

# 商品流動性リスクの計量化に 関する一考察(その2)

## 内生的流動性リスクを考慮した ストレス・テスト

よしふじ しげる おおたけふみのぶ  
吉藤 茂 / 大嶽文伸

### 要 旨

1997年10月のアジア通貨危機や1998年8月のロシア危機以来、商品流動性リスクがクローズ・アップされ、その計量化に向けさまざまな取り組みがなされている。本稿では、アジア通貨危機およびロシア危機発生時における実証分析から、リスク管理上のポイントを整理したうえで、ストレス・テストに焦点を絞った商品流動性リスク計量化手法を提案する。

本稿での成果は、以下の2点である。(1)実証分析から、リスク管理上の留意すべきポイントとして、(i)ファット・テールな状況の顕現化、(ii)相関関係の崩壊(流動性危機の伝播および流動性への逃避現象)、(iii)保有期間長期化に伴い相場の変動性や相関関係の変化が大きくなることの3点を定量的に示した。(2)外生的流動性リスクに焦点を絞り、(i)ファット・テール調整、(ii)相関崩壊を組み込んだストレス・テスト手法を内生的流動性リスクにも対応可能なモデルへと拡張した。具体的には、各国株価指数先物市場の取引高データから市場ごとのマーケット・インパクト関数を導出し、同関数をファット・テール調整係数に組み込むことで内生的流動性リスクに対応した。

キーワード：外生的流動性リスク、内生的流動性リスク、ファット・テール調整係数、ハースト指数、相関崩壊、マーケット・インパクト

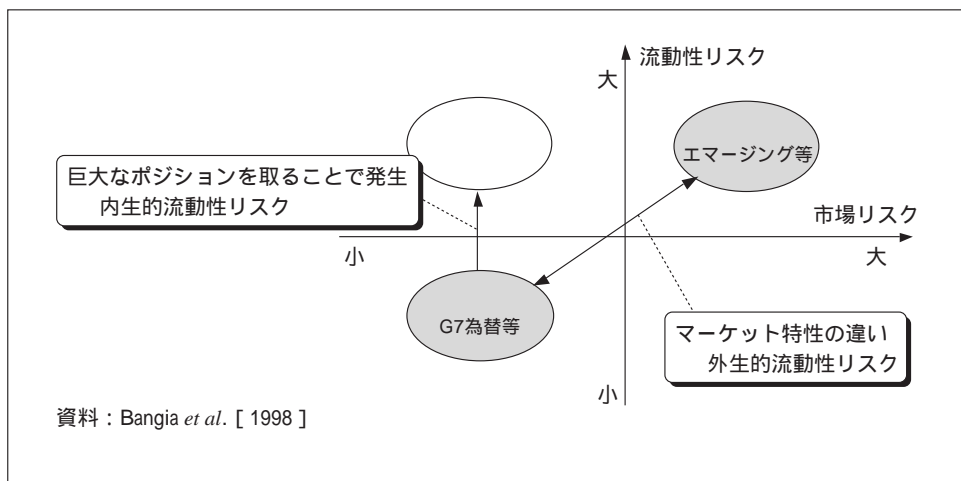
本稿は、吉藤・大嶽 [2000] (「商品流動性リスクの計量化に関する一考察 - ストレス・テストに焦点を当てて - 」 <現代ファイナンス、No.8、2000年9月>) の続編として作成したものである。また、「金融リスクの計量とマーケット・マイクロストラクチャー」と題する日本銀行金融研究所FEワークショップにおける発表に対して、参加者から頂いた数多くの貴重なコメントに深謝したい。なお、本稿の内容・意見は筆者個人に属し、東京三菱銀行や日本銀行の公式見解を示すものではない。

吉藤 茂 東京三菱銀行 総合リスク管理室 (E-mail: shigeru\_yoshifuji@btm.co.jp)  
大嶽文伸 東京三菱銀行 総合リスク管理室 (E-mail: fuminobu\_otake@btm.co.jp)

## 1. はじめに

1997年10月のアジア通貨危機や1998年8月のロシア危機以来、「保有ポジションを適切なタイミングかつ適切な価格で流動化できないことにより損失を被るリスク（大澤・村永 [1998]）」と定義される商品流動性リスク<sup>1</sup>がクローズアップされ、その計量化に向けさまざまな取り組みがなされている。Bangia *et al.* [1998] は、市場リスクと商品流動性リスクの関係を図1のように整理している。図1は、市場リスクの大きさを横軸に、商品流動性リスクの大きさを縦軸に取った平面上に、さまざまな市場でのポジションをマッピングしたものである。ほとんどの市場は、あるいはのエリアにマッピングされる。つまり、G7の為替マーケットのように市場・商品流動性共に（相対的に）リスクの小さい市場でのポジションテイクが、エマージング・マーケットのように市場・商品流動性共にリスクの大きい市場でのポジションテイクが一般的である。Bangia *et al.* [1998] は、この市場特性の違いによる商品流動性リスクを外生的流動性リスク（exogenous liquidity risk）と定義している。一方、通常は商品流動性の高い市場でも巨大なポジションを取ることで商品流動性リスクが発生するケースもあり（図中タイプ タイプ への移動）、このリスクを、内生的流動性リスク（endogenous liquidity risk）と定義している。吉藤・大嶽 [2000] では、外生的流動性リスクに焦点を絞ったストレス・テスト手法を考案した。その続編に当たる本稿では、内生的流動性リスクにも対応すべく、同ストレス・テスト手法を拡張する。

図1 商品流動性リスクと市場リスクの関係



1 流動性という場合、資金繰り上のアベイラビリティ、いわゆる「資金流動性」を意味する場合もあるが、本稿では、上述の定義に従うこととする。本稿では、「資金流動性」と区別するために、「商品流動性」という用語を用いることとする。

本稿の構成は、以下のとおりである。2節で、アジア通貨危機およびロシア危機に関する実証分析を行い、流動性危機というストレス発生時のリスク特性を整理する。3節では、前節で明らかにしたリスク特性に対応したストレス・テスト手法を構築する。まず、3節(1)で外生的流動性リスクに焦点を絞った吉藤・大嶽[2000]のストレス・テスト手法を展開する。3節(2)で同ストレス・テスト手法を内生的流動性リスクにも対応すべく拡張する。続く4節では、同手法をサンプル・ポートフォリオに適用した応用分析を行う。最後の5節で、本稿の総括を行う。

## 2．実証分析 アジア通貨危機およびロシア危機

本節では、アジア通貨危機およびロシア危機に関する実証分析を行い、流動性危機というストレス発生時のリスク特性を明らかにする。この実証分析の結果が、3節でのモデル構築、4節での応用分析におけるストレス・シナリオ策定の基礎となる。2節(1)ではアジア通貨危機発生時のリスク特性を、2節(2)ではロシア危機発生時のリスク特性を、2節(3)では両者の違いを整理する。

### (1) アジア通貨危機

アジア通貨危機は、1997年7月のタイ・バーツの為替レート引下げに端を発し、瞬く間に周辺諸国に波及した。本節では、吉藤・大嶽[2000]での実証分析の結果から、アジア通貨危機発生時のリスク特性を明らかにする。同分析では、便宜的に1997年4～9月の半年間を「アジア通貨危機発生前」、1997年10月～1998年3月の半年間を「アジア通貨危機発生後」とし、日本・米国・英国・タイ・香港・シンガポール等約20カ国における債券・スワップ・為替・株式およびコモディティの全77市場<sup>2</sup>に関し、相場変動性や相関関係の変化を調べた。

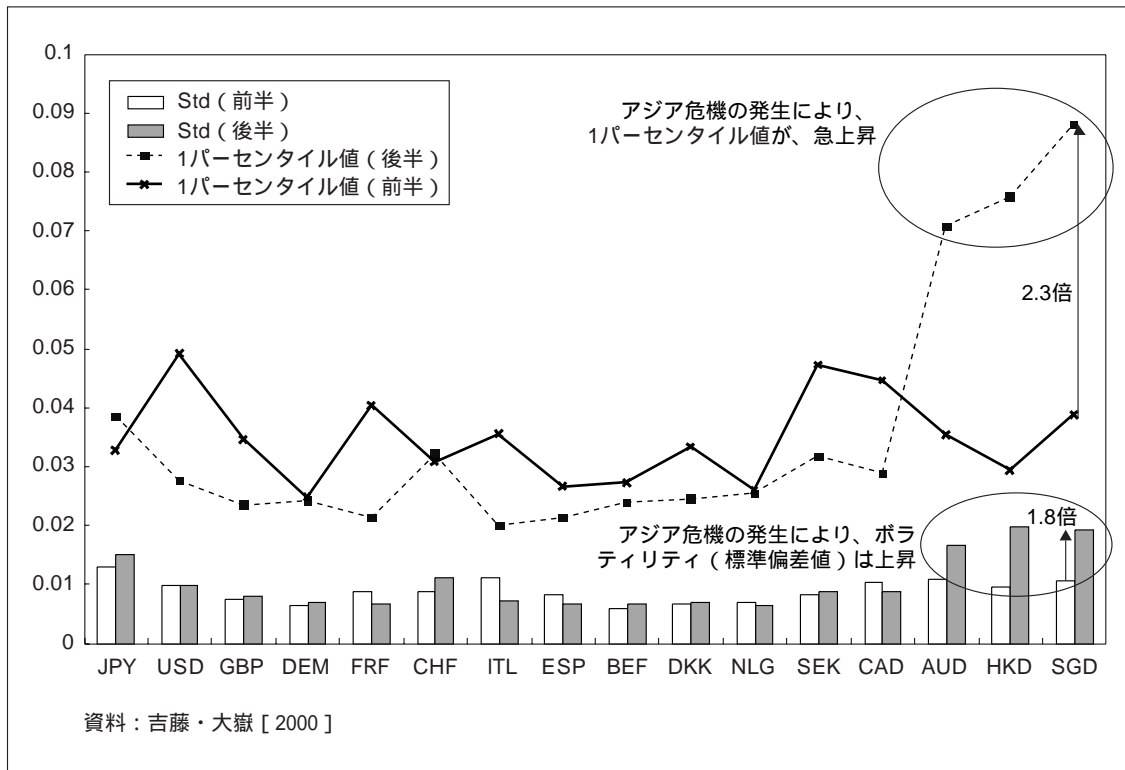
同実証分析の結果は、次の2点に集約できる。

ファット・テールな状況の顕現化：図2は、アジア通貨危機発生前後での対数収益率ベースのボラティリティ（標準偏差）と1パーセンタイル値<sup>3</sup>を比較してみたものである。アジアの市場（香港やシンガポール）では、アジア通貨危機の発生に伴いボラティリティが上昇しているが、これらの市場では1パーセンタイル値がそれ以上に急上昇しており、リスク管理の観点からは注意が必要である。例えば、標準的な分散共分散法の場合、ボラティリティを信頼係数倍することで、求めたい信頼水準のリスク量を算出（信頼水準=99%であ

2 分析対象は、補論1.参照。

3 対数収益率を小さい順に並べた1%目の数値から平均値を差し引いたもの。標準正規分布の場合、標準偏差値の2.33倍と一致する。

図2 債券市場における相場変動性の比較



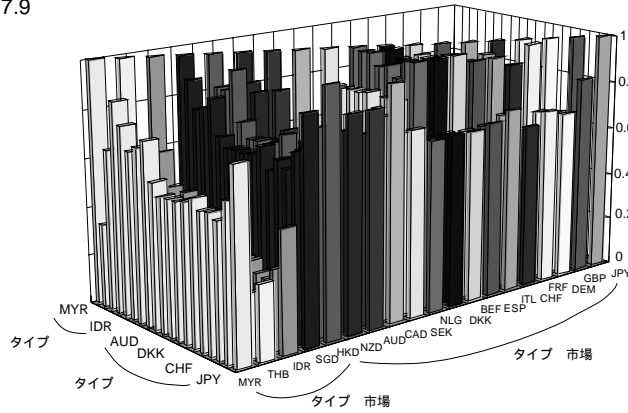
れば、ボラティリティを2.33倍することでリスク量を算出)するが、1パーセンタイル値がこの倍率以上に大きくなっている場合<sup>4</sup>、リスクは過小評価されることとなる。

相関関係の崩壊：図3は、為替市場におけるアジア通貨危機発生前後での相関関係の変化を見てみたものである。ここでは、便宜的にアジア市場を「タイプ 市場」、それ以外の市場を「タイプ 市場」として、関係を記述する。「タイプ 市場」内では、流動性危機が伝播する形で相関が高まる一方、流動性への逃避現象として「タイプ 市場」と「タイプ 市場」間の相関関係は弱まる傾向が図より読み取れる。ストレス発生時には相関関係が大きく変化しており、相関関係を固定した標準的なリスク計測手法では、ポートフォリオ全体のリスクは捉えられないといえる。

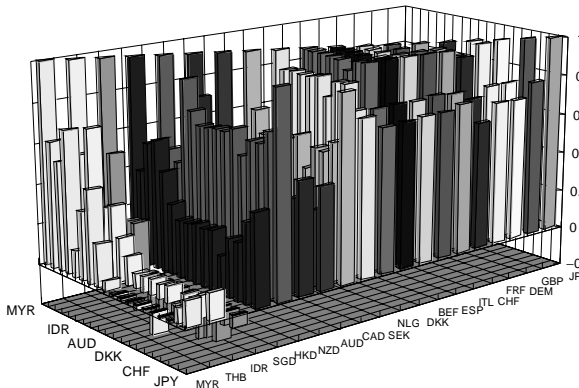
4 シンガポールでは、アジア通貨危機の発生により、1パーセンタイル値が危機発生前の2.3倍になっており、結果として1パーセンタイル値は標準偏差の4.5倍にまでなっている。

図3 為替市場における相関関係の変化

前半：97.4-97.9

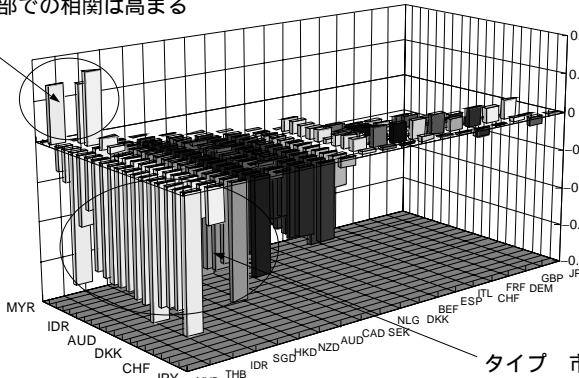


後半：97.10-98.3



変化幅

タイプ 内部での相関は高まる



タイプ 市場とタイプ  
市場間の相関は弱まる

資料：吉藤・大嶽 [ 2000 ]

## (2) ロシア危機

ロシア危機は、1998年8月17日のロシア政府によるルーブル切下げと90日間の対外債務支払凍結（モラトリアム）に端を発し、新興国のみならず先進国の金融市場が混乱した事象である。その過程では、ロシア向けの巨額エクスポージャーを抱えていたLTCM（Long Term Capital Management）<sup>5</sup>の危機が表面化し、米金融市場が混乱したが、Fedの緊急利下げ等の対応が奏効し、その後急速に沈静化した。本項では、前項に倣い便宜的に1998年2月16日～8月15日の半年間を「ロシア危機発生前」、1998年8月16日～1999年2月15日の半年間を「ロシア危機発生後」とし、東欧・中南米・アジア・G7等の31ヵ国における為替・株式市場<sup>6</sup>に関し、相場変動性や相関関係の変更を調べた。本項では、吉藤・大嶽〔2000〕での分析（図2、3に結果を要約）と異なり、保有期間長期化の影響に焦点を当てて分析を行った<sup>7</sup>。

本実証分析からは、次の3点が示唆される。

保有期間長期化の影響。図4は、ロシア・東欧（除くロシア）・中南米・アジア・G7等という地域別に、ロシア危機前後での相関関係の変化を保有期間を変えて（1日および10日）調べてみたものである。保有期間1日の場合の相関関係の変化は小さく、アジア通貨危機のような相関関係の崩壊は起きていない。しかしながら、保有期間を長期化（10日）すると相関関係の変化が大きくなる傾向がみて取れる。また、表1に保有期間別のボラティリティの変化率（ロシア危機後／ロシア危機前）を記載したが、為替市場をみると、保有期間10日でみた方が、ボラティリティの上昇率が大きいことがわかる<sup>8</sup>。以上より、保有期間1日のボラティリティおよび相関関係を固定的に使い $\sqrt{T}$ 倍ルール<sup>9</sup>を採用する標準的なリスク計測手法では、保有期間を長期化した場合のリスクを捉えられない可能性があることを指摘できる。この点については、4節(1)の応用分析で定量的に確認する。なお、ロシア危機発生時の相関関係の変化パターンについては、アジア通貨危機と比較する形で2節(3)で整理する。

5 ロバート・マートンやマイロン・ショールズなどのノーベル賞受賞者を含む著名な学者陣を揃えた米国のヘッジ・ファンド。なお、ヘッジ・ファンドとは、「富裕層や年金基金から資金を預かり、これを高利回りで運用し、その成功報酬などを得る機関である」（益田〔2000〕）と説明されることが多いが、それ以上の明確な定義は存在しない。そもそもが、私的な（私募）投資ファンドであり、免許業種ではなく、規制・監督当局も業界団体も存在しない。

6 分析対象は、補論1.参照。前稿での実証分析に比べ、分析対象国を増やした結果、金利のデータ等取得不能なものがあり、分析対象市場は（逆に）為替と株に絞らされた。

7 後述するように、本稿で分析対象としたロシア危機時の事例では、保有期間1日の場合の相関関係の変化が小さかったため、分析内容をより深めた。

8 株式市場では、ロシア危機前と危機後の半年間でボラティリティの上昇はみられなかった。ロシア株式市場（RTSI）は、ロシア危機に先行する（警鐘を鳴らす）形で1998年春頃から株価が下落しており、ロシア危機前後は世界同時株安の様相を呈していたが、LTCM対応としてのFedの緊急利下げが奏効し、その後急速に沈静化した。

9 データがi.i.d. (independently and identically distributed) であることを仮定したうえで、保有期間T日のリスク量を保有期間1日のリスク量の $\sqrt{T}$ 倍として求める方法。

図4 保有期間別の相関関係の変化

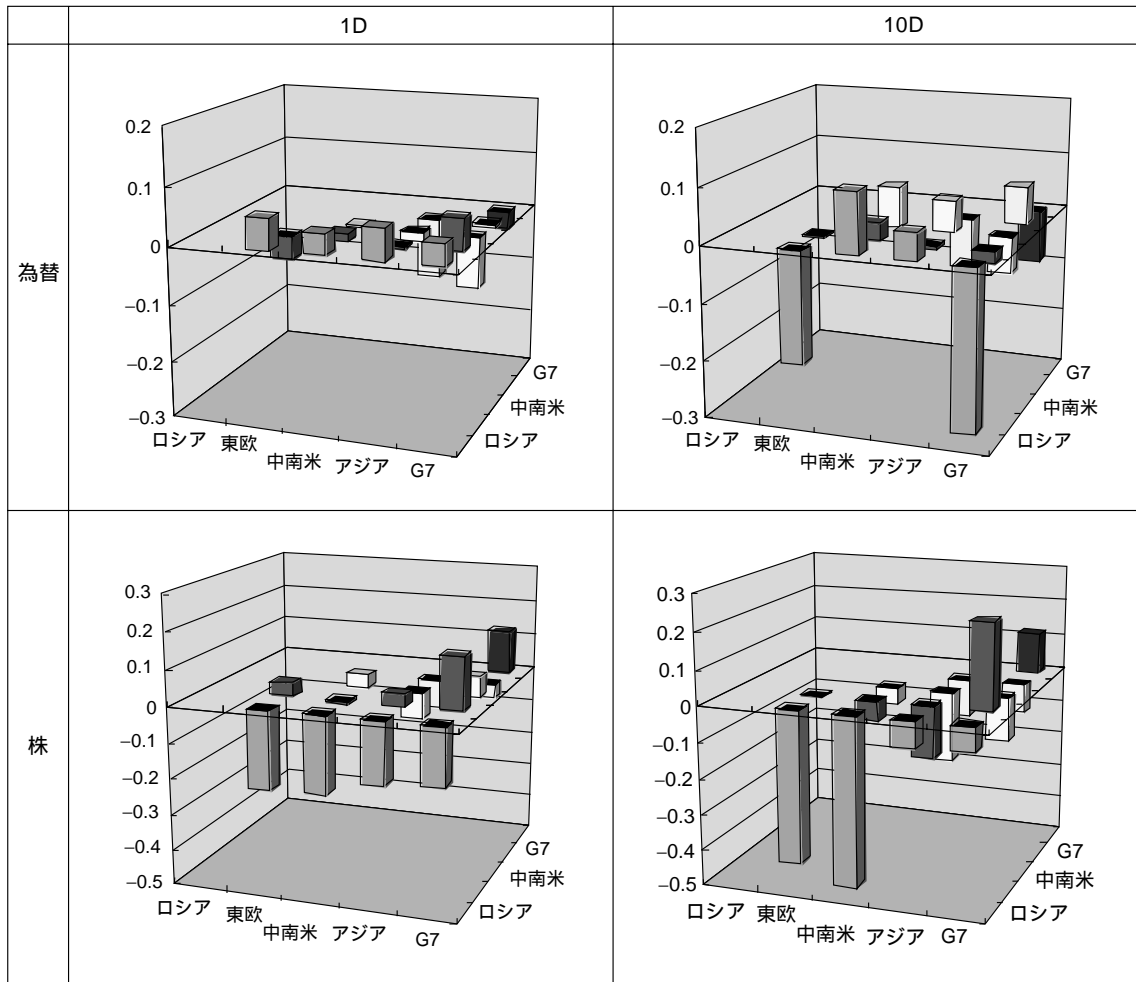


表1 保有期間別のボラティリティの変化率

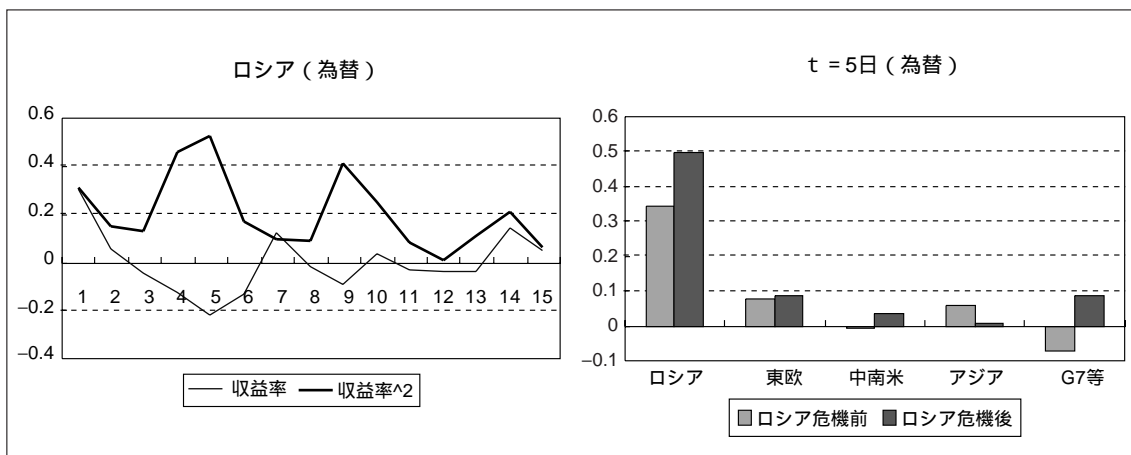
		ロシア	東欧	中南米	アジア	G7等
為替	1D	147.5	1.4	5.5	0.7	1.4
	10D	247.7	1.8	13.0	0.8	1.8
株式	1D	1.6	1.6	1.9	1.3	1.6
	10D	1.5	1.6	1.7	1.3	1.6



以下では、為替市場にみられる保有期間を長期化した場合のボラティリティの上昇や、相関関係の変化拡大の裏側に潜むであろう相場変動の特徴について考察した結果を示す。

自己相関の高まり：図5左図は、ルーブル/ドルを例に収益率（対数収益率）および収益率2乗値の自己相関<sup>10</sup>を示したものである。標準的なVaR計測で仮定しているように日々の相場変動が無相関<sup>11</sup>ならば、 $t=1$ 日以降の自己相関は急速に0に収束することが予想される。対数収益率の自己相関は急速に0に収束するが、2乗値ベースは徐々にしか0に収束しないことがわかる。これは、一度相場が大きく変動するとそれが暫く続く傾向、すなわち相場変動に記憶性があることを意味している。右図は、 $t=5$ 日における収益率2乗値の相関を地域別に示したものである。グラフより、ロシアを筆頭に危機発生で自己相関が高まっている様子が窺える。前述したようにiidを仮定した $\sqrt{T}$ 倍ルールでは、保有期間を長期化した場合のリスクを正しく把握できない可能性が指摘できる。

図5 自己相関



同符号継続確率の高まり：図6左図は、高安 [ 2001 ] 等の分析を参考に、同じ方向の相場変動（相場上昇・不変・下落）が何日間継続するかという累積確率分布のグラフをルーブル/ドルについて示したものである（ただし、縦軸は対数変換してある）。標準的なVaR計測で仮定しているように、日々の相場変動が独立ならば、相場変動をベルヌーイ試行として表現することができ、その分布はベルヌーイ分布に従う。さらに、本分析においては、その分布は

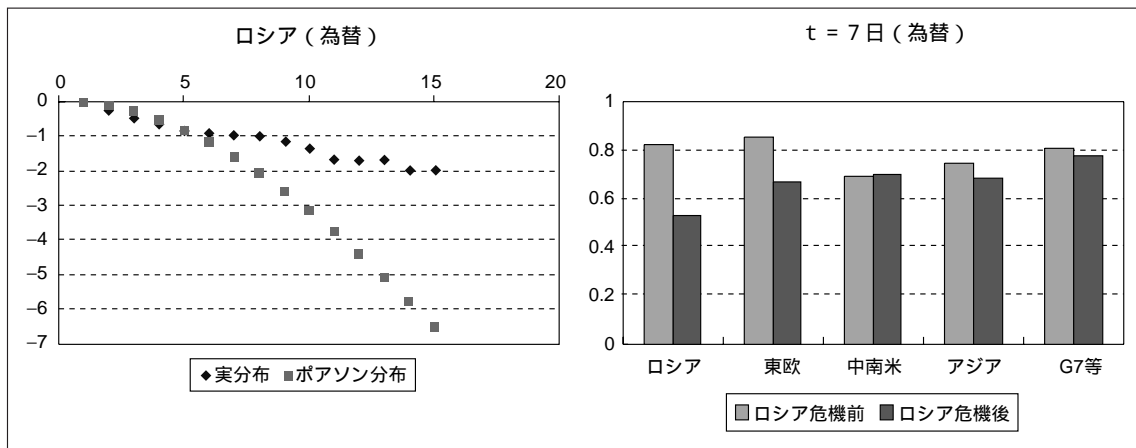
10 期間 ( $t$ 日)を1日ずつずらしながら、今日の収益率と $t$ 日前の収益率の相関（もしくは収益率の2乗値同士の相関）を計算したものを。

11 i.i.d.よりも緩やかな仮定といえる。



ポアソン分布<sup>12</sup>に近似されたとしている。これは、ベルヌーイ試行の $n$ （試行回数）が十分大きく $\lambda(=np)$ が安定的であると考えられるためである。図6左図より、7日を過ぎたあたりから、実分布の確率の方がポアソン分布で予想されるそれよりも大きくなっていく傾向がみて取れる。これは、7日間以上同方向の相場変動が続いた場合、それ以降も同方向の相場変動が継続される可能性が高いことを示している。図6右図は、地域別に $t=7$ 日での同符号継続確率の実データから求めた数値とポアソン分布を仮定した場合の数値との比率を示したものである。この比率が小さいほど、ベルヌーイ試行で想定するよりも同方向の相場変動が続く可能性が高く、トレンドが発生していることを意味している。図6より、ロシアを筆頭に危機発生で同方向の相場変動が継続される可能性が高まっている様子が窺える。なお、本分析の理論的背景は補論1.で述べる。

図6 同符号継続確率



### （3）まとめ アジア通貨危機とロシア危機を比較して

本節では、商品流動性リスクが注目を集める契機となったアジア通貨危機およびロシア危機を対象に実証分析を行った。原田・宿輪 [ 1999 ] は、その当時の経済環境などの発生原因に遡り、通貨危機を「中南米型（旧型）」と「21世紀型」に分類し、アジア通貨危機を後者にロシア危機を前者に位置付けている。ここでは、当時の経済環境など発生原因には立ち入らないし、分析手法や対象が異なるので単純な比較はできないが、市場リスク管理上留意すべき相場変動の特徴は、アジア通貨危機とロシア危機で差異がみられた。流動性危機（通貨危機）の波及経路は相関関係の変化を通じ、ポートフォリオ全体のリスク量に大きな影響を与える。アジア通貨

12 希現象と呼ばれるような出現確率の小さい事象に適用される分布で、ベルヌーイ分布（確率密度関数  $f(x; n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$ ）において、試行回数  $n \rightarrow \infty$ 、出現確率  $p \rightarrow 0$ 、 $np \rightarrow \lambda$ （正の実数）とした時の分布である。その確率密度関数  $f$  は、 $f(x; \lambda) = \lambda^x e^{-\lambda} / x!$  で表される。

危機の際には、地理的に近い地域への流動性危機の伝播および流動性の高い市場に向かった流動性への逃避という形で相関関係の大きな変化が観測された。一方、ロシア危機の時には、保有期間1日では大きな相関関係の変化はみられないものの、保有期間を長期化（10日）することで相関関係の変化が大きくなる傾向がみ取れた（その背景には相場変動の記憶性があると推察される）。また、為替市場では地理的に遠い中南米への流動性危機の飛び火現象が観測されている。

図7にアジア通貨危機、図8にロシア危機時<sup>13</sup>の相関関係の変化を模式的に表してみた。次節では、こういった相関関係の変化に対応可能なストレス・テスト手法を構築し、続く4節ではロシア危機時の相関関係の変化をストレス・シナリオとする応用分析を行う<sup>14</sup>。

図7 アジア通貨危機時の相関関係の変化（模式図）

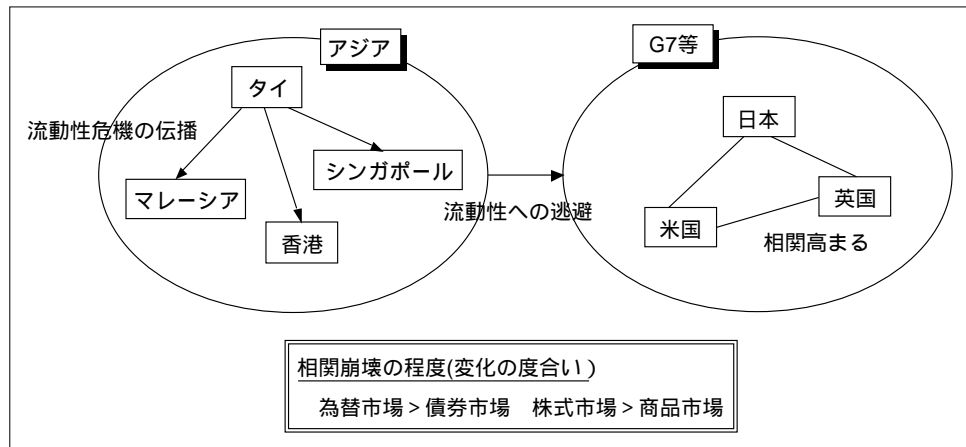
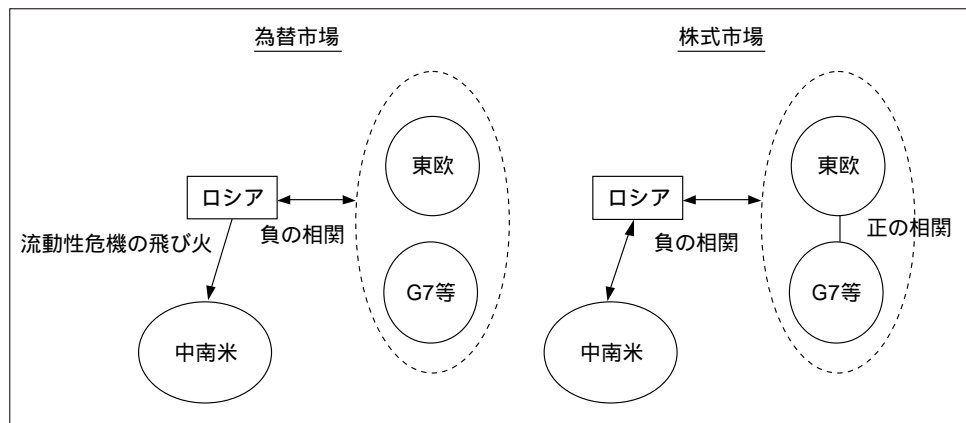


図8 ロシア危機時の相関関係の変化（模式図）



13 アジアの各市場は、アジア通貨危機の余波から、各国で異なる動きを示したことにより同一地域として集約化して表現することが困難であるため、模式図からは除外した。

14 アジア通貨危機時の相関関係の変化をストレス・シナリオとする応用分析については、吉藤・大嶽 [2000] を参照されたい。

### 3. リスク計量化モデル（ストレス・テスト手法）の構築

本節では、2節で明らかにした商品流動性危機というストレス発生時の相場変動特性に対応したストレス・テスト手法を構築する。吉藤・大嶽 [2000] では、外生的流動性リスクに焦点を当て、アジア通貨危機時の実証分析から明らかとなったファット・テールな状況の顕現化、相関関係の崩壊に対応したストレス・テスト手法を考案した。本稿では、これを基本モデルと位置付け、その概要を3節(1)にてまず概説する。続く3節(2)では、同モデルのファット・テール調整機能を内生的流動性リスクに対応できるように拡張を図った。

#### (1) 基本モデル ファット・テール調整と相関崩壊

吉藤・大嶽 [2000] では、Bangia *et al.* [1998] およびFinger [1997] の手法を参考に、分散共分散法のフレームワークを堅持しつつ、ファット・テール調整と相関崩壊（相関関係の変化）に対応できるストレス・テストの手法を構築した。その基本的フレームを図9に示す。

##### イ. ファット・テールの調整

ファット・テールの調整は、Bangia *et al.* [1998] の手法を改良した下式(1)を用いる。その際ファット・テール調整係数( $\lambda$ )は、(2)式より算出する。Bangia *et al.* [1998] の手法では、ファット・テール調整係数( $\lambda$ )を尖度( $\kappa$ )の関数として定式化しているが、吉藤・大嶽 [2000] では、複雑系指標を用いることでその説明力を高めることができた。(2)式に用いているハースト指数<sup>15</sup>の算出方法は、補論2. に記述する。

$$LadjVaR(99\%) = P_t(1 - e^{-2.33\lambda\sigma_t}) \quad (1)$$

$LadjVaR(99\%)$  : 流動性リスク勘案後の修正VaR（信頼水準99%）

$P_t$  : 現時点の価格（仲値）

$\sigma_t$  : 仲値変動の標準偏差

$$\lambda = 1 + \phi_1 \ln\left(\frac{\kappa}{3}\right) + \phi_2 l, \quad (2)$$

$$\text{ただし、} l = \begin{cases} 1 & \dots \text{ハースト指数} > 0.5 \\ 0 & \dots \text{ハースト指数} \leq 0.5. \end{cases}$$

$\kappa$  : 仲値変動の尖度

$\phi_1, \phi_2$  : 定数

15 ハーストが考案した統計量で、この統計量により、分析対象となる時系列データが完全なランダム・ウォークに従うのか、トレンドを持ったもの（バイアスのあるランダム・ウォーク）なのかが判定できる。

図9 基本モデルのフレームワーク



1998年2月～1999年2月のデータにおける1パーセンタイル値と $2.33\lambda\sigma$ の値との乖離が最小となるように最小2乗法より求めたファット・テール調整係数を、地域ごとに集約して表示すると表2となる。

表2 地域別のファット・テール調整係数

	為替	株
東欧	1.308	1.230
中南米	1.574	1.382
アジア	1.328	1.167
G7等	1.124	1.096

## ロ．相関係数の操作

相関行列の一部を恣意的に操作することは、それによってリスク量（VaR）<sup>6</sup>が虚数になる問題が生じることもあり、適切ではない。そこで、吉藤・大嶽 [2000] では、虚数VaRの発生を回避し整合的に相関を操作するためにFinger [1997] が提示した手法を、アジア通貨危機の実証分析から得られたストレス発生時の特徴に対応できるよう、次の2点の拡張を行った。逆相関（ $Q_k$ 集合）に拡張したうえで、順相関（ $P_k$ 集合）と逆相関（ $Q_k$ 集合）が混在できるようにした。相関崩壊度合いのスピードを調節するパラメータ（ $c_k$ ）を導入し、金利・為替・株式・コモディティのリスク・カテゴリーごとに相関崩壊の度合いを調整できるようにした。

ポートフォリオ全体のリスク量（VaR）は、下式（3）より求められる新しい相関行列 $\hat{C}$ を分散共分散法のフレームワークに代入することにより算出する。なお、同手法の導出および補足説明を補論2．に記述した。

$$\hat{C} = \hat{S} \cdot \hat{\Sigma} \cdot \hat{S}^t, \quad (3)$$

ただし、

$$\hat{\Sigma} = A \cdot V \cdot A^t,$$

$$\hat{S}_{ij} = \begin{cases} 1/\sqrt{\sum_{ij}} & i = j \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時,} \end{cases}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 - \theta_k + \theta_k/(p_k + q_k) & i = j, i \in P_k \cup Q_k \text{ の時} \\ 1 & i = j, i \notin P_k \cup Q_k \text{ の時} \\ (-1)^{z(i)+z(j)} \theta_k/(p_k + q_k) & i \neq j, i \in P_k \cup Q_k, j \in P_k \cup Q_k \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時,} \end{cases}$$

$$z(i) = \begin{cases} 1 & i \in Q_k \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時.} \end{cases}$$

$P_k$  : 正相関を想定するリスク・ファクターの集合

$Q_k$  :  $P_k$ に含まれるリスク・ファクターと逆相関を想定するリスク・ファクターの集合

（ただし、 $Q_k$ に含まれるリスク・ファクター間の相関は正になる）

16 分散共分散法により算出したリスク量。

- $n$  : 全リスク・ファクター数
- $p_k$  :  $P_k$ に含まれるリスク・ファクター数
- $q_k$  :  $Q_k$ に含まれるリスク・ファクター数
- $\theta_0$  : 相関崩壊度合いを示すパラメータ、 $0 \leq \theta_0 \leq 1$
- $\theta_k$  : グループ $k$ の相関の強まり度合いを示すパラメータ。 $\theta_k$ は以下の式により $\theta_0$ により制御されている（なお、各リスク・ファクターは2つ以上のグループには属さないものとする）
- $\theta_k = c_k \theta_0$
- $c_k$  : 相関崩壊度合いのスピードを調節するパラメータ ( $0 < c_k \leq 1$ )<sup>17</sup>
- $\hat{V}$  : オリジナル・データの分散共分散行列 ( $n \times n$ )
- $\hat{\Sigma}$  : 新しい分散共分散行列 ( $n \times n$ )
- $\hat{C}$  : 新しい相関行列 ( $n \times n$ )

## (2) 内生的流動性リスクへの拡張 マーケット・インパクト関数

ここでは、前節のモデルのファット・テール調整機能を内生的流動性リスクに対応できるように拡張する。小田・久田・山井 [2000]、久田・山井 [2000] など、マーケット・インパクトを考慮したうえで保有ポートフォリオの最適な売却戦略を理論的に求め、同戦略のもとでの最大損失を流動性VaRとする先行研究は多い。本稿では、外生的流動性リスクと内生的流動性リスクは密接不可分と考え、取引高データから実証的に市場ごとのマーケット・インパクト関数を導出するアプローチを採る。基本的なフレームワークは、Cosandey [2001] を参考にして求めた市場ごとのマーケット・インパクト関数を使い、ファット・テール調整係数を取引量に応じ可変とすることで内生的流動性リスクも考慮したリスク量を算出しようというものである。以下、具体的な説明を行う。

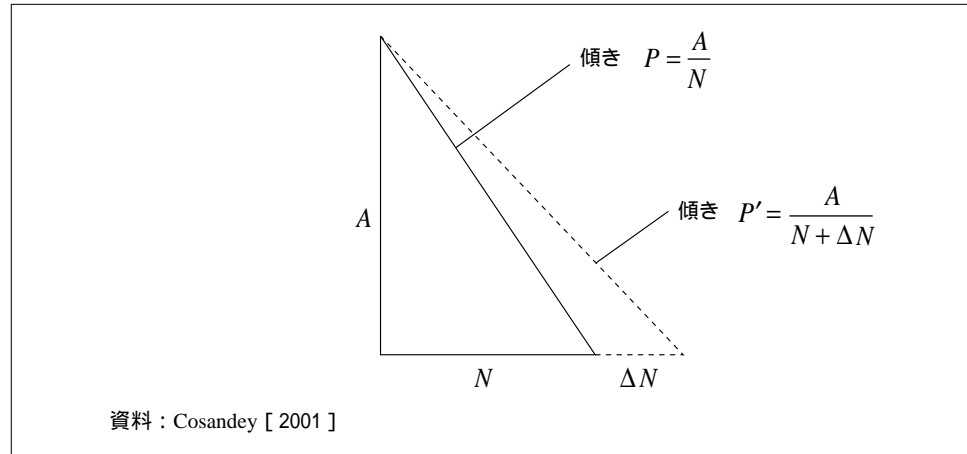
### イ．マーケット・インパクト関数の導出

Cosandey [2001] は、図10で示されるようなシンプルな仮定を置いて商品流動性を考慮したVaRの計量化を試みている。図10は横軸に証券の取引数量  $N$  を、縦軸に取引金額  $A$  を取ったもので、「マーケット・インパクトの三角形」と呼ぶことにする。この図で、傾き  $P$  は証券の平均市場価格を表す。ここで、追加的な売却  $\Delta N$  が加わった時に、買い方は追加的な資金の投入を行わない、すなわち取引金額  $A$  が不変であると仮定すると追加的な売却  $\Delta N$  により平均市場価格は、 $P = A/N \rightarrow P' = A/(N + \Delta N)$  へと下落する。この下落分をマーケット・インパクトと定義する。もちろん、一般的には価格が下落すれば新規の購入者が現れ購入金額  $A$  は増加することが予想される。そ

17 このモデルでは直接変化させるパラメータは $\theta_0$ のみとする。各 $c_k$ によりグループごとの相関崩壊スピードを調整する。

の意味で、この定義を用いたリスク計量化は保守的なものになっているといえる。

図10 マーケット・インパクトの三角形（概念図）



次に、このマーケット・インパクトの定義を用いた商品流動性VaRの計量化手法を説明する。追加的な売却 $\Delta N$ がなくても市場価格 $P^{18}$ は変動するので、この時系列推移を $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ で表す。また、各時点での取引数量を $N_0, N_1, N_2, \dots, N_n$ とする。この $P_t$ の変動性から市場リスクを計量化したものがVaRとなるが、ここではヒストリカル・シミュレーション法（以下HS法）<sup>19</sup>を用いることにする。ここで、時点 $t_0$ で追加的な売却 $\Delta N$ があるとすると、時点 $t_1$ での価格 $P_1$ は下式(4)に従い $P'_1$ と変化する。このマーケット・インパクトも考慮した価格の変動性 $\Delta P_t/P_t$ からHS法により算出したリスク量が商品流動性VaRとなる。

図11 商品流動性VaRの算出手順

	$P$ (市場価格)	$N$ (取引数量)	$P'$	$\Delta N$ の売りが加わった時の市場価格 (推定値)
$t_0$	$P_0$	$N_0$		
$t_1$	$P_1$	$N_1$	$P'_1$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">                     HS法による 99%タイル点 = 流動性VaR                 </div>
$t_2$	$P_2$	$N_2$	$P'_2$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$t_n$	$P_n$	$N_n$	$P'_n$	

18 ここでは、平均市場価格を終値で代替する。

19  $P_t$  の対数収益率を大きい順に並べ、99%目の点をVaR (99%) とする。HS法を採用することで、終値ベースで測った対数収益率分布のファット・テールの影響を直接的に捉えていることになる。



$$P_1' = P_0 + \Delta P = \frac{(N_0 P_0) + N_0 \Delta P_{market}}{N_0 + \Delta N}, \quad (4)$$

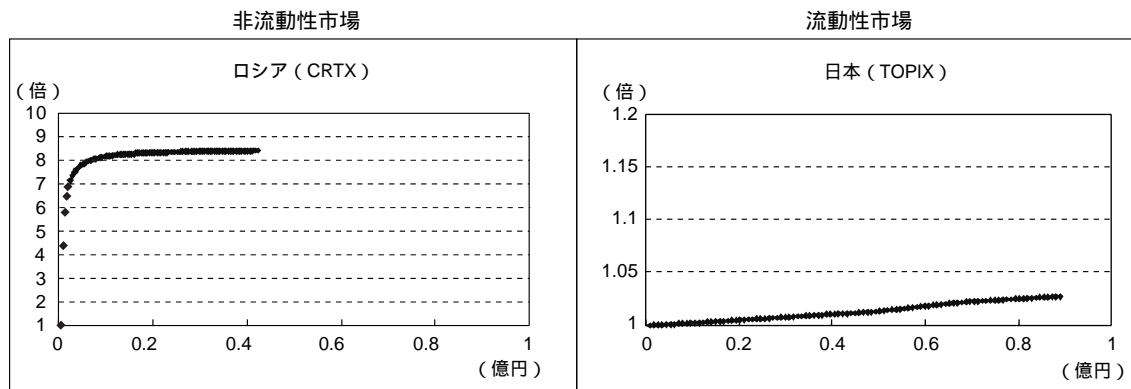
$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{P_0} = \frac{N_0^2 \Delta P_{market} - (N_0 P_0) \Delta N}{(N_0 P_0)(N_0 + \Delta N)}.$$

$\Delta P_{market}$  : 追加的な売却  $\Delta N$ がない時の市場価格の変化

$N_0 P_0$  : 取引金額  $A$ を示す

本稿では、取引数量に関する時系列データが入手できた東欧3カ国、中南米2カ国、アジア3カ国、G7等4カ国の株価指数先物市場<sup>20</sup>について $\Delta N$ の大きさを順じ変えながら、一般市場VaR (99%)に対する商品流動性VaR (99%)の比率 $m(\Delta N)$ を算出し、これをマーケット・インパクト関数と定義する。算出結果の一部を図12<sup>21</sup>に示すが、日本などの流動性の高い市場とロシアなどの流動性の低い市場では、マーケット・インパクト関数は、形状もインパクトの大きさ( $m$ の水準)も大きく異なることがわかる。なお、分析を行った全市場の結果は補論3.に示す。

図12 マーケット・インパクト関数



20 東欧：ロシア (CRTX)、ハンガリー (BUX)、ポーランド (WIG20) 中南米：ブラジル (IBOV)、メキシコ (MEXBOL) アジア：シンガポール (STI)、韓国 (KOSPI2)、香港 (HIS) G7等：日本 (日経225、TOPIX)、米国 (S&P500)、独国 (DAX)、スイス (SMI)

21 図12は、横軸にポジション量を示す $\Delta N$ を、縦軸に一般市場VaRに対する商品流動性VaRの比率 $m(\Delta N)$ をとったグラフである。その際、市場間の比較を容易にするために横軸のポジション量は、2001年9月30日の為替レートを用いて円換算 (億円単位) してある。

## ロ．ファット・テール調整機能の調整

マーケット・インパクト関数 $m(\Delta N)$ を用いて、(2)式のファット・テール調整係数を下式で示すようなポジション量(= $\Delta N$ )で可変となる関数( $\lambda'$ )に変形する。後は、基本モデルと同様のフレームワークでストレス・テストを行う。

$$\lambda' = m(\Delta N) \times \lambda. \quad (5)$$

$$\lambda : (2) \text{ 式のファット・テール調整係数}$$

$$m(\Delta N) : \text{マーケット・インパクト関数} \left( = \frac{\text{商品流動性 VaR}(\Delta N)}{\text{一般市場 VaR}} \right)$$

## 4．サンプル・ポートフォリオによる応用分析

本節では、3節で構築したモデルを用いてロシア危機を想定したシナリオによるストレス・テストを行う。4節(1)では、為替市場を対象に保有期間の長期化に伴うリスク量の変化に焦点を当てた分析を行う。4節(2)では、株式市場を対象に内生的流動性リスクに焦点を当てた分析を行う。なお、アジア通貨危機時の相関関係崩壊に焦点を当てた応用分析については、吉藤・大嶽 [2000] を参照されたい。

## (1) 分析1 保有期間の長期化に焦点を当てて

## イ．分析の概要

ここでは、為替市場を対象に保有期間の長期化に伴うリスク量の変化に焦点を当てた分析を行う。表3に示したポートフォリオを対象に、一般的な分散共分散法モデルと3節(1)で提示した基本モデル(ファット・テール調整と相関崩壊を組み込んだモデル)によるVaR(信頼水準=99%での予想損失額)を保有期間を変えて算出し、バック・テストを行い、 $\sqrt{T}$ 倍ルールの妥当性を検討する。

具体的には、表4に示す観測期間および保有期間に関するA、B、C、Dの4つの計算前提について、分散共分散法および基本モデルで予想損失額(VaR)の計算を行う<sup>22</sup>。ファット・テール調整に関しては、表3に示す「標準シナリオ」と「アタック・シナリオ」という2つのシナリオを用意する。「標準シナリオ」とは実証分析に基づく表2を採用したものであり、「アタック・シナリオ」とは当時固定相場制(ペッグ制)を採用していたロシア、ブラジルがヘッジ・ファンド等のアタックを受け急激な相場変動をすると想定したものである。また、相関関係の操作(相関崩壊)については、2節での実証分析に基づき、計算前提A(保有期間1日)ではこれを行わ

22 基本モデル および に関しては、計算前提A、Bのみ計算。

ず、計算前提B（保有期間10日）では図8（左図）のシナリオを適用する。VaRの計測期間は、ロシア危機発生後に相当する1998年8月16日～1999年2月15日の6カ月間とし、期間中、ポジションは不変とする。

表3 サンプル・ポートフォリオおよびファット・テール調整のシナリオ

	ポジション [百万\$]	ファット・テール調整	
		標準シナリオ	アタック・シナリオ
ロシア	-1	1.308	100
チェコ	1	1.308	1.308
スロベニア	1	1.308	1.308
ブラジル	-1	1.574	100
メキシコ	-1	1.574	1.574
日本	1	1.124	1.124
ドイツ	1	1.124	1.124

表4 計算パターン

	（計算前提）		分散共分散法	基本モデル（標準）		基本モデル（アタック）	
	観測期間	保有期間		相関崩壊	ファット・テール調整	相関崩壊	ファット・テール調整
A	前半	1日		無	標準シナリオ	無	アタック・シナリオ
B	前半	10日		有	標準シナリオ	有	アタック・シナリオ
C	後半	1日					
D	後半	10日					

備考：観測期間 / 前半...1998年2月16日～1998年8月15日、後半...1998年8月16日～1999年2月15日。  
1999年1月1日以降のDEMの為替レートはEURを使用。

#### ロ．分析結果と若干の考察

バック・テストの結果（仮想損益の絶対値がVaRを超過した回数およびリスク量比率<sup>23</sup>）を保有期間1日のケースに関して整理すると、表5のようになる。比較のため、表5の最右列には後半データ（計算前提C）を用いた分散共分散法の結果も併記した。当該分析結果をみる限り、固定相場制（ペッグ制）を採用する通貨がアタックを受け相場が急変動<sup>24</sup>するようなストレス状態に対しては、標準的な分散共分散法のフレームワークは無力であることがわかる。一方、基本モデルでアタック・シナリオを想定すれば、超過回数は低減することに加え、ストレス発生時のリスクを相応に捉えることができ（リスク量比率が100%に近づく）、当該モデルによるストレス・テストのフレームワークは有用であることがわかる。もちろん、

23 ストレス発生時におけるVaRと損益の比率。収益サイド（表5では上側と表記）は1998年8月27日、損失サイド（表5では下側と表記）は1998年9月15日の数値。

24 表1に示すとおり、ロシア危機によりルーブル/ドルのボラティリティ（保有期間1日）は148倍に跳ね上がっている。

ストレス・シナリオをいかに設定するかは難しい問題であるが、当該モデルは柔軟なシナリオ設定が可能であり、本フレームワークを試行錯誤的に用いることで、VaR（分散共分散法）の限界を補いネガティブ・サプライズを回避することに役立てられよう。

表5 保有期間1日のバック・テスト結果（超過回数およびリスク量比率）

	分散共分散法 （計算前提A）	基本モデル-標準- （計算前提A）	基本モデル-アタック- （計算前提A）	分散共分散法 （計算前提C）
超過回数	25	19	3	7
リスク量比率（上側）	15.5%	18.9%	73.0%	58.1%
リスク量比率（下側）	30.4%	37.0%	124.1%	82.2%

次に、保有期間長期化の影響を調べてみる。図13は、前後半の両期間について保有期間10日のリスク量と保有期間1日リスク量の $\sqrt{10}$ 倍とを比較してみたものである。2節でみたように、ストレス発生により保有期間長期化に伴うボラティリティおよび相関の変化が増大し、それがリスク量に影響を与えていることがわかる。本結果からは、iidを仮定した $\sqrt{T}$ 倍ルールでは、保有期間を長期化した場合のリスクを過小評価するおそれがあり、保有期間別にシナリオを設定することが必要であるといえる。

また、当該モデルを保有期間10日に適用したケース（基本モデル、アタック・シナリオ、計算前提B）のバック・テスト結果を図14に示す。本ケースにおいても、ストレス発生時のリスクを捉えることができしており、当該モデルによるストレス・テストのフレームワークは有用であるといえよう。

バーゼル銀行監督委員会の報告書( Basel Committee on Banking Supervision[ 1999 ])では、例えば、1998年秋のロシア危機に続く極端な市場変動がもたらした結果について、ストレス・テストは有益な予測を与えていなかったことが指摘されている。今回提案した手法も「いくら損失しそうか」という確率を与えるものではないが、「いくら損失し得るか」という情報を与える点では有用であるといえよう。また、金融機関が採用しているシナリオおよび実務慣行を調査したBISグローバル金融システム委員会の報告書( Committee on the Global Financial System [ 2001 ])によれば、多くの金融機関でストレス・テストは経営陣、リスク管理部署、トレーディング部署が、自らのストレス耐性を認識し、戦略の認識や見直しを行うための部門間のコミュニケーションを促すきっかけを提供する手段<sup>25</sup>として活用されている。今回提案した手法は柔軟なシナリオ設定が可能であり、本フレームワークを用いた試行錯誤は、コミュニケーション・ツールとしても有用であるといえよう。

25 将来のストレスを予測するためのツールではない。もっとも、定義上これを事前に予知することはできない( BIS [ 2000 ] )によれば、ストレス・テストは「例外的だが蓋然性のあるイベントが発生した場合に金融機関が被る潜在的な損失を検証する手法」と定義される。

図13 保有期間10日のリスク量

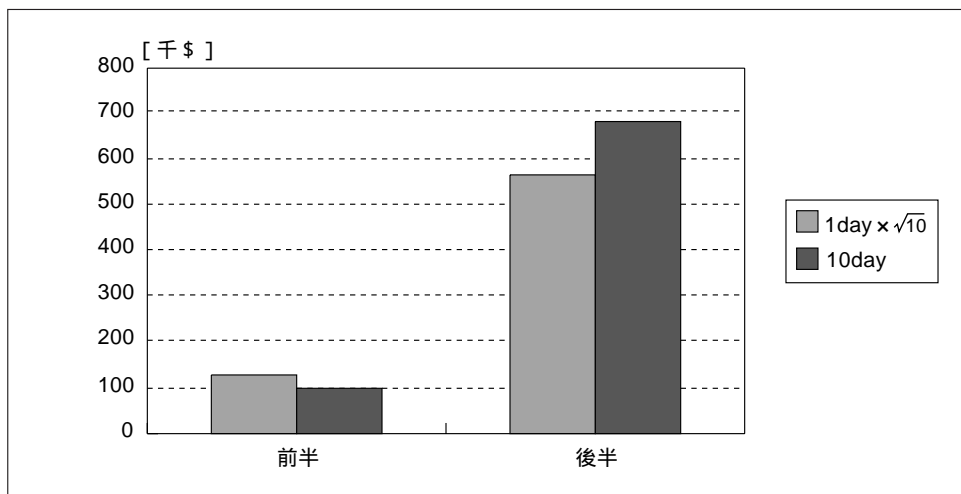
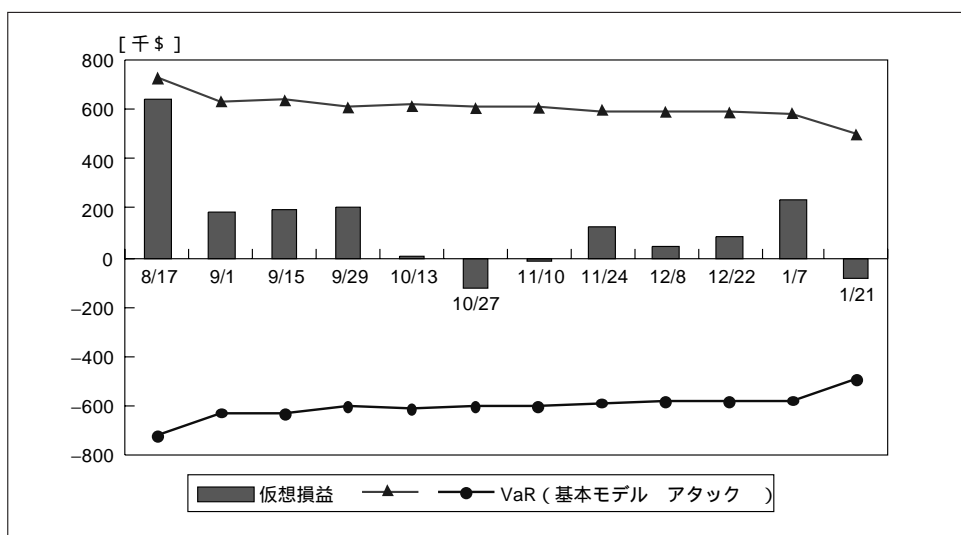


図14 保有期間10日のバック・テスト結果



## (2) 分析2 内生的流動性リスクに焦点を当てて

### イ. 分析の概要

ここでは、株式市場を対象に内生的流動性リスクに焦点を当てた分析を行う。一般的な分散共分散法モデルと3節(2)で提示した拡張モデル(マーケット・インパクト関数を導入しファット・テール調整係数をポジション量により可変にしたモデル)によるVaR(信頼水準=99%での予想損失額)を表6に示した各ポートフォリ

オ（a～c3の7ポートフォリオ）に対して算出し、内生的商品流動性リスクのインパクトを定量的に捉える。VaRの計測期間は、前節同様ロシア危機発生後に相当する1998年8月16日～1999年2月15日の6ヵ月間とする。ボラティリティおよび相関は、表4の計算前提A（観測期間：1998年2月16日～8月15日、保有期間：1日）を用いる<sup>26</sup>。また、ファット・テール調整係数は表3の「標準シナリオ」を、マーケット・インパクト関数は図A-2に示す各関数（グラフ）を適用する。なお、本分析では内生的商品流動性リスクに焦点を当てるため、円換算する際の為替レートは1998年8月16日終値で固定し、為替レート変動による影響を捨象して分析を行う。

表6 計算対象ポートフォリオ [百万円]

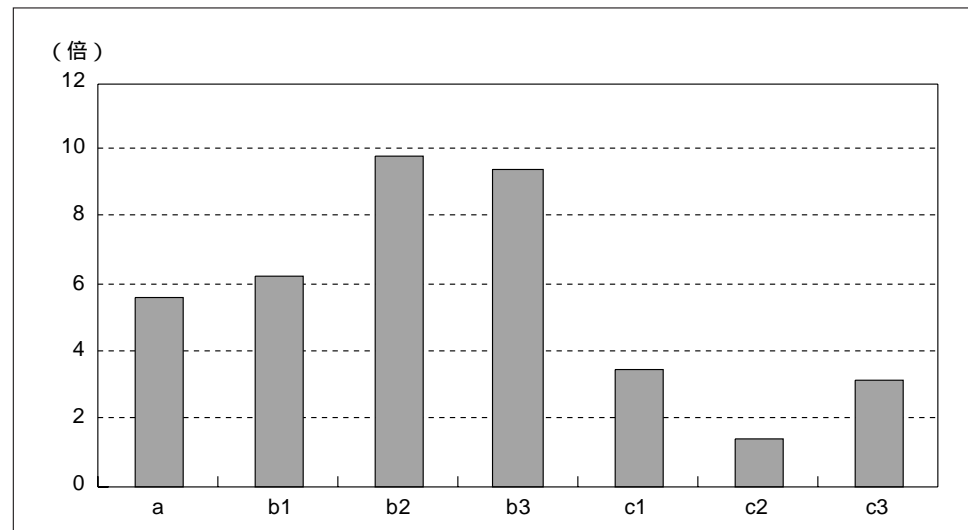
	a	b1	b2	b3	c1	c2	c3
ロシア	1	5	100	5	1	1	1
ハンガリー	1	1	1	5	1	1	1
日本	1	1	1	1	5	100	5
米国	1	1	1	1	1	1	5

備考：表中網掛け部分が「非流動性市場」。

#### ロ．結果と若干の考察

3節(2)の図11および(4)式で示したフレームワークで商品流動性を考慮した仮想損益を算出し、商品流動性VaRと一般市場VaRをHS法により計算した。その比率を示すと、図15となる。図A-2のマーケット・インパクト関数の形状より「非流動

図15 一般市場VaRと流動性VaRの比率

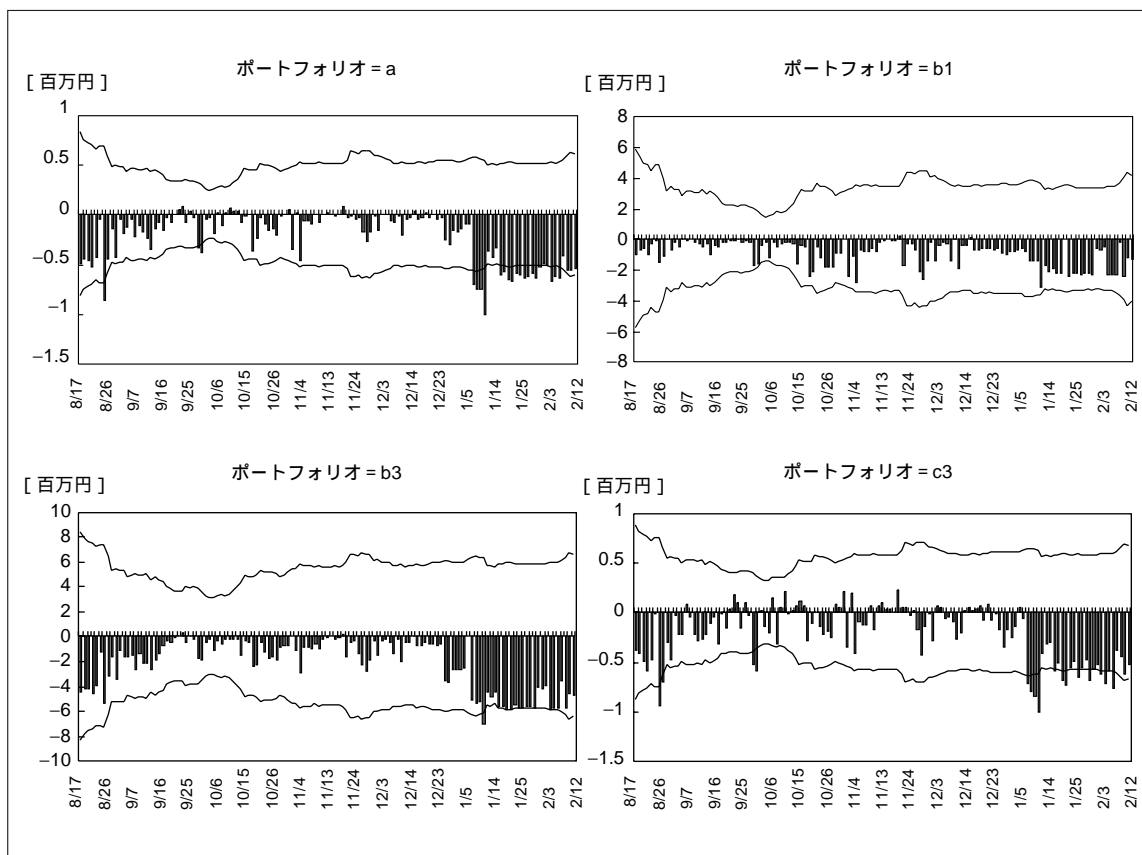


26 すなわち、相関係数の操作は行わない（計算前提Aの相関係数で固定する）。

性市場」とみなせるロシア、ハンガリーのポジションを500万円程度に増やしただけで、商品流動性を考慮したVaRは一般市場VaRの10倍程度まで増加することがわかる。一方、「流動性市場」とみなせる日本（TOPIX）、米国（S&P500）のポジションを増やしていくとポートフォリオの中に占める「非流動性市場」の割合が薄まる分、その倍率は減少する傾向にある。

次に、3(2)節で提示した拡張モデルを用いて計算したリスク量（信頼水準 = 99%での予想損失額）に対するバック・テストングを実施してみた。ポートフォリオ = a、b1、b3、c3に関する結果を図16に示す。ポートフォリオに占める非流動性市場の比率が高いb1、b3では、概ねリスクを捉えられており、内生的商品流動性リスクの捕捉という観点からは、同モデルは相応に効果があるものといえる。

図16 サンプル・ポートフォリオ別バック・テストング結果





## 5．おわりに

本稿では、アジア通貨危機およびロシア危機を対象にした実証分析から、商品流動性危機というストレス発生時に、リスク管理のうえで留意しなければならない相場変動の特徴を明らかにした。そして、同特徴に対応したストレス・テスト手法を考案した。吉藤・大嶽 [2000] では、外生的流動性リスクに焦点を当てたストレス・テスト手法を考案し、本稿では、さらに各国株価指数先物市場の取引高データから市場ごとのマーケット・インパクト関数を導出し、同モデルに組み込むことで内生的流動性リスクに対応できるように拡張した。本稿での成果を改めてまとめると、以下のとおりである。

- 1) アジア通貨危機時の実証分析からは、流動性危機の伝播および流動性への逃避という形での相関関係の崩壊が観測された。一方、ロシア危機時には、保有期間の長期化に伴い相場の変動性および相関関係の変化が大きくなることが観測された。この背景には、相場変動の記憶性があると推察される。また、同特徴からは、iidを仮定した $\sqrt{T}$ 倍ルールでは、保有期間を長期化した場合のリスクを正しく把握できない可能性が指摘できる。
- 2) こうした現象への対応として、吉藤・大嶽 [2000] では、Bangia *et al.* [1998] およびFinger [1997] の手法を基礎に、ファット・テール調整、相関崩壊を組み込んだストレス・テスト手法を考案した。本稿では、さらにCosandey [2001] を参考に各国株価指数先物市場の取引高データから市場ごとのマーケット・インパクト関数を導出し、同関数をファット・テール調整係数に組み込むことで内生的流動性リスクにも対応可能なモデルへ拡張した。また、各国別に算出したマーケット・インパクト関数からは、流動性の高い市場と低い市場では、グラフの形状も影響の度合いも大きく異なることが明らかとなった。
- 3) サンプル・ポートフォリオを用いた応用分析により、保有期間別に相関関係変化等のシナリオを策定することの重要性、マーケット・インパクト関数を導入することの有効性を確認した。

今回は、分散共分散法のフレームワークを堅持したうえで、コミュニケーション・ツールとしてのストレス・テスト手法を考案した。本稿で導入したマーケット・インパクト関数はその定義上、保守的なものとなっているが、今後、各国市場の取引高データの蓄積が進みマーケット・インパクト関数導出の精度が高まれば<sup>27</sup>、定量的な使用（例えば、枠や割当資本に利用）への道も開けよう。この点は、今後の課題としたい。

27 例えば、宇野・大村 [1999] は板情報から注文タイプ別の発生確率を算出した各種先行研究を紹介している。また、副島 [2001] はJGB先物市場の板情報から注文タイプ別の発生確率等を求め、人工市場を構築している。これらのデータを用いて、シミュレーションによってマーケット・インパクト関数を導出する方法もある。

## 補論1．実証分析補足

### (1) 分析対象

2節(1)のアジア通貨危機、2節(2)のロシア危機での分析対象市場は、おのこの表A-1、表A-2のとおりである。

表A-1 アジア通貨危機の実証分析での分析対象市場

債券市場	16カ国・地域	日本( JPY )、米国( USD )、英国( GBP )、ドイツ( DEM )、フランス( FRF )、スイス( CHF )、イタリア( ITL )、スペイン( ESP )、ベルギー( BEF )、デンマーク( DKK )、オランダ( NLG )、スウェーデン( SEK )、カナダ( CAD )、オーストラリア( AUD )、香港( HKD )、シンガポール( SGD )の16カ国・地域。 10年国債を分析対象( ゼロレートに変換したもの )とした。
スワップ市場	20カ国	債券市場の16カ国に、ニュージーランド( NZD )、インドネシア( IDR )、タイ( THB )、マレーシア( MYR )の4カ国を加えたもの。10年のスワップ金利( 国債同様、ゼロレートに変換したもの )を分析対象とした( ただし、ニュージーランド、シンガポール、インドネシアの3市場は7年スワップ )。
為替市場	19通貨	スワップ市場の19カ国( 除く日本 )の対円レート。
株式市場	10指数	日本( TOPIX、日経225 )、米国( S&P500 )、英国( FT100 )、独国( DAX )、仏国( CAC40 )、スイス( SMI )、イタリア( MIB30 )、香港( HIS )、韓国( KOSPI )の10市場。
コモディティ市場	12商品	Brent、DUBAI、FUEL、GASOIL、KERSEN、NAPHTA、WTI、金( BIS等では為替にカテゴライズされることも多いが本分析では商品として扱った )、銅、亜鉛、アルミニウム、CRBの12商品。

表A-2 ロシア危機の実証分析での分析対象市場

為替市場	29通貨	東欧	チェコ( CZK )、ハンガリー( HUF )、ポーランド( PLN )、スロバキア( SKK )、スロベニア( SIT )、トルコ( TRL )、ロシア( RUB )の7カ国の対ドルレート。
		中南米	メキシコ( MXN )、コスタリカ( CRC )、ブラジル( BRL )、チリ( CLP )、エクアドル( ECS )、ペルー( PEN )、ベネズエラ( VEB )の7カ国の対ドルレート。
		アジア	中国( CNY )、韓国( KRW )、台湾( TWD )、香港( HKD )、シンガポール( SGD )、タイ( THB )、マレーシア( MYR )、インドネシア( IDR )、フィリピン( PHP )の9カ国の対ドルレート。
		G7等	日本( YEN )、英国( GBP )、独国( DEM )、仏国( FRF )、スイス( CHF )、イタリア( ITL )の6カ国の対ドルレート
株式市場	31指数	東欧	チェコ( PX50 )、ハンガリー( BUX )、ポーランド( WIG )、スロバキア( SKSM )、スロベニア( SVSM )、トルコ( TKSMINDU )、ロシア( RTSI )の7市場。
		中南米	メキシコ( INMEX )、コスタリカ( CRSMBCT )、アルゼンチン( BCBAGNRL )、ブラジル( IBOV )、チリ( IGPA )、エクアドル( ECGUBVG )、ペルー( IGBVL )、ベネズエラ( IBVC )の8市場。
		アジア	中国( SHBSHR )、韓国( KOSPI )、台湾( TWSE )、香港( HIS )、シンガポール( STI )、タイ( SET )、マレーシア( KLCI )、インドネシア( JCI )、フィリピン( PCOMP )の9市場。
		G7等	日本( TOPIX )、米国( S&P500 )、英国( FT100 )、独国( DAX )、仏国( CAC40 )、スイス( SMI )、イタリア( MIB30 )の7市場。

備考：本文図2以下の各種グラフ内では括弧内の略記号を用いて表記している。  
欧州通貨統合後も分析上は、旧通貨を使用。

## （2）分析手法に関する補足説明 同符号継続確率

ここでは、同符号継続確率に関する理論的背景を説明する。本分析では以下のようなベルヌーイ試行を仮定している。

- a. 実験は、 $n$ 回（十分に大きな回数）。
- b. 各回の実験結果は「成功（上昇）」と「失敗（下落）」の2種類。
- c. 成功が起こる確率 $p=0.5$ 、失敗する確率 $q=0.5$ 。
- d. 各回は独立。

上記のベルヌーイ試行を仮定したのは、リスク計測やデリバティブの価格導出に用いる標準的なファイナンス理論では、ランダム・ウォークを仮定しているためである。ランダム・ウォークの世界では、相場の上昇下落は偏りのないコイン投げ実験（例えば表が出れば「相場上昇」、裏が出れば「相場下落」）で再現される。すなわち、相場変動の期待値としてはゼロ<sup>28</sup>、明日の相場上昇下落は今日までの相場変動の履歴に依存しない、ということが仮定されていることになる。企業の株価を考えた場合、ある企業が何か画期的な発明をした時に業績向上に伴う株価の上昇が期待されるが、これらの情報は瞬時に株価に織り込まれることに、すなわち効率的市場仮説が成り立つならば、次の価格変動には影響を与えないことになる。企業価値に関する良情報や悪情報がランダムに発生すると、結果として相場変動はランダム・ウォークになるといえる。

ここで、ランダム・ウォークについて整理しておく。蓑谷 [2001] によればランダム・ウォークには以下のような5つの定義がある。(1)~(5)となるに従って、より弱い仮定となっている。(1)n.i.d.は、normally and independently distributedの略。(2)i.i.d.は、前述したようにindependently and identically distributedの略であり、(3)WNはwhite noise（白色雑音）の略である（その数式的な定義は脚注参照<sup>29</sup>）。(4)は独立であるが、同一の分布に従わない場合を表している。(5)は無相関だが独立ではない場合を表している。ここでは、(2)の定義を想定し、ランダム・ウォークという用語を用いているが、本分析で用いた自己相関、同符号継続確率は、ランダム・ウォークに関する検証の一種ともいえる。なお、蓑谷 [2001] は、東証株価指数、為替レート、コール・レートの月次データを基に分析を行い、これらの時系列

28 明日の価格の期待値は今日の価格ということ。標準的なファイナンス理論で、このことは今日までに利用可能な情報を全て活用している条件下において、マルチンゲールと表現される。数式的には、2つの確率過程  $\{Y_n, n=0,1,\dots\}$  と  $\{Z_n, n=0,1,\dots\}$  が与えられた時、

$$\begin{cases} E[|Y_n|] < \infty \\ E[Y_{n+1} | Z_0, \dots, Z_n] = Y_n, \end{cases}$$

が全ての $n$ に対して成立するならば、 $\{Y_n, n=0,1,\dots\}$ は $\{Z_n, n=0,1,\dots\}$ に関してマルチンゲールという。確率変数 $Z_n$ を情報と考え、時点 $n$ までに利用可能な全ての情報を使って時点 $n+1$ におけるゲームを行った時の富の期待値 $E[Y_{n+1} | Z_0, \dots, Z_n]$ は、 $n$ 時点での富 $Y_n$ と同じであることを定式化したものといえる。

29  $E(\varepsilon_t) = 0$ 、 $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ 、 $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ 、 $t \neq s$ 。

データは単位根を持つこと、すなわち1階の階差を取ると定常になる<sup>30</sup>が、ランダム・ウォークではないとの結果を得ている。

- (1)  $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$ ,
  - (2)  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ ,
  - (3)  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ ,
  - (4)  $E(\varepsilon_t) = 0$ ,
  - (5)  $E(\varepsilon_t) = 0$ ,
- $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, t \neq s,$   
 $cov(\varepsilon_t^2, \varepsilon_s^2) \neq 0, \text{ある} s \neq t.$

最後に、効率的市場仮説 (EMH : efficient market hypothesis) の成立の是非について、考察してみたい。角田 [ 2001 ] によれば、EMHが成立する場合として以下のような3ケースが考えられる。

合理的投資家のみから成る市場。

非合理的投資家<sup>31</sup>が存在しても、取引がランダムに行われるのであれば、その影響は相殺し合い、価格はファンダメンタルズ価値に収束する。

非合理的投資家が存在しその取引がランダムでなく互いに相関していても、市場が完備であれば、裁定取引によって価格はファンダメンタルズ価値に収束する。

上記の あるいは が現実的と考えられるが、 に関しては非合理的投資家の誤りは系統だっており、それは同じ方向に動くとの研究成果<sup>32</sup>もあり、長期的には、 の裁定取引が制約なく行われることがEMH成立の必須条件と考えられよう。標準的なファイナンス理論に対峙する行動ファイナンス<sup>33</sup>では、市場が完備でないことや、裁定取引には時間もコストもかかることから均衡状態に達するまで、そうした取引は十分には行われないことを主張している。また、EMHの成り立つ世界では、非合理的投資家 (ノイズ・トレーダー) は、常に裁定取引者などの合理的投資家 (情報トレーダー) に比べ損することとなり絶滅する運命となるが、その場合、市場の流動性が劇的に低下することとなり、市場が効率的であり続けられるか疑わしい。ここに、論理的矛盾を孕んでいるともいえよう。実際には、条件が揃えば、ノイズ・トレーダーたちの方が合理的な裁定取引者より好成績を上げることも可能とする研究<sup>34</sup>もある。

30 ランダム・ウォークであれば、単位根を持つ (1階の階差は定常) が、この逆が常に成り立つというわけではない。

31 ノイズ・トレーダー仮説では、合理的投資家は「情報トレーダー」、非合理的投資家は「ノイズ・トレーダー」と呼ばれる。行動ファイナンス (脚注33参照) の世界で注目するノイズ・トレーダーとは、ノイズ (テクニカル情報など) を情報と誤認して取引する主体のことである。

32 Kahneman and Riepe [ 1998 ] Tversky [ 1990 ] など。

33 標準的なファイナンス理論に対しては、人間行動との関連が薄い、現実離れた理論などの批判がなされている。これらの批判に応え、人間を研究の中心に据えたものが行動ファイナンスといえる。行動ファイナンスとは、投資家の現実の行動を観察し、そのような行動をとる要因を考える記述的 (descriptive) な理論である。

34 セイラー [ 1998 ]

## 補論2．基本モデル

### （1）ハースト指数の算出

ハーストが考案した統計量で、この統計量により、分析対象となる時系列データが完全なランダム・ウォークに従うのか、トレンドを持ったもの（バイアスのあるランダム・ウォーク）なのかが判定できる<sup>35</sup>。ハースト指数 $H$ が0.5の場合はランダム・ウォーク、 $0 \leq H < 0.5$ の場合はエルゴード的、すなわち平均回帰的な時系列データ、 $0.5 < H \leq 1$ の場合はトレンドを持った時系列データということになる。ハースト指数の具体的な算出手順は、以下のとおりである。

Step1：時系列データを、例えば $N=5$ 日間ごとのデータに分割し、そのデータ・セット（ $t=1 \sim 5, 6 \sim 10, 11 \sim 15, \dots$ ）ごとに、レンジ $R$ 、標準偏差 $S$ を求める。

$$R = \text{Max}(X_{t,N}) - \text{Min}(X_{t,N}),$$

$$X_{t,N} = \sum_{u=1}^t (e_u - M_N).$$

$X_{t,N}$ ：期間 $N$ における偏差の累計

$e_u$ ：時点 $u$ における対数収益率

$M_N$ ：期間 $N$ における対数収益率の平均値（ $u=1 \sim t$ ）

Step2：上記計算結果より、データ分割数 $N$ における $R/S$ の平均値を求める。

Step3：Step1～Step2のプロセスを $N=5, 6, 7, \dots$ に対して繰り返す。

Step4： $N$ の全範囲にわたって、 $\log(N)$ と $\log(R/S)$ の回帰分析を行う。その傾きが、求めるハースト指数 $H$ となる（例えば、円国債[10年]の場合、 $H=0.647$ となる）。

### （2）相関係数の操作

ここでは特定のリスク・ファクター間の相関係数をストレス的に1（正相関）または-1（逆相関）に変化させた場合、および実際の相関関係から正相関または逆相関に至る変動過程、においてVaRを計測するための相関係数の処理方法を示す。ここで提示する手法の基本概念はFinger [1997] に記述されているものである。本稿のモデルは、そのモデルに、逆相関性の導入や複数パラメータ対応、相関崩壊のスピード調整などの機能を付与したものである。

.....  
35 ピーターズ [1994]

まず、対象リスク・ファクター<sup>36</sup>間の相関を1に操作するケースを考える。時系列データ間の相関が1であるためには、対象となるデータが同じ時系列データで構成されていけばよい(十分条件)。つまり、対象リスク・ファクターに共通のデータを埋め込み、全リスク・ファクターの相関係数を再計算すれば整合性のある相関係数が求められる。しかし、この方法では、計算処理に時間がかかる、正相関状態に至る途中過程での相関係数を表現することができない、等のデメリットがある。

そこで、以下では上記の と の問題を解決する具体的な相関係数の操作方法を示す。

まず、対象リスク・ファクターの時系列データを対象リスク・ファクターの平均値で置換する。つまり以下で求められる $R_{AVGt}$ を対象リスク・ファクターの疑似時系列データとみなす。この手法で正相関状態を作成した際の新相関係数行列は、オリジナル値の分散・共分散値で表現ができるため、相関係数算出に当たり膨大な時系列データを用いた再計算の必要はないことがわかる( の問題は解決)。

$$R_{AVGt} = \frac{1}{p} \sum_{i \in P} R_{it}. \quad (\text{A-1})$$

$i=1, 2, \dots, n$  : リスク・ファクター

$t=1, 2, \dots, T$  : データ観測時点

$R_{it}$  : 時点 $t$ におけるリスク・ファクター $i$ の対数収益率データ(オリジナル・データ: 確率変数),

$P$  : 対象リスク・ファクターの集合

$p$  :  $P$ に含まれるリスク・ファクター数

次に、 の問題の解決策として、対象リスク・ファクターのオリジナル値( $R_{it}$ )と平均値( $R_{AVGt}$ )の按分による時系列データ(以後按分データ)を作成する方法を採用し、正相関に至る途中過程を表現する。具体的には、パラメータ $\theta$ を用いて以下のように按分データを定義する。

$$\hat{R}_{it} = \begin{cases} (1-\theta)R_{it} + \theta R_{AVGt} & i \in P \text{の時} \\ R_{it} & \text{それ以外の時} \end{cases}. \quad (\text{A-2})$$

$\theta$  : 正相関の度合いを示すパラメータ、 $0 \leq \theta \leq 1$

36 以下では事後的に相関を操作するリスク・ファクターを対象リスク・ファクターとし、操作対象としないリスク・ファクターを非対象リスク・ファクターと呼ぶことにする。



(A-2)式によって作成された按分データ ( $\hat{R}_i, i \in P$ ) 間の相関係数は、 $\theta = 0$ ではオリジナル値の相関係数と一致し、 $\theta$ の増加と共に正の相関性が高まり、 $\theta = 1$ では正相関状態となる。つまり、 $\theta$ という1つのパラメータの変化により、集合 $P$ （つまり対象リスク・ファクターの集合）に含まれる複数のリスク・ファクター間の相関の変動過程が表現でき、計算された按分データ ( $\hat{R}_i, i \in P$ ) を用いれば、途中過程 ( $0 < \theta < 1$ ) における相関係数やその時のVaRのシミュレーションも可能になる（この問題は解決）。

(A-2)式で作成された時点 $t$ における対象リスク・ファクターの新しいデータ・ベクトル $\hat{R}_t = \{\hat{R}_{1t}, \hat{R}_{2t}, \hat{R}_{3t}, \dots, \hat{R}_{nt}\}^{tra}$ をオリジナル・データのベクトル $R_t$ と行列 $A$ で表現すれば以下のとおりである。

$$\hat{R}_t = A \cdot R_t, \quad (A-3)$$

ただし、

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 - \theta + \theta/p & i = j, i \in P \text{の時} \\ 1 & i = j, i \notin P \text{の時} \\ \theta/p & i \neq j, i \in P, j \in P \text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

さらに、確率変数 $R_i$ の関数として(A-3)式で定義される按分データ $\hat{R}_i$ も確率変数である。新しい確率変数の分散共分散行列 $\hat{C}$ 、および相関係数 $\hat{C}$ はオリジナル・データの分散共分散行列 $V$ を用いて次のように表現できる。

$$\hat{C} = \hat{S} \cdot \hat{\Sigma} \cdot \hat{S}^t, \quad (A-4)$$

ただし、

$$\hat{\Sigma} = A \cdot V \cdot A^t,$$

$$\hat{S}_{ij} = \begin{cases} 1/\sqrt{\hat{\Sigma}_{ij}} & i = j \text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

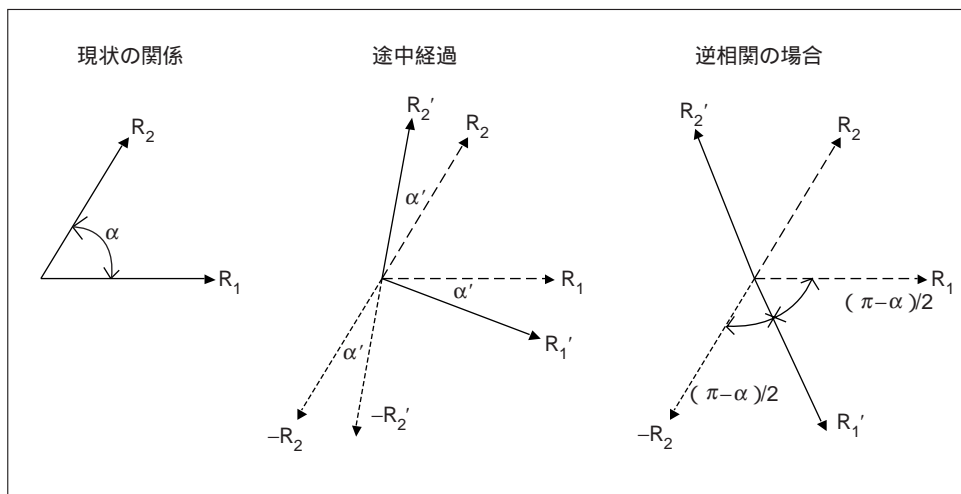
(A-4)式より按分データの相関係数は、データのレベルまで戻って計算する必要はなく、オリジナル・データの分散共分散行列に、パラメータ $\theta$ を与えることで計算できることがわかる。

本手法は、リスク・ファクター間の相関が逆相関（相関係数 $= -1$ ）を仮定した場合、さらには正相関と逆相関が併存する場合、にも拡張できる。この関係を図示すれば以下のとおりである（ $R_2$ が $R_1$ と逆相関を形成する場合を想定している）。

途中過程の図で行っている作業は、オリジナル・データ（ $R_2$ ）に対して、逆符号の中間データを作成し（ $-R_2$ ）、 $R_1$ と $-R_2$ を用いて正相関で説明した操作（按分データ作成処理）を行い（ $-R_2'$ ）、最後に符号を戻す（ $R_2'$ ）というものである。



図A-1 逆相関状態への推移過程の概念図



この場合、疑似時系列データはパラメータ $\lambda$ を用いて以下のように作成すればよい。

$$R_{AVGt} = \frac{1}{2} (R_{1t} - R_{2t}),$$

$$\hat{R}_{1t} = (1 - \lambda) R_{1t} + \lambda R_{AVGt}, \quad (\text{A-5})$$

$$\hat{R}_{2t} = (1 - \lambda) R_{2t} - \lambda R_{AVGt}.$$

$\lambda$  : 逆相関の度合いを示すパラメータ,  $0 \leq \lambda \leq 1$

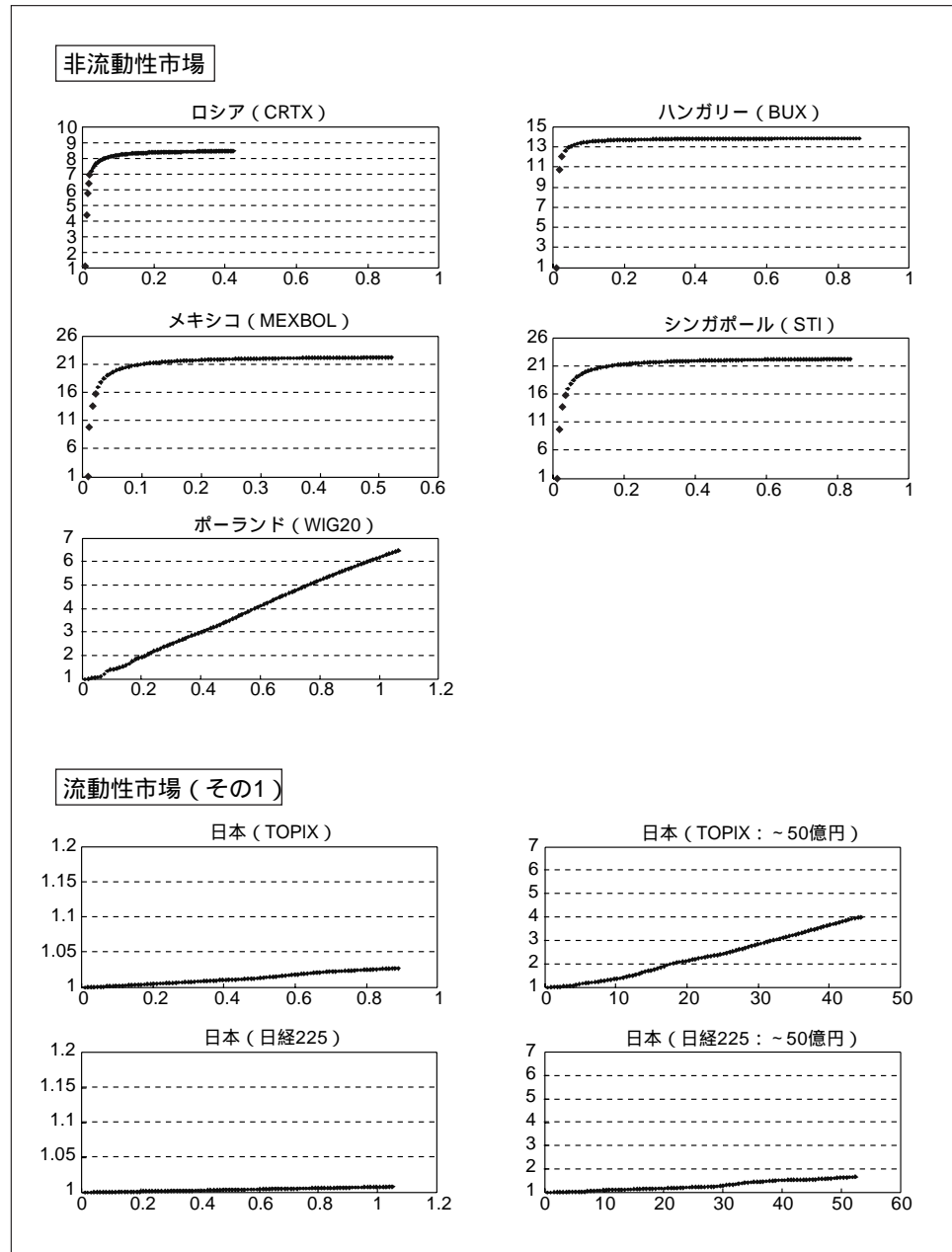
上記の定義によって作成された疑似時系列データの相関係数は、 $\lambda=0$ の場合、オリジナルの相関係数と一致し（図A-1の現状の関係）、 $\lambda$ の増加と共に負の相関性が高まり（図中の途中経過）、 $\lambda=1$ の場合、逆相関状態となる（図中の逆相関の場合）。

本稿では、上記のような正相関と逆相関への状態推移が併存（順相関  $P_k$  集合と逆相関  $Q_k$  集合が混在）するような相関崩壊シナリオに加えて、その相関崩壊スピードの調整（相関崩壊度合いのスピードを調節するパラメータ  $(c_k)$  の導入）を可能にするようなモデルの拡張を行い、分析を行っている（最終的な定式化は本文中の(3)式）。

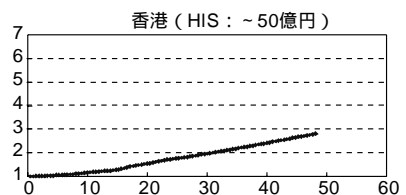
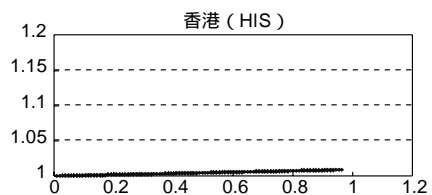
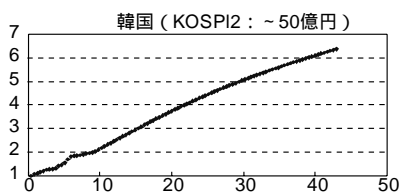
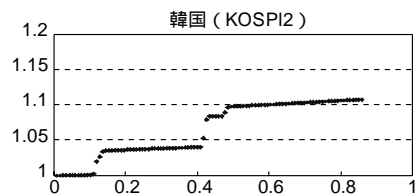
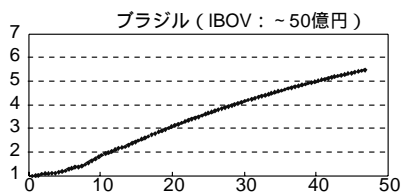
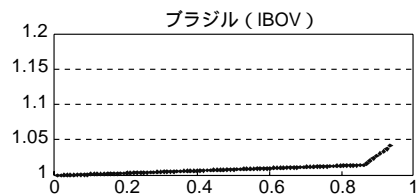
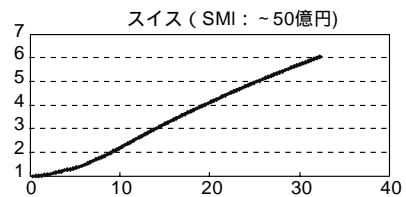
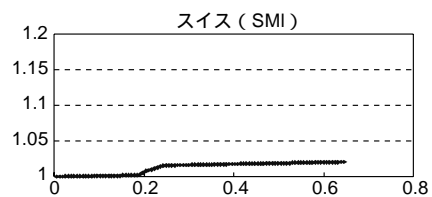
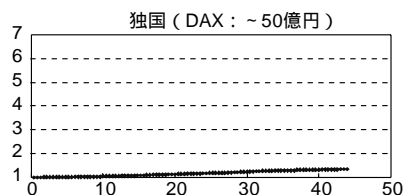
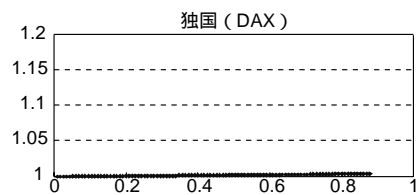
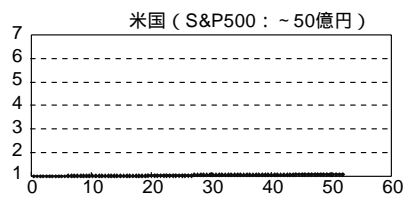
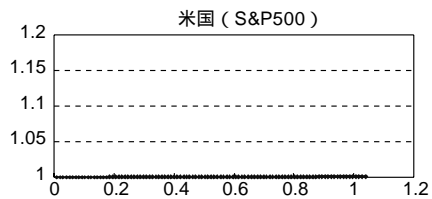
補論3．マーケット・インパクト関数

市場別のマーケット・インパクト関数を図A-2（横軸：ポジション量 $\Delta N$  [ 億円 ] 縦軸：一般市場VaRに対する商品流動性VaRの比率 $m(\Delta N)$  [ 倍 ]）に示す。流動性市場に関してはポジション量（= $\Delta N$ ）を50億円まで拡張したグラフも併記した。

図A-2 市場別のマーケット・インパクト関数



流動性市場 (その2)



## 参考文献

- 宇野 淳・大村敬一、「マーケットマイクロストラクチャーによる実証分析 第7回指値注文戦略：ブックと注文フローのダイナミクス」、『証券アナリストジャーナル』1999年3月号、1999年、92～119頁
- 大澤 真・村永 淳、「市場リスクの枠組みにおける流動性リスクの計測」、IMES Discussion Paper 98-J-2、日本銀行金融研究所、1998年
- 小田信之・久田祥史・山井康浩、「流動性リスクの評価方法について：理論サーベイと実用化に向けた課題」、『金融研究』第19巻第1号、日本銀行金融研究所、2000年、137～154頁
- グローバル金融システム委員会（CGFS、Committee on the Global Financial System）、「主要金融機関におけるストレス・テストとその実務に関する調査」（英語名：“A Survey of Stress Tests and Current Practice at Major Financial Institutions”）、日本銀行仮訳、2001年
- セイラー、リチャード・H（篠原 勝訳）『市場と感情の経済学 - 「勝者の呪い」はなぜ起こるのか』、ダイヤモンド社、1998年
- 副島 豊、「JGB先物市場における即時執行制度とボラティリティ - 戦略的注文行動の分析に基づく人工証券市場を用いた検証 - 」、『現代ファイナンス』No.10、2001年、3～33頁
- 高安秀樹、「経済物理学の展望」、金融財務研究会セミナー資料、2001年
- 角田康夫、「行動ファイナンス入門 - 金融証券市場への行動科学的アプローチ - 」、金融財務研究会セミナー資料、2001年
- 原田和明・宿輪純一、『マネークライシス・エコノミー』、日本経済新聞社、1999年
- ピーターズ、エドガー（新田 功訳）『カオスと資本市場』、白桃書房、1994年
- 久田祥史・山井康浩、「流動性リスク評価方法の実用化に向けた研究」、『金融研究』第19巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2000年、29～76頁
- 益田安良、『グローバルマネー - だれがどう制御するのか - 』、日本評論社、2000年
- 蓑谷千鳳彦、『金融データの統計分析』、東洋経済新報社、2001年
- 吉藤 茂・大嶽文伸、「商品流動性リスクの計量化に関する一考察 - ストレス・テストに焦点を当てて - 」、『現代ファイナンス』No.8、2000年、85～113頁
- Bangia, Anil, Francis X. Diebold, Til Schuermann and John D. Stroughair, “Modeling Liquidity Risk: With Implications for Traditional Market Risk Measurement and Management,” working paper, Wharton Financial Institutions Center, 1998.
- Bank for International Settlements, “Stress Testing by Large Financial Institutions: Current Practice and Aggregation Issues,” 2000.
- Basel Committee on Banking Supervision, “Performance of Models-Based Capital Charges for Market Risk : 1 July-31 December 1998,” September, 1999.
- Cosandey, David, “Adjusting value-at-risk for market liquidity,” *Risk*, October , 2001, pp.115-118.
- Finger, Christopher C., “A Methodology to Stress Correlation,” *Risk Metrics Monitor*, Fourth Quarter, 1997, pp. 3-11.
- Kahneman, D., and Riepe, M., “Aspects of Investment Psychology,” *Journal of Portfolio Management*, 24, 1998, pp. 52-65.

Tversky, Amos, *The Psychology of Risk - in Quantifying the Market Risk Premium Phenomena for Investment Decision Making* -, Institute of Chartered Financial Analysts, 1990.