

# モンテカルロ法によるプライシングと リスク量の算出について

## 正規乱数を用いる場合の適切な実装方法の考察

いしかわたつ や うち だ よしひこ  
石川達也 / 内田善彦

### 要 旨

金融派生商品（以下、派生商品）のプライシングやVaRなどのリスク量の算出において、モンテカルロ法によるシミュレーションは、有効な計算手法の1つである。複雑なペイオフを持つ派生商品のプライシングや、複雑な損益曲線を持つポートフォリオのリスク量計算では、モンテカルロ法以外の選択肢がない場合も少なくない。このため、多くの金融機関では、何らかの形でモンテカルロ法を実務で利用している。しかし、モンテカルロ法の具体的な実装方法について詳細に検討し妥当な方法を示しているような文献は少ない。実務上でも十分な検討がなされているケースは多くないのが実態であると思われる。こうした観点から、本稿では、正規乱数を用いたモンテカルロ法による派生商品のプライシングやリスク量計算の結果を基に、適切な実装方法の考察を行う。

キーワード：数値計算、モンテカルロ法、シミュレーション

本稿は石川達也が日本銀行金融研究所に在籍していたときに書かれたものである。なお、本稿で示されている内容および意見は筆者たち個人に属し、日本銀行あるいはUFJホールディングスの公式見解を示すものではない。

石川達也 UFJホールディングス リスク統括部 (E-mail: Tatsuya\_Ishikawa@ufj.co.jp)  
内田善彦 日本銀行金融研究所研究第1課副調査役 (E-mail: yoshihiko.uchida@boj.or.jp)

## 1. はじめに

金融派生商品（以下、派生商品）のプライシングやVaRなどのリスク量の算出において、モンテカルロ法によるシミュレーションは、有効な計算手法の1つである。例えば、経路依存型オプションや複数の原資産を持つオプションのプライシングを行う場合、モンテカルロ法以外に有効な計算手段はみつかっていない。また、オプションのポートフォリオや与信ポートフォリオのリスク量計算の場合には、モンテカルロ法が最も有効である。この他、保有期間内のポートフォリオ構成の変化を前提としたリスク量算出には、モンテカルロ法が必須となる。

モンテカルロ法を活用するためには、近年までは、科学技術計算用の高価なスーパー・コンピュータを必要としたことから、金融実務では十分な広がりをもって利用されてこなかった。しかし、最近では、パソコンでも比較的簡単にモンテカルロ法を使用することが可能となっている<sup>1,2</sup>。

多くの金融機関では、こうした背景から、実務上、何らかの形でモンテカルロ法を利用している。しかし、モンテカルロ法のアルゴリズム自体が簡単であることから、以下に挙げるようなモンテカルロ法の具体的な実装方法の妥当性を詳細に検討しているケースはそれほど多くないのが実態であると思われる<sup>3</sup>。

### 生成した一様乱数の性質の検討

「完全にランダムな」乱数を数値演算で人工的に生成することはできない<sup>4</sup>ため、モンテカルロ法では「十分にランダムな」数列<sup>5</sup>が用いられる。このため、生成される一様乱数の性質が重要となる。

### 多次元正規乱数の生成方法の検討

例えば、所与の相関を再現する多次元正規乱数を生成する際に、コレスキーフ分解による方法を単純にそのまま用いると、少ない試行回数では十分な精度が得られない。このため、多次元正規乱数の生成方法の実装に当たっては、

1 CPU (Central Processing Unit:中央処理装置) の処理能力向上や通信速度向上により、数年前のスーパー・コンピュータ並みの演算性能を手軽に手に入れることができるようになってきている。

2 例えば、一般的なパソコンを十数台ネットワークで接続するだけで、大掛かりなモンテカルロ演算を行うことができる。実際の演算はバックグラウンド・ジョブでも行えることから、ハードウェアの追加投資も基本的に不要である。また、モンテカルロ法は基本的にこうした並列演算に適したアルゴリズムであるため、実装は比較的容易である。

3 ほとんどの金融機関で、派生商品のプライシング・ロジックやポートフォリオのリスク量算出の手順が詳細に検討され、役員会等の承認を経たうえで運用されているのとは対照的である。

4 コンピュータは有限桁数の数値しか表現できないことから、コンピュータが表現できる全ての数（例えば64メガバイトの主記憶装置であれば、 $2^{64,000,000} \times 8$ 個）が実現できる最大の周期である。また、人工的に乱数を生成するときには、入力値と出力値に何らかの数学的な関数関係が存在してしまう。

5 乱数の数学的に厳密な定義は現状存在しない。現在では、ある数列に関して、統計的独立性（ある試行がそれまでの試行の結果に依存しないこと）、一様性（発生頻度が事象間で等しくなっていること）の2つの条件が満たされるとき、その数列を「十分にランダムな数列」すなわち「疑似乱数」と呼ぶことが多い。

誤差削減手法（分散減少法と呼ばれる）を組み合わせることがある<sup>6</sup>。

#### 期待値演算とパーセント点演算における誤差削減手法の検討

モンテカルロ法を派生商品などのプライシング（期待値計算）に使用するときは、誤差削減手法が効果的であることが多い。その一方で、リスク量算出（パーセント点計算）に同様の手法を採用しても必ず効果が得られる保証はない。

#### 適切な実装方法の検討

モンテカルロ法を使用する場合、誤差削減手法により一定の精度をより少ない回数の演算で得ようとすると、その手法によっては逆に単位時間当たりの試行回数が減少し、計算時間が増大することがある。また、モンテカルロ法は一般に並列処理に向いていると言われる手法であるが、実装方法次第で、並列処理の効果が減殺されることがある。

本稿では、これらの諸点に関する考察を行う。このうち、～にに関しては、分散減少法のうちモーメント調整法（対称変量法、1次・2次サンプリング法）に注目し、各リスク・ファクターが正規分布に従うケースで、検討を試みる<sup>7</sup>。

本稿の構成は次のとおりである。まず、2節でモンテカルロ法の定義と金融実務での適用対象、数値計算における誤差等の基本的事項を概説する。次に、3節で一様乱数の周期に注目し、アプリケーション・ソフトであるExcel<sup>8</sup>等で提供されるごく一般的な乱数ルーチンを使用する場合、条件によっては望ましい結果が得られない可能性があることを例示する。4節では、多次元正規乱数ベクトルの生成時に分散減少法の1種であるモーメント調整法を適用する場合の効果を考察する。さらに、5節では、3、4節で考察した方法で生成した多次元正規乱数を用いて、エキゾティック・オプションの価格、仮想ポートフォリオの市場リスク量や信用リスク量を実際に計算し、生成乱数が計算精度に与える影響を考察する。6節では、計算コストを勘案した実装方法に関する考察を2次サンプリング法の例を基に行う。最後に、7節で、本稿の議論を簡単にまとめる。

また、補論は次のとおりである。補論1.でモンテカルロ法によるプライシングとリスク量計算および誤差を解説し、補論2.では分散減少法の全般および本稿の分析で用いる対称変量法、1次・2次サンプリング法を説明する。補論3.ではプライシングで用いられる数値計算手法（モンテカルロ法を含む）を説明する。

6 なお、最近では、乱数生成方法を金融リスク計量化の基礎技術と位置付け、その生成方法を特許により囲い込もうとする動きもある。例えば、コロンビア大学が最近取得した特許（日本でも出願中）では、「準モンテカルロ法を使って金融派生証券の価格付けを行うことの全て」が特許の対象となっており、金融機関の実務に大きな影響を与えるものとなっている（米国での金融技術の特許取得状況は、Falloon [ 1999 ] に詳しい）。

7 乱数に関する数学理論は難解であるうえ、それ自体は金融実務にとって必ずしも重要であるとは言えない。このため、本稿では、乱数の数学的性質ではなく、あくまで具体的な実装面に注目する。

8 Excelは米国Microsoft社の米国および世界各国における商標または登録商標である。なお、本文中にはTMマークなどは明記していない。

## 2. モンテカルロ法に関する基本事項

本節では、モンテカルロ法に関する基本事項として、モンテカルロ法の定義、実務での適用対象、数値計算における誤差等を概説する。

### (1) モンテカルロ法の定義と実務での適用対象

モンテカルロ法とは「乱数を取り扱う技法の総称」<sup>9</sup>である。これに対し、金融実務では、通常、「乱数を何度も繰り返し用いて数値実験（シミュレーション）を行い、多数回の実験結果から目的とする因子を求める」と指す。本稿では、特に断らない限り後者の定義を使う。

金融実務では、モンテカルロ法は、期待値型とパーセンタイル型の2つを主な計算対象としている<sup>10</sup>。

計算対象	計算手順	適用例
期待値型	乱数を使って確率変数の分布形状を求め、それを平均する（期待値を求める）。	派生商品のプライシング
パーセンタイル型	乱数を使って確率変数の分布形状を求め、端からの確率がある値となる確率変数の値を求める。	VaRの算出

両者（期待値型、パーセンタイル型）は、乱数を使って確率変数の分布形状を求めるという点では同じであり、計算アルゴリズムは次のようになる。

乱数を使って確率事象（原資産価格の変化など）を表現

生成された乱数を代入して確率変数（派生商品の価値やポートフォリオの損益）の実現値を計算

確率変数の実現値を集計

### (2) 数値計算における誤差

モンテカルロ法の場合、十分にランダムな乱数を数多く用意すれば、推定誤差を小さくすることができる（補論1.を参照）。しかし、試行回数が多いほど、計算時間が長くなるという実務上の問題が発生する。このため、モンテカルロ法を用いる場合、有限回数の試行で計算を停止する。したがって、実務上は、推定値の真の値からの誤差の評価が重要となる。

9 この定義は津田[1995]による。

10 本稿では、乱数を用いて数値表現できる確率事象を考察の対象としているため、解の存在は保証されていると考える。

この点を含めて、コンピュータで数値計算を行う際に注意すべき誤差を列挙すると、以下の5種類となる。

#### 打切り誤差

無限回の試行を有限回の試行で近似するために生じる誤差。

#### 丸め誤差

数値を予め定められた有限桁数内で記述するために生じる誤差（切捨て、切上げ、四捨五入など）。

#### 情報落ち誤差

$x$ が $y$ に比べて非常に小さいとき、 $x+y$ や $x-y$ などの加減算をすることにより、 $x$ の情報の一部または全部が失われることによって生じる誤差。

#### 桁落ち誤差

$x$ と $y$ の値が非常に近いとき、 $x-y$ の演算を行うと有効数字の桁数が激減してしまう形で生じる誤差<sup>11</sup>。

#### オーバーフロー、アンダーフロー

演算に必要な桁数を確保できないことから生じる誤差。

モンテカルロ法による演算でも、この5種類の誤差に留意する必要がある。以下では、このうちの 打切り誤差に考察を加える。

期待値型計算とパーセンタイル型計算では、同一回数の試行を行う場合、理論的に導かれる誤差の大きさが異なる点には留意が必要である。そこで、正規分布に従う確率変数の期待値<sup>12</sup>と99.5%点<sup>13</sup>について、真の値からの「信頼水準99%誤差」（標準偏差 / 真の値 × 標準正規分布の99%点、以下「99%誤差」）を補論1.で示した関係を用いて計算した。その結果が図表1である。

図表1 試行回数と計算精度の関係（99%誤差 絶対値）

試行回数	100回	1,000回	3,000回	10,000回	100,000回
期待値 期待値型	23.3%	7.4%	4.3%	2.3%	0.7%
99.5%点 パーセンタイル型	44.1%	13.9%	8.0%	4.4%	1.4%

図表1をみると、まず、期待値、99.5%点とも試行回数が多くなると99%誤差が小さくなる傾向があることがみてとれる<sup>14</sup>。

11 例えば、有効数字5桁である1.0003と1.0002の減算を行うと、1.0003-1.0002=0.0001となり、有効数字が1桁になる。この有効数字の桁数の減少は、全体の演算の中に乗算が含まれるときに、誤差拡大の原因になる。

12 平均1、分散1の正規分布の期待値。

13 標準正規分布（平均0、分散1）の99.5%点。

14 例えば、計算精度を10倍高めるために必要な試行回数は100倍（10の2乗）となる（補論1（A-5）（A-8）式参照）。

次に、99.5%点は、期待値に比べ同じ試行回数での99%誤差が大きく、ある程度の精度を得ようとすると相当回数の試行が必要となる。例えば、99%誤差が5%未満の精度を確保するためには、99.5%点の場合、約7,800回以上の試行が必要となる。なお、多くの金融機関がVaRの計算で前提としていると思われる10,000回程度の試行回数では、期待値では3,000回ほどの少なめの試行回数で得られる程度の精度(99%誤差4.3~4.4%)しか得られないと注目する必要があると考えられる。

ここで説明した例では、打切り誤差は、理論的には<sup>15</sup>図表1に示した値になる。しかし、コンピュータで発生させる(疑似)乱数は、完全にはランダムな乱数ではなく、何らかの「偏り」を持っている。このため、(疑似)乱数を用いる場合には、この理論上の精度が必ずしも得られない。したがって、モンテカルロ計算で、上記のような理論上の誤差で打切り誤差を評価するのは、計算結果の解釈をミスリードすることがあり得るため留意が必要である。

また、99.5%点といった高い信頼水準のパーセント点を求める場合、目標とする精度を踏まえて、試行回数を設定する必要がある。その点をチェックすることなく、適当に試行回数(例えば10,000回<sup>16</sup>)を設定することは適切ではない。

### (3) 誤差削減のための工夫

モンテカルロ法を用いる場合、分散減少法と呼ばれる誤差削減手法とあわせて実装されることが多い。分散減少法の多くは、乱数のサンプリングの仕方に工夫を加えたものである(分散減少法の詳細は、補論2.を参照)。

ここで重要な点は、以下の2点である。

分散減少法の誤差削減効果は問題とする対象に依存すること。

分散減少法の多くは、期待値型計算の誤差を減少させる技術であり、それをそのままパーセンタイル型計算に適用できる保証はないこと。

4節と5節では、これらの諸点を検討する。

15 ここで、「理論的」とは、偏りのない無限個のサンプルを用意できて、そこから有限個のサンプルを取り出すという意味である。

16 図表1の例で99.5%点を10,000回の試行で算出する場合、「99%誤差」を考慮すると、99.5%点の推定値は簡単な計算により99.3%~99.6%の幅を持つことがわかる。つまり、この場合には、10,000回の試行では「. . . %点」という意味での小数点第1位の精度は確保されていないことになる。

### 3. 一様乱数の統計的独立性の検討

モンテカルロ法を実務で用いる場合、一様乱数（0～1の間の値を取る乱数）を発生させ、それを正規乱数（正規分布に従う乱数）に変換して、シミュレーションを行うことが多い。それらの具体的な流れは以下のようになる。

ステップ1：一様乱数を生成。

ステップ2：一様乱数を標準正規乱数（平均0、分散1の正規分布に従う乱数）に変換。

ステップ3：正規乱数を多次元正規乱数（平均ベクトル $\mu$ 、分散共分散行列 $\Sigma$ ）に変換。

ステップ4：生成した多次元正規乱数を使用し、原資産価格（リスク・ファクター）を発生させ、派生商品価格（あるいはポートフォリオの価値）を計算。これを必要な回数繰り返す。

ステップ5：プライシングは、ステップ4で得られたサンプルの平均を求めるこにより行う。リスク量は、ステップ4で得られたサンプルの $\alpha\%$ 点を求めて計算する。

以下では、ステップ1で生成される一様乱数の統計的独立性を検討する。

#### （1）乱数の周期とExcelの組み込み乱数

コンピュータで生成される一様乱数は、一定の周期を持つ。モンテカルロ法でシミュレーションを行う場合、各試行の乱数は異なっていることが必要であるため、十分に長い周期の乱数を用意する必要がある（周期を超える回数の試行は、同じ乱数を再度発生させるという点で意味がない）。

実務で多用される計算アプリケーションの1つであるExcelでは、予め用意されている一様乱数の発生方法が3種類ある。具体的には、Excelのツールバーの「分析ツール」内にある「乱数発生」コマンド<sup>17</sup>、ワークシート上で利用できるRnd関数、Visual Basicで利用できるRnd関数、である。

このうち、Rnd関数とRnd関数（いずれの場合も、乱数の生成ロジックには線形合同法<sup>18</sup>が使用されている）を調べたところ、生成される乱数の周期は、いずれも、それほど長くないことが判明した<sup>19</sup>（図表2）。長い周期を持つRnd関数（周期約

17 Excelのツールバーの「ツール」から「分析ツール」、「乱数発生」を選ぶ。

18  $X_n = aX_{n-1} + c \pmod{m}$  という関係を用いて乱数を生成する方法。 $a$ 、 $c$ 、 $m$ を上手く選ぶことによって、周期の長さが $m$ までの乱数列を生成することができる。線形合同法の長所は、アルゴリズムが簡単で生成が高速である点である。一方、短所は、コンピュータに実装する際に乱数の周期を長くすることが難しい（パソコンでは、通常は2進数32桁までしか扱うことができないため、 $2^{32}$ より大きな $m$ を取ることができない）ことである。とは言え、例えば、 $a=1,664,525$ 、 $c=1,013,904,223$ 、 $m=2^{32}$ では、4,294,967,296の周期が得られる。

19 Rnd関数の周期は、当方で実測した。また、Rnd関数の周期は、Microsoft社のProduct Support Services（<http://support.microsoft.com/support/kb/articles/Q86/5/23.ASP>）を参照した。

1,600万)でも、例えば、多くの種類のリスク・ファクターを扱っている大手金融機関でポートフォリオのリスク量を求める場合、十分な長さの周期とは言い切ることができない<sup>20</sup>。また、「分析ツール」では、 $32,768=2^{15}$ 個の予め決められた0~1の数値を発生させる。この程度の個数の乱数では、正確性を要求されるリスク計測やプライシングを行うことは難しい。

図表2 Excelの組み込み乱数の周期

Rand関数	100万以下
Rnd関数	約1,600万 <sup>21</sup>

## (2) メルセンヌ・ツイスター法と乱数の統計的独立性

線形合同法よりも長い周期の乱数を得る方法の1つに、メルセンヌ・ツイスター法(MT法)<sup>22</sup>がある。メルセンヌ・ツイスター法は、シフト・レジスター法と呼ばれる乱数発生方法の1種で、非常に長い周期( $2^{19,937}-1$ )を実現している<sup>23</sup>。メルセンヌ・ツイスター法は、生成乱数の統計的独立性の高さ(周期が長いと統計的独立性が高い)から、特に多次元の乱数ベクトルを多数生成する場合に有用である。

## (3) メルセンヌ・ツイスター法と線形合同法の比較と多次元結晶構造

ここでは、メルセンヌ・ツイスター法と線形合同法(ここでは、Excelで使える一様乱数のうち最長周期を持つRnd関数を使用)の比較を行う。

図表3は、試行回数 $16,777,216=2^{24}$ 回(Rnd関数の周期)の乱数を $(x, y) = (x_n, x_{n+1})$ ,  $n=1, 2, \dots, 2^{24}$ としてプロットしたものの一部分である。線形合同法による乱数では、多次元結晶構造と呼ばれる格子模様が現れている。

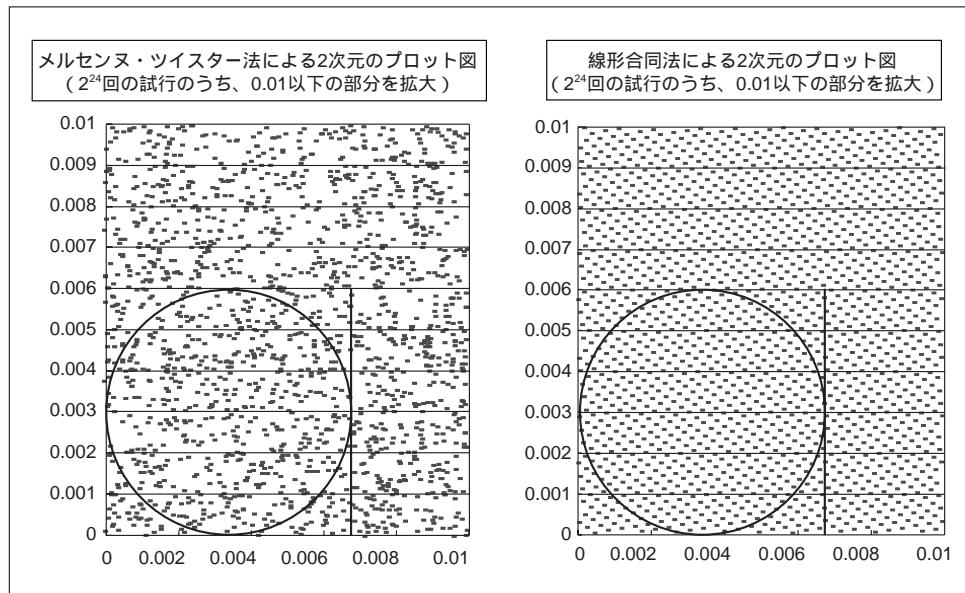
20 ポートフォリオのリスク・ファクター数を400、試行回数を40,000回とすると、1回のシミュレーションに1,600万個の乱数が必要となる。日次でポートフォリオのリスク量の計測を行っている場合、ポートフォリオが日々ほとんど不变であるとみなせるとすると、Rnd関数の周期(約1,600万)では、毎日のシミュレーションではほぼ同じ乱数が使われることになってしまう。このため、日次で計測されるリスク量は結果的に極めて近い値になる可能性があり、その場合にはRnd関数の周期を事前に知らないと、「Rnd関数を用いたモンテカルロ・シミュレーションは高い精度の推定値を弾き出す」という誤った解釈をしかねないことになる。

21 正確には、 $16,777,216=2^{24}$ である。

22 亂数生成方法の詳細は、例えば湯前・鈴木[2000]、Matsumoto and Nishimura[1998]を参照。

23 ここでは、メルセンヌ・ツイスター法をシフト・レジスター法を用いた乱数生成法の例として取り上げた。本稿では、シフト・レジスター法の中でメルセンヌ・ツイスター法が最も優れていると主張しているわけではない。

図表3 メルセンヌ・ツイスター法による乱数と線形合同法による乱数



以下では、幾つかの半径の円で、円の中に入ったサンプルの個数から円周率の推定を行う<sup>24</sup>。半径0.003、0.004、0.005の各円で、円周率（真値は3.14159265...）を推定した結果が図表4である。

図表4 メルセンヌ・ツイスター法と線形合同法による推定結果

	MT法	線形合同法		MT法	線形合同法		MT法	線形合同法
半径	0.003	0.003	半径	0.004	0.004	半径	0.005	0.005
円内の個数	475	475	円内の個数	843	844	円内の個数	1,334	1,314
点の総数	612	604	点の総数	1,097	1,074	点の総数	1,706	1,679
$\pi$ 計算値	3.105	3.146	$\pi$ 計算値	3.074	3.143	$\pi$ 計算値	3.128	3.130
誤差	0.037	0.004	誤差	0.068	0.002	誤差	0.014	0.011

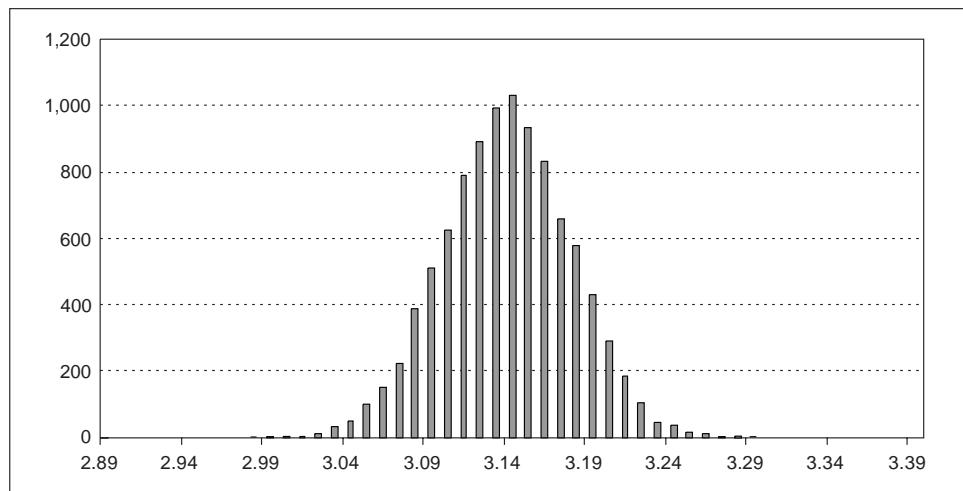
図表4の「誤差」をみると、メルセンヌ・ツイスター法の精度は、乱数に多次元結晶構造が発生している線形合同法の精度を下回っていることがわかる。これは、以下のような理由によるものである。ここでは、 $[0,1] \times [0,1]$ の2次元空間に比べてかなり小さな円を扱っているため、メルセンヌ・ツイスター法で発生させた乱数が、期待されるほどは円の中に入るとは限らない。このことが、結果として、メル

24 2次元の一様乱数であるので、 $[0, x] \times [0, x]$  ( $0 \leq x \leq 1$ )の正方形には、サンプルが「一様に」散布されることが期待される。それが成立するすれば、生成したサンプルの個数とその中にいるサンプルの個数の比率は、正方形の面積と円の面積の比率に等しくなることになる。この関係を利用して、円周率を求めることができる。ここでは、円が内接する正方形の中に入るサンプル数と円の中に入るサンプル数の比較により円周率を求めた。

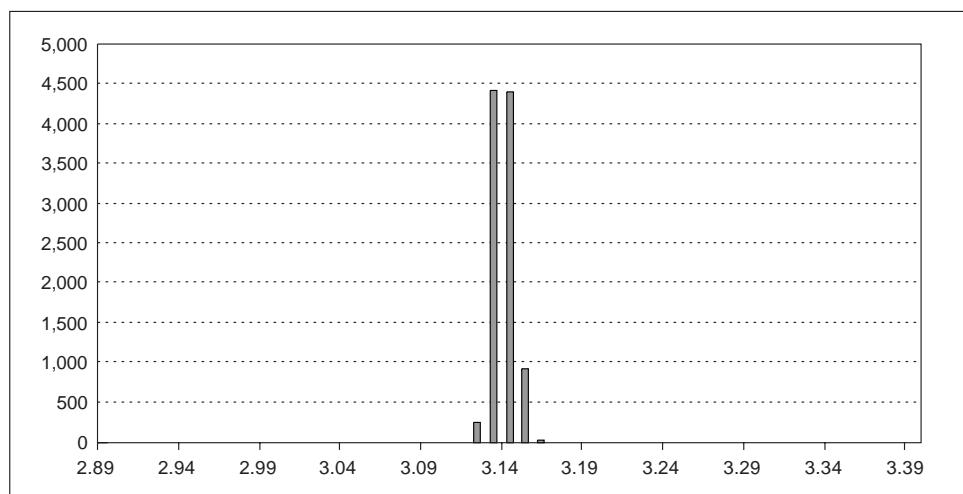
センヌ・ツイスター法による円周率の推定精度が、線形合同法によるそれを必ずしも上回らないということにつながっている。

この点をさらにみるために、 $[0, 1] \times [0, 1]$ の2次元空間内を一辺の長さが0.01の正方形計1万個に分割し、各正方形で半径0.005の円を用いて円周率を推定した。その推定値の分布が図表5、6である。

図表5 メルセンヌ・ツイスター法による円周率の推定値分布



図表6 線形合同法による円周率の推定値分布



これらからは、メルセンヌ・ツイスター法による推定値の分布に比べて、線形合同法による推定値の分布の標準偏差がかなり小さくなっていることがみてとれる。これは、線形合同法による乱数に結晶構造が発生しているため、1万個の正方形の推定値が互いに極めて近い水準になっていることによるものである。一般に、モン

テカルロ法では試行回数を増やすと、推定値分布の標準偏差は小さくなり、同時に推定値分布の期待値は真値に漸近していく。そのため、モンテカルロ法では、標準偏差を計算精度の指標とすることが多い。しかし、図表6（線形合同法）の推定値分布では、結晶構造の各格子上に乱数のサンプルが乗ることになるため、これ以上回数を増やしても、推定値分布の標準偏差は小さくはならないし、推定値分布の期待値も真値に漸近していかない（したがって、この場合、標準偏差は計算精度を測る指標とはならない）。これに対し、図表5（メルセンヌ・ツイスター法）の推定値分布では、試行回数を増加させれば、期待値は真値に漸近していくので、円周率の推定精度を上げることができる。すなわち、メルセンヌ・ツイスター法では、試行回数を増加させれば、線形合同法の推定精度を上回る精度を得ることが可能である。

ここでの事例からは、乱数を使う際には、乱数の周期を確認する必要があること<sup>25</sup>、問題の設定によっては、推定誤差が見かけ上非常に小さくなる場合がある点に留意する必要があることを指摘することができる。

#### 4. 多次元正規乱数列の生成方法とモーメント調整法

3節で示したモンテカルロ法のアルゴリズムのステップ2およびステップ3は、生成した一様乱数を1次元正規乱数 多次元正規乱数へと変換する作業である。本節では、ステップ3の多次元正規乱数列生成法に関して、分散減少法の1種であるモーメント調整法を適用した場合の効果等を考察する。

##### （1）多次元正規乱数列の生成方法とモーメント調整法

ここでは、まず、3次元正規乱数を例にとり、1次元正規乱数列から多次元正規乱数列を生成する方法を考える。

1次元標準正規乱数列  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  が既に得られているとする。これを3個ずつ束ねて  $\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}, \dots, \{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}\}$  とする。これに分散共分散行列 ( $\Sigma$ ) をコレスキー分解した行列  $\mathbf{C}$  ( $\Sigma = \mathbf{C} \mathbf{C}^T$   $\mathbf{C}$  は下三角行列<sup>26</sup>) を乗じて、

$$\begin{pmatrix} y_{k-2} \\ y_{k-1} \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-2} \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}, \quad k = 3, 6, \dots, n, \quad (1)$$

$\{\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_4, y_5, y_6\}, \dots, \{y_{n-2}, y_{n-1}, y_n\}\}$  を得る。

25 周期が長くても次元数を高くすると結晶構造が現れやすい場合がある。ここで考察したメルセンヌ・ツイスター法でも、それほど多くない試行回数で結晶構造を持つことがある。

26 記号  $T$  は行列やベクトルの転置を示す。

$\{\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_4, y_5, y_6\}, \dots, \{y_{n-2}, y_{n-1}, y_n\}\}$  の平均ベクトルと分散共分散行列は、サンプル数が増大するに従い、 $\{0, 0, 0\}$  と  $\Sigma$  に収束する。

実際にモンテカルロ法を使用する場合は、試行は有限回であるため、生成した多次元正規乱数列の平均ベクトルと分散共分散行列は、 $\{0, 0, 0\}$  と  $\Sigma$  に必ずしも一致せず、「ずれ」が発生する。

この「ずれ」がモンテカルロ法の収束を遅くする要因となるため、 $\{\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_4, y_5, y_6\}, \dots, \{y_{n-2}, y_{n-1}, y_n\}\}$  に操作を加えて、例えば平均ベクトルや分散共分散行列（モーメント）が $\{0, 0, 0\}$  や  $\Sigma$  に一致するような新しい乱数列、 $\{\{z_1, z_2, z_3\}, \{z_4, z_5, z_6\}, \dots, \{z_{n-2}, z_{n-1}, z_n\}\}$  を作成し、シミュレーションに用いるという手法が考案されている。この手法はモーメント調整法と呼ばれている。

モーメント調整法には幾つかのバリエーションがあるが、ここでは1次サンプリング法、2次サンプリング法、対称変量法を取り上げる。各手法のポイントを簡単にまとめると、以下のとおりである（補論2.も参照されたい）。

1次サンプリング法：平均を母集団のそれ $\{0, 0, 0\}$ に一致させる。

2次サンプリング法：分散共分散行列を母集団のそれ $(\Sigma)$ に一致させる。

対称変量法：平均（1次モーメント）、歪度（3次モーメント）等、全ての奇数次モーメントをゼロに一致させる。

図表7に、これらの手法に加えて複数の手法を組み合わせた場合に、おのの期待される各種モーメント等の一致状況をまとめた。

図表7 各種手法によるモーメント等の一致状況

	平均	標準偏差	相関係数	歪度	尖度
調整なし	×	×	×	×	×
2次サンプリング法	×			×	×
1次 + 2次サンプリング法				×	×
対称変量法		×	×		×
対称変量法 + 2次サンプリング法					×

：一致する ×：一致しない

備考：対称変量法を用いた場合は5次以降の奇数次モーメントも一致

## （2）モーメント調整法の効果

線形合同法（ExcelのRnd関数）とメルセンヌ・ツイスター法を用いて、平均0、分散共分散行列  $\Sigma$ （具体的な行列は別表1）に従って生成した1,000個の多次元（32次元）正規乱数ベクトル<sup>27</sup>に対し、以下の各手法を適用した<sup>28</sup>。

27 後に、10,000個の多次元（32次元）正規乱数ベクトルを発生させた場合の考察も行う。

28 ここでは、1次サンプリング法は、1次モーメント以外のモーメントに影響を与えないこと（補論2.参照）から、それを単独で使用する場合の計算は割愛した。

2次サンプリング法のみ

1次サンプリング法と2次サンプリング法

対称変量法のみ

対称変量法と2次サンプリング法

これらのモーメント調整法を適用しない場合を含め各ケースで、多次元正規乱数ベクトル列の生成を50セット行った。各ケースごとに、各セットで算出されるモーメントと母集団（平均0、分散共分散行列 $\Sigma$ ）のモーメントとの誤差の2乗和（2乗誤差）を計算し、50セットの2乗誤差の平均値を求めた。その結果を図表8と9に示す。

図表8 線形合同法による乱数列（1,000個）のモーメントの2乗誤差

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
平均	0.0310	0.0315	0.0000	0.0000	0.0000
標準偏差	0.0166	0.0000	0.0000	0.0330	0.0000
相関	0.9216	0.0000	0.0000	1.8251	0.0000
歪度	0.1898	0.1885	0.1885	0.0000	0.0000
尖度	0.7238	0.7219	0.7219	1.4407	1.4804
5次モーメント	22.0198	21.9398	21.9398	0.0000	0.0000
6次モーメント	174.9651	172.1806	172.1806	347.4980	364.0808

図表9 メルセンヌ・ツイスター法による乱数列（1,000個）のモーメントの2乗誤差

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
平均	0.0310	0.0317	0.0000	0.0000	0.0000
標準偏差	0.0156	0.0000	0.0000	0.0314	0.0000
相関	0.9179	0.0000	0.0000	1.8460	0.0000
歪度	0.1980	0.1971	0.1971	0.0000	0.0000
尖度	0.7715	0.7800	0.7800	1.5612	1.5359
5次モーメント	22.8521	22.6932	22.6932	0.0000	0.0000
6次モーメント	186.7842	189.8804	189.8804	366.1678	375.0185

これらから、以下の諸点が確認できる（～は、期待 図表7 どおりの結果である）

32,000個（1,000個×32次元）の乱数では、Excelの線形合同法の場合とメルセンヌ・ツイスター法の場合で、結果に大差はない。

モーメント調整法を適用しないと全モーメントに「ずれ」が生じている。

対称変量法は奇数次モーメントを一致させている。

2次サンプリング法は標準偏差と相関を一致させている。

2次サンプリング法は2次モーメント以外のモーメントに大きな影響は与えない。

対称変量法の適用は偶数次モーメントの「ずれ」を大きくしている。

また、試行回数を増やしたときの2乗誤差の振舞いをみるために、同様の計算を

10,000個の32次元正規乱数ベクトルについて実施した（図表10、11）。

図表10 線形合同法による乱数列（10,000個）のモーメントの2乗誤差

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
平均	0.0027	0.0027	0.0000	0.0000	0.0000
標準偏差	0.0014	0.0000	0.0000	0.0031	0.0000
相関	0.0910	0.0000	0.0000	0.1865	0.0000
歪度	0.0184	0.0185	0.0185	0.0000	0.0000
尖度	0.0754	0.0748	0.0748	0.1464	0.1442
5次モーメント	2.2769	2.2894	2.2894	0.0000	0.0000
6次モーメント	20.3567	20.1835	20.1835	39.4367	38.6210

図表11 メルセンヌ・ツイスター法による乱数列（10,000個）のモーメントの2乗誤差

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
平均	0.0035	0.0035	0.0000	0.0000	0.0000
標準偏差	0.0016	0.0000	0.0000	0.0031	0.0000
相関	0.0902	0.0000	0.0000	0.1770	0.0000
歪度	0.0183	0.0183	0.0183	0.0000	0.0000
尖度	0.0738	0.0740	0.0740	0.1556	0.1556
5次モーメント	2.2410	2.2394	2.2394	0.0000	0.0000
6次モーメント	19.1936	19.2317	19.2317	39.9542	39.9449

これらの結果からは、以下の2点を指摘できる。

320,000個（10,000個 × 32次元）の乱数でも、Excelの線形合同法の場合とメルセンヌ・ツイスター法の場合で、誤差の水準を除き、傾向は同じである。  
サンプル数の増加により全般的に誤差は減少した。

### （3）VaRの計算における対称変量法の効果

モンテカルロ法を用いてVaRを算出する際に、対称変量法を用いると計算精度が上がるであろうか。対称変量法を用いると偶数次モーメントの誤差が大きくなることからみても、期待値の計算の際と同様の誤差削減効果が、リスク量（パーセント点）の計算でも期待できるかはア・プリオリには明らかではない。

対称変量法の適用でリスク量（パーセント点）の誤差をどの程度削減し得るかをみるため、1次元正規乱数で数値実験を行った。実験手順は次のとおりである。

1次元正規乱数（平均0、分散1）を $k$ 個発生させ、 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ とする。  
 $\{x_1, x_2, \dots, x_{k/2}\}$ に対称変量法を適用し、1次元正規乱数 $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ を作成。  
 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ のうち、上位90%点、95%点、99%点、99.5%点をおのの $\{x_{90}, x_{95}, x_{99}, x_{99.5}\}$ とする。

$\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  のうち、上位90%点、95%点、99%点、99.5%点をおのとの  $\{y_{90}, y_{95}, y_{99}, y_{99.5}\}$  とする。

~ を100,000回繰り返し、各パーセント点の100,000セットの標準偏差を  $\sigma_{90}^x, \sigma_{95}^x, \sigma_{99}^x, \sigma_{99.5}^x, \sigma_{90}^y, \sigma_{95}^y, \sigma_{99}^y, \sigma_{99.5}^y$  とする。

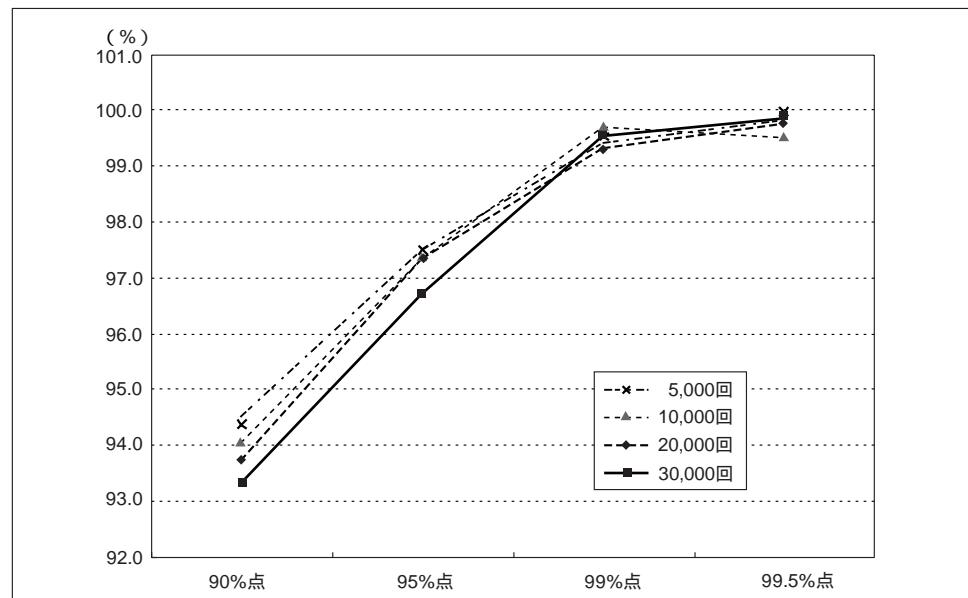
から を  $k = 5,000, 10,000, 20,000, 30,000$  で繰り返す。

上記で計算した標準偏差の比率  $\sigma^y/\sigma^x$  を図表12、13に示した。この比率が小さいほど、対称変量法を適用することによってリスク量（パーセント点）の計算誤差が小さくなることになる。

図表12 標準偏差の比率  $\sigma^y/\sigma^x$

	5,000回	10,000回	20,000回	30,000回
90%点	94.5%	94.0%	93.7%	93.3%
95%点	97.5%	97.3%	97.3%	96.7%
99%点	99.4%	99.7%	99.3%	99.5%
99.5%点	99.8%	99.5%	99.8%	99.9%

図表13 標準偏差の比率  $\sigma^y/\sigma^x$



これらからわることは、次のとおりである。

対象変量法の適用による誤差削減効果は小さく、特にパーセント点が100%に近付くにつれて、その効果はほとんど消滅する。

の傾向は、試行回数に依存せずみられる。

したがって、モンテカルロ法を用いてVaRを算出する際に、対称変量法を適用したとしても、必ずしも十分な計算精度の向上が得られるわけではなく、リスク管理実務上はこの点に留意することが必要である。

## 5. 期待値計算とパーセント点計算におけるモーメント調整法の効果

3節で示した正規乱数生成方法の手順のうち、ステップ5では、計算対象（期待値型、パーセンタイル型）によって、計算方法が異なっていた。ここでは、期待値型計算とパーセンタイル型計算の二つのにおいて、対称変量法、1次サンプリング法、2次サンプリング法を適用することで、どの程度の計算精度の改善がもたらされるのかをチェックする。期待値型計算として、5節(1)でバスケット型株式オプションのプライシングを行う。パーセンタイル型計算として、(2)で損益額分布に正規性を仮定できるような株式ポートフォリオの市場リスク、(3)で損失額分布がファット・テール性を持つと信ポートフォリオの信用リスクを取り上げる。

### (1) バスケット型オプションのプライシング

ここでは、期待値型計算（株式バスケット型オプション<sup>29</sup>のプライシング）の場合の、対称変量法、1次サンプリング法、2次サンプリング法の適用効果をみる。

対象とするバスケット型オプションの概要は以下のとおりである。

32銘柄の株価の合計（各銘柄とも現時点では時価100円と仮定）に対するヨーロピアン・コール型オプション
銘柄：業種が分散するように東証上場銘柄より選択（1株ずつ保有）
各株式の収益率の分散共分散行列：別表1参照
無リスク金利：2%
満期：1年
現時点の価格指数：3,200円

乱数の発生方法の概要は次のとおりである。

一様乱数生成方法：メルセンヌ・ツイスター法
正規乱数生成方法：モロの逆関数法 <sup>30</sup>
試行回数：100回、1,000回、10,000回（各試行回数を50セット実施し、それから平均と標準偏差を算出）

オプション価格の計算は、アット・ザ・マネー（ATM）の場合とアウト・オブ・ザ・マネー（OTM）の場合の2ケースで行う。

29 複数の原資産を持つオプションで、エキゾティック・オプションの1種である。なお、こうしたエキゾティック・オプション等の派生商品のプライシングを行う際に用いられる数値計算手法（モンテカルロ法を含む）は補論3.を参照。

30 補論2.の脚注52を参照。

## ATMの場合

ATMの場合の計算結果を図表14に示した。

図表14 バスケット・オプション評価 (ATMの場合)

## 標準偏差

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
100回	33.993	33.189	6.658	28.886	8.040
1,000回	12.192	11.542	2.218	10.835	2.293
10,000回	4.141	3.657	0.769	2.816	0.954

## 期待値

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
100回	259.486	260.424	258.568	258.990	259.615
1,000回	261.846	262.335	261.595	261.791	261.863
10,000回	262.851	263.093	262.029	262.172	262.260

この結果から、以下の諸点を指摘することができる。

1次サンプリング法と2次サンプリング法の併用、または対称変量法と2次サンプリング法の併用をすると、大きな誤差（標準偏差）削減効果が得られる。試行回数10,000回の場合では、計算精度は最高で約5.4倍 ( $4.141 \div 0.769$ ) となる（1次サンプリング法 + 2次サンプリング法の場合）。これに対し、対称変量法のみ、あるいは2次サンプリング法のみでは、計算精度はそれほど向上しない（特に2次サンプリング法の効果が低い）。

## OTMの場合

次に、ストライク・プライスを4,000円（すなわちOTM）として、上記と同様の計算を行った。その結果が図表15である。

図表15 バスケット・オプション評価 (OTMの場合)

## 標準偏差

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
100回	13.818	11.308	8.833	15.803	6.400
1,000回	4.575	3.955	3.128	5.410	1.974
10,000回	1.694	1.267	0.992	1.618	0.644

## 期待値

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
100回	43.481	44.109	42.853	42.916	39.741
1,000回	43.749	44.084	43.816	44.280	44.236
10,000回	44.788	44.904	44.609	44.485	44.500

この結果から、以下の諸点を指摘できる。

1次サンプリング法と2次サンプリング法の併用、または対称変量法と2次サンプリング法の併用では、誤差（標準偏差）削減効果が得られる。試行回数10,000回の場合では、計算精度は最高で約2.6倍（ $1.694 \div 0.644$ ）になる（対称変量法 + 2次サンプリングの場合）。

誤差削減効果は、ATMの場合に比べると小さい<sup>31</sup>。

対称変量法のみの場合、誤差削減効果はほとんどない<sup>32</sup>。

#### 5節(1)の小括

これらの分析から得られた結果を小括すると、以下のようになる。

ブライシング（期待値型計算）では、1次サンプリング法と2次サンプリング法の併用、または対称変量法と2次サンプリング法の併用の誤差削減効果が大きい。

対称変量法のみ、または2次サンプリング法のみの適用では、誤差削減効果は大きくない。

### (2) 市場リスク量の計算

ここでは、株式ポートフォリオのリスク量（VaR）を計算する際の、対称変量法、1次サンプリング法、2次サンプリング法の効果を確認する。株式ポートフォリオの損益額分布には正規分布を仮定する。したがって、ここではファット・テール性がない分布を前提とする場合を検討する（5節(3)では、損失額分布がファット・テール性を有する与信ポートフォリオを取り上げる）。

対象とするポートフォリオの概要は以下のとおりである。

32銘柄の株式からなるポートフォリオ（各銘柄とも100円の保有）
銘柄：業種が分散するように東証上場銘柄より選択
各株式の収益率の分散共分散行列：別表1参照
無リスク金利：0%
リスク評価期間：1日

31 OTMオプションのブライシングでは、ATMオプションのブライシングの場合に比べて原資産価格分布の片方の裾に近い部分、つまり分布の高次モーメントが相対的に大きく影響する。このことが、誤差削減効果がATMの場合に比べて小さくなった要因である。

32 OTMオプションのブライシングでは、原資産価格分布の片方の裾に近い部分のサンプルが重要となる。対称変量法では左右対称のサンプルを作成するという操作を行っているだけであるので、このブライシング例に同手法を適用しても、大きな誤差削減効果は期待できない。

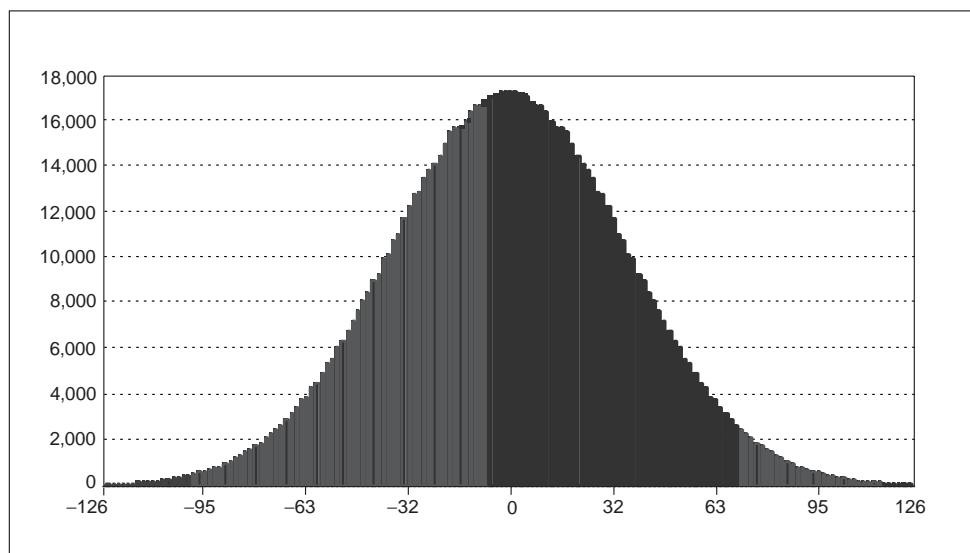
乱数の発生方法の概要は次のとおりである。

一様乱数生成方法：メルセンヌ・ツイスター法
正規乱数生成方法：モロの逆関数法
試行回数：5,000回、30,000回（各試行回数を1,000セット実施し、それから平均と標準偏差を算出）

リスク量の真値はデルタ法で求め、誤差の理論値（理論誤差）は補論1.の方法で算出する。

各種モーメント調整法を適用してリスク量（90%点、95%点、99%点、99.5%点）を計算し、その（標本の）標準偏差とリスク量の真値および理論誤差との比率を算出した（損益分布例は図表16）。

図表16 株式ポートフォリオの損益分布（1,000,000回）



まず、試行回数5,000回の計算結果を図表17、18に示す。

図表17 市場リスク量（5,000回）

市場リスク…標準偏差 / 真値

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
90%	2.04%	1.77%	1.16%	1.75%	1.08%
95%	1.96%	1.64%	1.28%	1.72%	1.03%
99%	2.40%	2.14%	1.96%	2.25%	1.76%
99.5%	2.89%	2.61%	2.45%	2.62%	2.25%

図表18 市場リスク量 (5,000回)

市場リスク...標準偏差 / 理論誤差

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
90%	108.1%	93.6%	61.7%	92.8%	57.3%
95%	107.7%	90.2%	70.3%	94.9%	57.0%
99%	105.9%	94.4%	86.4%	99.0%	77.8%
99.5%	107.8%	97.6%	91.6%	97.8%	83.9%

次に、同30,000回の計算結果を図表19、20に掲げる。

図表19 市場リスク量 (30,000回)

市場リスク...標準偏差 / 真値

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
90%	0.71%	0.61%	0.46%	0.71%	0.43%
95%	0.72%	0.59%	0.53%	0.72%	0.44%
99%	0.93%	0.85%	0.83%	0.93%	0.72%
99.5%	1.13%	1.05%	1.02%	1.13%	0.95%

図表20 市場リスク量 (30,000回)

市場リスク...標準偏差 / 理論誤差

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
90%	92.2%	78.8%	59.1%	92.1%	56.1%
95%	97.2%	79.8%	70.8%	97.4%	59.1%
99%	100.4%	92.1%	89.9%	100.5%	77.5%
99.5%	103.0%	96.3%	93.6%	103.5%	86.8%

これらの結果からは、以下の諸点がみてとれる。

計算精度は、対称変量法と2次サンプリング法を併用した場合が最もよい。

対称変量法のみを使用してもほとんど改善効果はみられない<sup>33</sup>。

同一試行回数の期待値型計算と比較すると、誤差削減効果は小さい<sup>34</sup>。

パーセント点が大きくなるほど、モーメント調整法の誤差削減効果が小さくなる傾向がある<sup>35</sup>。

33 脚注32と同様の背景がある。

34 ここで求めたリスク量 (VaR) は分布の裾の統計量であるため、高次のモーメントの寄与度が大きいことが背景にある。

35 パーセント点が大きくなると、統計量に対してより高次のモーメントが寄与するようになるためである。

### (3) 信用リスク量の計算

次に、与信ポートフォリオの信用リスク（VaR）の算出を行い、対称変量法、1次サンプリング法、2次サンプリング法の誤差削減効果を確認する。与信ポートフォリオの損失額分布は通常ファット・テール性を有する点が特徴であり、以下では、分布の形状が、誤差削減効果にどのような影響を与えるのかも考察する。

対象とする与信ポートフォリオの概要は以下のとおりである。

32社に対する貸出からなるポートフォリオ
各社の与信額、格付、倒産確率：別表2参照
損失の定義：デフォルト・モード方式 <sup>36</sup>
倒産時回収率：ゼロ
デフォルト相關：別表1の分散共分散行列と別表2の倒産確率より算出
リスク評価期間：1年

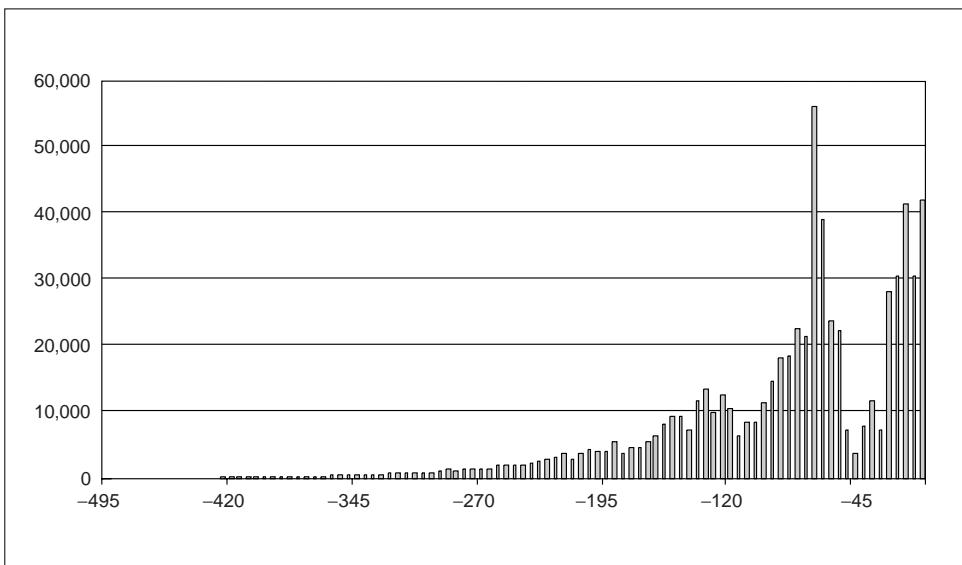
また、乱数の発生方法の概要は次のとおりである。

一様乱数生成方法：メルセンヌ・ツイスター法
正規乱数生成方法：モロの逆関数法
ベルヌーイ型乱数：上記の正規乱数を相関を勘案して、さらにベルヌーイ型乱数に変換
試行回数：5,000回、30,000回（各試行回数を1,000セット実施し、それから平均と標準偏差を算出）

リスクの真値は、30,000,000回の試行で得られた値であるとする（みなし真値）。各種モーメント調整法を適用してリスク量（90%点～99.5%点）を計算し、その（標本の）標準偏差とリスク量のみなし真値およびモーメント調整法なしのモンテカルロ計算による誤差との比率を算出した（損失額分布は図表21）。

36 リスク評価期間内に債務者のデフォルトが生じる場合にのみ損失が発生すると定義する方式。これに対して、デフォルト以前の債務者の信用度（格付）低下も考慮する方式はMTM方式（マーク・トゥ・マーケット方式）と呼ばれる。

図表21 与信ポートフォリオの損益分布例 (1,000,000回、損失額0を除くベース)



試行回数5,000回の計算結果を図表22、23に示す。

図表22 信用リスク量 (5,000回)

信用リスク…標準偏差 / みなし真値

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
90%	1.77%	1.56%	1.27%	1.59%	1.18%
95%	2.07%	1.81%	1.50%	1.81%	1.26%
99%	2.79%	2.57%	2.43%	2.57%	2.16%
99.5%	3.35%	3.20%	3.08%	3.09%	2.81%

図表23 信用リスク量 (5,000回)

信用リスク…標準偏差 / モーメント調整法を使用しない場合の標準偏差

	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
90%	88.3%	71.6%	90.1%	66.6%
95%	87.6%	72.8%	87.5%	60.8%
99%	92.1%	87.1%	92.2%	77.4%
99.5%	95.5%	92.2%	92.4%	84.1%

次に、同30,000回の計算結果を図表24、25に掲げる。

図表24 信用リスク量 (30,000回)

信用リスク…標準偏差 / みなし真値

	調整なし	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
90%	0.74%	0.69%	0.63%	0.75%	0.61%
95%	0.70%	0.61%	0.53%	0.69%	0.49%
99%	1.08%	1.01%	1.00%	1.10%	0.96%
99.5%	1.37%	1.30%	1.27%	1.38%	1.24%

図表25 信用リスク量 (30,000回)

信用リスク…標準偏差 / モーメント調整法を使用しない場合の標準偏差

	2次	1次 + 2次	対称	対称 + 2次
90%	93.1%	84.6%	100.9%	82.4%
95%	86.7%	76.5%	98.7%	70.2%
99%	93.2%	92.3%	101.8%	88.6%
99.5%	94.6%	92.8%	100.7%	90.6%

これらの結果から、以下を指摘することができる。

計算精度は、対称変量法と2次サンプリング法を併用した場合が最もよい。

対称変量法のみを使用してもほとんど改善効果はみられない。

5節(1)および5節(2)と比較すると、誤差削減効果は相対的に小さい。

95%点以上では、パーセント点が大きくなるほど、モーメント調整法の誤差削減効果が全般的に小さくなる傾向がある。

信用リスクの損失額分布は、上述したようにファット・テール性を持つ。このため、分布の裾の統計量であるパーセント点の計算に当たっては、ファット・テール性が小さい分布に比べて、分布の高次モーメントの影響をより受けやすくなる。このことが、～のような事象の背景となっていると考えられる。

## 6. 計算コストを勘案した実装方法に関する考察

これまでみてきたように、モンテカルロ法でプライシングやリスク量の算出を行う場合、本稿で検討した各種モーメント調整法の中では、対称変量法と2次サンプリング法、または1次サンプリング法と2次サンプリング法の組み合わせが、他の手法に比べて大きな誤差削減効果をもたらす。

その効果は、特に、派生商品のプライシングで大きい。一方、リスク量計算の際の誤差削減効果をみると、対称変量法、1次サンプリング法と2次サンプリング法の

組み合わせでも、同じ試行回数で比較すると、プライシングなどの効果は得られない。特に2次サンプリング法をリスク量計算に適用することを検討する際には、同手法による誤差削減効果が小さいということに加えて、同手法にはさらに以下のよ  
うな留意点があることも考慮する必要がある。

2次サンプリング法では、分散共分散行列の計算と逆行列演算が必要となる  
(補論2.)ため、相関のある多次元正規乱数生成に時間がかかる。

2次サンプリング法では、生成した乱数をいったん記憶し、行列演算等を行う  
必要があるため、乱数の発生回数を予め指定する必要がある。このため、「予  
め回数を定めずに試行を続け、一定の収束条件を満たしたときに、計算を停  
止させる」という(通常のモンテカルロ法では可能な)方法は使えない。

一般に、モンテカルロ法は計算機の並列化による演算の高速化に向いた方法であるとされる。ここで、モンテカルロ法において「高速化」という言葉は、目的とする精度がより少ない回数の試行で得られる(つまり誤差削減効果が大きい)ということと、単位時間当たりの試行回数を増加させるということの2つの意味を持つ。5節までは、前者の「目的とする精度が少ない回数の試行で得られるか否か」という点を考察の対象としてきた。これに対し、上述の の問題は、後者の「単位時間当たりの試行回数を増加させるか否か」という意味で、「高速化」のネックになり得る点には留意が必要である。

この点を処理の並列化という観点に絡めて説明する。 の多次元正規乱数生成演算は、逆行列演算を含むため並列処理が困難である。このため、この演算を特定の1台の計算機で行う必要がある<sup>37</sup>が、全体の処理の中で並列処理ができない演算の占める割合が大きいと、並列処理による性能向上が制限されてしまう<sup>38</sup>ことになる。並列処理ができない演算が全体の処理に占める割合は、 のように多次元正規乱数生成に時間がかかると、それだけ大きくなることになる。

以下では、上述の の点に焦点を当てて、2次サンプリング法を用いた場合とモーメント調整法を用いない場合の各計算時間を比較する<sup>39</sup>。具体的には、5節(2)で行った市場リスク量の計算結果(信用リスク計算よりも2次サンプリング法による誤差削減効果が大きい)を拡張した試算を行う。

5節(2)の設定でポートフォリオの株式銘柄数を8、16、32として、各ケースで、2次サンプリング法を適用した場合とモーメント調整法を適用しなかった場合のリ

37 特に、周期が十分に長くない乱数列を用いて並列処理を行う場合、各計算機で生成した乱数が同一にな  
ることを排除するため、特定の計算機で乱数を生成したのち、それを分割、各計算機に配布するなどの  
工夫が必要である。

38 仮に全体の処理の20%が並列化できないとすると、並列化する計算機台数を無限にしたとしても、並列  
化しない場合と比べて、最高で5倍の処理速度しか得られない。ちなみに、この関係をアムダールの法則  
と呼ぶ。

39 1次サンプリング法や対称変量法を用いる場合の計算には、2次サンプリング法で必要な分散共分散行列  
や逆行列の計算のような(時間のかかる)演算が含まれておらず、その計算時間はモーメント調整法を  
使用しない場合の計算時間と大きな差はないため、ここでは比較の対象とはしない。

スク量を計算し（試行回数は10,000～30,000回）、計算時間<sup>40</sup>を求めた。その結果をまとめたのが図表26である。

図表26 市場リスク量の計算時間

モーメント調整法を使用しない場合				2次サンプリング法使用時			2次サンプリング法使用時 / モーメント調整法を使用しない場合				
	10,000回	20,000回	30,000回		10,000回	20,000回	30,000回		10,000回	20,000回	30,000回
8次元	2.0	4.0	6.0	8次元	2.6	5.3	7.8	8次元	133%	132%	131%
16次元	4.4	8.7	13.1	16次元	6.7	13.3	19.9	16次元	154%	153%	153%
32次元	10.8	21.6	32.4	32次元	20.6	40.2	61.4	32次元	191%	187%	189%

モーメント調整法を適用しない場合と2次サンプリング法を適用した場合とを比べると、同じ試行回数での計算時間は、後者の方が長い。また、次元数が大きくなるにつれ、両者の計算時間の相対的な格差が拡大することがわかる（32次元の例では約2倍にまで拡大）。2次サンプリング法では、この方法で必要となる分散共分散行列の計算の時間が次元数の2乗と試行回数に比例するが、本例では、特にこの時間が全体の処理時間の中で大きな比率を占めていることが、上述の相対的な格差拡大の要因である（図表27）。

図表27 市場リスク量の計算時間（2次サンプリング法を使用）の内訳<sup>41</sup>

（試行回数：30,000回）

	8次元	16次元	32次元	備考
正規乱数の発生（一様乱数発生～正規乱数への変換）	4.40	8.58	17.51	次元数 × 試行回数に比例
乱数列の分散共分散行列の計算	1.74	6.86	27.39	次元数 <sup>2</sup> × 試行回数に比例
多次元正規乱数への変換（変換行列 × 乱数ベクトル）	0.92	3.28	12.33	次元数 <sup>2</sup> × 試行回数に比例
ポートフォリオ評価	0.12	0.22	0.45	
その他	0.66	1.01	3.71	

つまり、2次サンプリング法には、それを適用することにより「目的とする精度が少ない回数の試行で得られる」というメリットがある反面、「多次元正規乱数の生成速度が遅くなる」というデメリットがある。このデメリットは、処理数そのものが増加することと、並列処理を行っても単位時間当たりの試行回数が期待どおりには増加しないことによって顕現化する。特にポートフォリオが大きく複雑である場合、並列処理によってモンテカルロ法の高速化を図ることが多い。このとき2次

40 ここで時間は相対的な数値であり、絶対値には特段の意味はない。

41 計算時間の内訳の中で、2次サンプリング法を使用する場合に特有の処理は、「乱数列の分散共分散行列の計算」と「その他」に含まれる一部の処理（逆行列計算等）である。図表27の例では、「ポートフォリオ評価」の時間が相対的に短くなっているが、より複雑で大きなポートフォリオのリスク量を算出するときには、この時間は相対的に長くなる。

サンプリング法を適用すると、並列処理の効果がより限定されることになる結果、目的の精度を得るために処理時間が、2次サンプリング法を適用しない場合に比べて長くなるということが起こり得る。

ここでの考察から、リスク計測実務で単純に2次サンプリング法を適用することには留意が必要であることがわかる。2次サンプリング法は、保有ポートフォリオの内容やリスク・ファクター数、リスク量に必要な精度、リスク量の使用形態（例えば、経営陣への報告頻度）などを勘案して、使用の可否を決定する必要があると言える。

## 7. まとめ

本稿では、多次元正規乱数を使用したモンテカルロ法による派生商品のプライシングやリスク量計算の結果を用いて実務上の考察を行った。

まず、一様乱数の周期に注目し、アプリケーション・ソフトであるExcel等で提供されるごく一般的な乱数ルーチンを使用する場合、乱数の周期の影響で、望ましい結果が得られない可能性があることを示した。さらに、メルセンヌ・ツイスター法と線形合同法によっておのの発生させた乱数を例に、乱数の多次元結晶構造とそれが与える影響を概説した。

次に、多次元正規乱数ベクトルの生成時にモーメント調整法を適用する場合の効果を考察した。対称変量法、1次・2次サンプリング法を用いた場合に各モーメントがどのように調整されるかを検討したうえで、多次元正規乱数を用いて、エキゾティック・オプションの価格、仮想ポートフォリオの市場リスク量や信用リスク量を実際に計算し、生成乱数が計算の精度に与える影響を考察した。その結果、プライシングでは、対称変量法と2次サンプリング法の組み合わせにより、大幅な誤差削減効果が得られることを確かめた。一方、リスク量計算では、実務上の留意点が幾つか存在することが判明した。具体的には次のとおりである。

プライシングと比べると誤差削減効果は小さい。これは、パーセント点が高くなるほど顕著となる。

対称変量法のみを適用した場合は、誤差削減効果はほとんどみられない。

2次サンプリング法は、その誤差削減効果と計算時間とのバランスを比較検討したうえで、実装可否を判断することが必要である。

このように、本稿の分析からは、特にリスク量をモンテカルロ法で算出する場合、推定誤差や計算コストに十分留意する必要があることがわかった。この点、本来は、モンテカルロ法によるリスク量の算出でも、予め推定値の収束条件を定めて計算を行い、その収束条件を満足するようになって計算を終了させるというアルゴリズムを採用することが理念的には望ましい。ただ、実際の実務では、例えば与信ポートフォリオの信用リスクの算出を1万回といった予め定めた試行回数で計算を打ち切ることが多い。これは、収束条件付きのモンテカルロ法による計算の特徴である。

ルロ計算では計算終了までの時間が一般的に長い（またいつ終了するかも予想し難い）ことに加え、リスク管理実務の現場では、リスク量を迅速に経営サイドへ報告しなければならない等の時間的制約があることも背景になっている。こうした予め定めた試行回数でモンテカルロ計算を打ち切ることには、実務上有程度やむを得ない面もあるとは思われるが、本稿で示したリスク量計算の推定誤差や計算コストの重要性を考えると、自らのポートフォリオについて、アド・ホックな形であっても、本稿で行ったような分析を行うことを検討する価値はあるように思われる。

最後に、今後の研究課題を2点挙げて、本稿を締め括る。

正規分布に比べてよりファット・テール性の強い分布（例えば  $t$  分布）へモー

メント調整法を適用した場合のリスク量計算に与える影響を考察する。

準乱数<sup>42</sup>をリスク量計算へ適用し得るかを検討する。

---

42 準乱数（quasi random number）に関しては、例えば Traub and Werschulz [ 1998 ] を参照。準乱数は、数学的には、本稿で議論している乱数とは全く異なる。準乱数を使ったモンテカルロ法は、準モンテカルロ法（quasi Monte Carlo method）と呼ばれる。

## 補論1. モンテカルロ法によるプライシングとリスク量計算および誤差

### (1) プライシング

派生商品の価格を  $p(t, X_t)$  とおき、それが確率変数 ( $X_t$  : 例えば株価) の関数  $g(t, X_t)$  の期待値 (平均値) に等しいとすれば、

$$p(t, X_t) = E[g(t, X_t)] \int_{-\infty}^{\infty} g(t, X_t) dF(X_t), \quad (\text{A-1})$$

と書ける。区間  $[0, 1]$  上の一様乱数  $Y$  を使って  $X_t$  に対応する乱数を作るとすると、 $x_t = F^{-1}(y)$  であるから、

$$p(t, X_t) = \int_0^1 g(t, F^{-1}(y)) dy, \quad (\text{A-2})$$

となる。 $(\text{A-2})$ 式の左辺を

$$\int_0^1 g(t, F^{-1}(y)) dy = \int_0^1 f(y) dy, \quad (\text{A-3})$$

と定義する。一様乱数を  $n$  個 ( $y_1, y_2, \dots, y_n$ ) 発生させ、 $f(y_i)$  の算術平均

$$A(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(y_i), \quad (\text{A-4})$$

を計算すれば、 $p(t, X_t)$  を推定することができる。このとき、 $Y$  (一様乱数) は独立で同じ分布に従う確率変数であるから、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $A(n)$  はほとんど確実に (つまり確率1で)  $p(t, X_t)$  に収束する<sup>43</sup> (大数の法則)。

また、 $A(n)$  の分散は

$$\text{var}[A(n)] = \text{var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(y_i)\right] = \frac{1}{n} \text{var}[f(y_i)] = \frac{1}{n} \left\{ \int_0^1 f^2(y) dy - p^2(t, X_t) \right\}, \quad (\text{A-5})$$

となるから、 $f(y)$  が2乗可積分ならば、 $A(n)$  の標準偏差 ( $\sqrt{\text{var}[A(n)]}$ ) は  $1/\sqrt{n}$  のオーダーで減少していく。したがって、推定値の精度を1桁上げるためにには試行回数を100倍に増やす必要があることになる。

統計的な精度を考察するために、 $\varepsilon$  と  $\alpha$  を正の定数として

$$\Pr[|A(n) - p(t, X_t)| < \varepsilon] \geq 1 - \alpha, \quad (\text{A-6})$$

43 概収束と呼ばれる形の収束。概収束に関しては、例えば湯前・鈴木 [2000] を参照。

を考える。チェビシェフの不等式を使うと、( A-6 )式は  $\text{var}[A(n)] / \varepsilon^2 \leq \alpha$  のときに成り立つことが簡単に示せるので、これを使って、

$$n \geq \frac{\int_0^1 f^2(y) dy - p^2(t, X_t)}{\alpha \varepsilon^2}, \quad (\text{A-7})$$

を導くことができる。したがって、 $n$ は少なくとも  $\alpha^{-1} \varepsilon^{-2}$  のオーダー以上である必要があり、 $\varepsilon$ と $\alpha$ を小さくする（推定精度を上げる）ためには、 $n$ を相当大きくする必要があることになる。

## (2) リスク量の計算

VaR（信頼水準 $\alpha\%$ ）の推定量を  $\tilde{x}_\alpha$  とするとき、試行回数が十分に大きい場合、 $\tilde{x}_\alpha$  の分布は正規分布で近似できて、

$$\tilde{x}_\alpha \sim N\left(x_\alpha, \frac{\alpha(1-\alpha)}{nf(x_\alpha)^2}\right), \quad (\text{A-8})$$

が成り立つ（ $f(x)$  は損益分布<sup>44</sup>の確率密度関数）。

したがって、理論誤差（誤差の理論値）を  $\sigma = \sqrt{\text{var}[\tilde{x}_\alpha]}$ （ $\tilde{x}_\alpha$  の標準偏差）と定義すれば、信頼水準が  $(1-p)$  の信頼区間は、近似的に

$$[\tilde{x}_\alpha - \sigma z_{(1-p/2)}, \tilde{x}_\alpha + \sigma z_{(1-p/2)}], \quad (\text{A-9})$$

となる（ただし、 $z_{(p)}$  は標準正規分布の  $100p\%$  点）。この信頼区間は  $\alpha$  を小さくする（VaRの信頼水準を上げる）と急速に広がることが知られている<sup>45</sup>。この点は、モンテカルロ法をリスク量（VaR）の算出に用いる場合に特に注意しなければならない点である。

44 本稿では正規分布を仮定した。

45 詳しくは木島 [ 1998 ] または Johnson, Kotz, and Balakrishnan [ 1994 ]

## 補論2. 分散減少法とモーメント調整法

モンテカルロ法による計算で十分な精度を確保するためには、相当回数の試行が必要となる。このため、実務では計算速度の向上（収束速度の向上）が重要な問題となる。

以下では、期待値型の計算（プライシング）を前提に議論を進める。単純なモンテカルロ法による推定量 $A(n)$ の標準偏差は、比例係数を $c$ とおくと、補論1.の(A-5)式より $c/\sqrt{n}$ という形で書ける。したがって、計算速度の向上を図るには、単位時間当たりの試行回数は不变とすると、

$c$ を小さくする（ファクターの改善）

$1/\sqrt{n}$ の関数型を変える（オーダーの改善）

という2つの方向性を考えることができる。を達成するには、(A-5)式の関係を変更するために、一様乱数の性質自体を変更（改良）する必要がある。例えば、準乱数を使ったモンテカルロ法<sup>46</sup>がこれに該当する。

は、分散減少法と呼ばれるもので、乱数のサンプリングの仕方に工夫を加えるというものである。分散減少法のバリエーションを簡単にまとめると以下のとおりとなる<sup>47</sup>。

図表A-1 主な分散減少法の概要

負相關法	(A-5)式の理論上の期待値 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{i=1}^n f(y_i)$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{i=1}^n f(z_i)$ が等しく、 $f(y_i)$ と $f(z_i)$ の相関が負である2つの系列の乱数列、 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ と $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ を用いる方法 <sup>48</sup> 。
対称変量法 <sup>49</sup> (負相關法の1形態)	(A-3)式の $f(y)$ が単調関数であるとき、生成された乱数 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ と期待値が同じで-1の相関を持つ数列 $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ を利用する方法。
1次サンプリング法	生成された乱数 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ の期待値が理論上の期待値 ( $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{i=1}^n y_i$ ) に一致するよう生成された乱数全體をシフトさせる方法。
2次サンプリング法	生成された乱数の分散（および共分散）が理論上の分散・共分散に一致するよう乱数全體を修正する方法。

46 脚注42を参照。

47 湯前・鈴木[2000]の分類方法は、金融への応用を意識したものとして参考になる。

48 (A-3)式の $f(y)$  が単調関数であるとき、 $f(y_i)$  と  $f(z_i)$  の相関が負となる  $y_i$  と  $z_i$  は容易に作成することができる。

49 乱数の奇数次モーメントがゼロになることから、奇数次サンプリングと呼ばれることがある。

制御变量法	計算対象である確率変数の不偏推定量（例えば $X$ ）に対し、これと相関がある平均値が明らかな確率変数（例えば $Y$ 制御变量と呼ばれる）があるとき、 $X$ と $Y$ を組み合わせた $Z = X - \alpha(Y - E[Y])$ を乱数として使用する方法。
加重サンプリング法	積分区間全域で一様に乱数を使うのではなく、「重要と考えられる領域」でそれ以外の領域よりも多くの乱数を使用する方法 <sup>50</sup> 。
層別サンプリング法	積分区間を複数の小区間に分割し、各小区間で予め定めた個数の乱数を使う方法 <sup>51</sup> 。

分散減少法のうち、生成乱数の分布の特定のモーメントを母集団分布のそれと一致するように操作を加える手法をモーメント調整法と呼ぶことがあり、上記のうち対称变量法、1次・2次サンプリング法がそれに含まれる。

以下では、これら 対称变量法、 1次サンプリング法、 2次サンプリング法を簡単に解説する。

### 対称变量法

補論1 .の( A-2 )式を例にとる。 $g(t, X_t)$ が単調な関数とする。まず、乱数列 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を生成する<sup>52</sup>。次に、 $w_i = -x_i$  としてもう1つの乱数列 $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ を生成する。この2つの乱数列は、

50 派生商品のブライシングやリスク量の計算では、将来時点の原資産の確率分布が用いられるが、その分布で「重要と考えられる領域」を予め決めることが困難であることから、加重サンプリング法が実際に用いられることは少ないと思われる。

51 派生商品のブライシングには幾つかの応用例がある（例えば、Curran [ 1994 ] の方法はイン・ザ・マネー・オプションのブライシングに効果がある）。

52 一様乱数から正規乱数列を生成するためには、( A-1 )式の逆関数 $F^{-1}$ に当たるものが必要となる。金融実務では分布の裾に対しても近似精度がよい値が算出できるモロの方法 ( Moro [ 1995 ] ) が使われることが多い ( Joy, Boyke, and Tan [ 1998 ] も参照 )。モロの方法の概略は以下のとおりである。

正規分布の分布関数  $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2) du$  に対し、 $u = \Phi(x)$  とおく。このとき、以下の関係を用いる（なお、 $a_n, b_n, c_n$  は定数 具体的な値は割愛）。

(1)  $y = u - 0.5$  とする。

(2)  $|y| \leq 0.42$  のとき、 $\Phi^{-1}(u) = y(a_0 + a_1 y^2 + a_2 y^4 + a_3 y^6) / (1 + b_1 y^2 + b_2 y^4 + b_3 y^6 + b_4 y^8)$  とする。

(3)  $|y| > 0.42$  のとき、 $y > 0.0$  であれば  $\Phi^{-1}(u) = c_0 + \sum_{n=1}^8 c_n z^n$ 、 $r = 1.0 - u$ 。 $y < 0.0$  であれば  $\Phi^{-1}(u) = -(c_0 + \sum_{n=1}^8 c_n z^n)$ 、 $r = u$ 。ただし、 $z = \log(-\log(r))$ 。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(t, x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(t, w_i) = p(t, X_t)$$

$$\text{すなわち、} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(t, x_i) + g(t, w_i)}{2} = p(t, X_t) , \quad (\text{A-10})$$

を満たす。

このとき、標本分散は

$$\text{var} \left[ \frac{g(t, X) + g(t, W)}{2} \right] = \frac{1}{4} (\text{var}[g(t, X)] + \text{var}[g(t, W)] + 2 \text{cov}[g(t, X), g(t, W)]) , \quad (\text{A-11})$$

であるから、 $g(t, X)$  と  $g(t, W)$  が独立であるよりも、負の相関がある方が小さくなる。

この場合、 $g(t, X_t)$  の単調性の仮定により、 $g(t, X)$  と  $g(t, W)$  は負の相関を持つことになるため、同じ精度の計算に必要な試行回数は少なくて済むことがわかる。

また、対称変量法によって生成された乱数列を  $\{\tilde{x}\} = \{x\} + \{w\}$  とすると、

$$E[\tilde{x}] = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (x_i + w_i) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_i) = 0 \quad (\text{A-12})$$

となるので、 $\tilde{x}$  の  $l$  次モーメントは

$$E[(\tilde{x} - E[\tilde{x}])^l] = E[\tilde{x}^l] = \frac{1}{2n} \left( \sum_{i=1}^n (x_i^l + w_i^l) \right) = \frac{1}{2n} \left( \sum_{i=1}^n (x_i^l + (-x_i)^l) \right) \quad (\text{A-13})$$

$$l \text{ が奇数の時} \quad = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (x_i^l - x_i^l) = 0 ,$$

$$l \text{ が偶数の時} \quad = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (x_i^l + x_i^l) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^l ,$$

となる。よって、 $\tilde{x}$  の奇数次モーメントがすべて0となることが示された。

### 1次サンプリング法

対称変量法に基づいて生成された乱数列には、奇数次モーメントは全てゼロになるが、逆にその影響で、偶数次モーメントの収束（母集団分布の偶数次モーメントへの収束）が悪くなるという性質がある<sup>53</sup>。このため、1次モーメントのみを母集団分布のそれに合致させる方法を考える（1次サンプリング）<sup>54</sup>。

方法は、生成した乱数ベクトルの列 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ （各要素はベクトル）に対し、標本平均だけシフトした $y_i = x_i - 1/n \sum_{k=1}^n x_k$ を使って新しい乱数ベクトルの列 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ を生成すればよい。このとき、

$$E[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = 0, \quad (A-14)$$

であるから、 $y$ の $l$ 次モーメントは、

$$E[(Y - E[Y])^l] = E[Y^l] = E[(X - E[X])^l], \quad (A-15)$$

と計算できて、 $x$ の $l$ 次モーメントと一致する。また、共分散についても、

$$\begin{aligned} & E[(Y^{(i)} - E[Y^{(i)}])(Y^{(j)} - E[Y^{(j)}])] \\ & = E[Y^{(i)} Y^{(j)}] = E[(X^{(i)} - E[X^{(i)}])(X^{(j)} - E[X^{(j)}])], \end{aligned} \quad (A-16)$$

であるから（ $X^{(i)}$ 、 $Y^{(i)}$ はそれぞれベクトル $X$ 、 $Y$ の $i$ 番目の要素を表す）、 $x$ の共分散と一致する。すなわち、 $X$ から $Y$ への変換は定数分のシフトであるので、 $X$ と $Y$ の各モーメントや共分散は等しい。

### 2次サンプリング法

生成された乱数ベクトルの列の2次モーメントを母集団分布のそれに合致させる方法を考える。ここでは、正規乱数を対象とする。

所与のパラメータ $\mu$ （平均ベクトル）、 $\Sigma$ （分散共分散行列、 $\Sigma$ のコレスキーフ分解を $\Sigma = CC^T$ 、 $C$ は下三角行列とする）を使用して正規乱数ベクトルの列を生成することを考える。まず、多次元標準正規乱数列（平均0、分散共分散行列I、単位行

53 例えば、山下 [2000] を参照。

54 生成された乱数列のモーメントは母集団分布のモーメントとは必ずしも一致しない（生成数が無限大となるような極限を取ったときには一致する）。

列 )  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ( 各要素はベクトル ) を生成する<sup>55,56</sup>。このとき、生成した多次元正規乱数の平均ベクトル  $\mathbf{m}$  ( 標本平均 ) と分散共分散行列  $\mathbf{s}$  は

$$\mathbf{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i, \quad (\text{A-17})$$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{m})(\mathbf{x}_i - \mathbf{m})^T, \quad (\text{A-18})$$

と書ける。  $\mathbf{s}$  はコレスキー分解できて、

$$\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{C}}^T, \quad (\text{A-19})$$

と書けるから、

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{x}_i, \quad (\text{A-20})$$

とすれば、  $\mathbf{y}$  は、その2次モーメントが母集団分布の2次モーメントである  $\Sigma$  に一致する正規乱数のベクトルの列となる。ただし、( A-20 )式で生成された  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  の2次モーメント以外のモーメントは  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  のそれと一致しない。本稿では ( A-20 )式に基づく方法を2次サンプリング法と定義した。なお、1次モーメントを変化させずに2次モーメントのみを調整するには、

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}) + \mathbf{m}, \quad (\text{A-21})$$

とすればよい。これをを利用して、

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{x}_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}) + \boldsymbol{\mu}, \quad (\text{A-22})$$

とすれば、1次・2次モーメントを同時に調整することができる。

55 通常用いられる多次元正規乱数の生成法は以下のとおりである。

- (1) 標準正規分布に従う乱数  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  を生成し、  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$  とおく。
- (2)  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}^T$  を  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}$  に従って生成する。
- (3) (1)と(2)を繰り返す。

56 木島・長山・近江 [ 1996 ] では、脚注55の方法で作成した  $\boldsymbol{\mu}$  と  $\Sigma$  に従う多次元正規乱数列を  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  として用いている。

### 補論3. 派生商品のプライシングを行う際の数値計算手法

モンテカルロ法は、高精度な結果を得るために他の手法と比較すると著しく多くの計算量を必要とする<sup>57</sup>。このため、特に迅速なプライシングが要求されるフロント・セクションでは、多くの場合、モンテカルロ法は派生商品のプライシング手法としては最後の手段と位置付けられている（実務上は、各プライシング手法は、解析解 格子法または有限差分法 モンテカルロ法、の順に選好されている）。

モンテカルロ法がプライシングで用いられるのは、他の手法では実装が困難である場合、あるいはモンテカルロ法を用いる方が計算負荷が少ない場合である。ヨーロピアン・タイプのオプションでみると、前者の例は、原資産価格変動のモデルが複雑なオプション、経路依存性のあるオプション、後者の例は、4個以上の原資産を持つオプションである<sup>58,59</sup>。

原資産価格変動のモデルが複雑なオプションの場合、ほとんどのケースで格子法や有限差分法を用いることが原理的には可能であるが、モデル化から実装までの作業が複雑になるという問題がある。これに対して、モンテカルロ法は、計算ロジックが明快であり、こうしたケースでも実装は比較的容易である。

経路依存性のあるオプションの場合は、通常は、格子法や有限差分法は用いられない<sup>60</sup>。一方、モンテカルロ法は、原資産価格のパスを現時点から満期時点に向けて多数発生させ、各パスにおけるペイオフの割引現在価値の平均を求めるという単純な操作であることから、経路依存性を持つオプションのプライシングも容易に行うことができる。

57 ヨーロピアン・コール・オプションのプライシングを例にとると、解析解であるブラック・ショールズ式を使えば有効数字8桁程度の解を瞬時に得ることができる。一方、モンテカルロ法で同程度の有効数字を得るためにには、約 $10^{16}$ （1京）回の演算が必要である。1回の演算が0.1m秒（1秒間に10,000回の演算ができる）としても、約1京回の演算を終了させるためには、3.3万年かかる計算になる。

58 なお、モンテカルロ法はアメリカン・オプションの評価には不向きである。この理由を簡単に説明する。モンテカルロ法では、現時点から将来時点に向けて原資産価格のパスを発生させる（前進演算）。アメリカン・オプションの場合、満期時点のある時点で権利行使するか否かは、行使したときに得られる価値と行使しなかったときに得られる価値を比較することによって決定される。後者の価値を求めるには、その時点からみた将来時点の原資産価格分布が必要となり、前進演算のモンテカルロ法では、計算量が莫大になってしまうことになる。これが、アメリカン・オプションの評価にはモンテカルロ法が不向きである背景である。

一方、格子法や有限差分法では、満期時点から現時点に向けて演算を行う（後進演算）ため、行使したときの価値としなかったときの価値を全ての評価点（ノードないしグリッド）で行うことで、アメリカン・オプションの価値を求めることができる。

59 最近では、何らかの工夫を加えることでモンテカルロ法によりアメリカン・オプションの評価を試みる方法が幾つか提案されているが、決定的な方法はないのが実情である（湯前・鈴木〔2000〕等を参照）。ただ、同分野の研究は積極的に研究が進められていることから、近い将来にスタンダードとなり得る方法が開発される可能性はある。この点で、この分野の研究動向には注目が必要であると考えられる。

60 格子法や有限差分法は、基本的に、経路依存性のない派生商品を経路依存性のないモデル（マルコフ型モデル）で取り扱う場合に利用される。格子法で考えると、計算速度を確保するためには再結合格子が必要となるが、それでは各格子上での原資産価格や派生商品価値に経路依存性を持たせることができなくなるためである。

複数の原資産を持つオプションの場合、各原資産の同時確率分布を数値的に扱う必要がある。しかし、格子法や有限差分法は、原資産数（次元数）の増加に伴い、計算量が級数的に増加してしまうため、実際に計算できるのは原資産の数がせいぜい13のときまでである。これに対し、モンテカルロ法を使えば、次元数が増えても計算量はそれほど増加しない（各原資産について $n$ 個の乱数を発生させるとすると、原資産数を1つ増やしても、乱数の個数は $n$ 個増えるのみである）という利点がある。このため、例えば多資産のバスケット型オプションのプライシングにはモンテカルロ法を使うのが一般的となっている。

別表1 32社の株式の収益率の分散共分散行列

(年率 観測期間1年)

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	X17	X18	X19	X20	X21	X22	X23	X24	X25	X26	X27	X28	X29	X30	X31	X32
X1	0.16	-0.00	0.09	0.09	0.01	0.03	0.02	0.03	0.03	0.02	0.03	0.04	0.01	0.02	0.04	0.04	0.03	0.04	0.02	0.01	0.01	-0.00	0.01	0.04	0.02	0.05	0.02	0.03	0.04	0.05	0.01	0.02
X2	-0.00	0.22	0.02	0.02	0.01	0.02	0.01	0.03	0.03	0.01	0.01	0.02	0.00	0.02	0.01	0.01	0.02	-0.03	0.02	0.02	0.01	0.00	-0.00	-0.01	0.04	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.03
X3	0.09	0.02	0.20	0.03	0.02	0.01	0.00	0.04	0.02	0.00	0.02	0.01	0.00	0.05	0.04	0.03	0.04	0.05	0.01	0.06	-0.01	-0.00	0.01	0.02	0.01	0.05	0.00	0.03	0.01	0.02	0.03	
X4	0.09	0.02	0.03	0.22	0.03	0.05	0.02	0.07	0.02	0.01	0.04	0.02	0.02	0.06	0.05	0.04	0.02	0.04	0.03	0.11	-0.00	-0.01	0.01	0.03	0.03	0.12	0.01	0.03	0.04	0.04	0.04	
X5	0.01	0.01	0.02	0.03	0.14	0.04	0.03	0.02	0.03	0.02	0.04	0.06	0.03	0.02	0.03	0.05	0.02	0.00	0.04	0.02	0.00	-0.01	0.01	0.05	0.02	0.03	0.02	0.03	0.01	0.03	0.01	
X6	0.03	0.02	0.01	0.05	0.04	0.28	0.03	0.04	0.03	0.03	0.06	0.03	0.04	0.01	0.05	0.06	0.07	0.01	0.05	0.04	0.02	0.01	-0.01	0.02	0.04	0.06	0.05	0.04	0.06	0.08	0.04	
X7	0.02	0.01	0.00	0.02	0.03	0.03	0.19	0.01	0.03	0.02	0.04	0.03	0.02	0.01	0.04	0.02	0.05	0.03	-0.00	0.04	-0.01	-0.01	0.01	0.02	0.02	0.04	0.02	0.05	0.03	0.03	0.02	
X8	0.03	0.03	0.04	0.07	0.02	0.04	0.01	0.18	0.03	0.01	0.04	0.03	0.02	0.06	0.04	0.05	0.04	0.05	0.05	0.10	-0.01	-0.00	0.01	0.03	0.04	0.13	0.01	0.02	0.02	0.03	0.06	0.04
X9	0.03	0.03	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.14	0.02	0.04	0.03	0.03	0.01	0.05	0.05	0.04	0.02	0.03	0.01	0.01	-0.00	0.02	0.03	0.03	0.01	0.04	0.04	0.05	0.06	0.05	0.01
X10	0.02	0.01	0.00	0.01	0.02	0.03	0.02	0.01	0.02	0.05	0.02	0.02	0.02	0.01	0.02	0.05	0.03	0.01	0.02	0.02	0.00	0.01	0.02	0.01	0.01	0.03	0.03	0.02	0.03	0.02	0.02	
X11	0.03	0.01	0.02	0.04	0.04	0.06	0.04	0.04	0.04	0.02	0.25	0.03	0.02	0.06	0.05	0.02	0.06	0.04	0.02	0.01	-0.01	0.02	0.04	0.03	0.08	0.03	0.03	0.03	0.04	0.03	0.03	
X12	0.04	0.02	0.01	0.02	0.06	0.03	0.03	0.03	0.02	0.03	0.08	0.02	0.02	0.03	0.04	0.03	0.02	0.03	0.02	0.00	-0.00	0.00	0.04	0.03	0.04	0.02	0.02	0.02	0.03	0.01	0.01	
X13	0.01	0.00	0.00	0.02	0.03	0.04	0.02	0.02	0.03	0.02	0.02	0.02	0.14	0.03	0.03	0.04	0.03	0.02	0.04	0.06	0.00	-0.00	0.01	0.02	0.02	0.03	0.02	0.02	0.04	0.06	0.04	
X14	0.02	0.02	0.05	0.06	0.02	0.01	0.01	0.06	0.01	0.01	0.06	0.02	0.03	0.23	0.04	0.03	0.01	0.05	0.04	0.07	-0.02	-0.00	0.01	0.02	0.02	0.08	0.01	0.02	0.02	0.02	0.04	
X15	0.04	0.01	0.04	0.05	0.03	0.05	0.04	0.04	0.05	0.02	0.06	0.03	0.03	0.04	0.17	0.06	0.04	0.05	0.05	0.04	0.01	-0.01	0.00	0.03	0.02	0.06	0.03	0.03	0.07	0.09	0.04	0.03
X16	0.04	0.01	0.03	0.04	0.05	0.06	0.02	0.05	0.05	0.05	0.04	0.04	0.03	0.06	0.22	0.04	0.06	0.04	0.07	0.02	0.00	0.03	0.04	0.02	0.06	0.06	0.06	0.04	0.06	0.07	0.04	
X17	0.03	0.02	0.04	0.02	0.02	0.07	0.05	0.04	0.04	0.03	0.02	0.03	0.03	0.01	0.04	0.04	0.17	0.02	0.03	0.03	0.01	-0.00	-0.00	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04	0.03	0.03	0.05	0.03
X18	0.04	-0.03	0.05	0.04	0.00	0.01	0.03	0.05	0.02	0.01	0.06	0.02	0.02	0.05	0.05	0.06	0.02	0.24	0.05	0.10	-0.00	-0.00	0.01	0.03	0.02	0.06	0.01	0.03	0.02	0.03	0.04	
X19	0.02	0.02	0.01	0.03	0.04	0.05	-0.00	0.05	0.03	0.02	0.04	0.03	0.04	0.04	0.05	0.04	0.03	0.05	0.18	0.03	0.01	-0.00	0.01	0.03	0.03	0.04	0.03	0.04	0.02	0.04		
X20	0.01	0.02	0.06	0.11	0.02	0.04	0.04	0.10	0.01	0.02	0.02	0.02	0.06	0.07	0.04	0.04	0.07	0.03	0.10	0.03	0.43	-0.02	-0.01	0.03	0.03	0.17	0.02	0.07	0.03	0.04	0.05	0.08
X21	0.01	0.01	-0.01	-0.00	0.00	0.02	-0.01	-0.01	0.01	0.02	0.01	0.00	-0.02	0.01	0.02	0.01	-0.00	0.01	-0.02	0.06	0.00	-0.00	0.00	-0.01	0.01	-0.01	0.01	0.02	-0.01	-0.00	-0.00	
X22	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	-0.01	-0.01	0.01	-0.01	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.00	-0.00	-0.01	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	
X23	0.01	-0.00	0.01	0.01	0.01	-0.01	0.01	0.01	0.02	0.01	0.02	0.00	0.01	0.01	0.00	0.03	-0.00	0.01	0.01	-0.01	-0.00	0.00	0.17	0.01	0.01	-0.00	0.01	-0.00	-0.00	0.01	0.02	0.02
X24	0.04	-0.01	0.02	0.03	0.05	0.02	0.02	0.03	0.03	0.02	0.04	0.04	0.02	0.02	0.03	0.04	0.02	0.03	0.03	0.03	0.00	-0.00	0.01	0.16	0.02	0.05	0.02	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02
X25	0.02	0.04	0.01	0.03	0.02	0.04	0.02	0.04	0.03	0.01	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.03	0.02	0.03	0.03	0.00	-0.00	0.01	0.02	0.12	0.04	0.01	0.04	0.03	0.02	0.02	0.01	
X26	0.05	0.03	0.05	0.12	0.03	0.06	0.04	0.13	0.01	0.01	0.08	0.04	0.03	0.08	0.06	0.06	0.03	0.06	0.04	0.17	-0.01	-0.01	-0.00	0.05	0.04	0.28	0.02	0.06	0.04	0.03	0.07	0.06
X27	0.02	0.02	0.00	0.01	0.02	0.04	0.02	0.01	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01	0.03	0.06	0.03	0.01	0.03	0.02	0.01	-0.00	0.01	0.02	0.01	0.02	0.06	0.04	0.02	0.04	0.03	0.02
X28	0.03	0.02	0.03	0.03	0.03	0.05	0.05	0.02	0.04	0.03	0.03	0.02	0.03	0.02	0.03	0.06	0.04	0.03	0.04	0.07	-0.01	-0.00	-0.00	0.03	0.04	0.06	0.04	0.20	0.03	0.03	0.04	0.06
X29	0.04	0.02	0.01	0.04	0.02	0.04	0.03	0.02	0.05	0.02	0.03	0.02	0.02	0.07	0.04	0.03	0.02	0.02	0.03	0.01	-0.00	-0.00	0.03	0.03	0.04	0.02	0.03	0.11	0.08	0.04	0.03	0.03
X30	0.05	0.01	0.02	0.04	0.03	0.06	0.03	0.06	0.03	0.04	0.03	0.04	0.02	0.09	0.06	0.03	0.03	0.04	0.04	0.02	-0.01	0.01	0.03	0.02	0.03	0.04	0.03	0.08	0.16	0.06	0.04	
X31	0.01	0.01	0.03	0.04	0.03	0.08	0.02	0.06	0.05	0.02	0.03	0.01	0.06	0.04	0.04	0.07	0.05	0.04	0.04	0.05	0.01	-0.00	0.02	0.02	0.07	0.03	0.04	0.04	0.06	0.32	0.06	
X32	0.02	0.03	0.01	0.04	0.01	0.04	0.03	0.04	0.01	0.02	0.03	0.01	0.04	0.04	0.03	0.04	0.03	0.04	0.02	0.08	-0.00	-0.00	0.02	0.02	0.01	0.06	0.02	0.06	0.03	0.04	0.06	

別表2 32社への貸出金額と各社の倒産確率

	貸出金額	格付	倒産確率	格付	倒産確率
X 1	33	A	0.20%	A	0.20%
X 2	90	B	0.60%	B	0.60%
X 3	83	C	2.00%	C	2.00%
X 4	13	D	8.00%	D	8.00%
X 5	66	E	15.00%	E	15.00%
X 6	18	A	0.20%		
X 7	18	B	0.60%		
X 8	28	C	2.00%		
X 9	29	D	8.00%		
X10	72	E	15.00%		
X11	84	A	0.20%		
X12	75	B	0.60%		
X13	24	C	2.00%		
X14	13	D	8.00%		
X15	22	E	15.00%		
X16	78	A	0.20%		
X17	74	B	0.60%		
X18	28	C	2.00%		
X19	70	D	8.00%		
X20	16	E	15.00%		
X21	16	A	0.20%		
X22	38	B	0.60%		
X23	56	C	2.00%		
X24	56	D	8.00%		
X25	5	E	15.00%		
X26	38	A	0.20%		
X27	3	B	0.60%		
X28	54	C	2.00%		
X29	8	D	8.00%		
X30	62	E	15.00%		
X31	39	A	0.20%		
X32	10	B	0.60%		

備考：ここで倒産確率は仮想的に設定したものである。

## 参考文献

- 木島正明・長山いづみ・近江義行、『ファイナンス工学入門第一部、数値計算法』、日科技連、1996年
- 木島正明 編、『金融リスクの計量化（上）バリュー・アット・リスク』、金融財政事情研究会、1998年
- 津田孝夫、『モンテカルロ法とシミュレーション・三訂版』、培風館、1995年
- 手塚 集、「ファイナンスの現状と数理」、応用数理、Vol.10 No.4、2000年
- 鳥居秀行、「金融に変革をもたらす大規模信用リスクシミュレーション」、オペレーションズ・リサーチ学会秋季大会予稿集、1999年
- 伏見正則、「乱数」、東京大学出版会、1994年
- 森平寅一郎、小島 裕、「コンピュテーションナル・ファイナンス」、朝倉書店、1997年
- 湯前祥二、鈴木輝好、「モンテカルロ法の金融工学への応用」、朝倉書店、2000年
- 、、「多資産ポートフォリオのT-VaR計算におけるモンテカルロ法の加速」、ニッセイ基礎研究所報、Vol.16、2001年
- 山下智志、「市場リスクの計量化とVaR」、朝倉書店、2000年
- Curran, M., "Strata gems," *Risk*, Vol.7 No.3, 1994.
- Falloon, W., "Who owns the ideas that derive derivative?", *Risk*, Vol.12 No.12, 1999.
- Johnson, N. L., S., Kotz, and N. Balakrishnan, *Continuous Univariate Distributions Vol.1 2nd Edition*, John Wiley & Sons, 1994.
- Jorion, P., *Value at Risk 2nd Edition*, McGraw-Hill, 2001.
- Joy, C., P. P. Boyle, and K. S. Tan, "Quasi Monte Carlo Methods in Numerical Finance," Chapter 24 in Monte Carlo, Methodologies and Applications for Pricing and Risk Management, *Risk*, 1998.
- Matsumoto, M., and T. Nishimura, "Mersenne Twister," *ACM Transcript on Modeling and Computer Simulation*, Vol.8 No.1, 1998.
- Moro, B., "The full Monte," *Risk*, Vol.8 No.2, 1995.
- Traub, J. F., and A. G. Werschulz, *Complexity and Information*, Cambridge University Press, 1998. (手塚 集訳、『複雑性と情報 金融工学との接点』、共立出版、2000年)
- Wilmott, P., *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, 2000.
- Microsoft Product Support Services, "Excel: Random Number Generation," (<http://support.microsoft.com/support/kb/articles/Q86/5/23.ASP>).

