピュラは、2変量確率変数に任意の狭義単調増加関数による変数変換を行っても不変であることがわかっている (この性質はコピュラ不変性 < copula invariance > と呼ばれる)。すなわち、 (X_1, X_2) のコピュラが $C(u_1, u_2)$ である場合、任意の狭義単調増加関数 $h_1(\cdot), h_2(\cdot)$ に対して、確率変数 $(h_1(X_1), h_2(X_2))$ のコピュラも $C(u_1, u_2)$ である。

この意味で、コピュラは、同時分布から相互依存関係を抽出し、相互依存関係と周辺分布の挙動とを分離するための1つの手法を与えていると考えることができる。

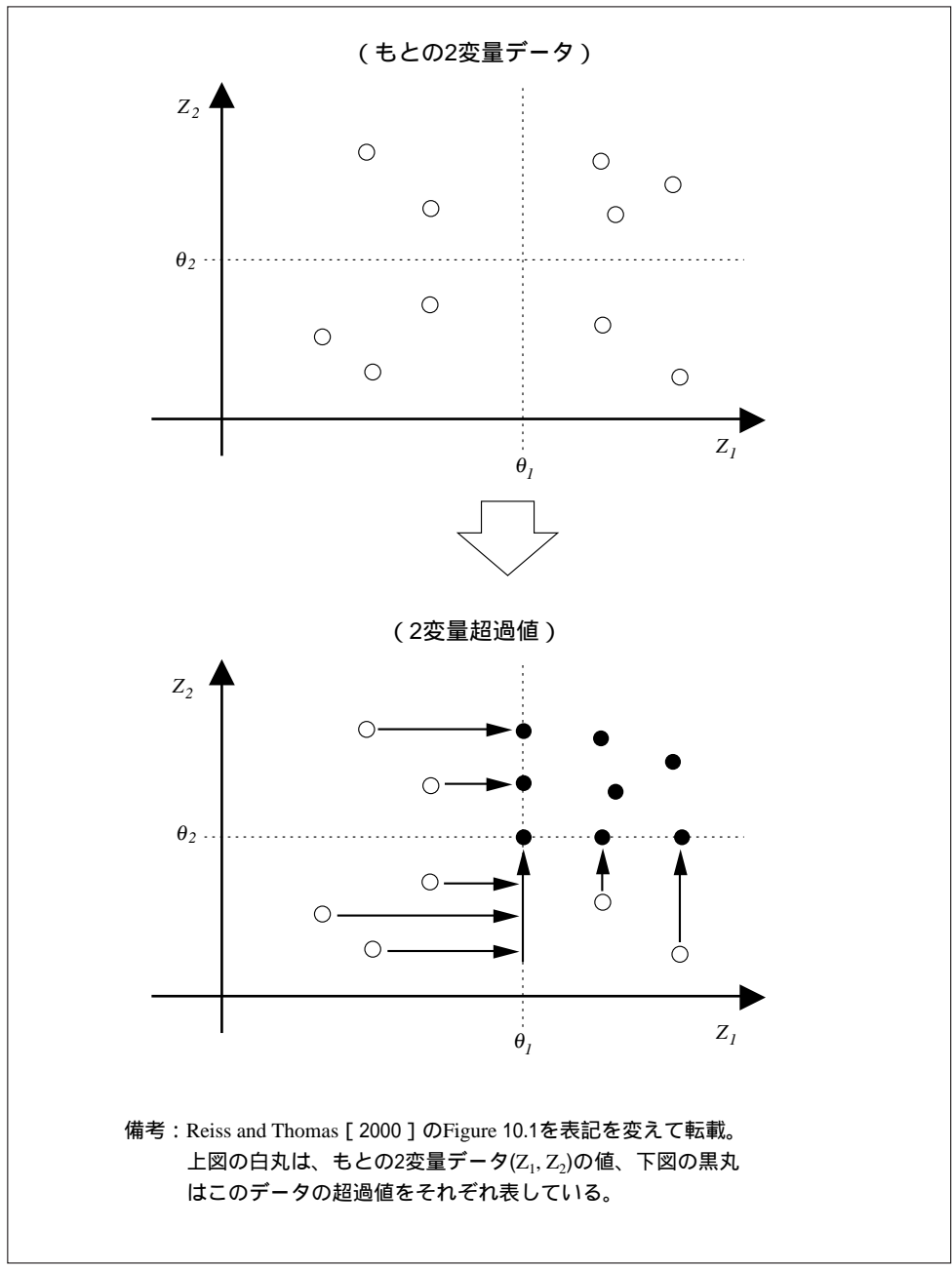
(3) 多変量極値理論¹⁴

次に、多変量極値理論の概要を簡単に紹介する。まず、「2変量の確率変数の超過値」を定義する。これは、2つの確率変数を $Z = (Z_1, Z_2)$ 、閾値を $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ として次式で定義される値である (図表7を参照)。

13 コピュラの厳密な定義やここで述べる定理の証明などは Joe [1997]、Nelsen [1999]、Frees and Valdez [1998] などを参照。

14 多変量極値理論のより詳細な説明は、Coles [2001] Ch.8、Kotz and Nadarajah [2000] Ch.3、McNeil [2000] Resnick [1987] Ch.5などを参照。

図表7 2変量の超過値のイメージ図



$$m_{(\theta_1, \theta_2)}(Z_1, Z_2) = (\max(Z_1, \theta_1), \max(Z_2, \theta_2)). \quad (8)$$

Ledford and Tawn [1996] は、この超過値のコピュラが、閾値を大きくすると、次式で与えられるコピュラに収束することを示した（解説は補論1.を参照）。

$$C(u_1, u_2) = \exp\left\{-V\left(-\frac{1}{\log u_1}, -\frac{1}{\log u_2}\right)\right\}, \quad (9)$$

ただし、 $V(z_1, z_2) = \int_0^1 \max\{sz_1^{-1}, (1-s)z_2^{-1}\} dH(s)$ 。ここで、 H は $[0, 1]$ 上の非負の測度で $\int_0^1 s dH(s) = \int_0^1 (1-s) dH(s) = 1$ を満たす。

以下では、Hefferman [2000] にならひ、このコピュラを「2変量極値コピュラ (bivariate extreme value copula)」あるいは「極値コピュラ」と呼ぶこととする。

一方、2変量の超過値の周辺分布は、単変量の超過値における結果から、超過値分布に収束する。したがって、2変量の超過値は、周辺分布が超過値分布、コピュラが極値コピュラで表される2変量分布に収束する。

なお、超過値の分布が特定の分布（一般化パレート分布）に収束することが示されている単変量の場合と違い、多変量では超過値の分布が特定の分布に収束することは保証されていない。したがって、極値コピュラの条件を満たすコピュラは無数に存在し¹⁵、その中から適当なコピュラを選択する必要がある。

こうした極値コピュラの中で、統計学や金融への応用研究で最も標準的に利用されているのが次式で表されるガンベル・コピュラ (Gumbel copula) である (Gumbel [1960] Tawn [1988] Embrechts, McNeil, and Straumann [2002] McNeil [2000] Longin and Solnik [2001])。

$$C(u_1, u_2) = \exp\{ -[(-\log u_1)^\alpha + (-\log u_2)^\alpha]^{1/\alpha} \} \quad (10)$$

このとき、(9)式に表れる関数 V は以下の形となる。

$$V(z_1, z_2) = (z_1^{-\alpha} + z_2^{-\alpha})^{1/\alpha}. \quad (11)$$

このガンベル・コピュラの主たる長所としては、各周辺分布が、独立であるケース ($\alpha = 1$) と完全に依存しているケース ($\alpha = \infty$) を包含していること、単一のパラメータ α で依存関係を表すことができること、の2つが挙げられている (Longin and Solnik [2001])。また、コピュラの式がわかりやすい形で表されているため、最尤推計やシミュレーション上の扱いも容易であるという特徴がある。そこ

15 これまでに提唱されたガンベル・コピュラ以外の極値コピュラの詳細は、例えば、Joe [1997] Kotz and Nadarajah [2000] を参照。

で本稿の分析でも、こうした扱いの容易さなどから、極値コピュラとしてガンベル・コピュラを採用して分析を行う。

なお、以下本稿では、(10)式における α を、「ガンベル・コピュラの依存パラメータ」と呼ぶ。

(4) 裾における依存関係

複数の極値の依存関係を分析する際に重要な概念となるのは、分布の裾における漸近的な依存関係である。ここでは、この漸近的な依存関係を説明する。まず、2つの同じ周辺分布 F に従う確率変数 (Z_1, Z_2) について、以下の指標 χ を定義する。

$$\chi \equiv \lim_{z \rightarrow z^+} \Pr\{Z_1 > z | Z_2 > z\}, \quad (12)$$

ただし、 z^+ は F の右端である。

χ は、一方の値が大きいくときに他方の値も大きくなる確率の「漸近的な」値であり、分布の裾で2つの確率変数が依存している度合いを表している。 $\chi = 0$ のときは、 (Z_1, Z_2) は「漸近的に独立である (asymptotically independent)」と呼ばれる。一方、 $\chi > 0$ のとき、 (Z_1, Z_2) は「漸近的に依存関係にある (asymptotically dependent)」と呼ばれる。

χ は、 (Z_1, Z_2) が異なる周辺分布 F_{Z_1} 、 F_{Z_2} を持つときも次式で定義できる。

$$\chi \equiv \lim_{u \rightarrow 1} \Pr\{F_{Z_1}(Z_1) > u | F_{Z_2}(Z_2) > u\}, \quad (13)$$

周辺分布が等しい場合は、(13)式は(12)式に一致する。

さらに、

$$\chi(u) \equiv 2 - \frac{\log \Pr\{F_{Z_1}(Z_1) < u, F_{Z_2}(Z_2) < u\}}{\log \Pr\{F_{Z_1}(Z_1) < u\}}, \quad \text{for } 0 \leq u \leq 1, \quad (14)$$

と定義すると、 $\chi = \lim_{u \rightarrow 1} \chi(u)$ という関係があることが示される (Coles, Hefferman, and Tawn [1999])。

ここで2つの確率変数の依存関係が極値コピュラで表される場合は、以下のように $\chi(u)$ は定数となることがわかっている。

$$\chi(u) = \chi = 2 - V(1, 1). \quad (15)$$

しかし、統計学の実証分析からは、指標 χ だけでは、実際の極値データの振る舞いを十分に表現できないとの問題提起がなされている (Ledford and Tawn [1996, 1997]、Coles, Hefferman, and Tawn [1999])。これらの研究結果によると、超過値や最大値の依存関係を分析すると、漸近的には (裾の端では) 独立 ($\chi = 0$) である

一方、裾の途中では依存関係がある ($u < 1$ で $\chi(u) > 0$) というケースが存在する。この場合、(15)式のように $\chi(u)$ が u の値にかかわらず定数となる極値コピュラでは、独立の度合い (依存の度合い) がわからないという意味で、依存関係が必ずしも十分には表現されないことになるため、これを用いて極値の推計を行うと分位点などの評価を誤る可能性がある。

こうした問題意識から、Coles, Heffernan, and Tawn [1999] は、確率変数の依存関係を表すもう一つの指標として、次式で表される指標 $\bar{\chi}$ を提唱した。

$$\bar{\chi} \equiv \lim_{u \rightarrow 1} \bar{\chi}(u), \tag{16}$$

$$\text{ただし、} \bar{\chi}(u) \equiv \frac{2 \log \Pr\{F_{Z_1}(Z_1) > u\}}{\log \Pr\{F_{Z_1}(Z_1) > u, F_{Z_2}(Z_2) > u\}} - 1, \tag{17}$$

$\bar{\chi}$ は、確率変数が漸近的に依存している場合は $\bar{\chi} = 1$ 、漸近的に独立の場合は $-1 < \bar{\chi} < 1$ となる性質を持っている。また、確率変数が互いに独立である場合は $\bar{\chi} = 0$ となる。

2つの指標 ($\chi, \bar{\chi}$) を同時に用いれば多様な依存関係を表現することができる (図表8を参照)。例えば、上述のように漸近的に独立の場合は $\chi = 0$ となり、 χ のみでは独立の度合い (依存度合い) を表現できないが、 $\bar{\chi}$ の値 (漸近的に独立の場合は $-1 < \bar{\chi} < 1$ の範囲の値をとる) で依存度合いを表現することができる。また、漸

図表8 漸近的依存と、 $\chi, \bar{\chi}$ の関係

	独立	漸近的独立	漸近的依存
χ	$\chi = 0$	$\chi = 0$	$0 < \chi \leq 1$
$\bar{\chi}$	$\bar{\chi} = 0$	$-1 < \bar{\chi} < 1$	$\bar{\chi} = 1$
備考	極値コピュラで表現可	極値コピュラで表現不可	極値コピュラで表現可

備考：独立ならば $\bar{\chi} = 0$ であるが、逆は必ずしも正しくない。

図表9 本稿で用いるコピュラの性質

	式	依存関係	χ	$\bar{\chi}$
ガンベル	$C(u, v) = \exp\{-[(-\log u)^\alpha + (-\log v)^\alpha]^{1/\alpha}\}$	$\alpha = 1$ で独立 $\alpha = \infty$ で完全依存	$\chi = 2 - 2^{1/\alpha}$ ($\alpha \geq 1$)	$\bar{\chi} = 1$
正規	$C(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$	$\rho = 0$ で独立 $\rho = \pm 1$ で完全依存	$\chi = 0$ ($-1 < \rho < 1$)	$\bar{\chi} = \rho$
フランク	$C(u, v) = -\frac{1}{\delta} \log \left(\frac{1 - e^{-\delta} - (1 - e^{-\delta u})(1 - e^{-\delta v})}{1 - e^{-\delta}} \right)$	$\delta = 0$ で独立 $\delta = \pm \infty$ で完全依存	$\chi = 0$	$\bar{\chi} = 0$

近的に依存している場合は $\bar{\chi} = 1$ となるため、 $\bar{\chi}$ のみでは依存関係を表現できないが、 χ の値（漸的に依存している場合は $0 < \chi \leq 1$ の範囲の値をとる）で依存度合いを表現することができる。

なお、ガンベル・コピュラでは、 $\chi = 2 - 2^{1/\alpha}$ ($\alpha \geq 1$)、 $\bar{\chi} = 1$ という関係が成立する（図表9を参照）。

（5）裾における依存構造とコピュラ

Ledford and Tawn [1996, 1997]、Hefferman [2000] は、極値コピュラでは実際の統計データの依存関係を十分に表現できない場合があるため、漸的に独立のコピュラを用いることが実務的には有用であると指摘している。

Hefferman [2000] は、こうした漸的に独立のコピュラを多数挙げている。本稿では、このうち以下の2つのコピュラを用いて分析を行う（図表9を参照）。

- ・正規コピュラ

$$C(u, v) = \Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \quad (18)$$

ただし、 Φ_{ρ} は相関係数 ρ の2変量標準正規分布の分布関数、 Φ^{-1} は単変量標準正規分布の分布関数の逆関数。

- ・フランク・コピュラ¹⁶

$$C(u, v) = -\frac{1}{\delta} \log \left(\frac{1 - e^{-\delta} - (1 - e^{-\delta u})(1 - e^{-\delta v})}{1 - e^{-\delta}} \right). \quad (19)$$

このうち、正規コピュラ ($-1 < \rho < 1$) は、 $\chi = 0$ （漸的に独立のコピュラ）であり、また $\bar{\chi} = \rho$ であるため、 ρ によって依存関係を表現することができる。

一方、フランク・コピュラの場合は、 $\chi = \bar{\chi} = 0$ であるため、正規コピュラよりも独立度合いが高い裾の依存関係を表現できる¹⁷。

正規コピュラおよびフランク・コピュラは、いずれも極値コピュラには含まれない。しかし、閾値を大きくしたときに、周辺分布が一般化パレート分布へ収束するスピードと、コピュラが極値コピュラに収束するスピードは必ずしも同じではないと考えれば、超過値の分布が極値コピュラ以外の依存関係に従うという仮定を置くことは、それほど大胆なものではないと思われる。

なお、本稿では(18)式の ρ を「正規コピュラの依存パラメータ」、(19)式の δ を「フランク・コピュラの依存パラメータ」と呼ぶ。

16 このフランク・コピュラの表現は Joe [1997] に従った。

17 裾における依存関係の数学的な定義などの詳細な議論、および各コピュラの χ 、 $\bar{\chi}$ の導出は Ledford and Tawn [1996, 1997]、Coles, Hefferman, and Tawn [1999]、Hefferman [2000] を参照。

4. 単変量極値分布のもとでのVaRと期待ショートフォールのテイル・リスク

本節では、単変量の超過値分布を使ってVaRのテイル・リスクの有無を調べる。具体的には、前節で紹介した「一定の閾値を超える単変量の超過値は、漸近的に一般化パレート分布を変形した超過値分布に従う」との極値理論の成果を拠り所として、市場ストレス時の損失額分布が超過値分布に従うとの前提に立って議論を進める。

2節(2)で挙げたオプション・ポートフォリオの例でみたように、リスクをVaRで捉えると、大幅な損失が発生する確率が実際には大きいポートフォリオのリスクを過小評価してしまうことがある。これは、VaRが信頼区間外の大幅な損失を十分に捉えていないという意味で、VaRにテイル・リスクが発生する例である。

ここでは、2つの資産のVaRを(4)式の超過値分布を用いて算出した場合、VaRにテイル・リスクが発生するかどうかを検討する。この分析では、単変量の確率変数であるVaRを比較するため、単変量極値理論の枠組みを用いる。

まず、(4)式の超過値分布から算出されるVaRにテイル・リスクが発生する数値例を与えよう。2つの証券があり、それぞれの損失額が Z_1 、 Z_2 で与えられ、それぞれ以下で表される超過値分布に従っているとす。

$$F_m(z_1)(x) = 1 - p_1 \left(1 + \xi_1 \cdot \frac{x - \theta_1}{\sigma_1}\right)^{-1/\xi_1}, \quad (20)$$

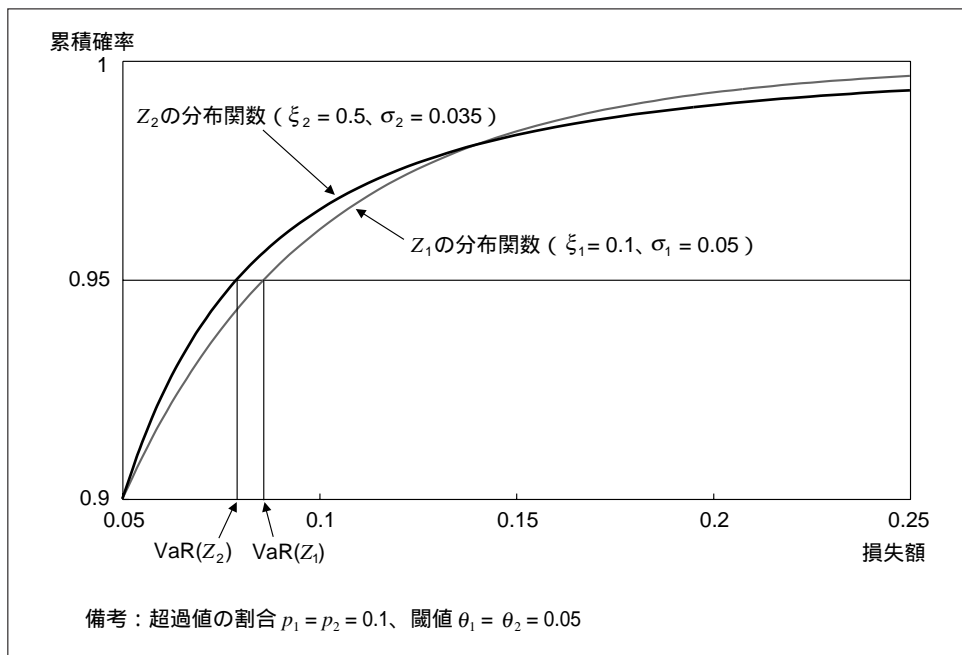
$$F_m(z_2)(x) = 1 - p_2 \left(1 + \xi_2 \cdot \frac{x - \theta_2}{\sigma_2}\right)^{-1/\xi_2}. \quad (21)$$

ここで、超過値の割合 $p_1 = p_2 = 0.1$ 、閾値 $\theta_1 = \theta_2 = 0.05$ 、裾指数 $\xi_1 = 0.1$ 、 $\xi_2 = 0.5$ 、尺度パラメータ $\sigma_1 = 0.05$ 、 $\sigma_2 = 0.035$ とする。図表10は、このパラメータ値のもとで超過値の分布関数をプロットしたものである。

図表10からは、VaRにテイル・リスクが発生していることがわかる。まず、 Z_2 の方が裾指数が大きいいため Z_1 よりも裾の厚い分布となっている(3節(1)を参照)。つまり、 Z_2 の方が大幅な損失が発生する可能性が高い。しかし、信頼水準95%のVaRは Z_1 が Z_2 より大きく、裾の厚い分布を持つ Z_2 の方のリスクが小さいと判断される。ここでも、2節(1)で述べたとおり、VaRの信頼水準の外側で分布関数が交差する形でVaRのテイル・リスクが発生している。

一般に、超過値分布の前提のもとでは、テイル・リスクが発生する条件を不等式として簡便に表すことができる。まず、McNeil [2000] にならい、超過値分布(4)式からVaRと期待ショートフォールを算出する。損失額 Z の信頼水準 $(1 - \alpha)$ のVaRを $VaR_\alpha(Z)$ とすると、VaRは損失額分布の $(1 - \alpha)$ 分位点であるから、これらを(4)式に代入して以下を得る。

図表10 超過値の分布の数値例



$$1 - \alpha \approx 1 - p \left(1 + \xi \cdot \frac{VaR_\alpha(Z) - \theta}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \quad (22)$$

これより、VaRは以下で表される。

$$VaR_\alpha(Z) \approx \theta + \frac{\sigma}{\xi} \left(\left(\frac{p}{\alpha} \right)^\xi - 1 \right) \quad (23)$$

さらに、信頼水準 $(1 - \alpha)$ の期待ショートフォールを $ES_\alpha(Z)$ とすると、

$$\begin{aligned} ES_\alpha(Z) &= E[Z | Z \geq VaR_\alpha(Z)] \\ &= VaR_\alpha(Z) + E[(Z - \theta) - (VaR_\alpha(Z) - \theta) | Z - \theta \geq VaR_\alpha(Z) - \theta] \\ &= VaR_\alpha(Z) + \frac{\sigma + \xi \cdot (VaR_\alpha(Z) - \theta)}{1 - \xi} \\ &= \frac{\sigma - \xi\theta}{1 - \xi} + \frac{VaR_\alpha(Z)}{1 - \xi} \approx \theta + \frac{\sigma}{1 - \xi} \left\{ 1 + \frac{1}{\xi} \left(\left(\frac{p}{\alpha} \right)^\xi - 1 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

となる¹⁸。

18 3つめの等号は、Embrechts, Klüppelberg, and Mikosch [1997] の Theorem 3.4.13, (e) に基づく。

ここで、(20)、(21)式で表される Z_1 、 Z_2 にテイル・リスクが発生するための条件を考える。まず、 Z_2 の方が Z_1 よりも裾が厚い、つまり $\xi_2 > \xi_1$ と仮定する。信頼水準 $(1-\alpha)$ のVaRにテイル・リスクが生ずる場合には、裾の厚い Z_2 のVaRが Z_1 のVaRを下回るため、以下の不等式が成立する。

$$VaR_\alpha(Z_1) > VaR_\alpha(Z_2). \quad (25)$$

簡単化のために、 $\theta_1 = \theta_2$ 、 $p_1 = p_2 = p$ として(23)式の結果を代入して解くと以下を得る。

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} > \bar{\kappa}_{VaR} \cdot \quad \text{ただし、} \bar{\kappa}_{VaR} = \frac{\xi_1}{\xi_2} \left(\frac{(p/\alpha)^{\xi_2} - 1}{(p/\alpha)^{\xi_1} - 1} \right). \quad (26)$$

図表11は、超過値の割合を $p = 0.1, 0.05$ として、(26)式を用いて、 $\bar{\kappa}_{VaR}$ の値を信頼水準95%と99%のVaRについて計算したものである¹⁹。ここでは、 $\bar{\kappa}_{VaR}$ が小さいほどテイル・リスクが発生するための σ_1/σ_2 に関する条件が緩くなり、テイル・リスクも発生しやすくなると考えることができる。

図表11からは、VaRにテイル・リスクが生じる条件には、以下の傾向があることがわかる。まず、すべての (ξ_1, ξ_2) の組み合わせで $\bar{\kappa}_{VaR} > 1$ であることから、VaRにテイル・リスクが発生するためには、少なくとも $\sigma_1/\sigma_2 > 1$ 、つまり、裾が薄い分布の尺度パラメータ σ_1 が裾が厚い分布の尺度パラメータ σ_2 より大きいことが必要である。

これを簡単な例を用いて説明しよう。図表12は、 $\xi = 0.5$ 、 $\sigma = 1$ としたときの超過値分布と、 $\xi = 0.1$ 、 $\sigma = 1, 1.5, 2$ としたときの超過値分布をおのおののプロットしたものである。まず、裾の厚さの異なる2つの分布の尺度パラメータが等しいときは、分布関数は交差せずVaRにテイル・リスクが発生していないことがわかる。次に、裾の薄い方の分布の尺度パラメータを大きくし、 $\xi = 0.5$ 、 $\sigma = 1$ の分布関数と $\xi = 0.1$ 、 $\sigma = 1.5$ のそれとを比較すると、分布関数が累積確率98%の前後で交差していることがわかる。このため、この98%前後より低い信頼水準では、 $\xi = 0.5$ 、 $\sigma = 1$ の方がリスクが小さいと判断され、VaRにテイル・リスクが発生する。さらに、 $\xi = 0.5$ 、 $\sigma = 1$ の分布関数と $\xi = 0.1$ 、 $\sigma = 2$ のそれとの比較からも、VaRにテイル・リスクが発生していることがわかる。

また、それぞれの裾指数の組み合わせおよび信頼水準における $\bar{\kappa}_{VaR}$ を比較すると、裾指数の差が小さいほど、VaRの信頼水準が小さいほどテイル・リスクが発生しやすくなることがわかる。

19 超過値の割合が $p = 0.05$ の場合、信頼水準95%のVaRはその超過値の範囲に含まれない。ここでの分析の目的は、超過値分布のもとでVaRの性質を調べることであるため、 $p = 0.05$ のときの信頼水準95%のVaRは計算しないことにした。

図表11 VaRのテイル・リスクが発生する σ_1 / σ_2 の閾値 $\bar{\kappa}_{VaR}$

(超過値の割合: $p = 0.1$ 、信頼水準: 95%)

		ξ_1	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
ξ_2	0.10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.20	1.036	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.30	1.073	1.036	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.40	1.113	1.074	1.037	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.50	1.154	1.114	1.075	1.037	-	-	-	-	-	-	-
	0.60	1.198	1.156	1.116	1.076	1.038	-	-	-	-	-	-
	0.70	1.243	1.200	1.158	1.117	1.077	1.038	-	-	-	-	-
	0.80	1.291	1.246	1.202	1.160	1.118	1.078	1.038	-	-	-	-
	0.90	1.341	1.294	1.249	1.205	1.162	1.120	1.079	1.039	-	-	-
	1.00	1.393	1.345	1.298	1.252	1.207	1.163	1.121	1.079	1.139	-	-

(超過値の割合: $p = 0.1$ 、信頼水準: 99%)

		ξ_1	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
ξ_2	0.10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.20	1.129	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.30	1.281	1.134	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.40	1.460	1.292	1.139	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.50	1.670	1.479	1.304	1.144	-	-	-	-	-	-	-
	0.60	1.919	1.699	1.498	1.315	1.149	-	-	-	-	-	-
	0.70	2.213	1.960	1.728	1.516	1.325	1.154	-	-	-	-	-
	0.80	2.563	2.269	2.001	1.756	1.535	1.336	1.158	-	-	-	-
	0.90	2.980	2.638	2.325	2.041	1.784	1.553	1.346	1.162	-	-	-
	1.00	3.476	3.077	2.713	2.381	2.081	1.811	1.570	1.356	1.167	-	-

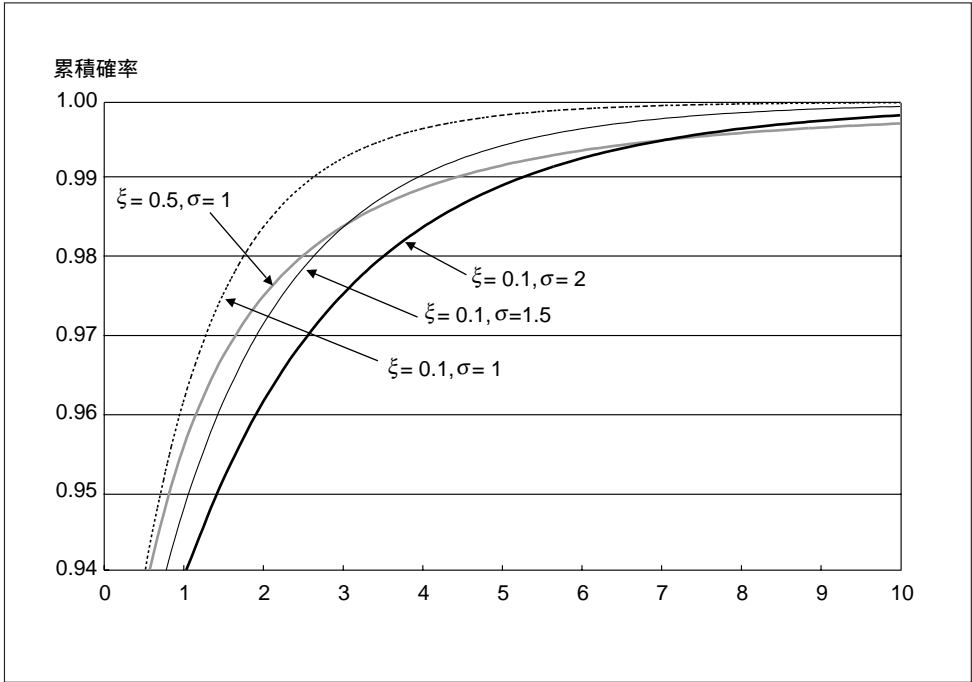
(超過値の割合: $p = 0.05$ 、信頼水準: 99%)

		ξ_1	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
ξ_2	0.10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.20	1.087	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.30	1.185	1.090	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.40	1.294	1.190	1.092	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.50	1.416	1.302	1.195	1.094	-	-	-	-	-	-	-
	0.60	1.552	1.428	1.310	1.200	1.097	-	-	-	-	-	-
	0.70	1.706	1.569	1.440	1.319	1.205	1.099	-	-	-	-	-
	0.80	1.878	1.727	1.585	1.452	1.327	1.210	1.101	-	-	-	-
	0.90	2.072	1.906	1.749	1.602	1.464	1.335	1.215	1.103	-	-	-
	1.00	2.291	2.107	1.933	1.771	1.618	1.476	1.343	1.220	1.105	-	-

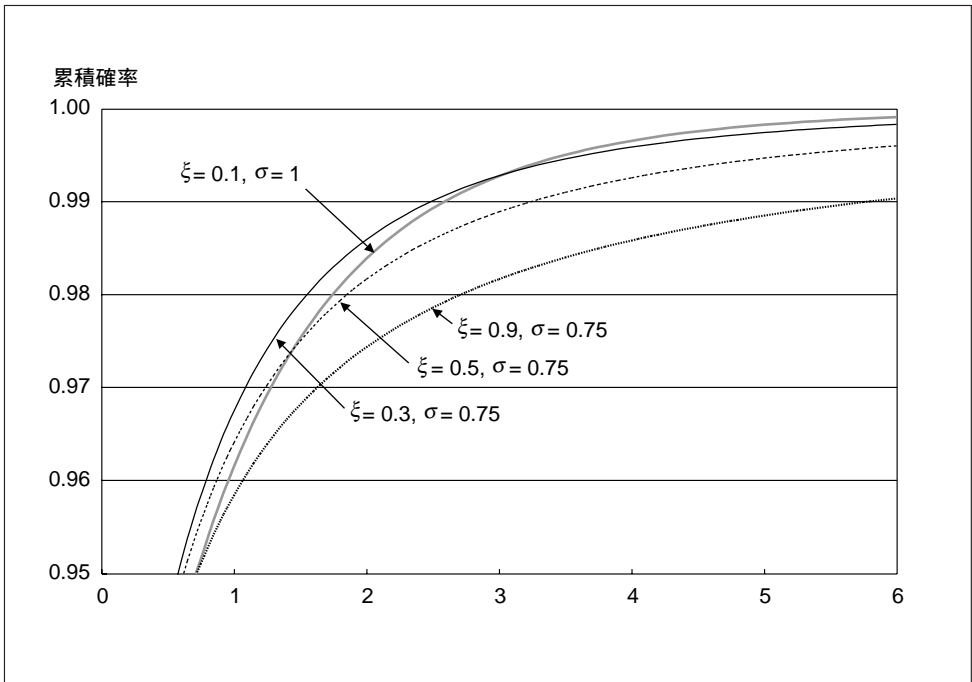
備考: σ_1 / σ_2 がこの値より大きい場合にVaRにテイル・リスクが発生。

これも簡単な例を用いて説明することができる。図表13は、 $\xi = 0.1$ 、 $\sigma = 1$ としたときの超過値分布と、 $\sigma = 0.75$ 、 $\xi = 0.3, 0.5, 0.9$ としたときのそれぞれの超過値分布をおのおののプロットしたものである。まず、 $\xi = 0.1$ 、 $\sigma = 1$ と $\xi = 0.9$ 、 $\sigma = 0.75$ とを比較した場合、分布関数は累積確率95%前後で交差しており、信頼水準を95%以上にとればVaRにテイル・リスクは発生していない。次に、 $\xi = 0.1$ 、 $\sigma = 1$ と $\xi = 0.5$ 、 $\sigma = 0.75$ とを比較した場合、分布関数は累積確率97%前後で交差しており、信頼水準95%のVaRにテイル・リスクが発生している。さらに、 $\xi = 0.1$ 、 $\sigma = 1$ と $\xi = 0.3$ 、 $\sigma = 0.75$

図表12 尺度パラメータとテイル・リスクの関係



図表13 裾指数とテイル・リスクの関係



とを比較した場合、分布関数は累積確率99%以上で交差しており、信頼水準99%のVaRにテイル・リスクが発生している。したがって、裾指数の違いが小さいほどVaRのテイル・リスクが発生しやすくなることがわかる。

一方、信頼水準 $(1-\alpha)$ の期待ショートフォールにテイル・リスクが生ずる場合は、裾の厚い方の期待ショートフォールが他方のそれを下回る場合である。

$$ES_{\alpha}(Z_1) > ES_{\alpha}(Z_2) . \quad (27)$$

簡単化のために、 $\theta_1 = \theta_2$ 、 $p_1 = p_2 = p$ として(22)式の結果を代入して解くと以下を得る。

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} > \bar{\kappa}_{ES} . \quad \text{ただし、} \bar{\kappa}_{ES} = \frac{1-\xi_1}{1-\xi_2} \left(\frac{1+((p/\alpha)^{\xi_2}-1)\xi_2}{1+((p/\alpha)^{\xi_1}-1)\xi_1} \right) . \quad (28)$$

図表14は、超過値の割合を $p=0.1, 0.05$ として、(28)式の $\bar{\kappa}_{ES}$ の値を信頼水準95%、99%の期待ショートフォールで計算したものである。ここから、期待ショートフォールにテイル・リスクが発生する条件は、VaRにテイル・リスクが発生する条件よりも厳しいことがわかる。つまり、期待ショートフォールではVaRに比べてテイル・リスクが発生し難いという指摘(山井・吉羽[2001c])を改めて確認することができる。

以上の結果から、一般化パレート分布のもとで単変量の損失額分布を比較する場合は、パラメータの値の組み合わせによっては、VaR、期待ショートフォールともに裾における大幅な損失の発生確率を見誤る可能性があることがわかった。

図表14 期待ショートフォールのテイル・リスクが発生する σ_1/σ_2 の閾値 $\bar{\kappa}_{ES}$
(超過値の割合： $p=0.1$ 、信頼水準：95%)

		ξ_1	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
ξ_2	0.10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.20	1.142	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.30	1.325	1.161	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.40	1.571	1.376	1.185	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.50	1.916	1.678	1.446	1.220	-	-	-	-	-	-	-
	0.60	2.436	2.133	1.838	1.551	1.271	-	-	-	-	-	-
	0.70	3.305	2.894	2.494	2.104	1.725	1.357	-	-	-	-	-
	0.80	5.047	4.420	3.808	3.213	2.634	2.072	1.527	-	-	-	-
	0.90	10.281	9.004	7.758	6.545	5.366	4.221	3.111	2.037	-	-	-
	1.00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

図表14 期待ショートフォールのテイル・リスクが発生する σ_1/σ_2 の閾値 $\bar{\kappa}_{ES}$ (続き)

(超過値の割合 : $p = 0.1$ 、信頼水準 : 99%)

		ξ_1	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
ξ_2	0.10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.20	1.230	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.30	1.547	1.257	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.40	1.998	1.624	1.292	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.50	2.670	2.171	1.727	1.337	-	-	-	-	-	-	-
	0.60	3.741	3.042	2.419	1.873	1.401	-	-	-	-	-	-
	0.70	5.626	4.574	3.638	2.817	2.107	1.504	-	-	-	-	-
	0.80	9.575	7.784	6.191	4.793	3.586	2.559	1.702	-	-	-	-
	0.90	21.852	17.765	14.129	10.940	8.184	5.841	3.884	2.282	-	-	-
	1.00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

(超過値の割合 : $p = 0.05$ 、信頼水準 : 99%)

		ξ_1	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
ξ_2	0.10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.20	1.187	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.30	1.437	1.210	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.40	1.780	1.499	1.239	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.50	2.276	1.917	1.584	1.278	-	-	-	-	-	-	-
	0.60	3.040	2.560	2.116	1.708	1.336	-	-	-	-	-	-
	0.70	4.347	3.660	3.025	2.442	1.910	1.430	-	-	-	-	-
	0.80	7.013	5.906	4.881	3.940	3.082	2.307	1.613	-	-	-	-
	0.90	15.136	12.747	10.535	8.503	6.651	4.978	3.482	2.158	-	-	-
	1.00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

備考 : σ_1/σ_2 がこの値より大きい場合にVaRにテイル・リスクが発生。なお、 $\xi=1$ のときは期待値が発散するため期待ショートフォールを計算できない。

5 . 2変量極値分布のもとでのVaRと期待ショートフォールのテイル・リスク

本節では、2変量極値分布のもとでVaRと期待ショートフォールのテイル・リスクを調べる。具体的には、2つの証券からなるポートフォリオのリスクを測る際に、VaRと期待ショートフォールが2証券の損失額の依存関係を的確に捉えられるかを検討する。

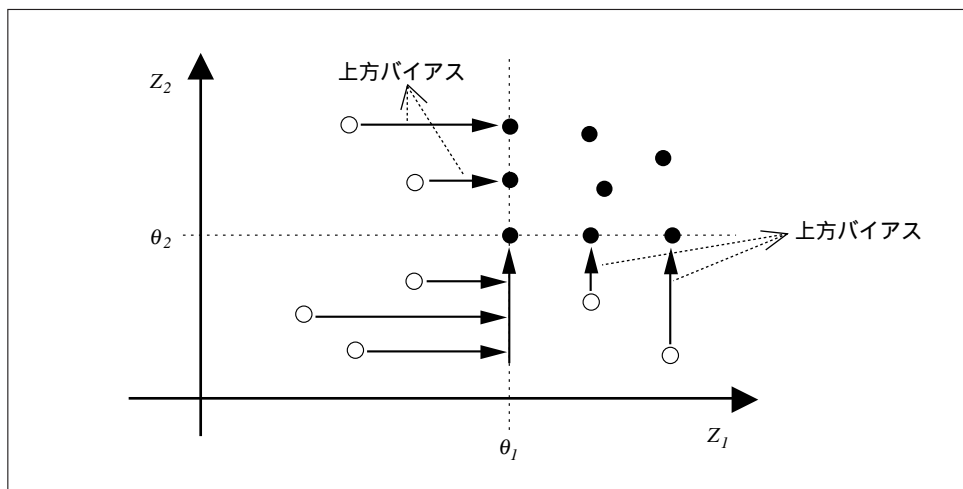
リスク指標がリスク・ファクター間の相関の上昇を的確に織り込めないと、それは深刻なテイル・リスクの問題につながる可能性がある。2節(2)で挙げた与信ポートフォリオの例では、デフォルト相関の上昇による大幅な損失の発生をVaRが十分に捉えられないことを示した。

ここでは、これと同じ問題が、3節(3)で紹介した多変量極値分布のもとでも発生するかを調べる。つまり、損益額の超過値が一般化パレート分布に従い、コンピュータが極値コンピュータなどで表される場合、ポートフォリオの損益額の依存関係の変化をVaRと期待ショートフォールが適切に捉えられるかどうかを調べる。

ただし、3節(3)の多変量の超過値に関する分析をそのままポートフォリオのリスク量算出に用いることはできない。単変量の場合は、超過値の分位点は元の確率変数の分位点に一致するため、超過値分布のみから直接VaRを求めることができた。しかし、2変量の場合は、「超過値の和」は必ずしも「和の超過値」に一致しないため、超過値分布のみだけではVaRを求めることはできない^{20, 21}。

これを簡単な例でみてみよう(図表15を参照)。 (U_1, U_2) をそれぞれ独立な $[0, 1]$ 上の一様乱数であるとする。この (U_1, U_2) の超過値を、閾値を $(\theta_1, \theta_2) = (0.9, 0.9)$ として $(m_{0.9}(U_1), m_{0.9}(U_2)) = (\max(U_1, 0.9), \max(U_2, 0.9))$ とする。このとき、畳込みの定理を用いて $U_1 + U_2$ 、 $m_{\theta_1}(U_1) + m_{\theta_2}(U_2)$ の95%分位点を計算すると、前者は1.68、後者は1.88となる²²。

図表15 和の分位点として超過値のみを利用した場合の上方バイアス



20 この問題は、多変量の最大値を多変量の一般化極値分布 (generalized extreme value distribution) でモデル化した場合にも生じる。

なお、Hauksson *et al.* [2000]、Bouyé [2001] は、多変量の一般化極値分布を用いてポートフォリオのVaRあるいは期待ショートフォールを算出する方法を提唱しているが、ここで指摘した問題点に対する具体的な対応方法に関する記述はない。

21 超過値の和の分位点と元の確率変数の和の分位点が一致する例外的なケースとして、確率変数が完全依存している場合がある。

22 一様分布に従う確率変数の和の分位点は以下のように求められる。まず、 $G(x) = \Pr[U_1 + U_2 \leq x]$ とすると、畳込みの定理より、 $G(x) = \int_0^1 \Pr[U_1 \leq x - u] du$ となる。明らかに $U_1 + U_2$ の95%分位点は1以上であるため、 $x \geq 1$ として考える。このとき上式を計算すると、 $G(x) = \int_0^1 \Pr[U_1 \leq x - u] du = -\frac{(x-2)^2}{2} + 1$ となる。95%分位点は $G(x) = 0.95$ を満たす x であり、 $x \approx 1.6838$ となる。

一方、超過値の和の分位点は次のように求められる。 $H(x) = \Pr[\max(U_1, 0.9) + \max(U_2, 0.9) \leq x]$ とする。上記と同様に畳込みの定理を用いて、

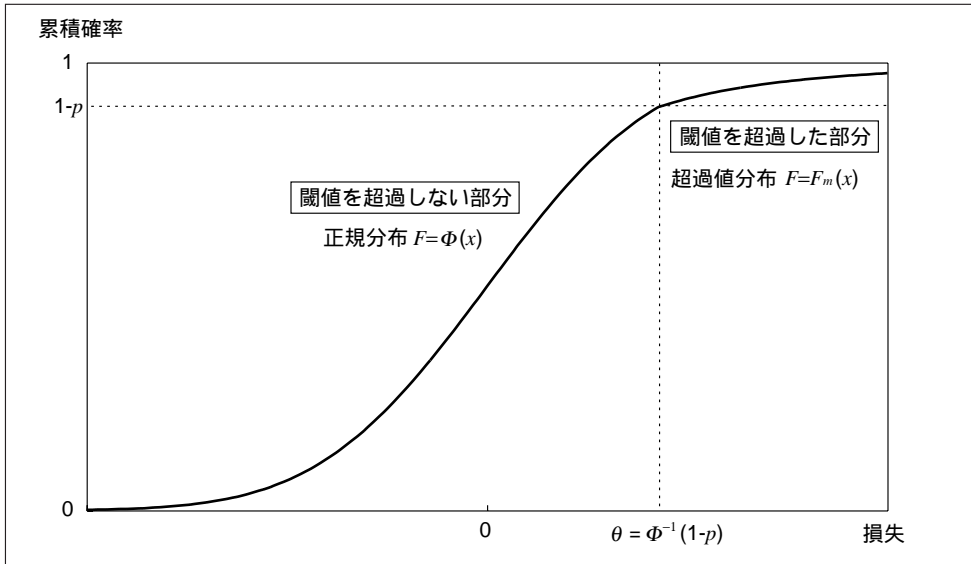
$$H(x) = \int_0^1 \Pr[\max(U_1, 0.9) \leq x - u] \cdot \Pr[\max(U_2, 0.9) = u] du = \begin{cases} x^2/2 - 0.81 & (x \leq 1.9) \\ -\frac{(x-2)^2}{2} + 1 & (x > 1.9) \end{cases}$$

となる。95%分位点は $H(x) = 0.95$ を満たす x であり、 $x \approx 1.8761$ となる。

つまり、確率変数の和の分位点を正確に計算するためには、ある閾値を超えた部分の分布をモデル化するだけでなく、閾値以下の部分の分布も考える必要がある。

本稿では、損失額の周辺分布が、閾値を超えた部分は(4)式の超過値分布に、超えない部分は標準正規分布にそれぞれ従うと仮定する。具体的には、超過値の割合を p として、周辺分布の分布関数は以下で表されるとする(図表16)。

図表16 本稿の分析で仮定する周辺分布の分布関数



$$F(x) = \begin{cases} \Phi(x) & (x < \Phi^{-1}(1-p)), \\ 1 - p + \xi \cdot \frac{x - \Phi^{-1}(1-p)}{\sigma} & (x \geq \Phi^{-1}(1-p)). \end{cases} \quad (29)$$

Φ : 標準正規分布の分布関数

Φ^{-1} : 標準正規分布の分布関数の逆関数

閾値を超えない部分の周辺分布としては、データから生成された経験分布、あるいは t -分布などとするとも考えられるが²³、ここでは閾値を超えない部分は通常時の市場価格変動に相当すると考え、正規分布を仮定する。

23 分布全体が(3)式で表される一般化パレート分布に従うと仮定することも考えられる。このときは、正則変動する分布関数に関する畳込みの定理を用いて、完全依存の場合と独立の場合を比較するという形で、VaRが依存関係の変化を捉えられるかどうかを解析的に分析することができる。この詳細は補論2.を参照。

また、筆者は、損失額全体が(3)式で表される一般化パレート分布に従うと仮定して、本節(1)および(2)と同様のシミュレーションを行った。この結果、同じコピュラの範囲内では、信頼水準を95%以上にとればVaRにテイル・リスクはない(本節(1)を参照)。ガンベル、正規、フランクのコピュラ間の比較では、信頼水準95%前後のVaRでテイル・リスクが発生する可能性がある(本節(2)を参照)、という周辺分布を(29)式とした場合と同様の結論を得た。

本稿では、(30)式の周辺分布を前提として、以下の2つのケースで、VaRと期待ショートフォールが依存関係の変化を的確に捉えられるか否かをシミュレーション²⁴を通じて調べる。

最初のケースでは、依存関係に特定のコピュラ（ガンベル、正規、フランク）を仮定したうえで、各コピュラの依存パラメータの水準の相違に伴うリスク指標の挙動を観察する。もう1つのケースでは、依存関係の相違をコピュラの種類の相違で表現したうえで、リスク指標の振舞いを検討する。

なお、本節では、確率変数の依存関係がVaRとテイル・リスクの性質に与える影響をみるため、2つの確率変数が同じ周辺分布に従うものと仮定して議論を行う。また、ここでの分析は裾指数が $0 < \xi < 1$ の場合に限定して分析する²⁵。

(1) 特定のコピュラの依存パラメータの水準が異なるケース

2つの確率変数の周辺分布が(30)式で表されるとする。依存関係がガンベル、正規、フランクのいずれかのコピュラで表されるとし、依存パラメータの水準を変えたときに、分布の裾の変化をVaRおよび期待ショートフォールが的確に捉えているかを調べる。

まず、図表17は、周辺分布のパラメータを $\xi = 0.5$ 、 $\sigma = 1$ 、 $p = 0.1$ に固定したうえで、ガンベル・コピュラの依存パラメータ α が1.0、1.1、1.5、2.0、 ∞ であるケース²⁶で、各100万回のシミュレーションを行って2つの確率変数の和の分布をプロットしたものである。

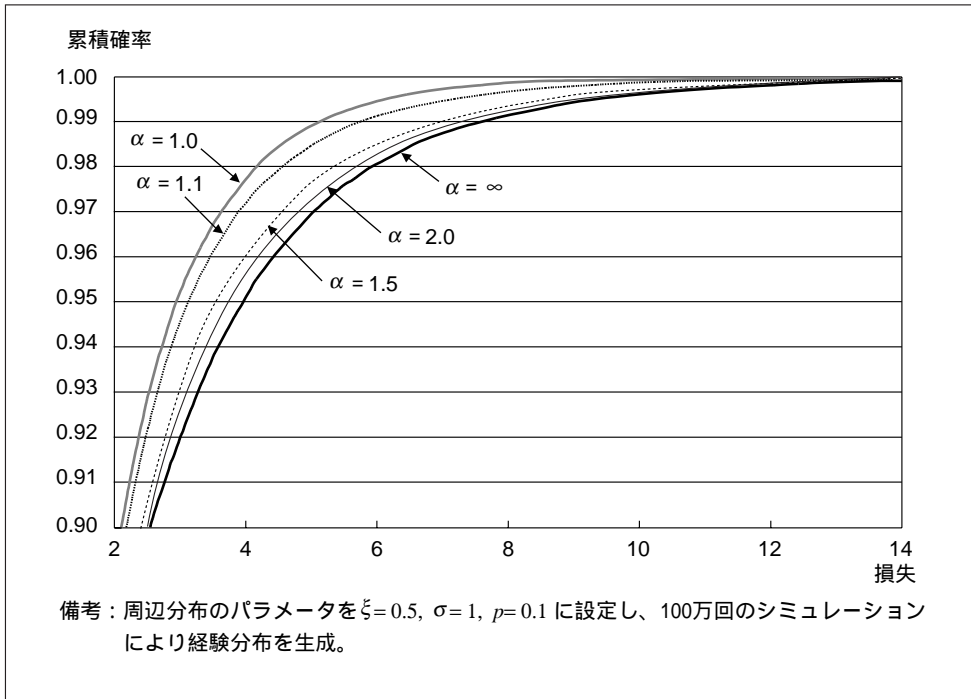
これをみると、依存度合いが増加（依存パラメータ α が増加）するに従い、分布の裾が厚くなっていることがわかる。また、これらの分布は互いに交差していない。これは、ポートフォリオ分散によりリスクが低下するというポートフォリオ分散効果が働いていることを示している。さらに、これらのポートフォリオが1次確率優越の意味で比較可能であることから、VaRにテイル・リスクは存在しないことがわかる。

24 本稿のシミュレーションでは、一様乱数の生成にメルセンヌ・ツイスターを、一様乱数の正規乱数への変換はBox-Müller法を用いた。ガンベル・コピュラのシミュレーションはFrees and Valdez [1998] に従い、正規コピュラのそれは相関係数 ρ の2変量標準正規乱数を発生させて行った。フランク・コピュラのそれはJoe [1997] pp.146-147に従った。

25 $\xi > 1$ の一般化バレート分布は平均値が無限大に発散するという極めて裾の厚い分布である（Embrechts, Klüppelberg, and Mikosch [1997], Theorem 3.4.13 (a)）。 $\xi > 1$ のケースは理論的には興味深いのが、実際の金融データでは平均が発散する性質を持つものは極めて稀であると考えられるため、ここでは考察の対象から外す。詳しくは補論2 .の脚注42を参照。

26 ガンベル・コピュラでは、 $\chi = 2 - 2^{1/\alpha}$ となることから、これに対応する χ の値は、 $\chi = 0, 0.12, 0.41, 0.59, 1$ となる。

図表17 ガンベル・コピュラのもとでの和の分布関数



次に、図表18は、周辺分布の3つのパラメータ(ξ, σ, p)のうち2つを $\sigma = 1, p = 0.1$ に固定し、さらにもう1つを $\xi = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ としたうえで、各コピュラの依存パラメータ(ガンベル: α 、正規: ρ 、フランク: δ)のさまざまな水準で、各100万回のシミュレーションによりVaRと期待ショートフォールを計算した結果である。

図表18からは、フランク・コピュラで依存関係が非常に強い場合を除き²⁷、依存パラメータの増加に伴ってVaR、期待ショートフォールともに増加しており、これらのリスク指標にはテイル・リスクが発生していないことがわかる。

以上から、損失額の依存構造が特定のコピュラで表現されることがわかっている場合は、ごく一部の例外を除き、VaRと期待ショートフォールは依存度合いの相違に伴う裾の相違を的確に捉えることができると考えられる。このため、ここで分析した条件のもとでは2節(2)で挙げた与信ポートフォリオの例のような事態は発生せず、VaRあるいは期待ショートフォールを用いて投資判断を行っても依存関係の相違に伴うリスク・プロファイルの相違を見誤ることはないことになる。

27 図表18をみると、例えば信頼水準95%のVaRなどで、 $\delta = \infty$ (完全依存)のときのVaRが $\delta = 9$ のときのVaRより小さいといった直観に反する現象がみられる。これは、フランク・コピュラが極値コピュラでないことから裾の依存関係を十分には表現できないため、 δ を十分大きくしたときに、リスク指標の計算で裾の依存関係がうまく織り込めていないためであると考えられる。

図表18 各コピュラのタイプのもとでの依存パラメータの変化に対するVaRと期待ショートフォール (ES) の変化

ガンベル $\xi=0.1$

α	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
1.0	2.971	5.165	8.748	4.357	6.715	10.670
1.1	3.150	5.777	10.724	4.852	7.915	13.702
1.2	3.299	6.252	11.822	5.189	8.623	14.974
1.3	3.412	6.563	12.429	5.425	9.071	15.676
1.4	3.505	6.798	12.861	5.597	9.374	16.117
1.5	3.577	6.980	13.111	5.725	9.586	16.410
1.6	3.634	7.087	13.295	5.822	9.740	16.615
1.7	3.682	7.178	13.417	5.898	9.857	16.767
1.8	3.718	7.247	13.485	5.958	9.948	16.886
1.9	3.748	7.307	13.547	6.007	10.020	16.983
2.0	3.772	7.357	13.602	6.048	10.078	17.060
5.0	3.957	7.672	13.966	6.311	10.417	17.561
10.0	3.981	7.694	14.033	6.342	10.456	17.595
	3.993	7.703	14.219	6.352	10.502	17.613

正規 $\xi=0.1$

ρ	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
0.0	2.971	5.165	8.748	4.357	6.715	10.670
0.1	3.124	5.435	9.275	4.585	7.086	11.257
0.2	3.250	5.687	9.747	4.786	7.423	11.842
0.3	3.366	5.932	10.262	4.986	7.770	12.473
0.4	3.476	6.180	10.798	5.183	8.129	13.159
0.5	3.576	6.424	11.324	5.380	8.505	13.891
0.6	3.671	6.671	11.939	5.577	8.898	14.663
0.7	3.761	6.923	12.507	5.775	9.309	15.464
0.8	3.842	7.198	13.132	5.978	9.736	16.288
0.9	3.921	7.501	13.727	6.189	10.172	17.149
1.0	3.993	7.703	14.219	6.352	10.502	17.613

フランク $\xi=0.1$

δ	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
0	2.971	5.165	8.748	4.357	6.715	10.670
1	3.171	5.438	9.071	4.600	7.017	11.025
2	3.348	5.687	9.392	4.817	7.290	11.344
3	3.492	5.901	9.656	5.000	7.524	11.618
4	3.607	6.074	9.875	5.153	7.720	11.852
5	3.699	6.226	10.056	5.278	7.884	12.049
6	3.770	6.349	10.217	5.380	8.022	12.218
7	3.828	6.451	10.362	5.466	8.141	12.363
8	3.874	6.539	10.484	5.538	8.245	12.489
9	3.914	6.614	10.599	5.600	8.337	12.601
∞	3.993	7.703	14.219	6.352	10.502	17.613

備考：周辺分布のパラメータを $\sigma=1, p=0.1$ に設定し、100万回のシミュレーションによりそれぞれの場合のVaRと期待ショートフォールを算出。コピュラのタイプと裾指数の値は表の左上を参照。

図表18 (続き)

ガンベル $\xi=0.25$

α	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
1.0	3.125	6.065	12.465	5.083	8.858	17.463
1.1	3.302	6.694	14.824	5.595	10.170	21.106
1.2	3.437	7.162	16.085	5.949	10.994	23.018
1.3	3.543	7.501	16.986	6.200	11.538	24.174
1.4	3.628	7.745	17.557	6.384	11.920	24.944
1.5	3.696	7.920	18.004	6.521	12.195	25.479
1.6	3.750	8.049	18.214	6.626	12.398	25.863
1.7	3.792	8.152	18.429	6.708	12.554	26.154
1.8	3.827	8.231	18.594	6.773	12.675	26.383
1.9	3.852	8.284	18.652	6.827	12.773	26.568
2.0	3.874	8.339	18.732	6.871	12.852	26.718
5.0	4.036	8.699	19.286	7.159	13.330	27.802
10.0	4.059	8.726	19.414	7.194	13.388	27.911
∞	4.071	8.735	19.778	7.206	13.454	27.837

正規 $\xi=0.25$

ρ	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
0.0	3.125	6.065	12.465	5.083	8.858	17.463
0.1	3.288	6.354	13.068	5.330	9.284	18.200
0.2	3.412	6.618	13.669	5.542	9.657	18.876
0.3	3.529	6.886	14.259	5.753	10.051	19.682
0.4	3.635	7.152	14.947	5.964	10.468	20.593
0.5	3.730	7.412	15.689	6.176	10.914	21.629
0.6	3.819	7.667	16.531	6.388	11.395	22.804
0.7	3.900	7.938	17.371	6.602	11.913	24.111
0.8	3.967	8.218	18.229	6.822	12.469	25.539
0.9	4.027	8.541	19.083	7.052	13.058	27.123
1.0	4.071	8.735	19.778	7.206	13.454	27.837

フランク $\xi=0.25$

δ	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
0	3.125	6.065	12.465	5.083	8.858	17.463
1	3.328	6.345	12.869	5.335	9.180	17.847
2	3.506	6.608	13.170	5.561	9.478	18.210
3	3.654	6.847	13.453	5.755	9.739	18.531
4	3.770	7.034	13.740	5.916	9.960	18.803
5	3.863	7.202	14.000	6.050	10.145	19.037
6	3.935	7.340	14.168	6.159	10.302	19.237
7	3.991	7.451	14.308	6.250	10.437	19.409
8	4.035	7.554	14.468	6.328	10.556	19.566
9	4.071	7.641	14.598	6.394	10.662	19.705
∞	4.071	8.735	19.778	7.206	13.454	27.837

備考：周辺分布のパラメータを $\sigma=1, p=0.1$ に設定し、100万回のシミュレーションによりそれぞれの場合のVaRと期待ショートフォールを算出。コピュラのタイプと裾指数の値は表の左上を参照。

図表18 (続き)

ガンベル $\xi=0.5$

α	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
1.0	3.442	8.441	27.131	7.419	17.092	53.729
1.1	3.595	9.024	30.316	7.929	18.507	57.999
1.2	3.715	9.501	31.524	8.310	19.550	61.639
1.3	3.800	9.850	32.876	8.585	20.293	64.136
1.4	3.873	10.078	34.013	8.789	20.839	65.995
1.5	3.927	10.268	34.691	8.942	21.249	67.384
1.6	3.972	10.398	35.156	9.060	21.563	68.453
1.7	4.005	10.501	35.501	9.153	21.811	69.273
1.8	4.033	10.576	35.800	9.229	22.007	69.936
1.9	4.051	10.632	35.911	9.290	22.168	70.512
2.0	4.068	10.682	36.003	9.341	22.301	70.991
5.0	4.186	11.084	36.846	9.701	23.260	75.714
10.0	4.203	11.106	37.187	9.759	23.447	76.842
∞	4.213	11.115	38.301	9.755	23.448	75.100

正規 $\xi=0.5$

ρ	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
0.0	3.442	8.441	27.131	7.419	17.092	53.729
0.1	3.615	8.803	28.052	7.728	17.747	55.729
0.2	3.739	9.077	28.675	7.968	18.231	57.090
0.3	3.851	9.379	29.438	8.209	18.763	58.693
0.4	3.949	9.679	30.552	8.451	19.337	60.525
0.5	4.037	9.943	31.695	8.693	19.947	62.477
0.6	4.106	10.216	32.864	8.934	20.614	64.683
0.7	4.167	10.481	34.683	9.176	21.358	67.279
0.8	4.207	10.753	36.224	9.425	22.204	70.588
0.9	4.230	11.062	37.467	9.691	23.159	74.816
1.0	4.213	11.115	38.301	9.755	23.448	75.100

フランク $\xi=0.5$

δ	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
0	3.442	8.441	27.131	7.419	17.092	53.729
1	3.643	8.751	27.474	7.686	17.449	54.247
2	3.821	9.042	27.927	7.930	17.793	54.692
3	3.973	9.299	28.258	8.141	18.105	55.133
4	4.093	9.521	28.649	8.318	18.375	55.491
5	4.185	9.691	29.054	8.465	18.601	55.791
6	4.255	9.861	29.387	8.587	18.792	56.074
7	4.308	10.004	29.730	8.688	18.955	56.312
8	4.351	10.110	29.853	8.774	19.101	56.522
9	4.382	10.212	29.870	8.847	19.233	56.723
∞	4.213	11.115	38.301	9.755	23.448	75.100

備考：周辺分布のパラメータを $\sigma=1, p=0.1$ に設定し、100万回のシミュレーションによりそれぞれの場合のVaRと期待ショートフォールを算出。コンピュータのタイプと裾指数の値は表の左上を参照。

図表18 (続き)

ガンベル $\xi=0.75$

α	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
1.0	3.847	12.654	68.724	14.106	45.232	232.931
1.1	3.961	13.076	73.107	14.193	44.817	220.165
1.2	4.054	13.468	74.485	14.574	46.065	226.977
1.3	4.117	13.752	74.705	14.878	47.107	232.902
1.4	4.167	13.980	75.957	15.110	47.934	237.781
1.5	4.209	14.130	78.154	15.288	48.578	241.740
1.6	4.243	14.277	77.773	15.427	49.087	244.924
1.7	4.263	14.314	78.758	15.540	49.504	247.554
1.8	4.278	14.362	79.165	15.633	49.861	249.744
1.9	4.291	14.373	79.241	15.713	50.164	251.761
2.0	4.302	14.380	78.839	15.781	50.431	253.590
5.0	4.355	14.716	78.988	16.542	53.710	282.245
10.0	4.364	14.714	80.040	16.844	55.155	295.725
∞	4.373	14.720	83.395	16.517	53.579	275.707

正規 $\xi=0.75$

ρ	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
0.0	3.847	12.654	68.724	14.106	45.232	232.931
0.1	4.026	13.186	70.836	14.668	47.050	243.941
0.2	4.145	13.434	71.028	15.092	48.451	254.063
0.3	4.254	13.751	72.412	15.531	49.982	265.049
0.4	4.344	14.094	74.657	15.921	51.324	273.791
0.5	4.411	14.387	77.344	16.217	52.268	278.229
0.6	4.468	14.556	78.944	16.429	52.907	279.463
0.7	4.493	14.736	81.197	16.610	53.526	280.122
0.8	4.500	14.931	83.456	16.802	54.359	283.397
0.9	4.468	15.092	84.647	17.040	55.548	291.229
1.0	4.373	14.720	83.395	16.517	53.579	275.707

フランク $\xi=0.75$

δ	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
0	3.847	12.654	68.724	14.106	45.232	232.931
1	4.051	12.988	68.816	14.397	45.680	234.046
2	4.229	13.318	69.598	14.665	46.116	234.846
3	4.376	13.620	70.071	14.897	46.507	235.493
4	4.494	13.879	70.484	15.091	46.843	235.963
5	4.580	14.069	70.999	15.251	47.117	236.298
6	4.650	14.258	71.637	15.383	47.344	236.603
7	4.703	14.398	73.037	15.493	47.537	236.907
8	4.739	14.515	72.559	15.587	47.708	237.163
9	4.767	14.634	72.669	15.669	47.873	237.456
∞	4.373	14.720	83.395	16.517	53.579	275.707

備考：周辺分布のパラメータを $\sigma=1, p=0.1$ に設定し、100万回のシミュレーションによりそれぞれの場合のVaRと期待ショートフォールを算出。コンピュータのタイプと裾指数の値は表の左上を参照。

(2) 異なる依存関係を異なるコピュラで表現するケース

本節(1)では、特定のコピュラを仮定したうえで依存パラメータの水準を変えることで異なる依存度合いを表現した。しかし、1種類のコピュラだけでは、漸近的に独立であるポートフォリオと漸近的な依存関係を持つポートフォリオの違いを表現することはできない。漸近的な依存関係の違いは、異なるタイプのコピュラを用いて分布を導出し、これを比較する必要がある。

ここでは、(29)式で表される同一の周辺分布に従う2つの確率変数が、ガンベル、正規、フランクの3種類のコピュラで表現される依存構造を持つという3つの場合を仮定し、おのおのVaRと期待ショートフォールを計算して比較する。

各コピュラのパラメータは、スピアマン(Spearman)のロー(ρ_s)が一致するように設定した²⁸。ここで、スピアマンのローとは、2変量確率変数の依存関係を表す指標で、いわゆる「順位相関」の一種である。具体的には、確率変数を周辺分布関数で変換した値の線形相関として、次式で定義される。

$$\rho_s(Z_1, Z_2) \equiv \frac{\text{Cov}(F_{Z_1}(Z_1), F_{Z_2}(Z_2))}{\sqrt{V[F_{Z_1}(Z_1)]V[F_{Z_2}(Z_2)]}} \quad (30)$$

このスピアマンのローは、分布の裾における依存関係のみを表す χ 、 $\bar{\chi}$ とは異なり、分布全体の依存関係を1つの数値として表現するものである²⁹。図表19の上図は、 $\xi = 0.5$, $\sigma = 0.1$, $\rho_s = 0.5$, $p = 0.1$ として、ガンベル、正規、フランクの各コピュラのもとで、各100万回のシミュレーションにより生成した和の分布のうち累積確率99.5%以上の部分をプロットしたものである。

まず、相対的に漸近的な依存関係が強い($\chi > 0$, $\bar{\chi} = 1$)ガンベル・コピュラの裾が最も厚く、相対的に依存度合いの小さい($\chi > 0$, $\bar{\chi} = 0$)フランク・コピュラの裾が最も薄い³⁰。つまり、各コピュラを用いてリスクを計測すると、フランク・コピュラのリスクが最も小さく、ガンベル・コピュラのリスクが最も大きいという順序付けになる。仮に、VaRあるいは期待ショートフォールでリスクを計測した際に、これとは異なる順序付けがなされるとすると、リスク指標にテイル・リスクが発生していることになる。図表19の下図は、上記の経験分布のうち累積確率95~98%の部分をプロットしたものである。これから、信頼水準95%のVaRは、ガンベル・コピュラ 正規コピュラ フランク・コピュラの順に大きくなっており³¹、VaRにテイル・リスクが発生していることがわかる。

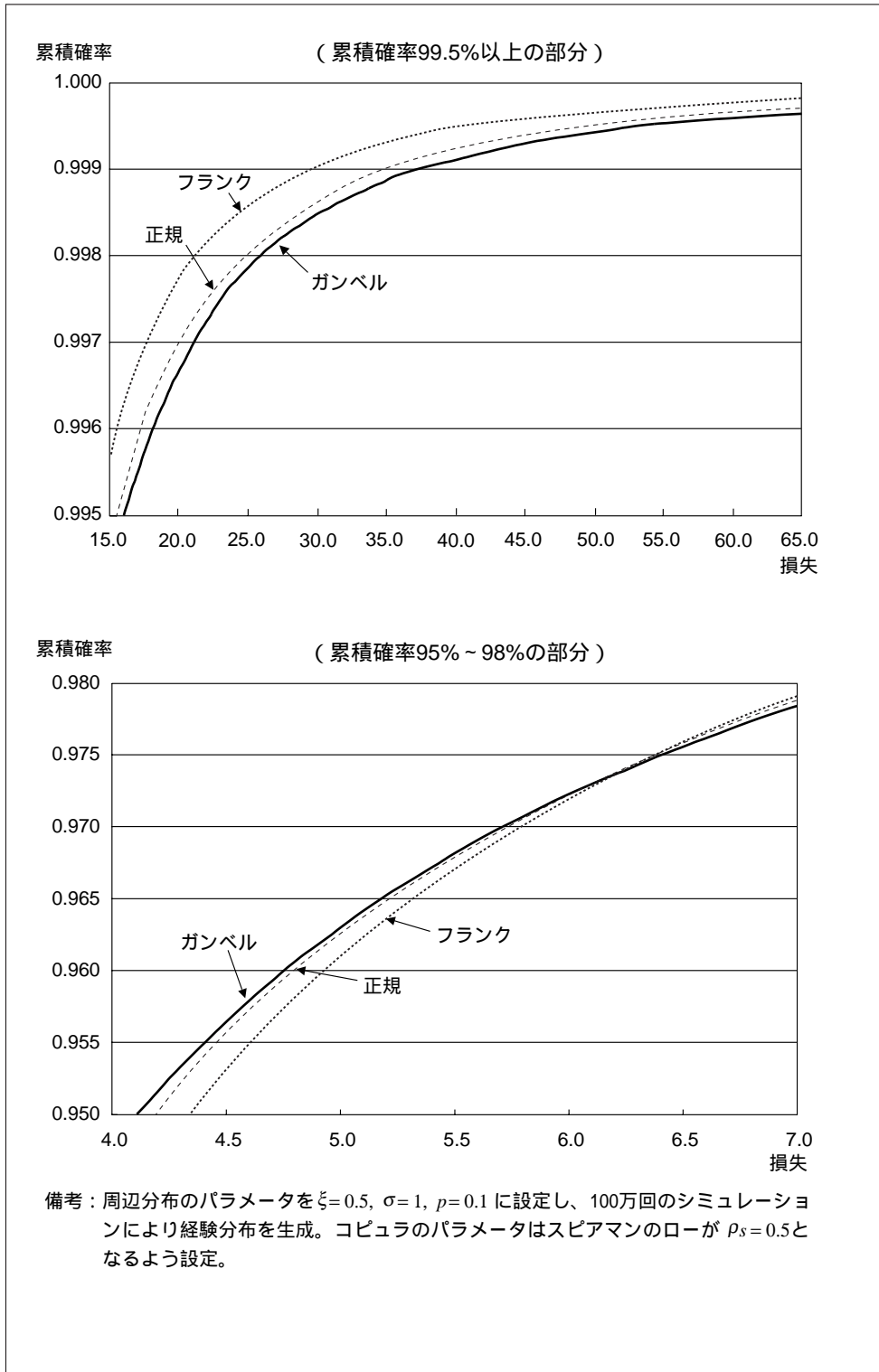
28 各コピュラのパラメータは、Joe [1997] が計算した値(p. 147, Table 5.2)を用いた。

29 スピアマンのローと周辺分布から同時分布が一意に定まるわけではないため、スピアマンのローは依存関係を完全に表すものではない。特に、 χ や $\bar{\chi}$ が表現している漸近的な依存関係は表現できない。しかし、分布全体の依存関係を表現する単一の指標としては比較的優れた指標であるといわれている(Embrechts, McNeil, and Straumann [2002] を参照)。

30 各コピュラの χ と $\bar{\chi}$ は図表9を参照。

31 ここでのVaR算出の対象は原資産のみからなるポートフォリオである。これに対し、ポートフォリオに先物やオプション等を含む場合は、依存構造の違いによる影響はさらに大きくなり、各コピュラで求めたVaRの差異はより広がると考えられる。

図表19 ガンベル、正規、フランク・コピュラのもとでの経験分布



図表20は、図表19の設定のうち、周辺分布の裾指数を $\xi = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ 、スピアマンのローを $\rho_s = 0.2, 0.5, 0.8$ とし、各コピュラのもとで各100万回のシミュレーションによりVaRと期待ショートフォールを算出した結果である。まず、スピアマンのローが同じであっても、コピュラの種類によって、リスク指標の値が大きく変わることがわかる。これは、漸近的依存関係の有無や関係の強さが、リスクの水準に影響を与えることを意味している。

また、裾が厚く、スピアマンのローが大きい場合には、95%信頼水準のVaRにテイル・リスクが発生していることがわかる。例えば、 $\xi = 0.5$ 、 $\rho_s = 0.8$ の信頼水準95%のVaRと比較すると、ガンベル 正規 フランクのコピュラの順に大きくなっている。つまり、裾が薄く大幅な損失が発生する可能性の最も低いフランク・コピュラのリスク（VaR）が最も大きいと判断されることになる。

さらに、図表20からは、信頼水準95%のVaRでは各変量の周辺分布の裾の厚さが $\xi = 0.25$ 以上でテイル・リスクが発生しているが、信頼水準99%および99.9%のVaRでは $\xi = 0.75$ と分布の裾が極めて厚い場合を除けばテイル・リスクは発生していないことがわかる。

また、期待ショートフォールでは、いずれの信頼水準でも、 $\xi = 0.75$ と分布の裾が極めて厚い場合を除けばテイル・リスクは発生しない。この結果から、期待ショートフォールは、VaRに比べて、より幅広い条件でテイル・リスクのないリスク指標であるという結論（山井・吉羽 [2001c]）を確認できる。

(3) 周辺分布が異なる場合

本節(1)および(2)の分析では、依存構造がリスク指標の性質に与える影響をみるため、各リスク・ファクターの周辺分布が同一であると仮定した。しかし、実際の金融データでは、リスク・ファクターごとに周辺分布が異なるのが一般的である。ここでは、本節(1)および(2)で得た結論が、周辺分布が異なる場合にも成り立つかどうかを検討する。

独立の場合と完全依存の場合の比較

まず、本節(1)のように、依存関係の相違が特定のコピュラのパラメータの水準の相違として表される場合に、VaRにテイル・リスクが発生するか否かを調べる。ここでは、いずれのコピュラも完全依存の場合と独立の場合を包含していることに着目し、完全依存の場合のVaRと独立の場合のVaRを算出して、前者が後者を下回ることがあるか否かを調べる。仮にそうしたことがあるとすると、VaRは依存構造の相違を見誤っていることになる。

周辺分布のパラメータは（ $\xi_1 = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, \xi_2 = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1.00, 1.25, 1.5, \dots, 9.5, 9.75, 10$ ）のすべての（ $\xi_1, \xi_2, \sigma_1, \sigma_2$ ）の組み合わせをとり、各組み合わせで、各100万回のシミュレーションにより、独立の場合と完全依存の場合のVaR（信頼水準95%、99%）を算出した。なお、超過値の割合は $p = 0.1$ とした。

図表20 異なる漸近的依存構造を持つコピュラ（ガンベル、正規、フランク）のもとでのVaRと期待ショートフォール（ES）の比較

 $\xi=0.1$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
独立	2.971	5.165	8.748	4.357	6.715	10.670
完全依存	3.993	7.703	14.219	6.352	10.502	17.613

 $\rho_s=0.2$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	3.212	5.493	9.152	4.651	7.080	11.098
正規	3.261	5.709	9.784	4.804	7.454	11.897
ガンベル	3.245	6.080	11.426	5.069	8.381	14.566

 $\rho_s=0.5$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	3.547	5.982	9.770	5.073	7.617	11.728
正規	3.594	6.463	11.425	5.416	8.575	14.027
ガンベル	3.601	7.024	13.184	5.766	9.653	16.500

 $\rho_s=0.8$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	3.869	6.529	10.478	5.531	8.235	12.477
正規	3.851	7.236	13.207	6.005	9.792	16.399
ガンベル	3.858	7.526	13.836	6.185	10.261	17.312

 $\xi=0.25$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
独立	3.125	6.065	12.465	5.083	8.858	17.463
完全依存	4.071	8.735	19.778	7.206	13.454	27.837

 $\rho_s=0.2$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	3.369	6.403	12.914	5.387	9.248	17.927
正規	3.422	6.643	13.728	5.561	9.691	18.944
ガンベル	3.389	6.988	15.598	5.822	10.707	22.383

 $\rho_s=0.5$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	3.711	6.934	13.600	5.831	9.843	18.659
正規	3.747	7.455	15.861	6.214	10.998	21.830
ガンベル	3.720	7.979	18.086	6.566	12.284	25.647

 $\rho_s=0.8$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	4.031	7.544	14.456	6.320	10.544	19.551
正規	3.974	8.263	18.334	6.851	12.544	25.735
ガンベル	3.949	8.526	19.090	7.020	13.106	27.229

備考：周辺分布のパラメータを $\sigma=1$, $p=0.1$ に設定し、100万回のシミュレーションによりVaRと期待ショートフォールを算出。裾指数の値とスピアマンのローは表の左上を参照。

図表20 (続き)

$\xi=0.5$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
独立	3.442	8.441	27.131	7.419	17.092	53.729
完全依存	4.213	11.115	38.301	9.755	23.448	75.100

$\rho_s=0.2$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	3.684	8.812	27.657	7.742	17.527	54.353
正規	3.748	9.105	28.750	7.989	18.277	57.226
ガンベル	3.672	9.325	31.444	8.172	19.177	60.376

$\rho_s=0.5$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	4.031	9.407	28.422	8.224	18.232	55.300
正規	4.052	9.988	31.896	8.736	20.062	62.854
ガンベル	3.947	10.332	34.770	8.993	21.384	67.848

$\rho_s=0.8$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	4.347	10.100	29.790	8.766	19.087	56.502
正規	4.211	10.798	36.249	9.459	22.322	71.084
ガンベル	4.119	10.888	36.572	9.518	22.757	72.817

$\xi=0.75$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
独立	3.847	12.654	68.724	14.106	45.232	232.931
完全依存	4.373	14.720	83.395	16.517	53.579	275.707

$\rho_s=0.2$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	4.092	13.022	69.291	14.459	45.778	234.268
正規	4.157	13.465	71.011	15.131	48.589	255.050
ガンベル	4.028	13.288	73.602	14.429	45.581	224.180

$\rho_s=0.5$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	4.433	13.722	70.411	14.989	46.666	235.724
正規	4.424	14.411	77.312	16.260	52.397	278.633
ガンベル	4.222	14.188	79.041	15.348	48.795	243.099

$\rho_s=0.8$

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	4.737	14.512	72.461	15.578	47.691	237.134
正規	4.496	14.932	83.944	16.830	54.489	284.102
ガンベル	4.326	14.549	80.106	16.057	51.537	261.953

備考：周辺分布のパラメータを $\sigma=1, p=0.1$ に設定し、100万回のシミュレーションによりVaRと期待ショートフォールを算出。裾指数の値とスピアマンのローは表の左上を参照。

算出した結果（詳細は割愛）では、完全依存の場合のVaRが独立の場合のそれを下回ることにはなかった。したがって、本稿の分析に限って言えば、周辺分布が異なる場合、独立の場合と完全依存の場合とでは、VaRを用いてもリスクの相対的な順序付けを誤ることはない結論付けることができる。

漸近的依存構造の変化

次に、本節(2)のように、依存関係の相違がコピュラの相違として表される場合を考察する。

(2)では、2変量が同じ周辺分布に従う場合、裾指数が一定値以上であるとVaRと期待ショートフォールにテイル・リスクが発生することを示した。

ここでは、2変量の周辺分布のパラメータを異なる値とした場合を調べる。具体的には、周辺分布のパラメータとして ($\xi_1 = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, \xi_2 = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1.00, 1.25, 1.5, \dots, 9.5, 9.75, 10, \rho_s = 0.2, 0.5, 0.8$) のすべての ($\xi_1, \xi_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho_s$) の組み合わせをとり、各組み合わせで各100万回のシミュレーションをガンベル、正規、フランク各コピュラのもとで行い、それぞれの場合のVaRと期待ショートフォール（信頼水準95%、99%）を算出した。なお、超過値の割合は $p = 0.1$ とした。

この結果（詳細は割愛） 信頼水準95%のVaRでは、裾の厚さが $\xi = 0.25$ を下回っていてもVaRのテイル・リスクが発生する可能性があることがわかった。ここでは、シミュレーション結果の中から、裾の厚さが $\xi = 0.1$ でのテイル・リスクが発生した例を図表21として示している。このシミュレーションでは、 $\xi_1 = 0.1, \xi_2 = 0.1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \rho_s = 0.2, p = 0.1$ として、ガンベル、正規、フランクの各コピュラのもとで、(2)と同様に各100万回のシミュレーションによりVaRと期待ショートフォールを計算した。VaRが分布の裾におけるリスクを的確に捉えているならば、フランク 正規 ガンベルの順にリスクが大きくなっているはずである。しかし、信頼水準95%のVaRをみるとガンベル フランク 正規の順に大きくなっており、VaRにテイル・リスクが発生していることがわかる³²。

一方、信頼水準99%のVaRでは、周辺分布のパラメータを変えても、裾の厚さが $\xi = 0.75$ を下回る場合でVaRにテイル・リスクが発生するケースはなかった。したがって、ここでの分析を前提とする限りは、信頼水準99%のVaRにおいては、漸近的依存関係によらず、テイル・リスクは発生しないと推察される。

図表21 異なる漸近的依存構造を持つコピュラ（ガンベル、正規、フランク）のもとでのVaRと期待ショートフォール（ES）の比較（異なる周辺分布の例）

($\xi_1 = 0.1, \xi_2 = 0.1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \rho_s = 0.2, p = 0.1$)

	VaR (95%)	VaR (99%)	VaR (99.9%)	ES (95%)	ES (99%)	ES (99.9%)
フランク	3.8542	7.4521	13.7438	6.1475	10.1535	17.1047
正規	3.8806	7.7226	14.3812	6.3062	10.5660	17.7964
ガンベル	3.8569	8.1702	16.3774	6.6234	11.7285	21.3039

32 この結果は、1千万回のシミュレーションによっても確認した。

6 . 実証分析

4節と5節では、単変量および多変量極値分布のもとで、VaRと期待ショートフォールのテイル・リスクを検討した。ここから、以下の結論を得た。

単変量分布では、裾指数の異なる分布を比較した場合に、VaRと期待ショートフォールにテイル・リスクが発生する可能性がある。このテイル・リスクが発生する条件は、簡単な解析式で表すことができる。

リスク・ファクター間の依存関係の相違が特定のコンピュータのパラメータの相違として表される場合は、VaRと期待ショートフォールにテイル・リスクは発生しない。

周辺分布の裾が厚い場合、VaRと期待ショートフォールは、漸近的依存度合いの相違（コンピュータの相違）に伴うリスク・プロファイルの相違を的確に捉えられず、テイル・リスクが発生することがある。

そこで、本節では実際の金融データを用いた実証分析によって、VaRのテイル・リスクが顕著となる状況が実際に発生し得るか検討する。具体的には、次の諸点を考察する。

金融データの周辺分布に、VaRにテイル・リスクが発生するほどの裾の厚さの違いがあるか。

金融データの依存関係に、VaRと期待ショートフォールのテイル・リスクが発生するような性質があるか。

以下では、先進国およびエマージング諸国の対米ドル為替レートを用いて、具体的な分析を行う。

(1) データ

分析に用いたデータは、先進国（3カ国）およびエマージング諸国（18カ国）の対米ドル為替レート³³の日次対数変化率の8年間（1993年11月1日～2001年10月29日）のデータである^{34, 35}。

33 日本・円、独・マルク、英・ポンド、香港・ドル、インドネシア・ルピア、マレーシア・リンギット、フィリピン・ペソ、シンガポール・ドル、韓国・ウォン、台湾・新台幣ドル、タイ・バーツ、チェコ・コルナ、ハンガリー・フォリント、ポーランド・ズロチ、スロバキア・コルナ、ブラジル・リアル、チリ・ペソ、コロンビア・ペソ、メキシコ・ニュー・ペソ、ペルー・ヌエボ・ソル、ベネズエラ・ボリバル。

34 データはブルームバーグから取得した。

35 休日の為替レートは、休前日と同じとした。このため、休日の対数変化率はすべてゼロとなっている。なお、上記のパラメータ推計は超過値のみを対象に行っているため、この休日調整は推計結果にほとんど影響を与えていないと考えられる。

(2) 単変量における分析

まず、各国の為替レートの対数変化率に対して、単変量の一般化パレート分布の最尤推計を行った³⁶。具体的には、まず、全データ数に対する超過値数の割合が1%, 2%, ..., 10%となるように閾値を決め、パラメータ推計を行った。さらに、推計されたパラメータを用いて、95%および99%信頼水準のVaRと期待ショートフォールを算出した。

図表22にこの推計結果を示した。ここから、リスク指標のテイル・リスクの観点から特徴的な点を挙げると以下のとおりである。

まず、裾指数は、一般的に、エマージング諸国（特にアジアと南米）の方が先進国よりも大きいことがわかる。つまり、エマージング諸国の為替レート変動の分布の方が裾が厚い。ただし、裾指数が最も大きい通貨であってもその水準は概ね0.5～0.6程度となっている。

図表22 各国対米ドル為替レート日次対数変化率の一般化パレート分布による推計結果

・先進国

日本・円

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	-0.3988	0.0085	0.0169	-0.0024	0.0092	0.0169	0.0230
2%	0.0485	0.0048	0.0141	0.0097	0.0146	0.0174	0.0226
3%	-0.0169	0.0054	0.0117	0.0090	0.0143	0.0176	0.0228
4%	0.1482	0.0040	0.0110	0.0101	0.0146	0.0171	0.0228
5%	0.1126	0.0039	0.0102	0.0102	0.0145	0.0170	0.0223
6%	0.0767	0.0042	0.0092	0.0100	0.0146	0.0173	0.0225
7%	0.0767	0.0042	0.0086	0.0100	0.0146	0.0173	0.0225
8%	0.0950	0.0039	0.0081	0.0100	0.0146	0.0172	0.0224
9%	0.0761	0.0041	0.0076	0.0100	0.0146	0.0173	0.0225
10%	0.0796	0.0040	0.0072	0.0100	0.0146	0.0173	0.0225

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	-0.0162	0.0094	0.0199	0.0045	0.0140	0.0198	0.0290
2%	0.0875	0.0071	0.0157	0.0093	0.0166	0.0207	0.0290
3%	0.0996	0.0067	0.0128	0.0095	0.0166	0.0206	0.0289
4%	0.1083	0.0064	0.0111	0.0097	0.0166	0.0206	0.0289
5%	0.1880	0.0054	0.0101	0.0101	0.0167	0.0202	0.0292
6%	0.1647	0.0054	0.0091	0.0101	0.0168	0.0204	0.0291
7%	0.1484	0.0053	0.0083	0.0101	0.0166	0.0202	0.0285
8%	0.1603	0.0052	0.0075	0.0101	0.0167	0.0204	0.0290
9%	0.2138	0.0046	0.0072	0.0101	0.0167	0.0201	0.0295
10%	0.1848	0.0048	0.0066	0.0102	0.0168	0.0203	0.0293

36 3節で説明した極値理論は、独立かつ同一の分布に従うデータに限らず、一定の条件を満たした定常性を持つデータの極値の推計にも応用することができる。詳細はColes [2001] Ch. 4等を参照。

図表22 (続き)

ドイツ・マルク

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.0484	0.0039	0.0146	0.0085	0.0123	0.0146	0.0187
2%	0.0642	0.0036	0.0122	0.0089	0.0126	0.0147	0.0187
3%	0.0633	0.0035	0.0107	0.0090	0.0126	0.0147	0.0187
4%	0.0596	0.0034	0.0097	0.0090	0.0126	0.0147	0.0187
5%	0.0741	0.0033	0.0091	0.0091	0.0126	0.0147	0.0187
6%	0.0443	0.0035	0.0083	0.0090	0.0126	0.0148	0.0187
7%	-0.0326	0.0040	0.0075	0.0088	0.0127	0.0151	0.0187
8%	-0.0876	0.0045	0.0067	0.0088	0.0128	0.0153	0.0188
9%	-0.0482	0.0042	0.0064	0.0088	0.0127	0.0151	0.0188
10%	-0.0496	0.0042	0.0059	0.0088	0.0127	0.0151	0.0188

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	-0.0958	0.0045	0.0153	0.0073	0.0122	0.0152	0.0194
2%	0.0365	0.0038	0.0127	0.0093	0.0130	0.0153	0.0193
3%	-0.0024	0.0040	0.0109	0.0088	0.0129	0.0153	0.0194
4%	-0.0721	0.0046	0.0094	0.0084	0.0128	0.0156	0.0195
5%	-0.0334	0.0044	0.0086	0.0086	0.0128	0.0154	0.0194
6%	-0.0045	0.0041	0.0080	0.0087	0.0128	0.0153	0.0194
7%	0.0137	0.0040	0.0074	0.0088	0.0128	0.0153	0.0194
8%	0.0029	0.0040	0.0069	0.0088	0.0128	0.0153	0.0194
9%	-0.0275	0.0043	0.0063	0.0088	0.0129	0.0154	0.0193
10%	-0.0226	0.0043	0.0058	0.0088	0.0129	0.0154	0.0194

英国・ポンド

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	-0.0461	0.0029	0.0114	0.0066	0.0096	0.0114	0.0142
2%	0.0777	0.0022	0.0102	0.0082	0.0104	0.0117	0.0142
3%	-0.0782	0.0030	0.0087	0.0071	0.0100	0.0118	0.0144
4%	-0.1037	0.0032	0.0077	0.0070	0.0100	0.0119	0.0144
5%	-0.1188	0.0035	0.0068	0.0068	0.0100	0.0120	0.0146
6%	-0.1120	0.0035	0.0062	0.0068	0.0100	0.0119	0.0145
7%	-0.1160	0.0036	0.0056	0.0068	0.0100	0.0120	0.0146
8%	-0.1120	0.0036	0.0052	0.0069	0.0099	0.0119	0.0145
9%	-0.0967	0.0035	0.0048	0.0069	0.0099	0.0119	0.0145
10%	-0.0770	0.0034	0.0045	0.0069	0.0099	0.0118	0.0145

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.3167	0.0023	0.0119	0.0091	0.0110	0.0119	0.0152
2%	0.1368	0.0026	0.0099	0.0076	0.0103	0.0118	0.0151
3%	0.0112	0.0033	0.0082	0.0065	0.0099	0.0119	0.0153
4%	0.0688	0.0029	0.0075	0.0069	0.0100	0.0118	0.0152
5%	0.0654	0.0029	0.0069	0.0069	0.0100	0.0118	0.0152
6%	0.0505	0.0029	0.0063	0.0068	0.0100	0.0118	0.0152
7%	0.0521	0.0029	0.0059	0.0068	0.0100	0.0118	0.0152
8%	0.0284	0.0030	0.0054	0.0068	0.0100	0.0119	0.0152
9%	0.0127	0.0031	0.0050	0.0068	0.0100	0.0120	0.0152
10%	-0.0314	0.0034	0.0045	0.0068	0.0101	0.0121	0.0152

図表22 (続き)

・アジア

香港・ドル

右福

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	0.7191	0.0002	0.0006	0.0004	0.0006	0.0006	0.0012
2%	0.5968	0.0001	0.0005	0.0004	0.0006	0.0006	0.0011
3%	0.2707	0.0002	0.0003	0.0002	0.0005	0.0006	0.0010
4%	0.2644	0.0002	0.0003	0.0002	0.0005	0.0006	0.0010
5%	0.2691	0.0002	0.0002	0.0002	0.0005	0.0006	0.0010
6%	0.2847	0.0002	0.0002	0.0002	0.0005	0.0006	0.0010
7%	0.3002	0.0001	0.0002	0.0002	0.0005	0.0006	0.0009
8%	0.2942	0.0001	0.0002	0.0002	0.0005	0.0006	0.0010
9%	0.2776	0.0002	0.0001	0.0002	0.0005	0.0006	0.0010
10%	0.3097	0.0001	0.0001	0.0002	0.0005	0.0006	0.0009

左福

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	0.0653	0.0004	0.0006	0.0000	0.0004	0.0006	0.0011
2%	0.1254	0.0003	0.0004	0.0001	0.0004	0.0006	0.0011
3%	0.2045	0.0003	0.0003	0.0002	0.0005	0.0006	0.0010
4%	0.2474	0.0002	0.0003	0.0002	0.0005	0.0006	0.0010
5%	0.2558	0.0002	0.0002	0.0002	0.0005	0.0006	0.0010
6%	0.2757	0.0002	0.0002	0.0002	0.0005	0.0006	0.0009
7%	0.2966	0.0001	0.0002	0.0002	0.0004	0.0005	0.0009
8%	0.2875	0.0001	0.0002	0.0002	0.0005	0.0006	0.0009
9%	0.2767	0.0001	0.0001	0.0002	0.0005	0.0006	0.0009
10%	0.3071	0.0001	0.0001	0.0002	0.0004	0.0005	0.0009

インドネシア・ルピア

右福

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	-0.2216	0.0419	0.0673	-0.0142	0.0349	0.0670	0.1014
2%	-0.1642	0.0436	0.0380	-0.0055	0.0381	0.0663	0.0998
3%	0.1050	0.0291	0.0279	0.0135	0.0444	0.0620	0.0986
4%	0.3070	0.0208	0.0228	0.0183	0.0463	0.0587	0.1046
5%	0.3138	0.0193	0.0183	0.0183	0.0463	0.0586	0.1051
6%	0.3457	0.0173	0.0153	0.0186	0.0466	0.0581	0.1071
7%	0.4031	0.0149	0.0134	0.0188	0.0473	0.0574	0.1121
8%	0.4179	0.0138	0.0116	0.0187	0.0476	0.0573	0.1137
9%	0.3819	0.0139	0.0097	0.0188	0.0470	0.0576	0.1097
10%	0.4088	0.0128	0.0084	0.0187	0.0475	0.0574	0.1130

左福

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	0.4270	0.0187	0.0569	0.0350	0.0514	0.0567	0.0894
2%	0.1896	0.0250	0.0354	0.0142	0.0401	0.0537	0.0889
3%	0.2215	0.0213	0.0269	0.0167	0.0412	0.0536	0.0886
4%	0.2307	0.0195	0.0216	0.0174	0.0415	0.0535	0.0884
5%	0.2198	0.0189	0.0172	0.0172	0.0414	0.0537	0.0883
6%	0.2280	0.0178	0.0141	0.0174	0.0415	0.0536	0.0883
7%	0.2114	0.0178	0.0111	0.0173	0.0415	0.0539	0.0879
8%	0.2377	0.0164	0.0092	0.0174	0.0415	0.0534	0.0886
9%	0.2277	0.0163	0.0071	0.0174	0.0416	0.0537	0.0886
10%	0.2743	0.0146	0.0062	0.0173	0.0416	0.0529	0.0907

図表22 (続き)

マレーシア・リングgit

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待シヨート フォール (95%)	VaR (99%)	期待シヨート フォール (99%)
1%	0.0026	0.0121	0.0205	0.0010	0.0130	0.0204	0.0325
2%	0.0473	0.0106	0.0139	0.0044	0.0150	0.0213	0.0328
3%	-0.0210	0.0119	0.0089	0.0028	0.0146	0.0218	0.0332
4%	0.0130	0.0111	0.0060	0.0035	0.0147	0.0215	0.0330
5%	0.0581	0.0100	0.0041	0.0041	0.0148	0.0211	0.0328
6%	0.1713	0.0082	0.0031	0.0046	0.0148	0.0203	0.0337
7%	0.3473	0.0061	0.0025	0.0047	0.0152	0.0195	0.0378
8%	0.5202	0.0046	0.0022	0.0046	0.0167	0.0193	0.0473
9%	0.6630	0.0035	0.0019	0.0044	0.0199	0.0194	0.0644
10%	0.7371	0.0030	0.0016	0.0043	0.0232	0.0196	0.0815

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待シヨート フォール (95%)	VaR (99%)	期待シヨート フォール (99%)
1%	-0.1915	0.0152	0.0200	-0.0087	0.0086	0.0199	0.0326
2%	0.0294	0.0117	0.0113	0.0006	0.0124	0.0194	0.0318
3%	0.0059	0.0121	0.0063	0.0002	0.0123	0.0197	0.0320
4%	0.1299	0.0096	0.0043	0.0022	0.0129	0.0188	0.0320
5%	0.3236	0.0068	0.0033	0.0033	0.0133	0.0176	0.0344
6%	0.5093	0.0048	0.0027	0.0037	0.0144	0.0169	0.0414
7%	0.6266	0.0038	0.0023	0.0037	0.0161	0.0166	0.0507
8%	0.7174	0.0030	0.0019	0.0036	0.0187	0.0165	0.0643
9%	0.7713	0.0026	0.0017	0.0036	0.0213	0.0165	0.0780
10%	0.7626	0.0024	0.0014	0.0036	0.0208	0.0165	0.0754

フィリピン・ペソ

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待シヨート フォール (95%)	VaR (99%)	期待シヨート フォール (99%)
1%	0.1785	0.0126	0.0224	0.0048	0.0163	0.0224	0.0376
2%	0.2242	0.0102	0.0146	0.0060	0.0168	0.0222	0.0376
3%	0.2923	0.0082	0.0112	0.0074	0.0173	0.0219	0.0378
4%	0.2938	0.0076	0.0088	0.0072	0.0173	0.0218	0.0379
5%	0.2805	0.0073	0.0071	0.0071	0.0172	0.0219	0.0378
6%	0.3479	0.0062	0.0062	0.0073	0.0174	0.0215	0.0391
7%	0.3059	0.0063	0.0050	0.0073	0.0173	0.0217	0.0381
8%	0.3465	0.0056	0.0044	0.0073	0.0174	0.0215	0.0391
9%	0.3839	0.0051	0.0039	0.0072	0.0175	0.0214	0.0404
10%	0.4156	0.0046	0.0035	0.0072	0.0177	0.0213	0.0418

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待シヨート フォール (95%)	VaR (99%)	期待シヨート フォール (99%)
1%	0.4173	0.0083	0.0185	0.0088	0.0160	0.0185	0.0326
2%	0.3344	0.0075	0.0125	0.0065	0.0148	0.0182	0.0323
3%	0.2872	0.0072	0.0091	0.0057	0.0144	0.0184	0.0322
4%	0.3775	0.0056	0.0077	0.0065	0.0148	0.0179	0.0331
5%	0.5049	0.0042	0.0069	0.0069	0.0154	0.0173	0.0363
6%	0.4317	0.0043	0.0060	0.0068	0.0150	0.0176	0.0340
7%	0.3333	0.0048	0.0050	0.0067	0.0147	0.0181	0.0319
8%	0.3170	0.0047	0.0043	0.0067	0.0147	0.0182	0.0316
9%	0.2980	0.0047	0.0036	0.0067	0.0147	0.0183	0.0313
10%	0.2915	0.0046	0.0031	0.0067	0.0147	0.0183	0.0311

図表22 (続き)
シンガポール・ドル
右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	-0.1834	0.0059	0.0103	-0.0008	0.0059	0.0103	0.0153
2%	-0.0190	0.0048	0.0070	0.0025	0.0074	0.0104	0.0151
3%	0.1158	0.0038	0.0057	0.0038	0.0078	0.0101	0.0150
4%	0.2528	0.0029	0.0049	0.0043	0.0080	0.0098	0.0153
5%	0.2665	0.0027	0.0043	0.0043	0.0080	0.0098	0.0154
6%	0.2867	0.0025	0.0039	0.0044	0.0080	0.0097	0.0155
7%	0.2710	0.0024	0.0035	0.0044	0.0080	0.0098	0.0154
8%	0.3463	0.0021	0.0033	0.0044	0.0081	0.0096	0.0161
9%	0.3118	0.0021	0.0030	0.0044	0.0081	0.0097	0.0157
10%	0.3256	0.0020	0.0028	0.0044	0.0081	0.0096	0.0159

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	0.1481	0.0057	0.0103	0.0021	0.0074	0.0103	0.0169
2%	0.2112	0.0045	0.0070	0.0033	0.0079	0.0103	0.0169
3%	0.2843	0.0036	0.0056	0.0039	0.0082	0.0102	0.0170
4%	0.3276	0.0030	0.0048	0.0041	0.0083	0.0101	0.0172
5%	0.3626	0.0026	0.0043	0.0043	0.0084	0.0100	0.0174
6%	0.2964	0.0028	0.0036	0.0042	0.0083	0.0102	0.0169
7%	0.3076	0.0026	0.0033	0.0042	0.0083	0.0102	0.0170
8%	0.3191	0.0024	0.0030	0.0042	0.0083	0.0101	0.0170
9%	0.3253	0.0023	0.0027	0.0042	0.0083	0.0101	0.0171
10%	0.3368	0.0022	0.0025	0.0042	0.0083	0.0101	0.0173

韓国・ウォン
右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	-0.2322	0.0491	0.0222	-0.0742	-0.0162	0.0218	0.0618
2%	0.6963	0.0118	0.0136	0.0056	0.0260	0.0240	0.0867
3%	0.8231	0.0071	0.0104	0.0075	0.0341	0.0233	0.1235
4%	0.8915	0.0050	0.0090	0.0080	0.0461	0.0228	0.1830
5%	0.7355	0.0053	0.0074	0.0074	0.0276	0.0239	0.0899
6%	0.6621	0.0053	0.0063	0.0073	0.0249	0.0244	0.0756
7%	0.6627	0.0048	0.0055	0.0073	0.0249	0.0244	0.0757
8%	0.7024	0.0041	0.0050	0.0073	0.0264	0.0242	0.0833
9%	0.6871	0.0039	0.0045	0.0073	0.0257	0.0243	0.0800
10%	0.6852	0.0036	0.0041	0.0073	0.0257	0.0243	0.0797

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	0.0755	0.0280	0.0224	-0.0203	0.0066	0.0222	0.0525
2%	0.3220	0.0156	0.0122	-0.0003	0.0168	0.0242	0.0529
3%	0.5929	0.0087	0.0089	0.0051	0.0208	0.0224	0.0633
4%	0.7563	0.0056	0.0075	0.0063	0.0258	0.0213	0.0871
5%	0.8596	0.0041	0.0066	0.0066	0.0355	0.0207	0.1361
6%	0.8818	0.0034	0.0060	0.0066	0.0399	0.0206	0.1583
7%	0.7022	0.0039	0.0051	0.0065	0.0232	0.0214	0.0730
8%	0.6696	0.0038	0.0045	0.0066	0.0222	0.0215	0.0674
9%	0.6921	0.0034	0.0041	0.0065	0.0229	0.0214	0.0712
10%	0.7417	0.0029	0.0039	0.0065	0.0251	0.0214	0.0828

図表22 (続き)

台湾・新台湾ドル

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.0930	0.0059	0.0086	-0.0003	0.0053	0.0086	0.0151
2%	0.2709	0.0041	0.0053	0.0020	0.0063	0.0084	0.0152
3%	0.3819	0.0030	0.0042	0.0028	0.0068	0.0083	0.0155
4%	0.3914	0.0026	0.0034	0.0029	0.0068	0.0082	0.0156
5%	0.4001	0.0024	0.0029	0.0029	0.0068	0.0082	0.0157
6%	0.3876	0.0022	0.0025	0.0029	0.0068	0.0082	0.0155
7%	0.4118	0.0020	0.0022	0.0029	0.0068	0.0082	0.0158
8%	0.4509	0.0018	0.0020	0.0029	0.0069	0.0081	0.0164
9%	0.4265	0.0018	0.0017	0.0029	0.0069	0.0082	0.0160
10%	0.4155	0.0017	0.0015	0.0029	0.0068	0.0082	0.0158

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	-0.2632	0.0069	0.0071	-0.0069	0.0015	0.0070	0.0125
2%	-0.0737	0.0051	0.0044	-0.0004	0.0047	0.0079	0.0124
3%	0.0507	0.0040	0.0032	0.0012	0.0053	0.0077	0.0122
4%	0.4018	0.0022	0.0028	0.0024	0.0058	0.0070	0.0135
5%	0.5538	0.0016	0.0025	0.0025	0.0062	0.0068	0.0157
6%	0.5043	0.0016	0.0022	0.0025	0.0060	0.0068	0.0148
7%	0.4385	0.0016	0.0019	0.0025	0.0059	0.0069	0.0137
8%	0.4565	0.0015	0.0017	0.0025	0.0059	0.0069	0.0140
9%	0.4426	0.0014	0.0015	0.0025	0.0059	0.0069	0.0138
10%	0.3959	0.0015	0.0013	0.0025	0.0058	0.0070	0.0131

タイ・パーツ

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.3821	0.0131	0.0236	0.0078	0.0192	0.0235	0.0447
2%	0.3663	0.0102	0.0158	0.0078	0.0193	0.0238	0.0446
3%	0.4287	0.0078	0.0124	0.0088	0.0199	0.0235	0.0455
4%	0.3511	0.0080	0.0097	0.0080	0.0194	0.0240	0.0441
5%	0.2481	0.0090	0.0071	0.0071	0.0192	0.0250	0.0430
6%	0.3139	0.0076	0.0062	0.0076	0.0193	0.0244	0.0437
7%	0.3705	0.0065	0.0053	0.0077	0.0194	0.0239	0.0453
8%	0.4283	0.0056	0.0047	0.0077	0.0197	0.0237	0.0477
9%	0.4112	0.0055	0.0040	0.0077	0.0196	0.0237	0.0468
10%	0.4298	0.0051	0.0035	0.0077	0.0198	0.0237	0.0478

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.2904	0.0132	0.0229	0.0060	0.0176	0.0229	0.0414
2%	0.2742	0.0111	0.0143	0.0053	0.0172	0.0227	0.0413
3%	0.2957	0.0097	0.0099	0.0053	0.0172	0.0225	0.0415
4%	0.3043	0.0087	0.0074	0.0056	0.0173	0.0225	0.0416
5%	0.4270	0.0066	0.0063	0.0063	0.0178	0.0216	0.0445
6%	0.4958	0.0055	0.0054	0.0064	0.0183	0.0212	0.0477
7%	0.5661	0.0046	0.0048	0.0065	0.0192	0.0209	0.0526
8%	0.5245	0.0045	0.0041	0.0065	0.0186	0.0211	0.0493
9%	0.4422	0.0049	0.0033	0.0066	0.0179	0.0213	0.0444
10%	0.4430	0.0046	0.0028	0.0066	0.0179	0.0214	0.0444

図表22 (続き)

・東欧

チェコ・コルナ

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.3606	0.0045	0.0169	0.0114	0.0153	0.0169	0.0239
2%	0.2503	0.0045	0.0135	0.0098	0.0145	0.0168	0.0240
3%	0.2221	0.0043	0.0116	0.0095	0.0145	0.0169	0.0240
4%	0.1999	0.0042	0.0103	0.0094	0.0144	0.0171	0.0240
5%	0.1833	0.0042	0.0094	0.0094	0.0145	0.0171	0.0240
6%	0.1495	0.0044	0.0084	0.0092	0.0145	0.0174	0.0241
7%	0.1319	0.0045	0.0076	0.0091	0.0145	0.0175	0.0241
8%	0.1260	0.0044	0.0070	0.0091	0.0145	0.0175	0.0241
9%	0.1209	0.0044	0.0064	0.0091	0.0145	0.0176	0.0241
10%	0.2034	0.0040	0.0061	0.0090	0.0148	0.0177	0.0257

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.0091	0.0053	0.0160	0.0075	0.0127	0.0159	0.0213
2%	0.0485	0.0049	0.0125	0.0081	0.0130	0.0159	0.0212
3%	0.0786	0.0044	0.0108	0.0086	0.0132	0.0159	0.0211
4%	0.0950	0.0041	0.0098	0.0089	0.0133	0.0158	0.0210
5%	0.1036	0.0039	0.0089	0.0089	0.0133	0.0158	0.0210
6%	0.1910	0.0033	0.0084	0.0091	0.0133	0.0156	0.0214
7%	0.0911	0.0039	0.0076	0.0089	0.0134	0.0159	0.0210
8%	0.0920	0.0038	0.0071	0.0089	0.0133	0.0159	0.0210
9%	0.0832	0.0039	0.0066	0.0089	0.0134	0.0159	0.0210
10%	0.0669	0.0040	0.0061	0.0089	0.0134	0.0160	0.0210

ハンガリー・フォリント

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.6080	0.0038	0.0151	0.0112	0.0148	0.0151	0.0248
2%	0.4775	0.0035	0.0118	0.0091	0.0135	0.0146	0.0240
3%	0.3707	0.0037	0.0098	0.0081	0.0129	0.0148	0.0237
4%	0.3213	0.0037	0.0085	0.0077	0.0128	0.0150	0.0236
5%	0.3517	0.0035	0.0076	0.0076	0.0130	0.0151	0.0246
6%	0.3412	0.0035	0.0068	0.0074	0.0131	0.0155	0.0253
7%	0.3412	0.0033	0.0063	0.0074	0.0131	0.0154	0.0252
8%	0.3397	0.0032	0.0058	0.0074	0.0131	0.0155	0.0253
9%	0.3416	0.0030	0.0055	0.0074	0.0130	0.0153	0.0251
10%	0.3373	0.0030	0.0051	0.0074	0.0131	0.0155	0.0253

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.0688	0.0056	0.0129	0.0044	0.0097	0.0129	0.0189
2%	0.3084	0.0032	0.0109	0.0083	0.0118	0.0133	0.0191
3%	0.1789	0.0037	0.0090	0.0072	0.0113	0.0135	0.0190
4%	0.1508	0.0036	0.0079	0.0071	0.0113	0.0135	0.0188
5%	0.1605	0.0034	0.0072	0.0072	0.0113	0.0135	0.0188
6%	0.1296	0.0036	0.0064	0.0070	0.0113	0.0137	0.0190
7%	0.1317	0.0035	0.0058	0.0070	0.0113	0.0137	0.0190
8%	0.0990	0.0038	0.0051	0.0070	0.0114	0.0139	0.0191
9%	0.0781	0.0039	0.0046	0.0070	0.0114	0.0140	0.0191
10%	0.0497	0.0042	0.0040	0.0070	0.0115	0.0142	0.0191

図表22 (続き)

ポーランド・ズロチ

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	-0.2344	0.0107	0.0163	-0.0047	0.0080	0.0163	0.0249
2%	-0.0221	0.0078	0.0119	0.0046	0.0125	0.0173	0.0248
3%	0.0484	0.0067	0.0095	0.0061	0.0130	0.0171	0.0246
4%	0.2413	0.0048	0.0084	0.0073	0.0134	0.0163	0.0253
5%	0.2813	0.0043	0.0074	0.0074	0.0134	0.0162	0.0256
6%	0.1926	0.0047	0.0064	0.0073	0.0134	0.0165	0.0248
7%	0.2054	0.0045	0.0057	0.0073	0.0134	0.0165	0.0249
8%	0.2809	0.0038	0.0054	0.0073	0.0134	0.0162	0.0258
9%	0.2698	0.0038	0.0049	0.0073	0.0134	0.0163	0.0256
10%	0.2999	0.0035	0.0046	0.0073	0.0134	0.0162	0.0262

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	-0.0731	0.0088	0.0137	-0.0014	0.0078	0.0136	0.0218
2%	0.2848	0.0046	0.0106	0.0068	0.0118	0.0141	0.0220
3%	0.4115	0.0033	0.0094	0.0079	0.0124	0.0139	0.0226
4%	0.3912	0.0030	0.0084	0.0077	0.0123	0.0139	0.0225
5%	0.2105	0.0039	0.0071	0.0071	0.0120	0.0146	0.0216
6%	0.1813	0.0039	0.0063	0.0071	0.0120	0.0146	0.0212
7%	0.1560	0.0041	0.0055	0.0069	0.0121	0.0149	0.0214
8%	0.1513	0.0041	0.0049	0.0069	0.0121	0.0149	0.0215
9%	0.1540	0.0040	0.0045	0.0069	0.0121	0.0149	0.0215
10%	0.2049	0.0036	0.0042	0.0069	0.0120	0.0147	0.0219

スロバキア・コルナ

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.6071	0.0034	0.0150	0.0116	0.0148	0.0150	0.0235
2%	0.3394	0.0038	0.0121	0.0092	0.0133	0.0151	0.0222
3%	0.2923	0.0036	0.0104	0.0087	0.0131	0.0151	0.0222
4%	0.2068	0.0040	0.0090	0.0082	0.0130	0.0155	0.0222
5%	0.1710	0.0042	0.0079	0.0079	0.0130	0.0157	0.0223
6%	0.1572	0.0042	0.0071	0.0079	0.0130	0.0158	0.0224
7%	0.1134	0.0045	0.0062	0.0078	0.0131	0.0161	0.0225
8%	0.0972	0.0047	0.0055	0.0077	0.0131	0.0162	0.0226
9%	0.0885	0.0047	0.0049	0.0077	0.0132	0.0163	0.0226
10%	0.1554	0.0044	0.0044	0.0076	0.0135	0.0166	0.0241

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.1208	0.0050	0.0154	0.0081	0.0128	0.0154	0.0211
2%	0.0945	0.0050	0.0118	0.0074	0.0125	0.0154	0.0213
3%	0.0954	0.0048	0.0098	0.0074	0.0124	0.0154	0.0213
4%	0.1204	0.0044	0.0086	0.0077	0.0125	0.0152	0.0211
5%	0.0840	0.0047	0.0074	0.0074	0.0125	0.0155	0.0213
6%	0.0456	0.0050	0.0063	0.0072	0.0125	0.0157	0.0214
7%	0.0605	0.0048	0.0056	0.0073	0.0125	0.0156	0.0214
8%	0.0457	0.0049	0.0049	0.0073	0.0125	0.0157	0.0214
9%	0.0604	0.0048	0.0044	0.0073	0.0125	0.0156	0.0214
10%	0.0568	0.0048	0.0039	0.0073	0.0125	0.0156	0.0214

図表22 (続き)

・中南米

ブラジル・レアル

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.3537	0.0122	0.0237	0.0087	0.0193	0.0236	0.0424
2%	1.3430	0.0025	0.0189	0.0176	0.0155	0.0217	0.0035
3%	0.9208	0.0026	0.0177	0.0166	0.0373	0.0227	0.1137
4%	0.7524	0.0027	0.0167	0.0162	0.0253	0.0232	0.0538
5%	0.6026	0.0030	0.0158	0.0158	0.0233	0.0239	0.0435
6%	0.5014	0.0032	0.0150	0.0156	0.0227	0.0244	0.0402
7%	0.3285	0.0044	0.0137	0.0152	0.0225	0.0256	0.0381
8%	0.1712	0.0065	0.0115	0.0147	0.0232	0.0277	0.0388
9%	0.0834	0.0084	0.0092	0.0143	0.0240	0.0296	0.0406
10%	0.0609	0.0090	0.0078	0.0142	0.0243	0.0302	0.0413

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.4644	0.0078	0.0174	0.0085	0.0154	0.0173	0.0318
2%	0.4784	0.0058	0.0121	0.0078	0.0149	0.0168	0.0321
3%	0.4397	0.0050	0.0100	0.0077	0.0148	0.0170	0.0315
4%	0.3022	0.0058	0.0077	0.0065	0.0143	0.0178	0.0304
5%	0.3351	0.0051	0.0067	0.0067	0.0143	0.0176	0.0307
6%	0.2791	0.0054	0.0055	0.0065	0.0143	0.0179	0.0302
7%	0.2658	0.0053	0.0046	0.0064	0.0143	0.0180	0.0301
8%	0.2595	0.0054	0.0036	0.0064	0.0146	0.0185	0.0310
9%	0.2758	0.0048	0.0033	0.0064	0.0143	0.0179	0.0302
10%	0.2698	0.0049	0.0027	0.0064	0.0144	0.0182	0.0306

チリ・ペソ

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.1755	0.0038	0.0101	0.0047	0.0082	0.0101	0.0147
2%	0.1296	0.0035	0.0078	0.0047	0.0083	0.0103	0.0147
3%	0.1988	0.0029	0.0066	0.0052	0.0085	0.0102	0.0148
4%	0.2410	0.0026	0.0059	0.0053	0.0085	0.0101	0.0148
5%	0.1555	0.0028	0.0051	0.0051	0.0085	0.0103	0.0146
6%	0.1719	0.0026	0.0047	0.0052	0.0084	0.0102	0.0145
7%	0.2308	0.0023	0.0044	0.0052	0.0085	0.0101	0.0149
8%	0.2172	0.0023	0.0040	0.0052	0.0085	0.0102	0.0148
9%	0.1676	0.0025	0.0037	0.0052	0.0085	0.0102	0.0145
10%	0.1768	0.0024	0.0034	0.0052	0.0084	0.0102	0.0145

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.1465	0.0030	0.0090	0.0047	0.0075	0.0090	0.0125
2%	0.1423	0.0028	0.0068	0.0044	0.0073	0.0089	0.0124
3%	0.1466	0.0026	0.0058	0.0046	0.0074	0.0089	0.0124
4%	0.1605	0.0024	0.0051	0.0046	0.0074	0.0088	0.0124
5%	0.1223	0.0026	0.0044	0.0044	0.0073	0.0090	0.0125
6%	0.1050	0.0026	0.0039	0.0044	0.0074	0.0090	0.0126
7%	0.1225	0.0025	0.0036	0.0044	0.0073	0.0090	0.0125
8%	0.1314	0.0024	0.0033	0.0044	0.0073	0.0089	0.0125
9%	0.1109	0.0025	0.0029	0.0044	0.0074	0.0090	0.0126
10%	0.1078	0.0024	0.0027	0.0044	0.0074	0.0090	0.0125

図表22 (続き)

コロンビア・ペソ

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.4404	0.0035	0.0136	0.0095	0.0126	0.0136	0.0199
2%	0.1930	0.0047	0.0097	0.0057	0.0106	0.0132	0.0198
3%	0.1832	0.0045	0.0078	0.0056	0.0106	0.0132	0.0199
4%	0.1950	0.0041	0.0067	0.0058	0.0106	0.0132	0.0198
5%	0.2351	0.0036	0.0060	0.0060	0.0107	0.0130	0.0199
6%	0.2376	0.0034	0.0054	0.0060	0.0107	0.0130	0.0199
7%	0.2091	0.0035	0.0048	0.0060	0.0107	0.0131	0.0196
8%	0.2156	0.0033	0.0044	0.0060	0.0106	0.0130	0.0195
9%	0.2120	0.0032	0.0040	0.0060	0.0107	0.0131	0.0196
10%	0.2197	0.0031	0.0037	0.0060	0.0106	0.0129	0.0195

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.0402	0.0044	0.0102	0.0033	0.0076	0.0102	0.0147
2%	0.0379	0.0042	0.0075	0.0038	0.0079	0.0104	0.0149
3%	0.0812	0.0037	0.0061	0.0042	0.0081	0.0103	0.0147
4%	0.1062	0.0034	0.0051	0.0044	0.0081	0.0102	0.0146
5%	0.1764	0.0030	0.0046	0.0046	0.0082	0.0101	0.0149
6%	0.1322	0.0030	0.0040	0.0046	0.0081	0.0101	0.0145
7%	0.1290	0.0030	0.0036	0.0046	0.0081	0.0101	0.0145
8%	0.1815	0.0027	0.0032	0.0046	0.0082	0.0101	0.0149
9%	0.1482	0.0027	0.0029	0.0046	0.0081	0.0100	0.0144
10%	0.1513	0.0027	0.0027	0.0046	0.0081	0.0100	0.0144

メキシコ・ニュー・ペソ

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.3016	0.0230	0.0299	0.0004	0.0207	0.0297	0.0626
2%	0.3313	0.0181	0.0149	0.0005	0.0204	0.0288	0.0628
3%	0.6560	0.0091	0.0115	0.0076	0.0266	0.0263	0.0809
4%	0.6746	0.0073	0.0093	0.0078	0.0272	0.0261	0.0836
5%	0.7538	0.0055	0.0082	0.0082	0.0307	0.0256	0.1014
6%	0.8536	0.0041	0.0075	0.0083	0.0414	0.0250	0.1557
7%	0.8022	0.0039	0.0068	0.0083	0.0343	0.0252	0.1200
8%	0.6683	0.0044	0.0059	0.0083	0.0265	0.0258	0.0790
9%	0.6236	0.0044	0.0053	0.0084	0.0253	0.0260	0.0720
10%	0.6459	0.0040	0.0049	0.0084	0.0259	0.0259	0.0754

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショート フォール (95%)	VaR (99%)	期待ショート フォール (99%)
1%	0.2564	0.0168	0.0194	-0.0029	0.0121	0.0193	0.0418
2%	0.4498	0.0094	0.0130	0.0059	0.0172	0.0206	0.0438
3%	0.5355	0.0066	0.0102	0.0073	0.0182	0.0202	0.0459
4%	0.4714	0.0064	0.0081	0.0068	0.0176	0.0206	0.0438
5%	0.5003	0.0055	0.0069	0.0069	0.0178	0.0204	0.0449
6%	0.5702	0.0044	0.0062	0.0071	0.0185	0.0200	0.0487
7%	0.6416	0.0036	0.0058	0.0071	0.0196	0.0198	0.0549
8%	0.6085	0.0035	0.0052	0.0071	0.0190	0.0199	0.0516
9%	0.5535	0.0036	0.0047	0.0072	0.0182	0.0200	0.0470
10%	0.5714	0.0033	0.0044	0.0071	0.0185	0.0200	0.0484

図表22 (続き)

ペルー・ヌエボ・ソル

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	0.6771	0.0031	0.0071	0.0041	0.0073	0.0071	0.0168
2%	0.8039	0.0015	0.0058	0.0048	0.0085	0.0072	0.0208
3%	0.5744	0.0017	0.0048	0.0040	0.0071	0.0075	0.0151
4%	0.6083	0.0014	0.0044	0.0041	0.0072	0.0074	0.0157
5%	0.4925	0.0015	0.0039	0.0039	0.0069	0.0076	0.0142
6%	0.3714	0.0017	0.0034	0.0038	0.0067	0.0079	0.0132
7%	0.3776	0.0016	0.0032	0.0038	0.0068	0.0079	0.0134
8%	0.3624	0.0017	0.0028	0.0037	0.0069	0.0082	0.0139
9%	0.3597	0.0017	0.0026	0.0037	0.0070	0.0083	0.0140
10%	0.2650	0.0019	0.0023	0.0037	0.0068	0.0083	0.0130

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	0.4988	0.0036	0.0071	0.0031	0.0063	0.0070	0.0141
2%	0.4935	0.0026	0.0049	0.0030	0.0062	0.0070	0.0141
3%	0.4013	0.0024	0.0039	0.0027	0.0060	0.0072	0.0135
4%	0.4080	0.0021	0.0032	0.0028	0.0061	0.0072	0.0135
5%	0.4251	0.0019	0.0028	0.0028	0.0061	0.0072	0.0136
6%	0.4658	0.0016	0.0026	0.0029	0.0062	0.0071	0.0140
7%	0.4128	0.0017	0.0022	0.0028	0.0061	0.0072	0.0135
8%	0.4700	0.0014	0.0021	0.0029	0.0062	0.0071	0.0142
9%	0.4722	0.0013	0.0019	0.0029	0.0062	0.0071	0.0142
10%	0.4566	0.0013	0.0018	0.0029	0.0061	0.0071	0.0140

ベネズエラ・ボリバル

右裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	0.8298	0.0156	0.0139	0.0000	0.0240	0.0138	0.1049
2%	1.0274	0.0061	0.0080	0.0044	-	0.0140	-
3%	0.9737	0.0042	0.0060	0.0043	0.1022	0.0143	0.4837
4%	0.7617	0.0047	0.0042	0.0033	0.0198	0.0157	0.0719
5%	0.7413	0.0041	0.0032	0.0032	0.0190	0.0158	0.0678
6%	0.8267	0.0031	0.0027	0.0033	0.0240	0.0154	0.0933
7%	0.8490	0.0026	0.0023	0.0034	0.0263	0.0153	0.1055
8%	0.8781	0.0022	0.0020	0.0033	0.0310	0.0153	0.1288
9%	0.9145	0.0019	0.0018	0.0033	0.0414	0.0153	0.1811
10%	0.8621	0.0019	0.0016	0.0034	0.0280	0.0152	0.1139

左裾

超過値の割合	ξ	σ	閾値	VaR (95%)	期待ショートフォール (95%)	VaR (99%)	期待ショートフォール (99%)
1%	0.5490	0.0087	0.0119	0.0025	0.0105	0.0118	0.0311
2%	0.4895	0.0066	0.0066	0.0017	0.0099	0.0120	0.0301
3%	0.4854	0.0053	0.0044	0.0020	0.0101	0.0121	0.0297
4%	0.5257	0.0043	0.0031	0.0022	0.0103	0.0119	0.0307
5%	0.5957	0.0034	0.0024	0.0024	0.0108	0.0116	0.0335
6%	0.6275	0.0029	0.0019	0.0025	0.0112	0.0115	0.0354
7%	0.6329	0.0026	0.0015	0.0025	0.0113	0.0115	0.0359
8%	0.5854	0.0026	0.0011	0.0025	0.0107	0.0116	0.0327
9%	0.6640	0.0021	0.0009	0.0024	0.0118	0.0115	0.0388
10%	0.6883	0.0019	0.0007	0.0024	0.0123	0.0115	0.0414

備考：為替レートのデータはブルームバーグから取得した。対象期間は、1993年11月1日～2001年10月29日までの8年間である。

ξ 、 σ は一般化バレート分布におけるパラメータ推計値、閾値は推計の際の閾値、VaR、期待ショートフォールは、それぞれ推計結果を用いて計算した信頼水準95%と99%のVaRと期待ショートフォールの推計値である。

一方、尺度パラメータ(σ)は、先進国よりもエマージング諸国の方が小さい。したがって、「裾指数と尺度パラメータがともに異なる場合、VaRにテイル・リスクが発生し得る」との4節の結論の一部を踏まえると、実際のデータでもVaRにテイル・リスクが発生している可能性がある。そこで、信頼水準99%のVaRをみると、先進国よりも分布の裾の厚いシンガポール、マレーシア、台湾、タイ、ブラジル、ペルー、メキシコ、ベネズエラで、為替レート変動のVaRが先進国を下回っており、実際にテイル・リスクが発生していることがわかる。

(3) 多変量における分析

次に、2変量のケースでVaRのテイル・リスクが為替レートのデータに発生し得る例を示す。ここでは、計算例として、東南アジアの5通貨（インドネシア・ルピア、マレーシア・リングギット、フィリピン・ペソ、シンガポール・ドル、タイ・バーツ）を分析の対象とする。

まず、3節で導入した多変量極値分布のパラメータを、Longin and Solnik [2001]の方法を用いて推計する。ここでは3節での分析に従い、2変量超過値の周辺分布が一般化パレート分布（厳密には(4)式で表される超過値分布）に従い、コピュラはガンベル・コピュラであると仮定する³⁷。この仮定のもとでは、超過値の割合(p_1 、 p_2)を所与とすると、周辺分布の裾指数(ξ_1 、 ξ_2)と尺度パラメータ(σ_1 、 σ_2)、閾値(θ_1 、 θ_2)、ガンベル・コピュラの依存パラメータ(α)により超過値の同時分布が決定する。

超過値の割合を10%として、東南アジア通貨の各組み合わせについて、最尤法³⁸を用いてこれらのパラメータを推計した。図表23はその結果である。

この推計結果を基に、VaRと期待ショートフォールが実際に漸近的な依存度合いを捉えられるかを確認した。5節(2)と同じ方法でVaRと期待ショートフォールを算出する。まず、推計されたパラメータ値のもとで、超過値分布とガンベル・コピュラにより為替レートの対数変化率をシミュレートする。さらに、超過値分布と正規コピュラおよびフランク・コピュラのもとで為替レートの対数変化率をシミュレートする。正規コピュラおよびガンベル・コピュラのもとでシミュレーションを行う際は、ガンベル・コピュラとスピアマンのロー(ρ_s)が等しくなるように正規コピュラとフランク・コピュラの依存パラメータを設定する。次に、シミュレーションで生成した為替レートの対数変化率データからVaRと期待ショートフォールを計算する。シミュレーションはそれぞれの場合について100万回行った。

37 ここでは、依存構造がガンベル・コピュラで表されると仮定したが、データからノンパラメトリックにコピュラを推計する方法の研究も進んでいる。詳細はCapéraà, Fougères, and Genest [1997]とその参考文献を参照。

38 尤度関数の生成方法は、Longin and Solnik [2001]、Ledford and Tawn [1996]等を参照。

図表23 東南アジア通貨の日次対数変化率の依存関係の2変量極値分布による推計結果

通貨		α	ξ_1	σ_1	θ_1	ξ_2	σ_2	θ_2
インドネシア(ルピア)	マレーシア(リングgit)	1.2658	0.4088	0.0128	0.0084	0.7371	0.0030	0.0016
インドネシア(ルピア)	フィリピン(ペソ)	1.3056	0.4088	0.0128	0.0084	0.4156	0.0046	0.0035
インドネシア(ルピア)	シンガポール(ドル)	1.3316	0.4088	0.0128	0.0084	0.3256	0.0020	0.0028
インドネシア(ルピア)	タイ(バーツ)	1.3855	0.4088	0.0128	0.0084	0.4298	0.0051	0.0035
マレーシア(リングgit)	フィリピン(ペソ)	1.2578	0.7371	0.0030	0.0016	0.4156	0.0046	0.0035
マレーシア(リングgit)	シンガポール(ドル)	1.5288	0.7371	0.0030	0.0016	0.3256	0.0020	0.0028
マレーシア(リングgit)	タイ(バーツ)	1.3186	0.7371	0.0030	0.0016	0.4298	0.0051	0.0035
フィリピン(ペソ)	シンガポール(ドル)	1.3120	0.4156	0.0046	0.0035	0.3256	0.0020	0.0028
フィリピン(ペソ)	タイ(バーツ)	1.4267	0.4156	0.0046	0.0035	0.4298	0.0051	0.0035
シンガポール(ドル)	タイ(バーツ)	1.4364	0.3256	0.0020	0.0028	0.4298	0.0051	0.0035

備考：為替レートのデータはブルームバーグから取得した。対象期間は、1993年11月1日～2001年10月29日までの8年間である。

この結果は分布の右裾の推計結果である。超過値の割合は $p_1=p_2=0.1$ とした。

図表24はその結果である。ここで計算した各通貨の組み合わせで、信頼水準95%のVaRにテイル・リスクがあることがわかる。これは、正規コピュラにおけるVaRがガンベル・コピュラにおけるVaRよりも大きくなっているためである。したがって、実際の金融データでも、VaRが漸近的な依存度合いを見落とす可能性がある。一方、信頼水準99%のVaRおよび信頼水準95%、99%の期待ショートフォールでは、少なくともこの例ではテイル・リスクは発生していない。

7. おわりに

本稿は、一般化パレート分布のもとでVaRあるいは期待ショートフォールがリスクを適切に表現できないことがあることを示した。VaRと期待ショートフォールのテイル・リスクは、分布の裾指数、尺度パラメータ、超過値の割合、信頼水準、損失の依存関係などの、さまざまな条件の相互作用によって発生する。

また、為替レートの極値理論を用いた実証分析により、金融データで実際にVaRにテイル・リスクが発生し得ることを示した。

上記の結論は、リスク管理実務が単一のリスク指標の算出を唯一かつ最終的な目的としてはならないことを示唆している。本稿は、超過値が漸近的に従う一般化パレート分布および極値コピュラなどを用いたモデルのもとで、VaRが裾の厚さや大幅な損失が発生する可能性などの重要な情報を捨てている可能性が高いことを示した。したがって、極値理論を用いてモデル化を行う場合、VaRなど特定のリスク指標の算出のみにとどまらず、損益額分布の多様な側面をモニターすることにより、そのリスク・プロファイルの十分な把握に努めることが重要である。

図表24 為替レート変動の和のVaRと期待ショートフォール (ES) の計算結果

通貨：インドネシア (ルピア) ・ マレーシア (リンギット)
 $\alpha=1.266$ ($\rho_s=0.340$)

	VaR (95%)	VaR (99%)	ES (95%)	ES (99%)
フランク	0.02337	0.06852	0.06079	0.15357
正規	0.02331	0.06958	0.06186	0.15783
ガンベル	0.02257	0.07041	0.06412	0.17071

通貨：インドネシア (ルピア) ・ フィリピン (ペソ)
 $\alpha=1.306$ ($\rho_s=0.195$)

	VaR (95%)	VaR (99%)	ES (95%)	ES (99%)
フランク	0.02464	0.06573	0.05481	0.12279
正規	0.02464	0.06746	0.05611	0.12702
ガンベル	0.02408	0.07002	0.05855	0.13811

通貨：インドネシア (ルピア) ・ シンガポール (ドル)
 $\alpha=1.332$ ($\rho_s=0.360$)

	VaR (95%)	VaR (99%)	ES (95%)	ES (99%)
フランク	0.02118	0.05993	0.04980	0.11490
正規	0.02133	0.06094	0.05061	0.11699
ガンベル	0.02132	0.06270	0.05203	0.12180

通貨：インドネシア (ルピア) ・ タイ (バーツ)
 $\alpha=1.386$ ($\rho_s=0.203$)

	VaR (95%)	VaR (99%)	ES (95%)	ES (99%)
フランク	0.02562	0.06788	0.05664	0.12629
正規	0.02551	0.07015	0.05830	0.13219
ガンベル	0.02482	0.07298	0.06106	0.14513

通貨：マレーシア (リンギット) ・ フィリピン (ペソ)
 $\alpha=1.258$ ($\rho_s=0.151$)

	VaR (95%)	VaR (99%)	ES (95%)	ES (99%)
フランク	0.01161	0.03427	0.03382	0.09490
正規	0.01154	0.03504	0.03550	0.10266
ガンベル	0.01111	0.03570	0.03648	0.10855

通貨：マレーシア (リンギット) ・ シンガポール (ドル)
 $\alpha=1.529$ ($\rho_s=0.154$)

	VaR (95%)	VaR (99%)	ES (95%)	ES (99%)
フランク	0.00844	0.02442	0.02660	0.08047
正規	0.00834	0.02558	0.02844	0.08865
ガンベル	0.00811	0.02677	0.02919	0.09196

通貨：マレーシア (リンギット) ・ タイ (バーツ)
 $\alpha=1.319$ ($\rho_s=0.448$)

	VaR (95%)	VaR (99%)	ES (95%)	ES (99%)
フランク	0.01232	0.03692	0.03583	0.09971
正規	0.01220	0.03778	0.03766	0.10826
ガンベル	0.01166	0.03850	0.03884	0.11547

通貨：フィリピン (ペソ) ・ シンガポール (ドル)
 $\alpha=1.312$ ($\rho_s=0.473$)

	VaR (95%)	VaR (99%)	ES (95%)	ES (99%)
フランク	0.01043	0.02497	0.02116	0.04533
正規	0.01047	0.02588	0.02179	0.04721
ガンベル	0.01035	0.02720	0.02288	0.05150

通貨：フィリピン (ペソ) ・ タイ (バーツ)
 $\alpha=1.427$ ($\rho_s=0.252$)

	VaR (95%)	VaR (99%)	ES (95%)	ES (99%)
フランク	0.01455	0.03650	0.03066	0.06663
正規	0.01440	0.03802	0.03185	0.07121
ガンベル	0.01395	0.03992	0.03366	0.07996

通貨：シンガポール (ドル) ・ タイ (バーツ)
 $\alpha=1.436$ ($\rho_s=0.411$)

	VaR (95%)	VaR (99%)	ES (95%)	ES (99%)
フランク	0.01114	0.02754	0.02344	0.05152
正規	0.01114	0.02882	0.02427	0.05418
ガンベル	0.01102	0.03037	0.02549	0.05885

特に、本稿の分析からは、VaRが捉えられない情報として、リスク・ファクターの分布の裾の厚さの違い、および漸近的な依存関係の有無が重要であることを示した。したがって、VaRでリスク管理を行っている場合は、これらにも目を配る必要があると考えられる。

また、この結果は、VaRのリスク管理への広範な利用が市場の不安定化につながる可能性があることを示唆している³⁹。Basak and Shapiro [2001] は、投資家がVaRを用いたリスク管理を行っている場合、テイル・リスクによりVaRがリスクに関するミスリーディングな情報を与え得るため、投資家が最適化行動の結果として大幅な損失が発生しやすいポジションを組成することを示した。さらに、こうした投資家行動の結果、市場価格のボラティリティが上昇して市場が不安定化することを示した。本稿では、一般化パレート分布の前提のもとで、VaRでは大幅な損失が発生する可能性や漸近的な依存関係を捉えられない場合があることを示した。これは、VaRのテイル・リスクにより市場が不安定化する可能性があることを示している。

39 VaRが市場の安定性に与える影響に関する実務家の見方は、Dunbar [2001] を参照。

補論1 . 多変量分布の超過値が漸近的に極値コピュラに従うことの証明

この補論では、Ledford and Tawn [1996] が示した、多変量分布の超過値が従うコピュラの導出を説明する。

まず、最大値が漸近的に従う分布を考える。以下の定理は、多変量確率変数の最大値が漸近的に従う分布が満たすべき条件を示したものであり、多変量極値理論で最も重要な定理である（証明はResnick [1987] のProposition 5.11を参照）。

定理

$\{(Z_{1j}, Z_{2j}); j = 1, \dots, n\}$ を、独立で同一の分布に従う2変量確率変数の観測値であるとする。また、この2変量確率変数は、周辺分布がフレシェ分布である分布関数 F に従うとする。つまり、各 ij に対して $\Pr[Z_{ij} \leq z_{ij}] = \exp(-1/z_{ij})$ であるとする。また、各変量の最大値を $M_{z_i, n} \equiv \max(Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{in})$ と定義する。

このとき、以下が成立する。

$$\Pr\left[\frac{M_{Z_{1,n}}}{n} \leq z_1, \frac{M_{Z_{2,n}}}{n} \leq z_2\right] = F^n(nz_1, nz_2) \rightarrow G(z_1, z_2) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

ここで、 $G(z_1, z_2) = \exp\{-V(z_1, z_2)\}$,

$$V(z_1, z_2) = \int_0^1 \max\{sz_1^{-1}, (1-s)z_2^{-1}\} dH(s)$$

ただし、 H は $[0, 1]$ 上の非負の測度で以下を満たす。

$$\int_0^1 s dH(s) = \int_0^1 (1-s) dH(s) = 1$$

次に、周辺分布がフレシェ分布に従う2変量確率変数の超過値の分布も G に従うことを示す（Ledford and Tawn [1996]）。

Z_1, Z_2 を互いに独立で同一のフレシェ分布に従う確率変数であるとする。つまり、各 i で $\Pr[Z_i \leq z_i] = \exp(-1/z_i)$ であるとする。これら変数の同時分布を F_* とする。ここで、Resnick [1987] のProposition 5.15により、 F_* が G_* の吸引域に属する、すなわち、適当に正規化された最大値が G_* に属することは以下と同値である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\log F_*(tz_1, tz_2)}{-\log F_*(t, t)} = \frac{-\log G_*(z_1, z_2)}{-\log G_*(1, 1)} \quad (\text{A-1})$$

これは漸近的結果であるが、十分大きな値 $t = t_c$ では等号が成り立っているとす。すると、各 $t_c z_j$ も大きくなるため、 $z'_j = t_c z_j$ として、十分大きな閾値を超える値 z'_j に対して以下が成り立つと考えることができる。

$$\log F_*(z'_1, z'_2) = \log F_*(t_c, t_c) \frac{\log G_*(z'_1/t_c, z'_2/t_c)}{\log G_*(1, 1)} \quad (\text{A-2})$$

ここで、 G_* は極値分布であるから以下が成り立つ。

$$G(z'_1, z'_2) = \exp\{-V(z'_1, z'_2)\}, \quad (\text{A-3})$$

ただし、 $V(z_1, z_2) = \int_0^1 \max\{sz_1^{-1}, (1-s)z_2^{-1}\}dH(s)$ 。ここで、 H は $[0, 1]$ における非負の測度で $\int_0^1 s dH(s) = \int_0^1 (1-s) dH(s) = 1$ を満たす。

よって、以下の関係が得られる（以下では z' を z と表記し直す）。

$$F_*(z_1, z_2) = \exp\left\{V(z_1, z_2) \frac{t_c \log F_*(t_c, t_c)}{V(1, 1)}\right\} = \exp\{V(z_1, z_2)K\}, \quad (\text{A-4})$$

ただし、 K はある定数。

K を求めるため、閾値 θ_j における F_* の値を考える。この閾値はフレシエ分布の閾値であるとする、 $\theta_j = -1 / \log(1 - \lambda_j)$ が成り立つ。ここで、 $z_1 = \theta_1 = -1 / \log(1 - \lambda_1)$ 、 $z_2 = \infty$ とすると、

$$F_*(-1/\log(1-\lambda_1), \infty) = \exp\{V(-1/\log(1-\lambda_1), \infty)K\}, \quad (\text{A-5})$$

が成り立つ。(A-5)式左辺は $1 - \lambda_j$ 分位点における分布関数の値であるから、分布関数の定義により $1 - \lambda_j$ に等しい。一方、(A-5)右辺は、以下により $\exp\{-K \log(1 - \lambda_1)\}$ に等しい。

$$\begin{aligned} V(-1/\log(1-\lambda_1), \infty) &= \int_0^1 \max\{-s/\log(1-\lambda_1), (1-s)/\infty\}dH(s) \\ &= -(1/\log(1-\lambda_1)) \int_0^1 s dH(s) = -1/\log(1-\lambda_1), \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

したがって、 $1 - \lambda_1 = \exp\{-K \log(1 - \lambda_1)\}$ より、 $K = -1$ である。

よって、周辺分布がフレシエ分布であるような多変量確率変数の超過値は漸近的に以下の分布になる。

$$F_*(z_1, z_2) = \exp\{-V(z_1, z_2)\}, \quad (\text{A-7})$$

ただし、 $V(z_1, z_2) = \int_0^1 \max\{sz_1^{-1}, (1-s)z_2^{-1}\}dH(s)$ 。ここで、 H は $[0, 1]$ における非負の測度で $\int_0^1 s dH(s) = \int_0^1 (1-s) dH(s) = 1$ を満たす。

この結果は、周辺分布がフレシエ分布に従うことを前提にして同時分布が満たすべき性質を導出している。しかし、周辺分布がフレシエ分布でない場合でも、変数変換を用いて最大値が漸的に従うコピュラを導き出すことができる。これは、「周辺分布を変換してもコピュラは不変」というスクラーの定理を用いることで可能となる⁴⁰。具体的には、 $u_i \equiv \Pr[Z_i \leq z_i] = \exp(-1/z_i)$ として、 $z_i = -1 / \ln u_i$ を

40 この変数変換を用いた考え方が妥当であることは、Resnick [1987] Proposition 5.10で証明されている。

$G(z_1, z_2) = \exp \{-V(z_1, z_2)\}$ に代入して以下のコピュラを得る。

$$C(u_1, u_2) = \exp \left\{ -V \left(-\frac{1}{\log u_1}, -\frac{1}{\log u_2} \right) \right\}, \quad (\text{A-8})$$

ただし、 $V(z_1, z_2) = \int_0^1 \max\{sz_1^{-1}, (1-s)z_2^{-1}\} dH(s)$ 。ここで、 H は $[0, 1]$ における非負の測度で $\int_0^1 s dH(s) = \int_0^1 (1-s) dH(s) = 1$ を満たす。

補論2．損失額が一般化パレート分布に従う場合のVaRのテイル・リスク

この補論では、フェラー（Feller）の安定分布の畳み込みの定理を用いて、周辺分布が同一の裾指数を持つ一般化パレート分布に従う場合のVaRのテイル・リスクを分析する。

周辺分布が同一の裾指数を持つ一般化パレート分布に従う独立な確率変数の和の性質に関しては、正則変動する分布関数に関する畳み込みの定理（Feller [1969], pp. 373-374、Embrechts, Klüppelberg, and Mikosch [1997], Lemma 1.3.1）を使った考察がなされている（Geluk, Peng, and de Vries [2000], Embrechts, McNeil and Straumann [2002], Hyung and de Vries [2001]）。ここでは、その考察の結論をテイル・リスクという観点を織り込んで説明する。

一般化パレート分布に従う互いに独立な2つの確率変数 Z_1 、 Z_2 があり、その分布関数は以下で表されるとする。

$$G_{\xi, \sigma}(x) = 1 - (1 + \xi \cdot \frac{x}{\sigma})_+^{-1/\xi} . \quad (\text{A-9})$$

このとき、2つの確率変数の和 $Z_1 + Z_2$ の分布関数は、(B-1)式の畳み込みとして以下で表すことができる。

$$H(x) \equiv \Pr\{Z_1 + Z_2 \leq x\} \equiv \int_0^x G_{\xi, \sigma}(x-y) dG_{\xi, \sigma}(y) . \quad (\text{A-10})$$

ここで、 $\bar{G}_{\xi, \sigma}(x) \equiv 1 - G_{\xi, \sigma}(x)$ で定義される Z_1 、 Z_2 の関数 $\bar{F}_m(x)$ について、以下が成り立つ。

$$\bar{G}_{\xi, \sigma}(x) = (1 + \xi \cdot \frac{x-\theta}{\sigma})_+^{-1/\xi} = x^{-1/\xi} \left(\frac{1}{x} + \frac{\xi(x-\theta)}{x\sigma} \right)_+^{-1/\xi} . \quad (\text{A-11})$$

ここで、(B-3)式の最右辺のうち $(1/x + \xi(x-\theta)/\sigma)_+^{-1/\xi}$ は緩慢変動する関数⁴¹であることから、Feller [1969] のpp. 373-374（あるいは、Embrechts, Klüppelberg, and Mikosch [1997], Lemma 1.3.1）の結果により、 x が十分に大きいとき、関数 $\bar{H}(x) \equiv 1 - H(x)$ に関して以下が成り立つ。

$$\bar{H}(x) \approx x^{-1/\xi} \left\{ \left(\frac{1}{x} + \frac{\xi(x-\theta)}{x\sigma} \right)_+^{-1/\xi} + \left(\frac{1}{x} + \frac{\xi(x-\theta)}{x\sigma} \right)_+^{-1/\xi} \right\} = 2(1 + \xi \cdot \frac{x-\theta}{\sigma})_+^{-1/\xi} . \quad (\text{A-12})$$

41 緩慢変動する関数とは、以下を満たす関数 $L(x)$ のことである。詳細はFeller [1969] を参照。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$$

したがって、2つの互いに独立な確率変数の和 $Z_1 + Z_2$ の分布関数は以下で表される。

$$H(x) \approx 1 - 2(1 + \xi \cdot \frac{x}{\sigma})_+^{-1/\xi}. \quad (\text{A-13})$$

一方、同じ一般化パレート分布に従う完全に依存する2つの確率変数の和は、 $2Z_1$ と同じ分布に従う。したがって、完全に依存する2つの確率変数の和の分布関数 $I(x)$ は、次のように求められる。

$$I(x) \equiv \Pr\{2Z_1 \leq x\} = \Pr\{Z_1 \leq x/2\} = G_{\xi, \sigma}(x/2) = 1 - (1 + \xi \cdot \frac{x}{2\sigma})_+^{-1/\xi}. \quad (\text{A-14})$$

さて、一般的に、2つの分布関数 $H(x)$ 、 $I(x)$ に交点が存在する（ $H(x) = I(x)$ に解が存在する）と、VaRの信頼水準をその交点での分布の累積確率よりも低くする場合、VaRにテイル・リスクが発生する。 $\xi < 1$ では $H(x) = I(x)$ には解が存在し、この解からこの交点における分布の累積確率 $p(\xi)$ を求めることができる⁴²。

$$p(\xi) = 1 - 2(1 + \frac{2^\xi - 1}{1 - 2^{\xi-1}})^{-1/\xi} \quad (\xi < 1). \quad (\text{A-15})$$

(A-15)式の ξ に具体的な値を代入して計算すると、通常のVaRの信頼水準である95～99%信頼水準でテイル・リスクが発生するためには、裾指数が0.9以上でなければならないことがわかる。裾指数が0.9以上というのは、1.1次モーメントが発散するという非常に裾の厚い分布であり、少なくとも金融データではこうした分布は存在しないと考えられる。したがって、各証券の損失額が同一の一般化パレート分布に従う場合は、信頼水準を十分に高くとれば、VaRにテイル・リスクは存在しないことがわかる。

42 $\xi \geq 1$ の場合は、すべての x で $H(x) < I(x)$ が成立しているため、完全依存の場合が独立の場合を1次確率優越している。これは、単調増加な効用関数を持つ任意の投資家が完全依存の場合を常に選好することを意味している。したがって、この場合はポートフォリオ分散効果が働かず、むしろ逆に、ポートフォリオ分散が望ましくない結果をもたらす。

このとき、VaRは劣加法性を満たさないが、常に1次確率優越しているポートフォリオのリスクが小さいと判断しているという意味で、テイル・リスクは存在しない。

なお、これと同様のケースは、Embrechts, McNeil, and Straumann [2002]でも考察されている(Example 7)。

参考文献

- BISグローバル金融システム委員会、「1998年秋の国際金融危機」、1999年
、「大規模金融機関におけるストレステスト:ストレステストの現状とテスト結果の
集計に関する論点」、2000年
- 森本祐司、「金融と保険の融合について」、『金融研究』第19巻別冊第1号、日本銀行金融研
究所、2000年、289～342頁
- 山井康浩・吉羽要直、「バリュー・アット・リスクの妥当性について 理論サーベイによる
期待ショートフォールとの比較分析」、『金融研究』第20巻第2号、日本銀行金融研究所、
2001年a、33～68頁
- ・、「期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測 具体的
な計算例による考察」、『金融研究』第20巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2001年b、
53～94頁
- ・、「リスク指標の性質に関する理論的整理 VaRと期待ショートフォール
の比較分析」、『金融研究』第20巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2001年c、95～
131頁
- Acerbi, C., C. Nardio, and C. Sirtori, “Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk
Management,” Working Paper, Italian Association for Financial Risk Management, 2001.
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, “Thinking Coherently,” *Risk*, 10 (11), 1997, pp. 68-
71.
- ・, ・, and ・, “Coherent Measures of Risk,” *Mathematical Finance*, 9 (3),
1999, pp. 203-228.
- Basak, S., and A. Shapiro, “Value-at-Risk Based Risk Management: Optimal Policies and Asset
Prices,” *The Review of Financial Studies*, 14 (2), 2001, pp. 371-405.
- Bouyé, E., “Multivariate Extremes at Work for Portfolio Risk Management,” Working Paper,
Financial Econometrics Research Centre, CUBS, London, 2001.
- Capéraà, P., A. L. Fougères, and C. Genest, “A Nonparametric Estimation Procedure for Bivariate
Extreme Value Copulas,” *Biometrika*, 84 (3), 1997, pp. 567-577.
- Coles, S., *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer-Verlag, 2001.
- ・, J. E. Heffernan, and J. A. Tawn, “Dependence Measures for Extreme Value Analysis,”
Extremes, 2 (4), 1999, pp. 339-365.
- Danielsson, J., “The Emperor Has No Clothes: Limits to Risk Modelling,” Working Paper,
Financial Markets Group, London School of Economics, 2001.
- Dunbar, N., *Inventing Money: The Story of Long-Term Capital Management and the Legends
Behind It*, John Wiley and Sons, 2001.
- Embrechts, P., C. Klüppelberg, and T. Mikosch, *Modelling Extremal Events for Insurance and
Finance*, Springer-Verlag, 1997.
- ・, L. de Haan, and X. Huang, “Modelling Multivariate Extremes,” *Extremes and Integrated Risk
Management*, P. Embrechts, editor, Risk Waters Group, 2000, pp. 59-67.

- , A. McNeil, and D. Straumann, "Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls," *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, M. A. H. Dempster, editor, Cambridge University Press, 2002, pp. 176-223.
- Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 2*, John Wiley and Sons, 1965. (国沢清典監訳、『確率論とその応用 (上・下)』、紀伊國屋書店、1969年)
- Frees, E. W., and E. A. Valdez, "Understanding Relationships Using Copulas," *North American Actuarial Journal*, 2 (1), 1998, pp. 1-25.
- Geluk, J., L. Peng, and C. de Vries, "Convolutions of heavy tailed random variables and applications to portfolio diversification and MA (1) time series," *Advances in Applied Probability*, 32 (4), 2000, pp. 1011-1026.
- Gumbel, E. J., "Bivariate Exponential Distributions," *Journal of the American Statistical Association*, 55 (292), 1960, pp. 698-707.
- Hartmann, E., S. Straetmans, and C. G. de Vries, "Asset Market Linkages in Crisis Periods," Working Paper, 2000.
- Hauksson, H. A., M. Dacorogna, T. Domenig, U. Müller, and G. Samorodnitsky, "Multivariate Extremes, Aggregation and Risk Estimation," Working Paper, Olsen & Associates, 2000.
- Heffernan, J. E., "A Directory of Coefficients of Tail Dependence," *Extremes*, 3 (3), 2000, pp. 279-290.
- Hyung, N., and C. de Vries, "Portfolio Diversification Effects and Regular Variation in Financial Data," Tinbergen Institute Discussion Paper, TI 2001-070/2, 2001.
- Joe, H., *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, 1997.
- Jorion, P., "Risk Management Lessons from Long-Term Capital Management," *European Financial Management*, 6, 2000, pp. 277-300.
- Kotz, S., and S. Nadarajah, *Extreme Value Distributions Theory and Applications*, Imperial College Press, 2000.
- Ledford, A. W., and J. A. Tawn, "Statistics for Near Dependence in Multivariate Extreme Values," *Biometrika*, 83 (1), 1996, pp. 169-187.
- , and , "Modelling Dependence within Joint Tail Regions," *Journal of Royal Statistical Society Series B*, 59 (2), 1997, pp. 475-499.
- Longin, F., and B. Solnik, "Extreme Correlation of International Equity Markets," *Journal of Finance*, 56 (2), 2001, pp. 649-676.
- Lucas, A., P. Klaassen, P. Spreij, and S. Straetmans, "An Analytic Approach to Credit Risk of Large Corporate Bond and Loan Portfolios," *Journal of Banking and Finance*, 25 (9), 2001, pp. 1635-1664.
- McNeil, A. J., "Extreme Value Theory for Risk Managers," *Extremes and Integrated Risk Management*, Risk Waters Group, 2000, pp. 3-18.
- Merton, R., "On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29 (2), 1974, pp. 449-470.
- Nelsen, R. B., *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag New York, 1999.
- Reiss, R. D., and M. Thomas, *Statistical Analysis of Extreme Values: from Insurance, Finance, Hydrology, and Other Fields*, Birkhäuser Verlag, 2000.

- Resnick, R. I., *Extreme Values, Regular Variations, and Point Process*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1987.
- Rockafeller, R. T., and S. Uryasev, "Optimization of Conditional Value-at-Risk," *Journal of Risk*, 2 (3), 2000, pp. 21-41.
- Tawn, J. A., "Bivariate Extreme Value Theory: Models, and Estimation," *Biometrika*, 75 (3), 1988, pp. 397-415.