

# LIBORマーケット・モデルの インプリメンテーションについて

## 本邦の金利派生商品データを用いた具体例を基に

いしやまこうたろう  
石山幸太郎

### 要 旨

本稿では、近年研究が進められているイールド・カーブ・モデルであるLIBORマーケット・モデルのインプリメンテーション方法について、本邦金利派生商品データを用いた具体例を使って検討を行うと共に、パラメータの推定事例を示す。また、最近の研究事例として、実際の市場で観測されるインブラド・ボラティリティのスマイルを、ジャンプ過程等を含むLIBORマーケット・モデルで説明する先行研究も適宜紹介する。

キーワード：LIBORマーケット・モデル、パラメータ推定、ボラティリティ・スマイル、フォワード中立化法

本稿は石山幸太郎が日本銀行金融研究所に在籍していたときに書かれたものである。論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

石山幸太郎 東京三菱証券債券営業部 (E-mail: ishiyama@po.tmsec.co.jp)

## 1 . はじめに

LIBORマーケット・モデルは、実際に市場で取引されるLIBOR ( London InterBank Offered Rate ) を直接モデル化の対象とするイールド・カーブ・モデルで、BGMモデル ( Brace, Gątarek and Musiela [ 1997 ] ) と呼ばれることもある<sup>1</sup>。従来のイールド・カーブ・モデルの多くは、仮想的な瞬間スポット・レートや瞬間フォワード・レートをモデル化の対象としていたのに対し、LIBORマーケット・モデルでは、実際に取引されている金利 ( フォワードLIBOR ) をその対象にしている。

実際の市場で金利派生商品の価格算出に主に使用されているブラック・モデル ( Black [ 1976 ] ) は、ブラック・ショールズ・モデル ( Black and Scholes [ 1973 ] ) を先物価格に拡張したモデルであるが、ブラック・ショールズ・モデルと同様に、割引金利を一定と仮定しており、金利の期間構造の存在を捨象している。これに対し、LIBORマーケット・モデルは、それ自身、ブラック・モデルのフレームワークを内包しているほか、金利の期間構造をモデル化している点で、より包括的なモデルであり、このため実務的に注目されている。また、モデル化の対象とする金利を1カ月LIBOR、3カ月LIBORなどと自由に設定できるため、適用される金利が継続的に更改される ( ロールされる ) バンキング勘定のリスク管理のベースとなるモデルとしても馴染みやすいというメリットがある。

その一方で、LIBORマーケット・モデルでは、確率測度のやや複雑な変換が必要であるため、モデルの実装には注意を要する。また、同モデルの問題点として、キャップとスワプションとの間でモデルの整合性が理論的に取れない点や、スマイルやスキューといった現実の市場で観測される現象をうまく説明できない点が挙げられる。

本稿では、実務家が実際にLIBORマーケット・モデルを活用するために必要な基本知識を極力平易に解説すると共に、パラメータの具体的な推定方法、およびそのパラメータ推定方法等を本邦の金利派生商品のデータに適用した事例を示す。

なお、本稿の記述は、数学的な式展開の厳密性を追求するのではなく、むしろ直感的な理解を優先したものとなっている点を予めお断りしておきたい。この点、本稿では必要に応じて数学的な補足説明を脚注等で行うことにするが、さらに興味のある読者は、本稿で紹介する原論文を直接参照することをお勧めする。

本稿の構成は以下のとおりである。まず2節で、LIBORマーケット・モデルに関する基本的知識を説明し、3節で、モンテカルロ・シミュレーション手法の説明を通じて、2節の考え方の実装方法の解説を行う。続いて4節では、LIBORマーケッ

1 Brace, Gątarek and Musiela [ 1997 ] は、HJMモデル ( Heath, Jarrow and Morton [ 1992 ] ) の枠組みで、ブラック・モデルと整合的な派生商品価格を算出できることを示した ( BGMモデル )。また、Jamshidian [ 1997 ] は、有限個の割引価格の無裁定条件を前提に、BGMモデルと同様の派生商品価格評価式を導出し、フォワード・スワップを原資産としたスワップ・マーケット・モデルを提案した。

ト・モデルをベースにスワプションのプライシングを行う近似式を示し、5節では、ベースとなるLIBORマーケット・モデルが仮定するフォワードLIBORの対数正規性が実際のデータで満たされているかどうかを本邦の金利データを用いて分析する。6節では、4節のスワプションの近似式を用いたパラメータ推定方法を説明し、実際の市場データを用いた推定結果を示す。実際の市場で観測されるインプライド・ボラティリティのスマイルやスキューを説明するために、7節では、LIBORマーケット・モデルの拡張方法として2種類の手法を紹介する。8節では、その他の関連研究に簡単に触れ、最後に9節で、本稿のまとめを記す。

補論では、確率測度の変換と派生商品の価格付けに必要となるフォワード中立化法に関する解説を行う。

## 2 . LIBORマーケット・モデル

まず、金利派生商品を扱う場合に、なぜイールド・カーブ・モデル（金利の期間構造モデル）が必要となるのかを簡単に説明しよう。

ある金利派生商品を扱っている場合、市場の厚みが十分でないことなどの理由により、当該商品の価格が市場から入手できないことが少なくない。このため、イールド・カーブ・モデルを用いて、市場で価格を見いだせる他の商品から得られる市場のさまざまな情報をイールド・カーブ・モデルの各パラメータに集約し、そのモデルによって当該商品の価格を推定する（さらには顧客等に価格を提示する）ということが実務的に行われている。

また、リスク評価の対象となる期間が一般的に長いバンキング勘定のリスク計測を行う場合、資産・負債の金利更改（ロール）の影響を勘案したり、非線形な金利リスクを管理するためには、単純な分散共分散法によるVaR計測では不十分な点がある。このため、バンキング勘定のリスク計測には、イールド・カーブが時間と共にどのように変化するかを表すためのイールド・カーブ・モデルが必要となる。

このように、イールド・カーブ・モデルは金利派生商品を扱う場合に実務的には不可欠であるが、LIBORマーケット・モデルが出現する前のイールド・カーブ・モデルの多くは、瞬間スポット・レートや瞬間フォワード・レートといった実際には取引されていない金利をモデル化の対象としていた。このため、実務家の間には、こうした仮想的な金利を対象とするイールド・カーブ・モデルは必ずしも市場と整合的ではないとの批判があった。

これに対し、1990年代後半になって考案されたLIBORマーケット・モデルは、実際に取引されている金利（フォワードLIBOR）を直接モデル化の対象とするイールド・カーブ・モデルである。LIBORマーケット・モデルは、それまでの仮想的金利を対象としたイールド・カーブ・モデルに比べて、市場との整合性や実務的な使い勝手のよさという観点で、イールド・カーブ・モデルを実際に活用する実務家の注目をここ数年集めている。

以下では、LIBORマーケット・モデルの基本設定を説明した後、同モデルを用いた金利派生商品のプライシングの考え方の概要を整理する。まず、商品の設計上、1期間のフォワードLIBORでプライシングされるキャブレットを取り上げ、キャブレット価格の解析解を示す。次に複数期間のフォワードLIBORを同時に扱う必要がある場合を検討し、この場合には金利派生商品の解析解は一般的には存在せず、解を求めるためには数値計算手法の導入が必要であることを示す。

### (1) モデルの基本設定

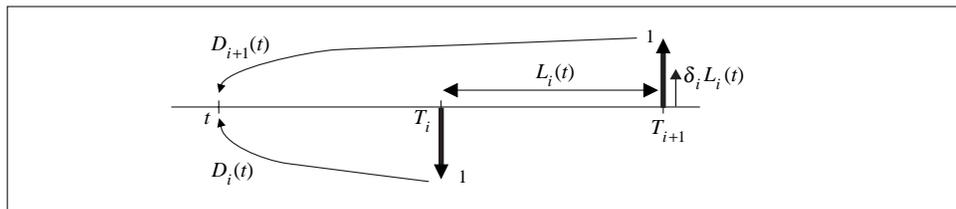
LIBORベースの変動金利取引で、次回支払う金利が確定する日をレート・リセット日と呼び、将来のレート・リセット日<sup>2</sup>の集合を $\{T_i | i=1, \dots, M\}$ とする。各リセット日間の期間を $\delta_i = T_{i+1} - T_i$ , ( $i=1, \dots, M$ )とする。将来支払われる未確定の変動金利をフォワードLIBORと呼ぶこととし、 $i$ 番目のフォワードLIBORの時刻  $t$  における値を $L_i(t)$ で表す。変動金利が6カ月ごとに見直される金利スワップ契約では、 $\delta_i=0.5$ 年で、 $L_i(t)$ はイールド・カーブから算出される6カ月ごとの(インプライド・)フォワード・レートとなる。時刻が $T_i$ になった時点で、期間 $\delta_i$ に適用される変動金利 $L_i(T_i)$ が確定し、時刻 $T_{i+1}$ には、想定元本1に対して利息 $\delta_i L_i(T_i)$ が支払われる。

満期が $T_i$ の割引債の時刻  $t$  での価格を $D_i(t)$ , ( $0 \leq t \leq T_i$ )とすると、フォワードLIBORと割引債価格の間には $D_i(t) = (1 + \delta_i L_i(t)) D_{i+1}(t)$  が成り立つ(図1)ので、

$$L_i(t) = \frac{D_i(t) - D_{i+1}(t)}{\delta_i D_{i+1}(t)}, t \leq T_i, \quad (1)$$

が得られる(時刻 $T_i$ に $L_i(t)$ のレートは確定してしまうので、 $t \leq T_i$ で考える)。

図1 フォワードLIBORとキャッシュ・フローの関係



(1)式を $D_{i+1}(t)$ について解くと、

$$D_{i+1}(t) = \frac{1}{1 + \delta_i L_i(t)} D_i(t), \quad (2)$$

2 単純化のため、レート・リセット日と金利支払期間のスタート日は一致するとする。

となり、この関係を繰り返し用いて、割引債価格をフォワードLIBORで表すと、

$$\begin{aligned}
 D_{i+1}(t) &= \frac{1}{1+\delta_i L_i(t)} D_i(t) \\
 &= \frac{1}{1+\delta_i L_i(t)} \times \frac{1}{1+\delta_{i-1} L_{i-1}(t)} D_{i-1}(t) \\
 &= \quad \quad \quad \vdots \\
 &= D_{m(t)}(t) \prod_{j=m(t)}^i \frac{1}{1+\delta_j L_j(t)}, \tag{3}
 \end{aligned}$$

が得られる。ここで $m(t)$ は、時刻 $t$ の次に到来するレート・リセット日で、 $D_{m(t)}(t)$ は時刻 $t$ から次回利払日までの(通常利払間隔より期間の短い)割引債を表す。

## (2) 1期間のフォワードLIBORを用いるプライシング(キャブレットの場合)

まず、商品の設計上1期間のフォワードLIBORで価格が定まるキャレットを考える。

将来のフォワード・レート $L_i(t)$ は、金利に関する不確実性を有する確率変数であるが、同じく金利に関する不確実性を持つ確率変数である割引債を基準に考えることにより、それらの不確実性が互いに打ち消し合うため、派生商品のプライシングが行いやすくなる<sup>3</sup>。ここでは、この割引債を「ニューメレール(基準財)」と呼ぶ。

LIBORマーケット・モデルは、利払いが発生する時刻 $T_{i+1}$ を満期とする割引債価格 $D_{i+1}(t)$ をニューメレールとしたときに、フォワードLIBOR $L_i(t)$ が対数正規分布に従うと仮定したモデルである。これを式で表すと、

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \bar{\sigma}_i(t) dW^{i+1}(t), \tag{4}$$

となる。ただし、 $W^{i+1}(t)$ は満期 $T_{i+1}$ の割引債価格 $D_{i+1}(t)$ をニューメレールとしたときの $M$ 次元標準ブラウン運動で、ボラティリティ関数 $\bar{\sigma}_i(t)$ は有界な $M$ 次元ベクトルとする<sup>4</sup>。また、 $\bar{\sigma}_i(t)$ は $i$ 番目の要素が $\sigma_i(t)$ で、残りの要素は0であるベクトルとする。すなわち、 $i$ 番目のフォワードLIBORは、 $i$ 番目のブラウン運動によっ

3 金利の不確実性が互いに打ち消し合うためには、確率測度を変換する必要がある。このようにして派生商品のプライシングを行う方法をフォワード中立化法と呼ぶ。確率測度の変換と、フォワード中立化法の関係は、補論で説明する。フォワード中立化によるプライシングの具体例は3節(3)モンテカルロ法を用いたプライシングの項で示す。

4 このように、ニューメレールが異なるブラウン運動を区別するために、肩に添字を付ける。表記の簡略化のため、ベクトルの転置を表す記号は付けないことにする。

てドライブされていると考えることを意味する。

フォワードLIBORは、対応する期間の割引債をニューメレールとしたときに、(4)式のようにドリフト項を持たない単純な式で表されることから、 $L_i(t)$ を原資産とするキャブレット価格の「公式」を以下のように求めることができる<sup>5</sup>。ここで、行使金利を $K$ 、時刻0での $i$ 番目のフォワードLIBORを $L_i(0)$ 、キャブレットの価格を $C_i(L_i(0), K, \gamma_i)$ 、 $N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数とする。

【LIBORマーケット・モデルのキャブレットの公式】

$$C_i(L_i(0), K, \gamma_i) = \delta_i D_i(0) [L_i(0)N(d_1) - KN(d_2)]$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{L_i(0)}{K}\right) + \frac{1}{2}\gamma_i^2}{\gamma_i}, \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{L_i(0)}{K}\right) - \frac{1}{2}\gamma_i^2}{\gamma_i} \quad (5)$$

$$\gamma_i^2 = \int_0^{T_i} \sigma_i(t)^2 dt.$$

この結果は、実際の市場取引の際に用いられることが多い以下のブラック・モデルの公式（ブラック式）と非常によく似た形をしており、モデルの扱いやすさや解釈のしやすさの観点で、LIBORマーケット・モデルの大きな強みとなっている。

【ブラック・モデルのキャブレットの公式】

$$\hat{C}_i(L_i(0), K, \hat{\sigma}_i) = \delta_i D_i(0) [L_i(0)N(\hat{d}_1) - KN(\hat{d}_2)]$$

$$\hat{d}_1 = \frac{\log\left(\frac{L_i(0)}{K}\right) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i^2 T_i}{\hat{\sigma}_i \sqrt{T_i}}, \quad \hat{d}_2 = \frac{\log\left(\frac{L_i(0)}{K}\right) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i^2 T_i}{\hat{\sigma}_i \sqrt{T_i}}. \quad (6)$$

ここで、ブラック式のキャブレット価格とボラティリティには $\hat{\cdot}$ (ハット)を付けて区別した。(5)式と(6)式の違いは、 $\gamma_i^2$ が $\hat{\sigma}_i^2 T_i$ となっている部分だけである。LIBORマーケット・モデルのボラティリティが、各利払時点間で一定値であるときには、(5)式の中で積分を用いて表されている $\gamma_i^2$ は

$$\gamma_i^2 = \delta_1 \sigma_i(T_1)^2 + \dots + \delta_i \sigma_i(T_i)^2, \quad (7)$$

と書ける。

<sup>5</sup> キャブレット価格の導出の詳細は、木島 [1999]、森本・吉羽 [1999] 等を参照。

$$\gamma_i = \hat{\sigma}_i \sqrt{T_i}, \quad (8)$$

となるように $\gamma_i$ を定めれば、市場で観測されるブラック式のキャブレット価格と、LIBORマーケット・モデルによるキャブレット価格を一致させることができる。この点は、後述の6節のキャップ、スワプションの価格等を用いたモデルのパラメータ推定で計算例を示す。

### (3) 複数期間のフォワードLIBORを同時に考える必要がある場合

2節(2)のキャブレットの例では、1期間のフォワードLIBORのみに着目すればよかったが、スワプション等の複数期間のフォワードLIBORを対象とする相対的に複雑な商品のプライシングを行ったり、さらには満期の異なる商品から成るポートフォリオのリスクを計測するためには、イールド・カーブ全体の変化、すなわち、複数期間のフォワードLIBORを同時に考える必要がある。

ニューメレールについては、複数期間のフォワードLIBORを同時に比較するために、各フォワードLIBOR共通のニューメレール(ここでは割引債)を1つ選ぶ必要がある。

(4)式の対数正規過程で表されるブラウン運動 $W^{i+1}(t)$ と $W^i(t)$ との間には、(2)式の関係等を用いて、以下の関係があることが導かれる<sup>6</sup>。

【ブラウン運動 $W^{i+1}(t)$ と $W^i(t)$ の関係】

$$dW^i(t) = dW^{i+1}(t) - \frac{\delta_i L_i(t)}{1 + \delta_i L_i(t)} \rho \bar{\sigma}_i(t) dt, \quad (9)$$

ただし、 $\rho$ は $M$ 次元ブラウン運動の相関行列とする(相関行列の要素 $\rho_{j,k}$ は $j$ 番目のブラウン運動と、 $k$ 番目のブラウン運動の相関係数)<sup>7</sup>。

満期 $T_i$ の割引債をニューメレールとしたときのブラウン運動の増分 $dW^i(t)$ ((9)式左辺)は、満期 $T_{i+1}$ の割引債をニューメレールとしたときのブラウン運動の増分 $dW^{i+1}(t)$ (同式右辺第1項)より、右辺第2項の分だけ、増分幅の平均がずれることを意味する。直感的には、満期の長い割引債をニューメレールとした分、増分幅が大きくなってしまっているので、 $dt$ の項は平均値を補正するための項であると解釈することができる。

<sup>6</sup> (9)式は、ギルザノフの定理を用いることによって得られる。詳細はPelsser [2000]等を参照。

<sup>7</sup> 文献によっては、(9)式で $\rho$ が乗じられていない場合があるが、その場合は各ブラウン運動を独立としているモデルである。ブラウン運動が相関を持つ場合と独立の場合の関係は、3節(4)のモンテカルロ法の計算負荷削減のためのファクター数の削減方法で整理する。

(9)式を(4)式に代入すると、

$$\frac{dL_{i-1}(t)}{L_{i-1}(t)} = -\sigma_{i-1}(t) \frac{\delta_i L_i(t)}{1 + \delta_i L_i(t)} \rho_{i-1,i} \sigma_i(t) dt + \bar{\sigma}_{i-1}(t) dW^{i+1}(t), \quad (10)$$

が得られる。(10)式は、利払いが $T_i$ に発生する $L_{i-1}(t)$ を、 $T_{i+1}$ が満期の割引債をニューメレルとしてみた式である。 $dt$ 項(ドリフト項)の係数は、時間変化率を表すが、それには確率変数である $L_i(t)$ が入っているため、(10)式の $L_{i-1}(t)$ の変化は非常に複雑なものとなり、(5)式のキャレット公式のような解析的な解を求めることはできない。このため、複数期間のフォワードLIBORを扱う場合には何らかの数値計算手法が必要となる。3節ではモンテカルロ法を用いた複数期間のフォワードLIBORの取扱いを解説する。

### 3. モンテカルロ法による複数期間のフォワードLIBORの取扱い

本節では、LIBORマーケット・モデルで解析解が求められない場合の数値計算手法の1つとして、モンテカルロ法を用いたプライシングを説明する。

まず初めに、モンテカルロ法を適用する際に行われるLIBORマーケット・モデルの離散化の具体的な手順を示した後、シミュレーションによる金利パスの発生方法を説明する。次に、発生させた金利パスを用いて金利派生商品を具体的にプライシングする方法を説明する。最後に、シミュレーションの計算負荷を軽減するために、モデルのファクター数を削減する方法を解説する。

#### (1) LIBORマーケット・モデルの離散化の手順

フォワードLIBOR $L_1, \dots, L_M$ を考えると、ニューメレルとして最長満期 $T_{M+1}$ の割引債価格を用いると<sup>8</sup>、(9)式を繰り返し用いることにより、 $L_i(t)$ は以下のように表せる。

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = -\sigma_i(t) \sum_{j=i+1}^M \frac{\delta_j L_j(t)}{1 + \delta_j L_j(t)} \rho_{i,j} \sigma_j(t) dt + \bar{\sigma}_i(t) dW^{M+1}(t), \quad i = 1, \dots, M, t \leq T_i, \quad (11)$$

$i=M$ のとき、(11)式は、

<sup>8</sup> 最も期先のフォワードLIBORである $L_M(t)$ の利払時点は $T_{M+1}$ であるため、割引債は $D_{M+1}(t)$ まで考える。

$$\frac{dL_M(t)}{L_M(t)} = \bar{\sigma}_M(t) dW^{M+1}(t), \quad (12)$$

と対数正規型モデルになる一方、 $i < M$ では、 $dt$ 項が残るため、対数正規型モデルとはならない。

$i=M$ のとき、 $t$ が $\Delta t$ だけ変化すると、(11)式は以下のように離散化モデルとして近似できる（ただし、 $\Delta t$ の間は $\bar{\sigma}_M(t)$ は一定と考える）。

$$\begin{aligned} \frac{L_M(t+\Delta t) - L_M(t)}{L_M(t)} &= \bar{\sigma}_M(t) (W^{M+1}(t+\Delta t) - W^{M+1}(t)), \quad (13) \\ L_M(t+\Delta t) &= L_M(t) + L_M(t) \bar{\sigma}_M(t) (W^{M+1}(t+\Delta t) - W^{M+1}(t)). \end{aligned}$$

$W^{M+1}(t)$ の $\Delta t$ における増分は、 $M$ 次元標準正規乱数を用いて

$$W^{M+1}(t+\Delta t) - W^{M+1}(t) \sim \sqrt{\Delta t} N_M(0, \rho), \quad (14)$$

（ただし $\rho$ はブラウン運動の相関行列、 $N_M$ は多次元標準正規分布の分布関数）と表せるので、多次元標準正規乱数から、 $L(t+\Delta t)$ のサンプルを得ることができる<sup>9</sup>。

次に、 $i < M$ の場合を考えると、(11)式の離散化モデルは、

$$\begin{aligned} L_i(t+\Delta t) &= L_i(t) - \sigma_i(t) L_i(t) \sum_{j=i+1}^M \frac{\delta_j L_j(t)}{1 + \delta_j L_j(t)} \rho_{i,j} \sigma_j(t) \Delta t \quad (15) \\ &\quad + \bar{\sigma}_i(t) L_i(t) (W^{M+1}(t+\Delta t) - W^{M+1}(t)), \end{aligned}$$

と書ける。(13)式と比べると $\Delta t$ の項が増えている点が見られるが、 $\delta_j$ 、 $\sigma_j(t)$ 、 $L_j(t)$ が既知であれば、(14)式の関係を用いて同様に $L_i(t+\Delta t)$ を求めることができる（ただし、 $t+\Delta t \leq T_i$ ）。

対数正規過程を離散化する場合、それによる誤差を抑制するために、 $L_i(t)$ ではなく、 $\log(L_i(t))$ を離散化する手法がしばしば用いられる<sup>10</sup>。(11)式と伊藤の補題を用いると、

$$d \log(L_i(t)) = \left\{ -\sigma_i(t) \sum_{j=i+1}^M \frac{\delta_j L_j(t)}{1 + \delta_j L_j(t)} \rho_{i,j} \sigma_j(t) - \frac{1}{2} \sigma_i(t)^2 \right\} dt + \bar{\sigma}_i(t) dW^{M+1}(t), \quad (16)$$

9 ブラウン運動の次元が1次元である場合、 $\varepsilon$ を平均0分散1の標準正規乱数として、 $W^{M+1}(t+\Delta t) - W^{M+1}(t) \sim \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ となる。

10 確率微分方程式の数値計算法は、Kloeden and Platen [1995] に詳しい。

となることから、(13)式、(15)式の代わりに、以下の(17)式を離散化式として用いることもできる。

$$L_i(t + \Delta t) = L_i(t) \exp\left\{(-\sigma_i(t) \sum_{j=i+1}^M \frac{\delta_j L_j(t)}{1 + \delta_j L_j(t)} \rho_{i,j} \sigma_j(t) - \frac{1}{2} \sigma_i(t)^2) \Delta t + \bar{\sigma}_i(t) (W^{M+1}(t + \Delta t) - W^{M+1}(t))\right\} \quad (17)$$

次節では、この(17)式を用いる。

## (2) モンテカルロ法によるフォワードLIBORのパスの発生方法

ここでは、3節(1)の離散化モデル((17)式)を用いて、 $M=4$ 、ブラウン運動が1次元のケースでフォワードLIBORのパスの計算例を示す。

$\Delta t=0.5$ 、 $\delta_i=0.5$ 、 $\sigma_i(t)=0.15$ で一定、初期時点でのフォワードLIBORをすべての $i$ で5%とする。計算する順序としては、まず、 $t + \Delta t=0+0.5$ のとき、(14)式より( $W^{M+1}(0+0.5) - W^{M+1}(0)$ )を求め、 $L_i(0)=5\%$ を用いて $L_i(0+0.5)$ 、 $i=1, \dots, 4$ を計算する。次に、 $L_1(0.5)$ 、 $L_2(0.5)$ 、 $L_3(0.5)$ 、 $L_4(0.5)$ を用いて、 $L_2(1.0)$ 、 $L_3(1.0)$ 、 $L_4(1.0)$ を同様に求める。このようにして、コンピュータで実際に4回乱数を発生させて、(17)式から求めたフォワードLIBORは以下の表1のとおりとなる。これが、モンテカルロ法を用いたLIBORマーケット・モデルのフォワードLIBORの1回のパスとなる。

表1の $T_0$ 行の $L_0(T_0), \dots, L_4(T_0)$ は初期時点のフォワード・レートで、以降の対角線上の $L_1(T_1)$ 、 $L_2(T_2)$ 、 $L_3(T_3)$ 、 $L_4(T_4)$  (表中のグレーに塗った部分)は、おのおの時刻 $T_1, \dots, T_4$ に満期を迎えるフォワードLIBORを表している。

表1 フォワードLIBORの計算例

	$L_0(t)$	$L_1(t)$	$L_2(t)$	$L_3(t)$	$L_4(t)$	$\Delta W^5(t)$
$T_0 = 0.0$	5.000%	5.000%	5.000%	5.000%	5.000%	
$T_1 = 0.5$		5.597%	5.599%	5.600%	5.602%	0.79495
$T_2 = 1.0$			5.473%	5.476%	5.479%	-0.11019
$T_3 = 1.5$				4.597%	4.601%	-1.12623
$T_4 = 2.0$					5.217%	0.87482

また、表1の結果より(3)式を用いて求めた割引債価格は以下のとおりとなる。

表2 割引債価格

	$D_1(t)$	$D_2(t)$	$D_3(t)$	$D_4(t)$	$D_5(t)$
$T_0 = 0.0$	0.9756	0.95181	0.92860	0.90595	0.88385
$T_1 = 0.5$		0.97278	0.94629	0.92051	0.89543
$T_2 = 1.0$			0.97337	0.94743	0.92216
$T_3 = 1.5$				0.97753	0.95555
$T_4 = 2.0$					0.97458

ここで、LIBORマーケット・モデルを扱う際の実務上留意すべき点を1つ述べておきたい<sup>11</sup>。

この表からわかるように、LIBORマーケット・モデルは、時間の経過に伴い、フォワードLIBORが順に満期を迎えて期落ちしていくため、作成し得るイールド・カーブが短くなってしまふ。短・中期の金利派生商品のプライシングは、表1程度のデータで対応可能かもしれないが、バンキング勘定の資産・負債のように満期の長い金利感応資産を持つ、ある程度長期のリスク評価期間でのリスクを計測しようとするときには、このフォワードLIBORの期落ちが問題となる。

初期時点のイールド・カーブの期間が $M$ であったとき、同じ期間のイールド・カーブを引くためには、以下の表3でグレーに塗った部分を求める必要があるが、これを求めるためには、印を付けた部分の初期値と、グレーに塗った部分のパラメータが必要となる。初期時点の $M$ として現実的に想定できる最長の期間は、超長期債の30年程度（ $M=60$ 程度）であることを考えると、期間の長いイールド・カーブを将来時点まで計算する必要がある場合には、表3の初期値とパラメータに何らかの仮定が必要となる<sup>12</sup>。

表3 期間の長いイールド・カーブを考える場合

	$L_0(t)$	$L_1(t)$	$L_2(t)$	...	$L_M(t)$	$L_{M+1}(t)$	$L_{M+2}(t)$	...
$T_0 = 0.0$	$L_0(T_0)$	$L_1(T_0)$	$L_2(T_0)$	...	$L_M(T_0)$			
$T_1 = 0.5$		$L_1(T_1)$	$L_2(T_1)$	...	$L_M(T_1)$			
$T_2 = 1.0$			$L_2(T_2)$	...	$L_M(T_2)$			
⋮				⋮	⋮			

11 ここで触れる留意点は、LIBORマーケット・モデルのみならず、HJMモデルをはじめとするイールド・カーブ・モデルを扱う場合、基本的に共通する留意点である。

12 印の部分全てを $L_M(T_0)$ と等しいと置くことも1つの方法であるが、実際には、目的に応じて個々に検討する必要がある。

### (3) モンテカルロ法を用いたプライシング

次に、表1、表2で計算したフォワードLIBOR、割引債価格のパスを用いて、プライシングの説明を行う。まず、行使金利が $K=5.0\%$ 、2年後スタート半年物のキャブレットを考える。2年後に支払金利が確定する半年物金利は、表1では $L_4(T_4)=5.217\%$ である。モンテカルロ法を用いてキャブレットの価格を算出する場合、まず、表1のようなパスを何度も発生させ、利払いの行われる時刻 $T_5$ でのペイオフ $C(T_5)=\max\{L_4(T_4)-K, 0\}$ の平均を求める。次に、ニューメレルとして時刻 $T_5$ 満期の割引債を考えていたので、キャブレットの価格は、ペイオフ平均に時刻 $T_5$ 満期の割引債を乗じたものとなる<sup>13</sup>。つまり、 $N$ 本のパスを発生させて得られる時刻 $T_0$ におけるキャブレット価格 $C_4^{\text{CAPLET}}(T_0)$ は、 $j$ 番目のパスでのペイオフを $C_j(T_5)$ とすると、以下ようになる。

$$C_4^{\text{CAPLET}}(T_0) = \delta D_5(T_0) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N C_j(T_5), \quad (18)$$

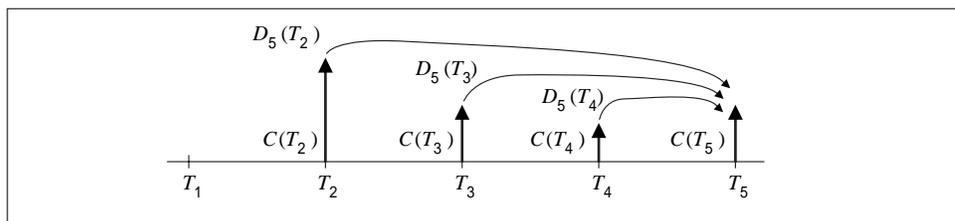
ただし、 $\delta$ は利払間隔、 $D_5(T_0)$ は表2で求めた割引債価格である。

次に行使金利が $K=5.0\%$ 、半年後スタート期間2年のキャップ（キャブレットの集合）を考える。半年ごとに満期を迎えるフォワードLIBOR（表1でグレーに塗った部分）の、各ペイオフ $C(T_i)=\max\{L_i(T_i)-K, 0\}$ 、 $i=1, \dots, 4$ を考える。今、ニューメレルに $D_5(t)$ を選んでいたので、時刻 $T_5$ より手前にあるペイオフでは、以下の調整が必要となる。調整後のペイオフ $C'(T_i)$ は、

$$\begin{aligned} C'(T_2) &= C(T_2)/D_5(T_2) \\ C'(T_3) &= C(T_3)/D_5(T_3) \\ C'(T_4) &= C(T_4)/D_5(T_4) \\ C'(T_5) &= C(T_5)/D_5(T_5) = C(T_5), \end{aligned} \quad (19)$$

と書ける（割引債の定義より $D_i(T_i)=1$ であることを使った）。これを図示したものが以下の図2である。時点の異なるキャッシュ・フローを、対応する割引債を用いて、同一の時刻 $T_5$ における先渡価格に変換している<sup>14</sup>。

図2 ペイオフの割引債による調整



13 詳しくは、補論を参照。

14 先渡価格と割引債の関係は、補論を参照。

このようにして同じ時点の価値に変換した上で、 $N$ 本のパスを発生させて、時刻 $T_5$ における先渡価格の平均を求める。時刻 $T_0$ におけるキャップ価格は、先渡価格の平均に $D_5(T_0)$ を乗じて時刻 $T_0$ での価値に割り引いたものになる。つまり、 $N$ 本発生させるパスの $j$ 番目のペイオフを $C'_j(T_j)$ とすると、求めるキャップの時刻 $T_0$ での価格 $C_{2Y}^{\text{CAP}}(T_0)$ は、

$$C_{2Y}^{\text{CAP}}(T_0) = \delta D_5(T_0) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \{C'_j(T_2) + C'_j(T_3) + C'_j(T_4) + C'_j(T_5)\}, \quad (20)$$

と求められる。

各時点で発生するキャッシュ・フローに対し、(19)式の調整を行うことにより、モンテカルル法を通じて、さまざまな商品のプライシングが可能となる<sup>15</sup>。

#### (4) モンテカルル法の計算負荷削減のためのファクター数の削減方法

2節(3)までに説明してきた複数期間のフォワードLIBORは、相関行列 $\rho$ の $M$ 次元標準ブラウン運動によって記述されていた。つまり、このモデルは、不確実性を表す $M$ 個のファクターによりドライブされているということが出来る。ただ、実際にモンテカルル法を適用する場合、 $M$ が大きくなると、 $M$ 次元標準正規乱数発生 of 計算負荷が重くなるという問題が発生する。

そこで、本節では、フォワードLIBORを $d$ 次元( $d \leq M$ )の独立な標準ブラウン運動 $Z(t)$ で記述し直す手法(Rebonato [1999a, b])を解説する。この手法は、イールド・カーブ・モデルを用いた分析等で行われるように、イールド・カーブ変動の主成分分析で、互いに独立な説明変数(ファクター)を抽出し、それらのうち主要な説明変数(ファクター)のみでイールド・カーブ・モデルを構築し直すという考え方<sup>16</sup>を踏襲している。この手法により、ベクトルの各要素が互いに独立である $d$ 次元正規ベクトルを用いた相対的に計算負荷の軽いシミュレーションが可能となる。

まず、 $d$ 次元ベクトルを $M$ 次元ベクトルに変換する $M \times d$ の行列 $B$ を考える。満期 $T_{M+1}$ の割引債 $D_{M+1}(t)$ ニューメレールとした $M$ 次元ブラウン運動の相関行列を $\rho$ とすると、

15  $T_5$ が満期の割引債をニューメレールとすることは、先渡価格(時刻 $T_5$ で渡すとしたときの価格)で全ての価格が表示されている世界を想定することである。このモンテカルル法で発生するフォワードLIBORは、「先渡価格を基準とする世界の金利」であるので、現実の金利水準とは異なるものであり、プライシングの際にはキャッシュ・フローに(19)式、(20)式の調整が必要となるのである。

16 主成分分析をイールド・カーブ変動に適用した実証分析から、水準、勾配、曲率を表すと解釈し得る3主成分によって、イールド・カーブ変動の9割程度を説明できることが知られている(ハル[2001]等を参照)。

$$dW^{M+1}(t)(dW^{M+1}(t)) = \rho dt, \quad (21)$$

が成り立つ。また（行列 $B$ の転置を $B'$ と書くと）

$$\begin{aligned} BdZ(t)(BdZ(t))' &= BdZ(t)(dZ(t))B' \\ &= BB'dt, \end{aligned} \quad (22)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \rho^B &= BB' \\ &\approx \rho, \end{aligned} \quad (23)$$

となるように行列 $B$ を選べば、独立な $d$ 次元の標準ブラウン運動 $Z(t)$ を用いて、相関行列 $\rho$ を持つ $M$ 次元ベクトルを発生させることができる<sup>17</sup>。

$d$ 個の $M$ 次元ベクトル $\theta^{(q)}$ ,  $q=1, \dots, d$ を用いて、行列 $B$ の $i$ 行 $q$ 列の要素 $b_{iq}$ を、次式のように置く。

$$b_{iq} = \begin{cases} \cos\theta_i^{(q)} \prod_{j=1}^{q-1} \sin\theta_i^{(j)}, & q=1, \dots, d-1 \\ \prod_{j=1}^{q-1} \sin\theta_i^{(j)}, & q=d. \end{cases} \quad (24)$$

具体的に書き下すと、 $d=2$ のとき、(24)式は

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{M1} & b_{M2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1^{(1)} & \sin\theta_1^{(1)} \\ \cos\theta_2^{(1)} & \sin\theta_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ \cos\theta_M^{(1)} & \sin\theta_M^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

となり、 $d=3$ のときは、

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{M1} & b_{M2} & b_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1^{(1)} & \cos\theta_1^{(2)}\sin\theta_1^{(1)} & \sin\theta_1^{(1)}\sin\theta_1^{(2)} \\ \cos\theta_2^{(1)} & \cos\theta_2^{(2)}\sin\theta_2^{(1)} & \sin\theta_2^{(1)}\sin\theta_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\theta_M^{(1)} & \cos\theta_M^{(2)}\sin\theta_M^{(1)} & \sin\theta_M^{(1)}\sin\theta_M^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

と表される。このとき、行列 $BB'$ は対角成分が1の対称行列となることが容易に示される。

17 ここでは表記の簡略化のため、 $Z(t)$ にニューメレルを表す添字は付けない（ $W^{M+1}(t)$ と同様に $T_{M+1}$ を満期とする割引債 $D_{M+1}(t)$ をニューメレルとしている）。

さて、市場で観測されるボラティリティ構造を用いて行列 $B$ が求められたとき、(17)式を独立な $d$ 次元のブラウン運動で表現した式は以下のとおりとなる。

$$L_i(t+\Delta t) = L_i(t) \exp \left\{ \left( - \sum_{j=i+1}^M \frac{\delta_j L_j(t) \sum_{q=1}^d \sigma_j^{(q)}(t) \sigma_i^{(q)}(t)}{1 + \delta_j L_j(t)} - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^d \sigma_i^{(q)}(t)^2 \right) \Delta t + \sum_{q=1}^d \sigma_i^{(q)}(t) (Z_q(t+\Delta t) - Z_q(t)) \right\}, \quad (27)$$

ただし、 $\sigma_i^{(q)}(t) = \sigma_i(t) b_{iq}(t)$ ,  $i=1, \dots, M$ ,  $q=1, \dots, d$ で、 $Z_q(t)$ は $Z(t)$ の $q$ 番目の要素とする。

このようにして、満期 $T_{M+1}$ の割引債 $D_{M+1}(t)$ をニューメーブルとした $d$ 個の独立な標準正規乱数と(27)式によって、モンテカルロ・シミュレーションを行うことができる。

(11)式と(27)式の関係を下に整理しよう。 $\sigma_i^{(q)}(t)$ を要素とする $d$ 次元ベクトルを $\bar{\sigma}_i^{(B)}(t)$ と書くと、(27)式に対応する確率微分方程式は以下のとおりとなる。

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = -\bar{\sigma}_i^{(B)}(t) \sum_{j=i+1}^M \frac{\delta_j L_j(t)}{1 + \delta_j L_j(t)} \bar{\sigma}_j^{(B)}(t) dt + \bar{\sigma}_i^{(B)}(t) dZ(t). \quad (28)$$

(28)式に $\sigma_i^{(q)}(t) = \sigma_i(t) b_{iq}(t)$ 、 $BB' \approx \rho$ 、および(21)~(22)式を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{dL_i(t)}{L_i(t)} &= -(\bar{\sigma}_i(t) B) \sum_{j=i+1}^M \frac{\delta_j L_j(t)}{1 + \delta_j L_j(t)} (\bar{\sigma}_j(t) B)' dt + (\bar{\sigma}_i(t) B) dZ(t) \\ &= -\bar{\sigma}_i(t) \sum_{j=i+1}^M \frac{\delta_j L_j(t)}{1 + \delta_j L_j(t)} (BB') \bar{\sigma}_j(t) dt + \bar{\sigma}_i(t) B dZ(t) \\ &\approx -\bar{\sigma}_i(t) \sum_{j=i+1}^M \frac{\delta_j L_j(t)}{1 + \delta_j L_j(t)} \rho \bar{\sigma}_j(t) dt + \bar{\sigma}_i(t) dW^{M+1}(t), \end{aligned} \quad (29)$$

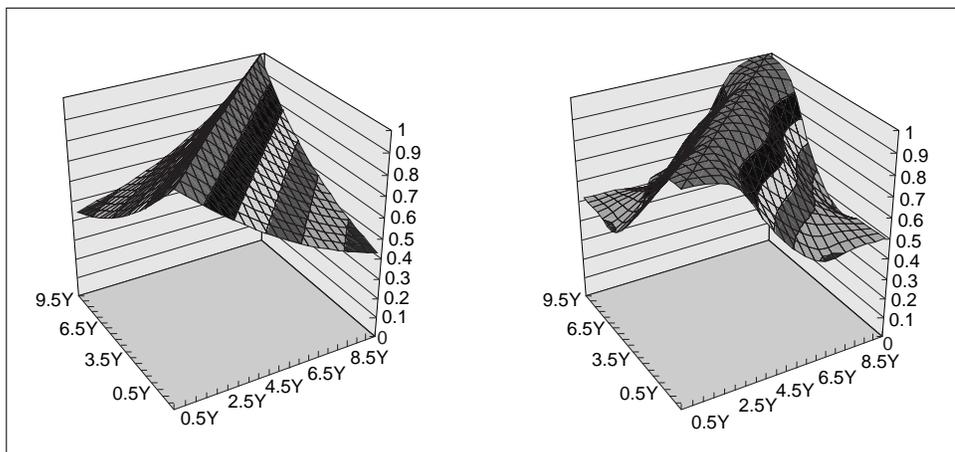
となる。(29)式のドリフト項のベクトルと行列の積を要素で表現したものが、(11)式になるので、(28)式は(11)式の近似式であることが改めてわかる。なお、文献によっては、独立なブラウン運動でモデルを記述した(28)式をLIBORマーケット・モデルと呼んでいるものも少なくない点には、混乱を避ける意味で注意が必要である。

次に $\rho^B$ の推定例を示そう。まず、各フォワードLIBORのブラウン運動 $W^{M+1}(t)$ の相関行列 $\rho$ の要素が、現実に市場で観測されるボラティリティ構造(隣り合うブラウン運動の相関は1に近く、離れるほど相関が小さくなる傾向)を基に、

$$\rho_{i,j} = \alpha + (1-\alpha) \exp \{ (\beta_1 - \beta_2 \max(T_i, T_j)) \cdot |T_i - T_j| \}, \quad (30)$$

ただし、 $\alpha=0.3$ 、 $\beta_1=-0.12$ 、 $\beta_2=-0.005$ ,

図3 ブラウン運動の相関行列 $\rho$  (左) と推定した相関行列 $\rho^B$  (右)

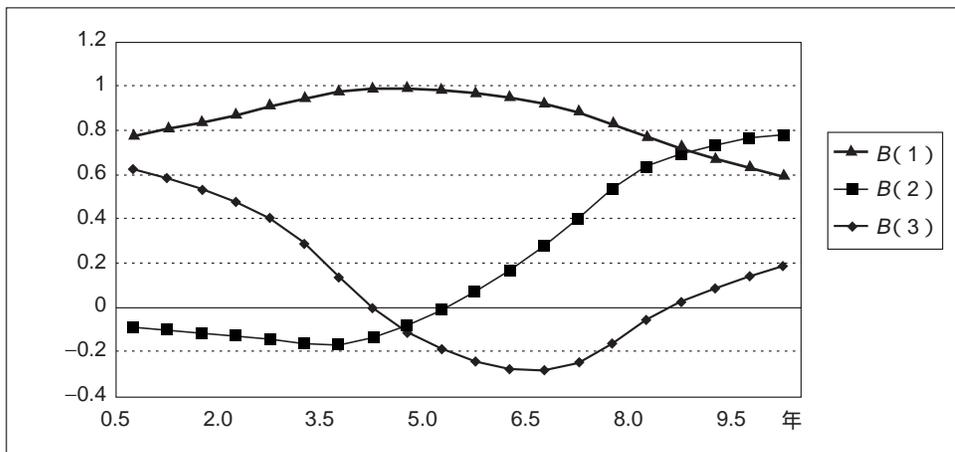


という関係で表されると仮定する (図3左)。次に、(23)式で求められる $\rho^B$ と(30)式の各要素の2乗誤差の和が最小になるように実際に行列 $B$ を推定する。 $d=3$ のケース<sup>18</sup>の結果が図3右である。

これらを見ると、推定した行列 $\rho^B$ (図3右)が行列 $\rho$ (図3左)の特徴を概ねとらえていることがわかる。

また、行列 $\rho^B$ と同時に推定される $\theta_i^{(1)}$ 、 $\theta_i^{(2)}$ より計算される行列 $B$ の列ベクトルは以下のとおりとなる。

図4 行列 $B$ の列ベクトル ( $B(i), i=1, 2, 3$ )



<sup>18</sup> 脚注16で挙げた実証分析の結果を前提に、ここでは $d=3$ とした。

ここで推定されたベクトルの形状は、一般的なイールド・カーブ変動の主成分分析で得られる結果と同様である。すなわち、3つのベクトルはおのおの水準 $B(1)$ 、勾配 $B(2)$ 、曲率 $B(3)$ を表していると解釈できる。

#### 4．スワプションのプライシング

次に、キャップと並んで、金利派生商品市場で取引の活発なスワプションのプライシングを考える。フォワードLIBORをモデル化の対象とするLIBORマーケット・モデルに対し、フォワード・スワップをその対象とするのが、スワップ・マーケット・モデルである（Jamshidian [1997]）。スワップ・マーケット・モデルは、市場で取引されているブラック・モデルをベースとするスワプション価格を再現できるという特徴を有する一方で、後でみるように、LIBORマーケット・モデルとは理論的整合性がないという問題点がある。

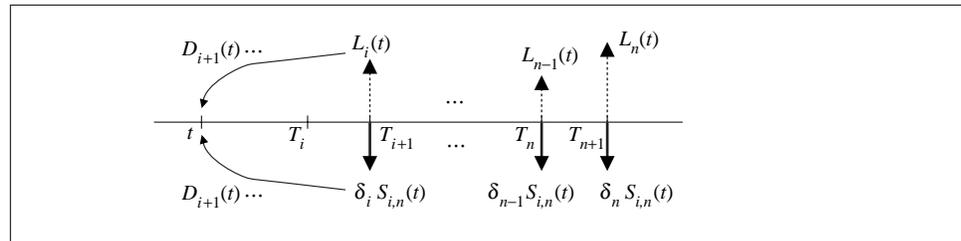
本節では、まず初めにスワップ・マーケット・モデルを説明した後、上記のような特徴と問題点を整理する。次に、Rebonato [1999b] が示したスワプションの近似式を紹介する。この近似式を用いることによって、これまで説明してきたLIBORマーケット・モデルをベースにスワプション価格を考えることができる。

##### (1) スワップ・マーケット・モデル

将来時刻 $T_i$ にスタートし、時刻 $T_n$ に満期を迎えるスワップの時刻 $t$ における固定サイドの支払金利を $S_{i,n}(t)$ とする。固定・変動おのおのの金利キャッシュ・フローの時刻 $t$ での価値は等しくなるため、フォワードLIBORと $S_{i,n}(t)$ の間には次の関係が成り立つ（図5参照）。

$$S_{i,n}(t) \sum_{j=i}^n \delta_j D_{j+1}(t) = \sum_{j=i}^n \delta_j L_j(t) D_{j+1}(t). \quad (31)$$

図5 フォワード・スワップとフォワードLIBORのキャッシュ・フロー



これに、(1)式を代入して、次の関係を得る。

$$S_{i,n}(t) \sum_{j=i}^n \delta_j D_{j+1}(t) = \sum_{j=i}^n \delta_j \frac{D_j(t) - D_{j+1}(t)}{\delta_j D_{j+1}(t)} D_{j+1}(t) \quad (32)$$

$$= D_i(t) - D_{n+1}(t) .$$

よって、 $S_{i,n}(t)$  は以下のように表せる。

$$S_{i,n}(t) = \frac{D_i(t) - D_{n+1}(t)}{\sum_{j=i}^n \delta_j D_{j+1}(t)} \quad (33)$$

ここではニューメレルとして、

$$P_{i,n}(t) \sum_{j=i}^n \delta_j D_{j+1}(t), \quad (34)$$

を考える。 $P_{i,n}(t)$  は、スワップ固定金利の単位変化が現在価値に与えられる影響を表す感応度と解釈できる。

スワップ・マーケット・モデルは、LIBORマーケット・モデルと同様に、この $P_{i,n}(t)$  をニューメレルとするととき、フォワード・スワップ $S_{i,n}(t)$  が以下のように対数正規過程に従うと仮定したモデルである。

$$\frac{dS_{i,n}(t)}{S_{i,n}(t)} = \sigma_{i,n}(t) dW^{i,n}(t), \quad (35)$$

ただし $\sigma_{i,n}(t)$  は、時刻 $T_i$ スタート、期間 $T_n - T_i$ のスワップ金利 $S_{i,n}(t)$  のボラティリティ、 $W^{i,n}(t)$  は、 $P_{i,n}(t)$  をニューメレルとした標準ブラウン運動である<sup>19</sup>。

このとき、フォワード・スワップ $S_{i,n}(t)$  を原資産とする、行使金利 $K$ のペイヤーズ・スワプションの時刻0での価格 $PS_{i,n}(0)$  は以下のように表せる。

$$PS_{i,n}(S_{i,n}(0), K, \Gamma_{i,n}) = P_{i,n}(t)[S_{i,n}(0)N(d_1) - KN(d_2)],$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_{i,n}(0)}{K}\right) + \frac{1}{2}\Gamma_{i,n}^2}{\Gamma_{i,n}}, \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_{i,n}(0)}{K}\right) - \frac{1}{2}\Gamma_{i,n}^2}{\Gamma_{i,n}} \quad (36)$$

ただし、 $\Gamma_{i,n}^2 = \int_0^{T_i} \sigma_{i,n}^2(t) dt$  は  $\log S_{i,n}(t)$  の分散。

19 ボラティリティ関数 $\sigma_{i,n}(t)$  は有界な関数とする。

LIBORマーケット・モデルのキャップ公式のときと同様に、スワップ・マーケット・モデルでもブラック式とよく似た式が導かれる。市場で取引されるオプション期間 $T_i$ 、原資産となるスワップ期間 $T_n - T_i$ のブラック・モデルをベースとするスワップ・ボラティリティを $\hat{\sigma}_{i,n}$ とすると、現時点での $\Gamma_{i,n}$ を、

$$\Gamma_{i,n} = \sqrt{T_i} \hat{\sigma}_{i,n}, \quad (37)$$

とすれば、市場で取引されるスワップ価格を再現できる。

しかし、このスワップ・マーケット・モデルとLIBORマーケット・モデルの間には理論的な整合性がないという問題点がある。というのは、これらのモデルでは、フォワードLIBORとフォワード・スワップがおのおの対数正規過程に従うと仮定しているが、対数正規過程の和は対数正規過程とならないため(31)式の関係が成り立たないからである<sup>20</sup>。仮に、これらのモデルに理論的な整合性が得られているのであれば、市場で取引されているキャップとスワップの価格の両方にフィットするように、LIBORマーケット・モデルのパラメータを定めれば、それによってキャップとスワップの価格を整合的に評価できることになる。しかし、両者のモデルに理論的な整合性がないとすれば、そのギャップを埋めるための何らかの操作が必要となる。次節では、そのギャップを埋めるための例として、スワップ価格の近似式を解説する。

## (2) フォワードLIBORベースのスワップ価格の近似

フォワード・スワップが対数正規過程に従うスワップ・マーケット・モデルの仮定は、前節でみたように、フォワードLIBORが対数正規過程に従うLIBORマーケット・モデルの仮定と理論的に相いれなかった。これに対し、フォワードLIBORが対数正規過程に従うという前提のもとで、スワップ価格の近似式がいくつか提案されている。以下では、このうち、Rebonato [1999b] が示したスワップの近似式を示す<sup>21</sup>。

20 より厳密には、一方の測度のもとで他方を表現したとき、ドリフトの項が残ってしまい、対数正規にならないことにより確認できる。詳しくはBrigo and Mercurio [2001]等を参照。

21 Brigo and Mercurio [2001]では、Rebonato [1999b]の近似式のほか、Hull and White [1999]等のスワップ価格の近似式の比較を行い、Rebonato [1999b]の近似式の精度が相対的に高いことを示している。このため、本稿では、Rebonato [1999b]の近似式を例にパラメータ推定方法を説明する。ただし、本邦金利派生商品市場のデータで他の各種近似方法を含めた精度の優劣を詳しく論ずるためには、より詳細な分析が必要となる。

市場で観測されるスタート $T_i$ 、スワップ期間 $T_n - T_i$ のスワプションに対する、ブラック・モデルをベースとするスワプション・ボラティリティを $\hat{\sigma}_{i,n}$ とすると、LIBORマーケット・モデルのパラメータと $\hat{\sigma}_{i,n}$ の間には以下の近似式が成り立つことが示される。

【Rebonato [ 1999b ] のスワプション近似式】

$$(\hat{\sigma}_{i,n})^2 \approx \frac{1}{T_i (S_{i,n}(0))^2} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=i+1}^n \left\{ w_{i,n}^{(j)}(0) w_{i,n}^{(k)}(0) L_j(0) L_k(0) \rho_{j,k} \sum_{l=1}^i \delta_l \sigma_j(t_l) \sigma_k(t_l) \right\}, \quad (38)$$

$$w_{i,n}^{(j)}(0) = \frac{\delta_j D_{j+1}(0)}{\sum_{k=i}^n \delta_k D_{k+1}(0)}, \quad (39)$$

ただし、 $\rho_{j,k}$ は $j$ 番目と $k$ 番目のブラウン運動の相関係数( $t$ に関して一定と仮定)、 $D_j(t)$ は(3)式で表される割引債とする。

上記の近似式を用いて、市場で取引されるキャップのボラティリティとスワプションのボラティリティの両方にフィットするように、LIBORマーケット・モデルのボラティリティ $\sigma_j(t)$ および相関係数 $\rho_{j,k}$ を定めれば、フォワードLIBORをベースにスワプションもプライシングできることになる。さらに、モンテカルロ法を用いて、より複雑な金利派生商品の価格を、市場で取引されるキャップやスワプションの価格と整合的に求めることができることになる。また、キャップやスワプション価格と整合的であるということは、キャップやスワプション等でポジションをヘッジした場合の金利リスクをより正確に把握できることを意味している。これらのパラメータの推定は、6節のキャップ、スワプションの価格等を用いたモデルのパラメータ推定で具体的に説明する。

## 5 . フォワードLIBORの対数正規性に関する考察

さて、これまでは、フォワードLIBORが対数正規過程に従うことを前提に主に理論面の解説を行ってきた。次節以降で、具体的なモデルのパラメータ推定を行う前に、本節では、フォワードLIBORの対数正規性の仮定の妥当性をヒストリカル・データを用いて検証し、その検証の結果がプライシングやリスク計測に与える含意を検討する。

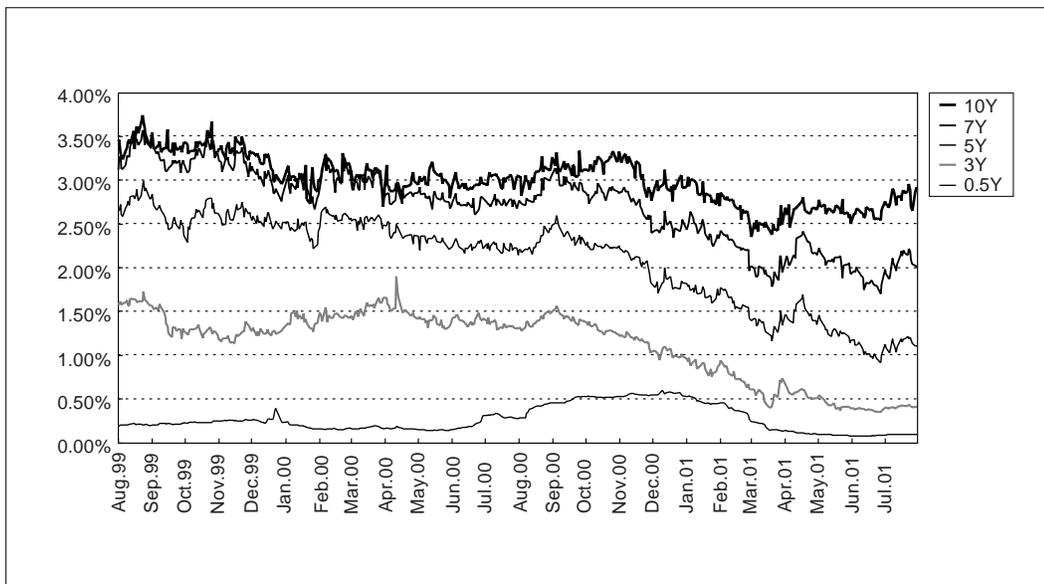
### (1) ヒストリカル・データの統計量

LIBORマーケット・モデルは、これまでみてきたように、該当する期間の割引債

をニューメレルとしたときのフォワードLIBORが、対数正規分布に従うと仮定したモデルである。この際の確率測度の変換は、平均をシフトさせるが、分布の形状は変化させない<sup>22</sup>。そこで、以下では、実際のフォワード・レートがどの程度対数正規分布に近い分布をしているのかをみるために、各種の統計量を算出し、ヒストリカル・データの性質を調べる。

使用したデータは、1999年8月～2001年7月のLIBORスワップ<sup>23</sup>の1～10Yの日次データである。これを用いて、0.5Y、1.0Y、...、9.5Yの各時刻で先行き6カ月間のインプライド・フォワード・レート（6Mフォワード・レート）を求めた。このうち、0.5Y、3Y、5Y、7Y、10Yの6Mフォワード・レートのグラフを図6に示す（ここで、 $n$ Yの6Mフォワード・レートとは、 $(n-0.5)$  Y時点でみた先行き6カ月間のインプライド・フォワード・レートのことを指す<sup>24</sup>）。

図6 6Mインプライド・フォワード・レートの推移



22 補論参照。

23 変動金利をLIBORとするスワップ。このほかTIBORスワップもあるが、市場の流動性の厚さから、ここではLIBORスワップを使用することにした。

24 なお、0.5Yの6Mフォワード・レートは6M LIBOR（キャッシュ）のことである。

表4 6Mフォワード・レートの日次対数変化率の統計量

	~0.5Y	~1Y	~1.5Y	~2Y	~2.5Y	~3Y	~3.5Y	~4Y	~4.5Y	~5Y
平均	-0.0006	-0.0008	-0.0011	-0.0012	-0.0012	-0.0011	-0.0010	-0.0010	-0.0008	-0.0007
分散	0.00030	0.00188	0.00050	0.00087	0.00029	0.00034	0.00033	0.00037	0.00016	0.00017
歪度	-2.73	0.64	-0.15	-0.17	0.20	0.27	-0.17	-0.18	0.51	0.51
尖度	54.38	9.53	6.03	6.32	6.64	6.89	8.63	9.11	5.06	5.00
最小	-0.21	-0.16	-0.12	-0.14	-0.09	-0.09	-0.10	-0.11	-0.05	-0.05
最大	0.12	0.31	0.09	0.12	0.08	0.09	0.09	0.10	0.06	0.06
	~5.5Y	~6Y	~6.5Y	~7Y	~7.5Y	~8Y	~8.5Y	~9Y	~9.5Y	~10Y
平均	-0.0006	-0.0006	-0.0004	-0.0003	-0.0002	-0.0003	-0.0002	-0.0002	-0.0002	-0.0002
分散	0.00019	0.00020	0.00015	0.00016	0.00018	0.00014	0.00015	0.00016	0.00017	0.00019
歪度	0.22	0.19	0.46	0.44	-0.05	-0.03	0.13	0.13	0.28	0.29
尖度	4.80	4.69	5.34	5.25	4.41	4.04	5.99	5.88	4.98	5.11
最小	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04	-0.06	-0.06	-0.05	-0.06
最大	0.07	0.07	0.06	0.06	0.05	0.04	0.06	0.06	0.07	0.07

6Mフォワード・レートの日次対数変化率<sup>25</sup>の統計量<sup>26</sup>を求めたものが表4である。

正規分布の尖度は3であるので、ある分布が正規分布に近いか否かは尖度が1つの目安となる。表4中の尖度をグラフにしたものが以下の図7(左)である。尖度が突出しているのは6M LIBOR (54.38) で、他は4.0強~10.0弱のレンジにあるが、いずれの尖度も正規分布のそれ(3.00)より大きく、分布の裾が厚いいわゆるファット・テールな分布であるといえる。

図7(右)は、尖度が著しく大きい6M LIBORの対数変化率の時系列推移である。これをみると、1999年末のいわゆるY2K問題の際に、6M LIBORの変動が大きくなっており、この急激な変動が統計量(特に尖度)の水準に影響を与えていると考えられる。

25 日次対数変化率  $\log [L_i(t+\Delta t)/L_i(t)]$  は、

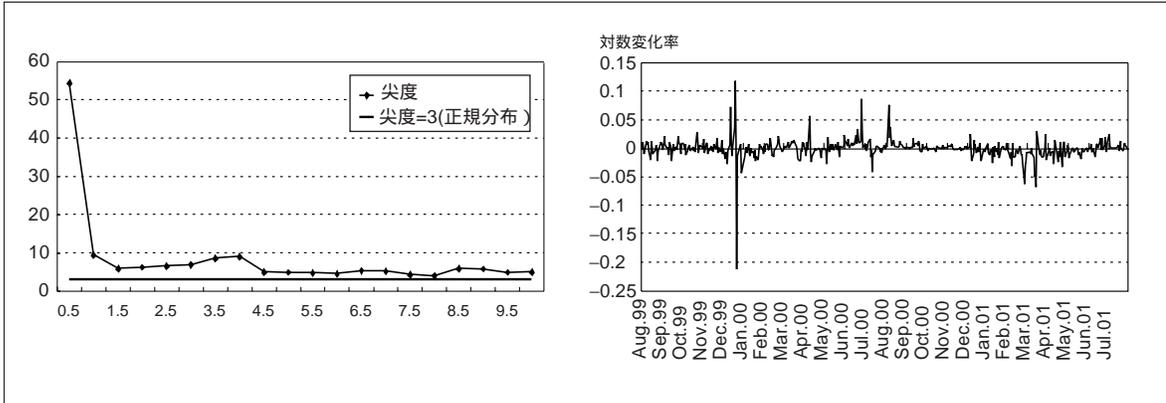
$$\log \left( \frac{L_i(t+\Delta t)}{L_i(t)} \right) \approx \frac{L_i(t+\Delta t)}{L_i(t)} - 1 = \frac{L_i(t+\Delta t) - L_i(t)}{L_i(t)}$$

の近似が  $L_i(t+\Delta t)/L_i(t)=1$  の近辺で成り立つので、日次対数変化率が正規分布に従うかを調べることによって、 $L_i(t+\Delta t)-L_i(t)/L_i(t)$  が正規分布に従うか、すなわち(4)式が成り立っているかどうかを調べることができる。

26 データを  $x_1, \dots, x_N$ 、平均  $\bar{x}$  とするとき、歪度  $S$  と尖度  $K$  を以下で定義する。

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{(N-1)/N}} \right)^3, K = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{(N-1)/N}} \right)^4$$

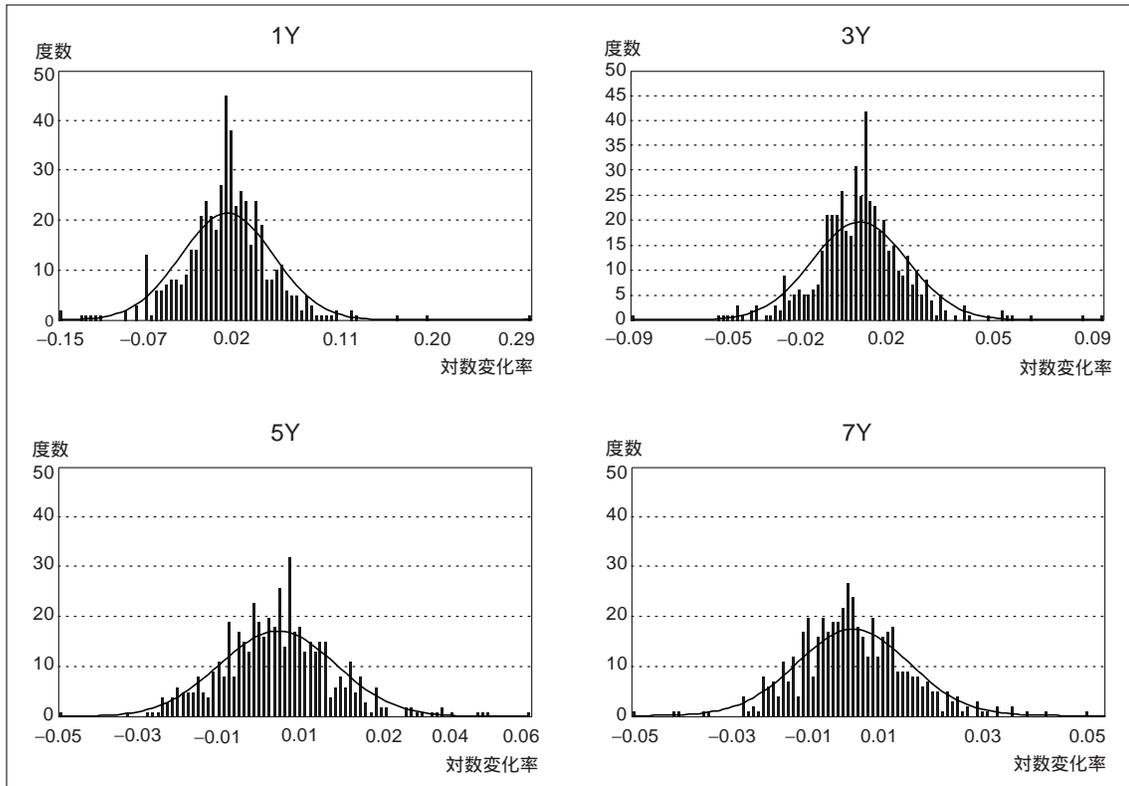
図7 尖度（左）と6M LIBOR対数変化率（右）



## (2) 各6Mフォワード・レートの分布

1Y、3Y、5Y、7Yの6Mフォワード・レートのヒストグラムを以下の図8に作成した。比較のため、分布と同じ平均と分散を持つ正規分布も図示した。

図8 フォワード・レートの分布

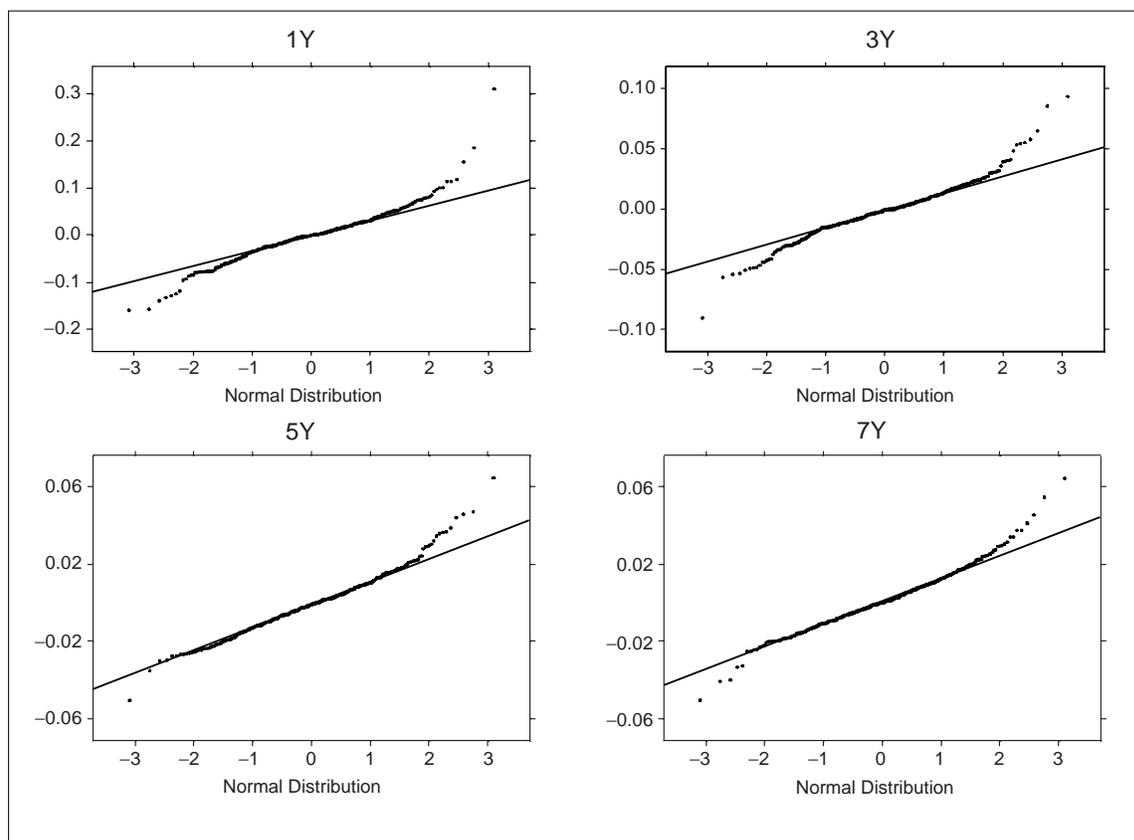


いずれの分布も、比較的正規分布に近いが、正規分布と比較して、分布の中央部分が高く、裾の厚いファット・テール性を有する分布の形状をしている。この裾に該当するサンプルは、期末等の特定日付近のサンプルが中心であった。プライシングやリスク評価を行う際には、商品やポジションのレート・リセット日が、こうした特定日に当たるかどうかには注意が必要になることになる。

また、スワップ取引は年限等により、取引の厚みに大きな差がある。このため、スワップ金利には、こうした流動性による影響等が含まれていると考えられる。このようなスワップ金利から求めるフォワード・レートの解釈や扱いには注意が必要である。

次に、図9に、ある分布の正規分布との相違度合いをみるためにしばしば用いられるQ-Qプロットを示した<sup>27</sup>。図の横軸は標準正規分布の値を表し、図の直線からの乖離が正規分布からのずれを示す。この図からは、分布の裾での乖離が大きいことがわかる。

図9 Q-Qプロット



27 Q-Q (Quantile-Quantile) プロットとは、データ数 $n$ 個の $k$ 番目のデータを $x_{k,n}$ とすると、2次元平面に、 $(x_{k,n}, N^{-1}((n-k+1)/(n+1)))$ をプロットしたものである(ただし $N^{-1}$ は標準正規分布の分布関数の逆関数)。

いずれのグラフをみても、両端が正規分布を表す直線から乖離していることがわかる。乖離している方向をみると、正規分布で想定している変化率より、プラスの部分では大きい方に、マイナスの部分では小さい方に分布している、いわゆるファット・テール性を持つ分布であることがこのQ-Qプロットからもわかる。

このように、実際のヒストリカル・データによるフォワードLIBORの分布を調べると、LIBORマーケット・モデルが想定する対数正規分布より、実際の分布はファット・テール性を有する分布であることがわかった。

実際の分布がいわゆるファット・テールな分布となることは、現実の市場でスマイルが観測される1つの原因であると考えられている。スマイルやスキューを考慮したLIBORマーケット・モデルの拡張は、7節で説明する。

### (3) 前節までの結果の考察

5節(2)までの市場データを用いた検証により、LIBORマーケット・モデルが前提とする各フォワードLIBORの対数正規性の仮定が、市場では必ずしも成立していない可能性が判明した。ここでは、今回の検証の結果が持つ含意を検討する。

LIBORマーケット・モデルは、従来の多くのイールド・カーブ・モデルと同様、金利変動の不確実性(リスク・ファクター)に(対数)正規過程を仮定している。モデルの構築の際にある程度扱いやすい仮定を置くことは、通常致し方ないことであり、この点で、LIBORマーケット・モデルを含めたイールド・カーブ・モデルの有用性を真っ向から否定する必要はない。この意味で、実務的には、モデルの限界を念頭におきつつ、モデルの活用を図ることが重要であると思われるが、この「モデルの限界」という観点では、金利派生商品のプライシングとリスク計測とでは今回の検証の結果が与える意味合いは明らかに異なる。

まず、プライシングの場合、最終的な価格は期待値演算によって求められるが、その際にはリスク・ファクターの確率分布の全体が用いられるので、期待値演算で、分布の中心部分での演算がドミナントな役割を果たすような場合(例えば、アット・ザ・マネーのオプションのプライシング)には、分布の正規分布からの乖離の影響は限定的となる。一方、リスク計測の場合、例えばVaR(分位点)は、確率分布の1点に過ぎないことから、実際の分布の形状からのずれから相対的に大きな影響を受ける。

5節(2)で示したQ-Qプロットをみる限りでは、分布の中心部分は相対的に正規分布に近いが、裾部分は正規分布から乖離していることがわかる。この観点からは、LIBORマーケット・モデルは、金利派生商品のプライシングに用いる場合は、期待値演算で、分布の中心部分の演算がドミナントな役割を果たす範囲では、ある程度受容できると判断できよう(逆に、例えばファー・アウト・オブ・ザ・マネーのオプションでは、プライシングが分布の裾部分の影響を相対的に強く受けることから、裾部分での分布のずれの有無が重要となる)。その一方で、同モデルをリスク計測に用いる際には、分布のずれの影響が直接出やすいだけに、細心の注意が必要であ

ると考えられる。

## 6. キャップ、スワプションの価格等を用いたモデルの パラメータ推定

4節までに、LIBORマーケット・モデルとそれを用いたキャップ価格の表現、およびスワプション近似式の理論的な解説を行った。本節では、これらを用いて、市場で観測されるキャップ、スワプション価格からLIBORマーケット・モデルのパラメータの推定を試みる。

以下では、まず、市場で観測されるキャップのボラティリティを用いてパラメータ推定を行う方法と、スワプションのボラティリティも加えてパラメータ推定を行う方法を解説する。次に、具体的にパラメータを推定して、その結果を簡単に検討する。

### (1) キャップのボラティリティを用いるパラメータ推定方法

本節では、市場で観測されるキャップのインプライド・ボラティリティからLIBORマーケット・モデルのパラメータの推定を行う。表5は、2001年10月31日の円金利のキャップのボラティリティ(MID)と行使金利を半年間隔で補間により求めたものである<sup>28</sup>。

表5 キャップ・ボラティリティ

	0.5Y	1.0Y	1.5Y	2.0Y	2.5Y	3.0Y	3.5Y	4.0Y	4.5Y	5.0Y
ボラティリティ	153.50	140.00	126.50	113.00	100.50	88.00	83.75	79.50	73.00	66.50
行使金利	0.08%	0.10%	0.13%	0.15%	0.20%	0.25%	0.30%	0.35%	0.43%	0.50%
	5.5Y	6.0Y	6.5Y	7.0Y	7.5Y	8.0Y	8.5Y	9.0Y	9.5Y	10.0Y
ボラティリティ	61.75	57.00	52.75	48.50	48.00	47.50	45.75	44.00	42.00	40.00
行使金利	0.63%	0.75%	0.88%	1.00%	1.13%	1.25%	1.38%	1.50%	1.50%	1.50%

また、半年ごとの6Mフォワード・レート(MID)は以下のとおりである。

28 MIDとは、Telerate 58376画面のBIDとASKの平均である。補間は線形補間で行った。なお、同画面では、1Yのキャップでは、原資産が3Mのスワップ・レートとなっているが、他社のクウォートしている水準も参考に、ここではほかと同じ6Mのスワップ・レートとして計算した。

表6 フォワードLIBOR [ 2001/10/31 ]

0.5Y	1Y	1.5Y	2Y	2.5Y	3Y	3.5Y	4Y	4.5Y	5Y
0.09%	0.12%	0.17%	0.22%	0.35%	0.44%	0.63%	0.74%	0.98%	1.12%
5.5Y	6Y	6.5Y	7Y	7.5Y	8Y	8.5Y	9Y	9.5Y	10Y
1.37%	1.53%	1.80%	1.98%	2.18%	2.36%	2.45%	2.62%	2.60%	2.75%

一般に、市場でクウォートされるキャップのボラティリティは、現時点からキャップの満期までの間の、半年ごとの各キャブレットに一律適用されるボラティリティとして表示されている（これをシングル・ボラティリティと呼ぶ）。

シングル・ボラティリティ  $\hat{\sigma}_i^{\text{CAP}}$  とキャブレットのボラティリティ  $\hat{\sigma}_j^{\text{CAPLET}}$  の間には以下のような関係が成り立つ（ただし  $\hat{C}$  は(6)式のブラック・モデルによるキャブレット公式を表す）。

$$\sum_{j=1}^i \delta_j D_j(0) \hat{C}(L_j(0), K_j, \hat{\sigma}_i^{\text{CAP}}) = \sum_{j=1}^i \delta_j D_j(0) \hat{C}(L_j(0), K_j, \hat{\sigma}_i^{\text{CAPLET}}). \quad (40)$$

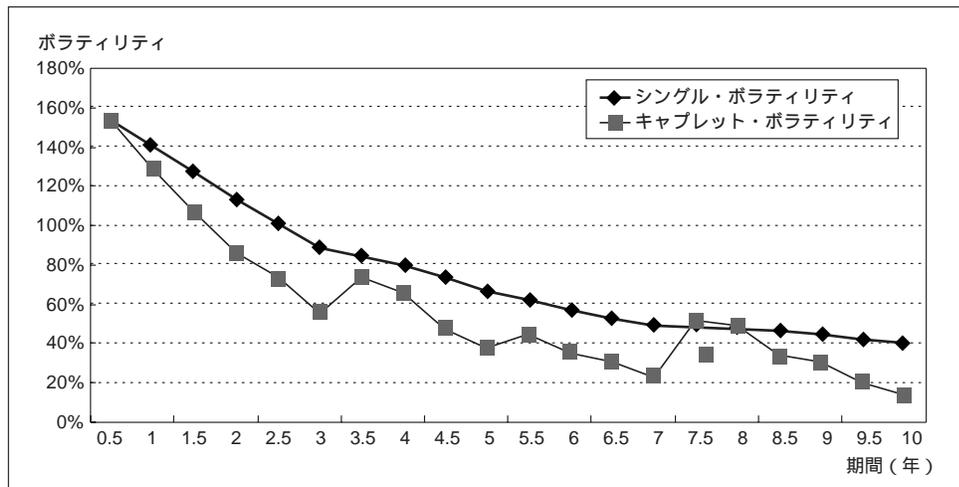
$i=1$  のとき、(40)式は、

$$\delta_1 D_1(0) \hat{C}(L_1(0), K_1, \hat{\sigma}_1^{\text{CAP}}) = \delta_1 D_1(0) \hat{C}(L_1(0), K_1, \hat{\sigma}_1^{\text{CAPLET}}), \quad (41)$$

となるので、 $\hat{\sigma}_1^{\text{CAP}} = \hat{\sigma}_1^{\text{CAPLET}}$  となる。同様に  $i=2$  のときには、

$$\begin{aligned} & \delta_1 D_1(0) \hat{C}(L_1(0), K_1, \hat{\sigma}_2^{\text{CAP}}) + \delta_2 D_2(0) \hat{C}(L_2(0), K_2, \hat{\sigma}_2^{\text{CAP}}) \\ & = \delta_1 D_1(0) \hat{C}(L_1(0), K_1, \hat{\sigma}_1^{\text{CAPLET}}) + \delta_2 D_2(0) \hat{C}(L_2(0), K_2, \hat{\sigma}_2^{\text{CAPLET}}), \quad (42) \end{aligned}$$

図10 シングル・ボラティリティとキャブレット・ボラティリティ



となり、 $\hat{\sigma}_1^{\text{CAPLET}}$ は既知なので、この式を満たすインプライド・ボラティリティ $\hat{\sigma}_2^{\text{CAPLET}}$ が求められる。順次求めたキャブレット・ボラティリティと元のシングル・ボラティリティをグラフにしたものが図10である。ここで横軸は、シングル・ボラティリティではキャップ期間を、キャブレット・ボラティリティではオプション期間を表す。

上で求めたキャブレットのボラティリティを用いて、(8)式より $\gamma_i$ を、

$$\gamma_i = \sqrt{T_i} \hat{\sigma}_i^{\text{CAPLET}}, \quad (43)$$

と定めれば、この $\gamma_i$ と(5)式から求められるフォワードLIBORのキャブレット価格は、ブラック・モデルのキャブレット価格と一致する。

個々のフォワードLIBORのボラティリティ $\sigma_i(t)$ を離散的に考えるとき、(1)式でみたように、 $\gamma_i^2 = \delta_1 \sigma_i^2(T_1) + \dots + \delta_i \sigma_i^2(T_i)$ という関係がある。しかし、この右辺の1つ1つの $\sigma_i$ を求めなくても、 $\gamma_i$ が求められていれば、キャブレットの価格の算出が可能となる。

## (2) スワプション・ボラティリティをも考慮するパラメータ推定方法

次にここでは、市場で取引されるスワプションのデータを用いて、フォワードLIBORのボラティリティ $\sigma_j(t)$ およびブラウン運動間の相関係数 $\rho_{j,k}$ を推定する方法を考える。

各フォワードLIBORのボラティリティ $\sigma_j(t)$ と各ブラウン運動間の相関係数 $\rho_{j,k}$ が求められれば、3節のLIBORマーケット・モデルの離散化の手順の項で説明した手法を用いて、市場のキャップ・スワプション価格と整合性を保ったまま、より複雑な商品のプライシングが可能となる。

以下では、4節で説明したスワプションの近似式((38)~(39)式)を用いて、スワプション・ボラティリティを考慮するパラメータ推定を考える。(38)~(39)式で、初期のフォワードLIBOR $L_1(0), \dots, L_M(0)$ を用いて、 $D_i(0)$ は(3)式から、 $S_{i,n}(0)$ は(33)式からおのおの求められるので、前節でキャブレットのボラティリティから求めた関係 $\gamma_i^2 = \delta_1 \sigma_i^2(T_1) + \dots + \delta_i \sigma_i^2(T_i)$ を満たすように、フォワードLIBORの相関係数 $\rho_{j,k} : j, k = 1, \dots, M$ と $\sigma_i(T_1), \dots, \sigma_i(T_i), i = 1, \dots, M$ を求めればよいことになる。

各利払時点の間はパラメータが一定であるとする、求めるボラティリティは以下の表7ようになる。推定するパラメータ数は、 $\sigma_i(t) : M(M+1)/2$ 個となる。

Brigo and Mercurio [2001]では、表7のように表されるフォワードLIBORのボラティリティ構造をさまざまな形でモデル化して、推定が必要なパラメータ数の削減を試みている。その中から特に良好なフィッティングとなった計算例として、以下では、各期間・各フォワードLIBORに該当するボラティリティを表す関数を、おのおの定数とする場合と連続関数で表現する場合について、パラメータ推定のた

めの考え方と具体的な推定結果を説明する。

表7 フォワードLIBORのボラティリティ

	$L_1(t)$	$L_2(t)$	$L_3(t)$	...	$L_M(t)$
$0 \leq t_1 \leq T_1$	$\sigma_1(t_1)$	$\sigma_2(t_1)$	$\sigma_3(t_1)$	...	$\sigma_M(t_1)$
$T_1 < t_2 \leq T_2$		$\sigma_2(t_2)$	$\sigma_3(t_2)$	...	$\sigma_M(t_2)$
$T_2 < t_3 \leq T_3$			$\sigma_3(t_3)$	...	$\sigma_M(t_3)$
⋮				⋮	⋮
$T_{M-1} < t_M \leq T_M$					$\sigma_M(t_M)$

各期間の各フォワードLIBORのボラティリティ関数を定数とする場合

このケースでは、表8のように満期までの期間に共通するファクター $\sigma_i$ と*i*番目のフォワードLIBORに共通するファクター $v_i$ の積としてボラティリティ構造をモデル化する。

表8 ボラティリティ期間構造モデル（離散）

	$L_1(t)$	$L_2(t)$	$L_3(t)$	...	$L_M(t)$
$0 \leq t \leq T_1$	$v_1\sigma_1$	$v_2\sigma_2$	$v_3\sigma_3$	...	$v_M\sigma_M$
$T_1 < t \leq T_2$		$v_2\sigma_1$	$v_3\sigma_2$	...	$v_M\sigma_{M-1}$
$T_2 < t \leq T_3$			$v_3\sigma_1$	...	$v_M\sigma_{M-2}$
⋮				⋮	⋮
$T_{M-1} < t \leq T_M$					$v_M\sigma_1$

フォワードLIBORに関する先行研究では、しばしば上記の $\sigma_i$ のみでボラティリティの期間構造をモデル化している（全ての $v_i$ を1とするケース）。このようにボラティリティが求められると仮定すると、3節(2)でフォワードLIBORの期落ちの問題を考えた表3において、グレーに塗った部分のパラメータには $\sigma_1 \sim \sigma_M$ をそのまま適用できることになる。

しかし、表8で全ての $v_i$ を1とするという仮定をおくと、結果として、実際の市場データからパラメータを実数値で求めることができないことが往々にして発生する。例えば、最近の本邦の金利派生商品市場のデータ<sup>29</sup>では、特に短期のキャブレットで相対的に大きなボラティリティが観測されるため、全ての $v_i$ を1とするという仮定は適用できなくなってしまう。この点を簡単に解説しよう。オプション期間 $T_i$ のブラック・モデルによるキャブレット価格のボラティリティ（図10のキャブレット・ボラティリティ） $\hat{\sigma}_i^{\text{CAPLET}}$ とLIBORマーケット・モデルのボラティリティ $\sigma_i$ の間には(7)~(8)式より、

29 ここでの分析では2001年10月31日のデータを使用している。

$$\begin{aligned}
T_1(\hat{\sigma}_1^{\text{CAPLET}})^2 &= \delta_1 \sigma_1^2 \\
T_2(\hat{\sigma}_2^{\text{CAPLET}})^2 &= \delta_1 \sigma_2^2 + \delta_2 \sigma_1^2 \\
&\vdots \\
T_i(\hat{\sigma}_i^{\text{CAPLET}})^2 &= \delta_1 \sigma_i^2 + \delta_2 \sigma_{i-1}^2 + \dots + \delta_i \sigma_1^2,
\end{aligned} \tag{44}$$

という関係がある。しかし、図10の円金利のキャブレット・ボラティリティを用いて、(44)式を上から順に解いて、右辺の $\sigma_i$ を求めようとする、1Y、2Yのキャブレット・ボラティリティが3Yのそれに比べて相対的に高いことから、途中から右辺の $\sigma_i$ が実数では求められなくなるからである。

一方、表8のように $v_i$ を導入したモデルでは、(7)~(8)式の関係は、

$$\begin{aligned}
T_1(\hat{\sigma}_1^{\text{CAPLET}})^2 &= v_1^2 (\delta_1 \sigma_1^2) \\
T_2(\hat{\sigma}_2^{\text{CAPLET}})^2 &= v_2^2 (\delta_1 \sigma_2^2 + \delta_2 \sigma_1^2) \\
&\vdots \\
T_i(\hat{\sigma}_i^{\text{CAPLET}})^2 &= v_i^2 (\delta_1 \sigma_i^2 + \delta_2 \sigma_{i-1}^2 + \dots + \delta_i \sigma_1^2),
\end{aligned} \tag{45}$$

となり、上述の1Y、2Yの高いボラティリティの影響を $v_1, v_2$ で調整できるため、パラメータを実数値として求めることが可能となる。後述の計算例では、表8の仮定のもとでパラメータの推定を行う。

各期間の各フォワードLIBORのボラティリティ関数を連続関数とする場合

次に、連続的なボラティリティ関数として、実際に市場で観測されるボラティリティ構造を前提に、以下の(46)式を仮定した<sup>30</sup>。この関数も、現時刻 $t$ から $i$ 番目のフォワードLIBORの満期 $T_i$ までの差で表されている点は、上述のモデルの $\sigma_i$ と共通している。

$$\tilde{\sigma}(T_i-t) = (a(T_i-t) + d)e^{-b(T_i-t)} + c \quad (\text{ただし } a, b, c, d \text{ は定数}). \tag{46}$$

と同様に、(46)式に各フォワードLIBOR固有の係数 $v_i$ を乗じて、表9のようにモデル化する。

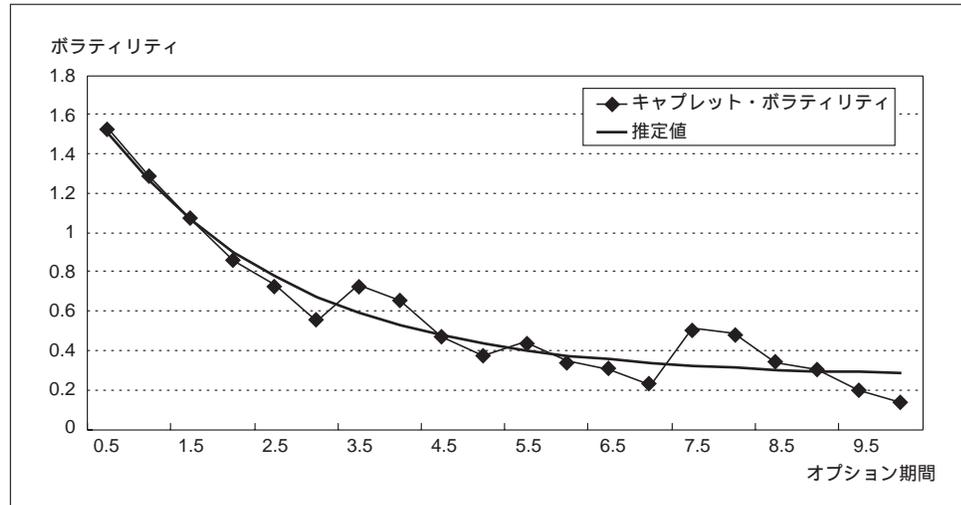
30 (46)式は、キャブレット・ボラティリティの形状として市場で観測されることが多い「期間が短いちはいったん上昇した後、期間が長くなるに連れて緩やかに減少する」という形状も表現可能で、ボラティリティのモデル化によく用いられる関数である。

表9 ボラティリティ期間構造モデル（連続）

	$L_1(t)$	$L_2(t)$	$L_3(t)$	...	$L_M(t)$
$0 \leq t \leq T_1$	$v_1 \tilde{\sigma}(T_1 - t)$	$v_2 \tilde{\sigma}(T_2 - t)$	$v_3 \tilde{\sigma}(T_3 - t)$	...	$v_M \tilde{\sigma}(T_M - t)$
$T_1 < t \leq T_2$		$v_2 \tilde{\sigma}(T_2 - t)$	$v_3 \tilde{\sigma}(T_3 - t)$	...	$v_M \tilde{\sigma}(T_M - t)$
$T_2 < t \leq T_3$			$v_3 \tilde{\sigma}(T_3 - t)$	...	$v_M \tilde{\sigma}(T_M - t)$
$\vdots$				$\ddots$	$\vdots$
$T_{M-1} < t \leq T_M$					$v_M \tilde{\sigma}(T_M - t)$

スタート時点 $t=0$ で、(46)式が図10のキャブレット・ボラティリティにフィットするようにパラメータを求めると $a=-0.00000717$ 、 $b=0.446$ 、 $c=0.270$ 、 $d=1.248$ となる(図11)。

図11 連続なボラティリティ関数



(37)式のスワプション・ボラティリティの近似式は、 $\sigma_i(t)$  が連続関数のときは以下で表される。

$$(\hat{\sigma}_{i,n})^2 = \frac{1}{T_i(S_{i,n}(0))^2} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=i+1}^n \{w_j(0)w_k(0)L_j(0)L_k(0)\rho_{j,k} \int_0^{T_i} \sigma_j(t)\sigma_k(t)dt\}. \quad (47)$$

(37)式では和の形で表されていた部分が積分となっているが、実際にパラメータを推定する場合には、以下のように、この積分項を十分大きな正の定数 $N$ 個までの和で近似することが普通である。

$$\int_0^{T_i} \sigma_j(t)\sigma_k(t)dt \approx \sum_{l=1}^N \frac{T_i}{N} \sigma_j\left(\frac{T_i}{N}l\right)\sigma_k\left(\frac{T_i}{N}l\right). \quad (48)$$

### (3) パラメータ推定結果

次に、前項までの結果を基に、具体的な計算例を示す。使用したデータは、表5のキャップ・ボラティリティ、表6の初期フォワードLIBORに加えて、以下の表10のスワプション・ボラティリティである<sup>31</sup>。ここでは、10年までの金利データとキャップ・ボラティリティを使って計算を行うため、オプション期間と原資産となるスワップ期間の和が10年以内となる部分(表10の網掛けの部分)のみを用いた。

表10 スワプション・ボラティリティ・マトリクス

		原資産となるスワップの期間									
		1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y
オ プ シ ョ ン 期 間	1Y	82.40	56.60	53.10	49.00	44.90	42.25	39.60	36.33	33.07	29.80
	2Y	52.20	47.70	45.20	41.10	37.60	33.85	30.10	28.63	27.17	25.70
	3Y	44.80	41.50	36.90	33.55	31.50	28.75	26.00	24.85	23.70	22.55
	4Y	42.10	36.20	32.00	33.30	30.70	26.68	22.65	21.75	20.85	19.95
	5Y	35.20	29.00	26.30	23.60	21.40	20.50	19.60	19.20	18.80	18.40
	6Y	29.80	25.13	23.50	21.58	19.85	19.25	18.65	18.34	18.03	17.73
	7Y	24.40	21.25	20.70	19.55	18.30	18.00	17.70	17.48	17.27	17.05
	8Y	23.13	20.23	20.00	18.88	17.53	17.23	16.93	16.75	16.57	16.38
	9Y	21.87	19.22	19.30	18.22	16.77	16.47	16.17	16.02	15.87	15.72
	10Y	20.60	18.20	18.60	17.55	16.00	15.70	15.40	15.28	15.17	15.05

対象とする期間は10年で、 $\delta_i = 0.5$ としたので、フォワードLIBORとして考える最長の $M$ は20となる。また、相関行列の近似は、(26)式で3ファクター( $d=3$ )のケースを用いた(推定するパラメータは、 $\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_{20}^{(1)}, \theta_1^{(2)}, \dots, \theta_{20}^{(2)}$ )。

各期間の各フォワードLIBORのボラティリティ関数を定数とする場合

まず、表8のケースでは、(7)~(8)式の間係を表8に当てはめて考えると、 $i=1, \dots, 20$ に対して

$$\begin{aligned}
 \gamma_i^2 &= \delta_1 \sigma_i(T_1)^2 + \dots + \delta_i \sigma_i(T_i)^2 \\
 &= v_i^2 (\delta_1 \sigma_i^2 + \dots + \delta_i \sigma_i^2) \\
 &= T_i (\hat{\sigma}_i^{\text{CAPLET}})^2,
 \end{aligned} \tag{49}$$

となり、 $v_i$ は以下のように求められる。

31 2001年10月31日のMIDを用いた(データはBloombergより取得)。

$$v_i = \sqrt{\frac{T_i}{\delta_1 \sigma_i^2 + \dots + \delta_i \sigma_1^2}} \hat{\sigma}_i^{\text{CAPLET}} \quad (50)$$

(50)式を満たしつつ、(38)~(39)式のスワプション・ボラティリティの近似式の値と表10のボラティリティ（網掛けの部分）の2乗誤差が最小になるように、 $\sigma_1, \dots, \sigma_{20}$ 、 $\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_{20}^{(1)}$ 、 $\theta_1^{(2)}, \dots, \theta_{20}^{(2)}$ を求めたものが以下である（ただし、 $\sigma_1, \dots, \sigma_{20}$ の初期値は表5のキャップ・ボラティリティ、 $\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_{20}^{(1)}$ 、 $\theta_1^{(2)}, \dots, \theta_{20}^{(2)}$ の初期値は $\pi/2$ とし、 $v_i \leq 1$ の制約をおいた<sup>32)</sup>）。

図12 推定結果（ のケース、左： $\sigma_i, v_i$ 、右：1年ごとの $\sigma_i(t)$ ）

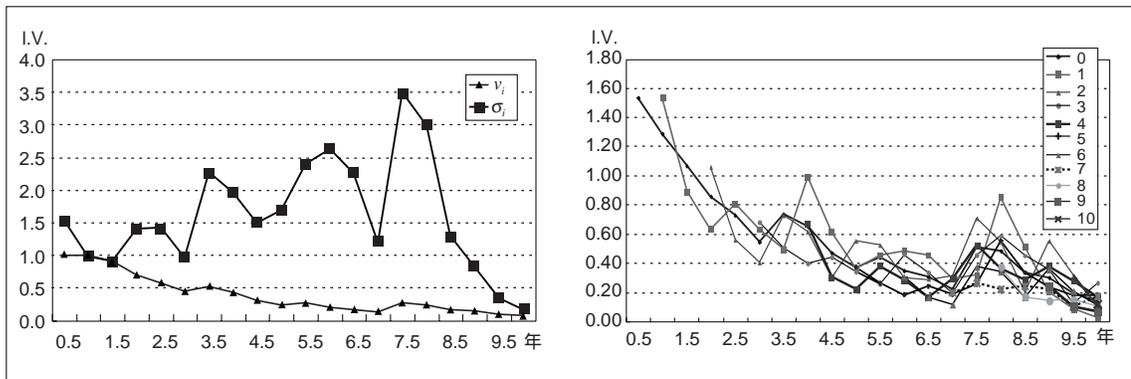


図12左のグラフをみると、 $v_i$ は0.5Yが最大で、ほぼ単調に減少していることがわかる。図12右のグラフでは、表8の各行を各1本のグラフにしたものである（1年間隔で表示してある）。 $v_i$ が減少していく効果で、時間の経過に従って、 $\sigma_i(t)$ が全般的に減少していくことがわかる。

スワプション・ボラティリティの近似値と市場での観測値の格差をみるために、相対誤差（(推定値 - 観測値) / (観測値)）を求め、原資産となるスワップ期間ごとに散布図にしたものが図13(左)のグラフである。また、相関行列は図13(右)のグラフのようになる。

スワプション・ボラティリティの近似は、原資産となるスワップ期間が1年のところでフィッティングが悪くなっているが、それ以外の相対誤差は $\pm 10\%$ 程度の範囲に収まっている。相関行列は、図3で想定していたような滑らかに変化する相関関係とは異なり、隣り合うフォワードLIBORの相関がマイナスになっているところも多くみられる。この相関行列を生成する行列 $B$ の列ベクトルは図14のとおりである。図4でみたような、主成分として理解できるような形状にはなっていないことがわかる。

32  $v_i \leq 1$ としたのは、この制約がないと、推定される解が不安定となることがあるためである。

図13 推定値の相対誤差（左）と相関行列（右）

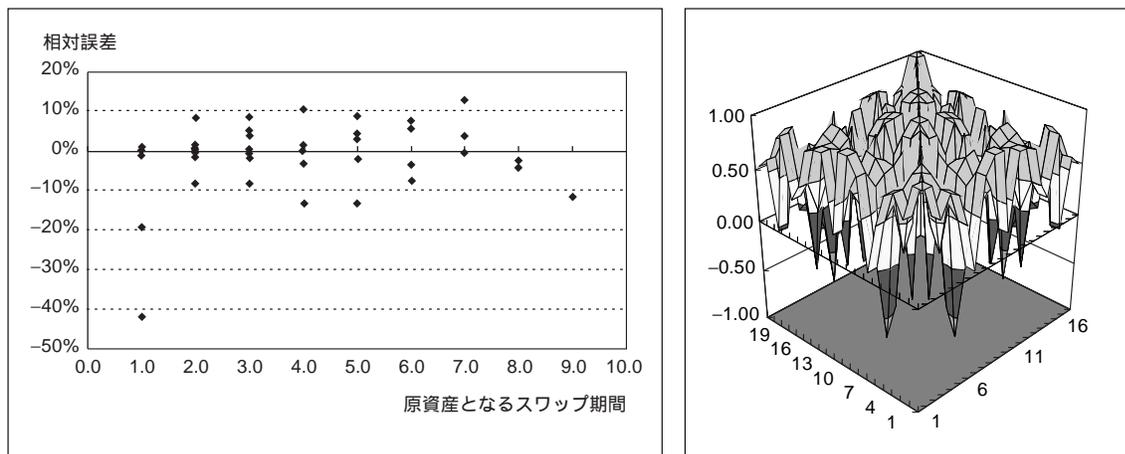
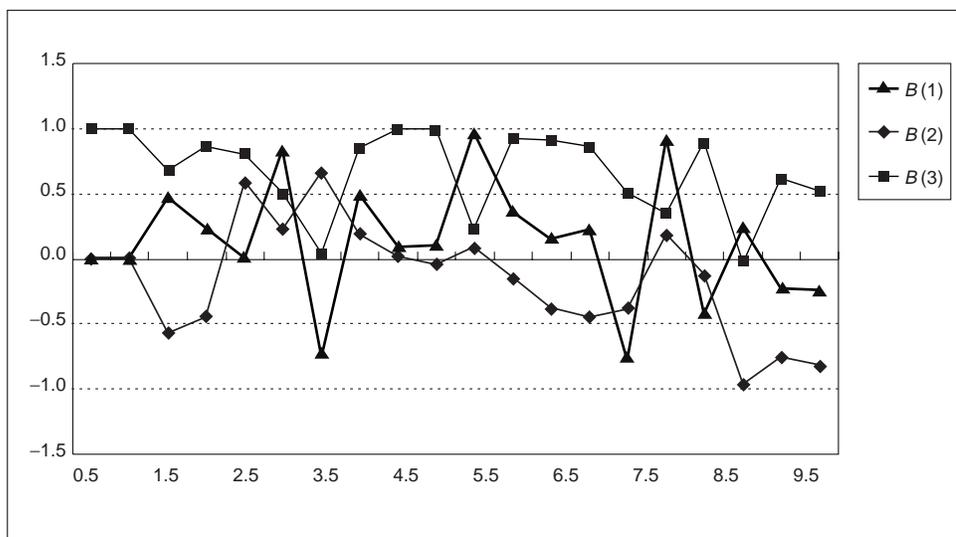


図14 相関行列を生成するベクトル



各期間の各フォワードLIBORのボラティリティ関数を連続関数とする場合次に、連続関数の場合を考える。このとき(49)~(50)式は以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned}
 \gamma_i^2 &= \int_0^{T_i} \sigma_i(t)^2 dt \\
 &= \int_0^{T_i} v_i^2 \bar{\sigma}(T_i - t)^2 dt \\
 &= T_i (\hat{\sigma}_i^{\text{CAPLET}})^2.
 \end{aligned} \tag{51}$$

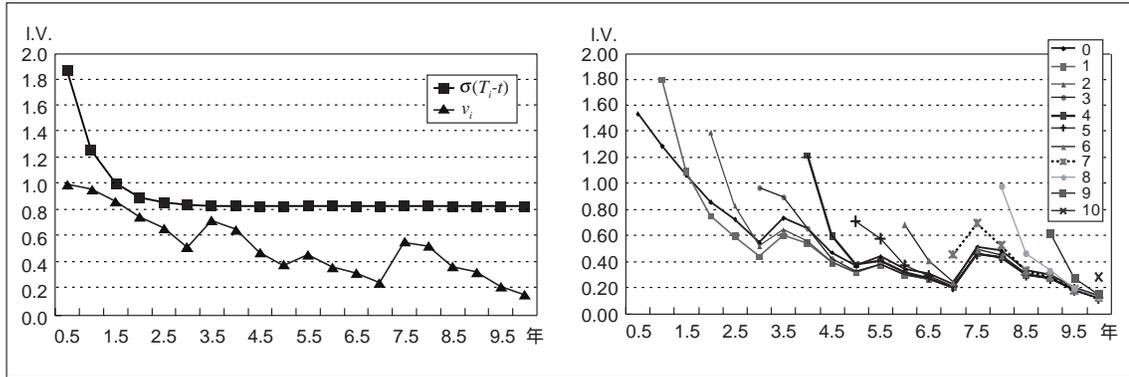
よって、 $v_i$ は以下のように求められる。

$$v_i = \sqrt{\frac{T_i}{\int_0^{T_i} \bar{\sigma}(T_i-t)^2 dt}} \hat{\sigma}_i^{\text{CAPLET}}, \quad (52)$$

ただし、積分項は(48)式で近似し、ここでは $N=100$ とした。

のときと同様に、(52)式を満たしつつ、(47)~(48)式のスワプション・ボラティリティの近似式の値と表10のボラティリティの2乗誤差が最小になるように(46)式のパラメータ $a, b, c, d$ と、 $\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_{20}^{(1)}, \theta_1^{(2)}, \dots, \theta_{20}^{(2)}$ を推定した<sup>33</sup>(ただし、 $\bar{\sigma}$ の初期値は図11の $a, b, c, d$ で、 $\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_{20}^{(1)}, \theta_1^{(2)}, \dots, \theta_{20}^{(2)}$ の初期値は $\pi/2$ とし、制約として、 $v_i \leq 1$ とおいた)。

図15 推定結果( のケース、左： $\sigma_i, v_i$ 、右：1年ごとの $\sigma_i(t)$ )

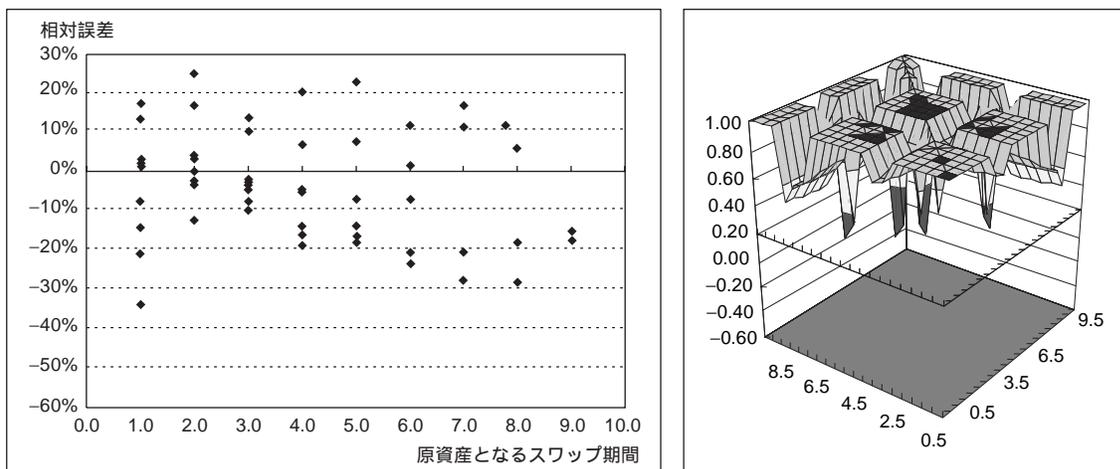


この結果でも、 $v_i$ は期先のフォワードLIBORほど、概ね小さくなっている。 $\sigma(T_i-t)$ の関数型が のケースより単調な形状をしているため、図15左の $\sigma(T_i-t)$ は、図12左の $\sigma_i$ のようなジグザクの形状にはならず、図15右側の $\sigma_i(t)$ のグラフも、相対的に滑らかである。

このときの相対誤差と相関行列は以下のとおりとなった。

33 (46)式で $T_i-t$ が小さい部分では、 $a, b$ の相対的な水準の影響を受けやすいが、スワプションのデータが1年からしかクウォータされていないため、この影響により解が不安定になる。これを防ぐため、0.5Y部分のみ線形に補間したボラティリティにフィットさせ、後は市場で観測される1年ごとのスワプション・ボラティリティにフィットさせた。

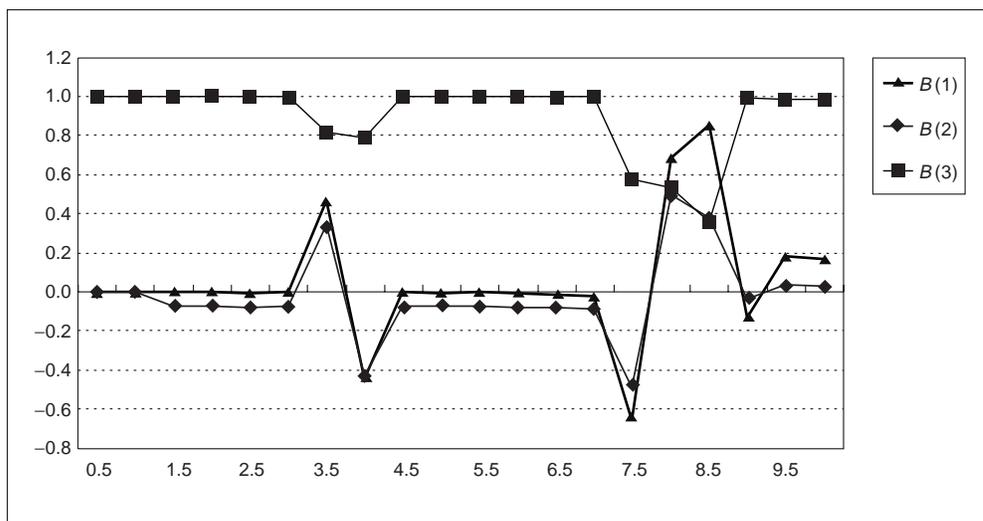
図16 相対誤差（左）と相関行列（右）



まず、相対誤差をみると、先ほどの離散の場合（図13左）よりも、全体的に増加して、 $\pm 30\%$ 程度の範囲に広がっている。また、相関行列の形状も、離散の場合（図13右）に比べればなだらかであるが、隣り合うフォワードLIBORの相関がマイナスになるような点がやはり生じている。

この相関行列を生成する行列 $B$ の列ベクトルは以下のとおりである。ここでも、主成分分析にみられるような成分は現れていない。

図17 相関行列を生成するベクトル



#### (4) パラメータ推定結果の簡単な考察

ここでは、5節(3)で行ったパラメータ推定の結果を簡単に考察する。

まず、推定された相関行列の形状は、いずれのケースでも、隣り合うフォワードLIBORの相関がマイナスになるところが散見され、市場で観測されるような形状(図3)とは異なっている。また、相関行列を生成するベクトル(図14、図17)も図4でみたような形状はしておらず、市場で観測されるイールド・カーブ変動の主成分として解釈することは非常に難しい。

このように、実際の市場で観測される特徴をモデルが捉え切れていない背景の1つとして考えられるのは、いずれのケースでも、サンプル数に比べて推定するパラメータの数が相対的に多く、このためパラメータ推定の安定性が必ずしも確保できないことである。

この点、上記のパラメータ推定に制約条件を付けることによって、推定の安定性を上げようとする提案が複数なされている<sup>34</sup>。しかし、現状では、決定打となるような手法はいまだ提案されていないのが実態である。今後さらに、ヒストリカル・データを用いたヘッジ効率の分析、バックテスト、パラメータ推定時の制約の付加等を行うことにより、パラメータ推定の安定性を改善させることができるものと考えられる。

## 7. ボラティリティ・スマイルとそれに対応した LIBORマーケット・モデルの拡張

これまで解説してきたLIBORマーケット・モデルが説明できない現象として、実際の市場で観測されるインプライド・ボラティリティのスマイルやスキュー(以下、スマイル)がある。スマイルとは、インプライド・ボラティリティがキャップやスワプションの行使金利に依存する現象である。したがって、仮にスマイルが説明できないモデルをプライシングに用いると、金利派生商品価格を過小(過大)評価してしまう可能性があることになる。

LIBORマーケット・モデルがスマイルを説明できない理由として、多くの実務家や研究者が指摘するのは、同モデルが前提とするフォワードLIBORの対数正規性の仮定が必ずしも現実の世界にマッチしていない可能性である。つまり、5節で示し

34 Brigo and Mercurio [2001] は、パラメータ推定の際、 $\theta$ の取り得る範囲を制限して相関行列の急激な変化を緩和したり、 $v_i=1 \pm 0.1$ という条件を加えたり、相関行列にヒストリカル・データから推定した値を用いることを提案しているが、パラメータに制約を付加すれば、データへのフィッティングは低下するという問題が発生する。また、Rebonato [1999b] は、プライシングに関係するペイオフの発生時点でのボラティリティへのフィッティング精度を上げるため、パラメータ推定の際に適当なウエイト付けをすることも考えられるとしている(具体的な方法に関する記述はない)。

たように、実際のフォワードLIBORの分布は正規分布に比べより裾の厚いファット・テールな分布となっているが、LIBORマーケット・モデルがこの現実を捨象していることがスマイルを表現し得ない問題の根幹であるという指摘である。すなわち、5節(3)で指摘したように、オプションのプライシングでは、アット・ザ・マネー近辺ではリスク・ファクターの確率分布の中心付近が重要となるが、例えばアウト・オブ・ザ・マネーでは分布の裾の影響が相対的に強くなる。したがって、アウト・オブ・ザ・マネーのような場合には、実際分布(ファット・テールな分布)と想定する分布(正規分布)との差がプライシングに相対的に大きな影響を与えることになる。

こうした問題意識から、Glasserman and Kou [2000] は、LIBORマーケット・モデルにジャンプ過程を組み合わせることによって、分布のファット・テール性を導き出し、スマイルの表現を試みたモデルを提案している。また、Andersen and Andreasen [2000] は、LIBORマーケット・モデルのボラティリティをCEVモデル<sup>35</sup>で表現したモデルを考案している。このモデルは、LIBORマーケット・モデルのボラティリティがフォワードLIBOR水準に直接依存する形となるため、その依存の仕方を調整することで、スマイルを表現することを企図したモデルである。

以下本節では、前半でGlasserman and Kou [2000]、後半でAndersen and Andreasen [2000] の概要を簡単に紹介する。

### (1) ジャンプ過程の組み合わせ (Glasserman and Kou [2000] のモデル)

Glasserman and Kou [2000] は、LIBORマーケット・モデルにジャンプ変動を考慮した場合のキャップ・フロア、スワプシヨンの価格を求めると共に、それらの価格が市場で観測されるスマイルとスキューを表現できることを示した<sup>36, 37</sup>。

$i$  番目のフォワードLIBORに発生するジャンプの時間間隔が、平均 $1/\lambda_i$ の指数分布<sup>38</sup>に従い、ジャンプ幅が平均 $m$ 、分散 $s_i^2$ の対数正規分布に従うとき、キャプレットの価格形式は以下のとおりとなる<sup>39</sup>。

.....  
35 CEV (constant elasticity of variance) モデル。

36 ここでは、キャプレットの評価式のみ説明する。Glasserman and Kou [2000] では、4節で説明したスワップ・マーケット・モデルに関しても同様に、ジャンプ過程を含めたスワプシヨン価格形式を定式化している。

37 Glasserman and Merener [2001] は、キャップ・フロア、スワプシヨン以外のより複雑な金利派生商品のプライシングを行うため、Glasserman and Kou [2000] のモデルを離散化したうえで、ジャンプ過程の取扱いに数学的なテクニックを適用することにより、モンテカルロ・シミュレーションを行える枠組みを提案している。

38 発生時間間隔が独立な指数分布に従うとき、時刻  $t$  までに事象が起きる回数の分布はポアソン分布に従う。ポアソン分布は、離散的に発生する事象をモデル化する際によく用いられる分布である。指数分布やポアソン分布は、伏見 [1987] 等を参照。

39 ベクトル  $\sigma_i(t)$  の要素を  $\sigma_i^{(1)}(t), \dots, \sigma_i^{(M)}(t)$  と書くとき、 $\|\sigma_i(t)\|^2$  の定義は、 $\|\sigma_i(t)\|^2 = (\sigma_i^{(1)}(t))^2 + \dots + (\sigma_i^{(M)}(t))^2$  と与えられるものとする。

## 【ジャンプを考慮したキャップの評価式】

$$C_i^{\text{JUMP}}(0) = \delta_i \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_i T_i} \frac{(\lambda_i (T_i - t))^j}{j!} \hat{C}_i(L_i^{(j)}(0), K, \bar{\gamma}_j) \quad (53)$$

$$\text{ただし、 } L_i^{(j)}(0) = (1 + m_i)^j, \quad L_i(0) e^{-\lambda_i m_i T_i}, \quad \bar{\gamma}_j^2 = \frac{1}{T_i} \left( \int_0^{T_i} \|\sigma_i(t)\|^2 dt + j s_i^2 \right)$$

$\hat{C}_i$  は(6)式のブラック・モデルのキャブレット式である。なお、ジャンプ変動を考慮したキャブレット価格の分散を区別するために、ここでは $\bar{\gamma}$ (バー)を付けた。 $\bar{\gamma}_j^2$ の中の積分は、離散型のモデルならば(7)式を用いて求められるし、連続型のモデルならば(48)式でみたように近似的に数値計算すればよい。

ただし、複数のキャブレットを同時に考える場合には、 $s_i$ 、 $m_i$ 、 $\lambda_i$ は以下の条件を満たすように定めなければならない(なお、ここで $z$ は、平均 $m_i$ 、分散 $s_i^2$ の対数正規分布に従う任意の値である)。

$$\begin{aligned} & \log\left(\frac{s_{i+1}}{s_i}\right) - \frac{1}{2} z^2 \left( \frac{1}{s_i^2} - \frac{1}{s_{i+1}^2} \right) + z \left( \frac{m_i}{s_i^2} - \frac{m_{i+1}}{s_{i+1}^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{m_i^2}{s_i^2} - \frac{m_{i+1}^2}{s_{i+1}^2} \right) \\ & > \log\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right) + \max(0, z). \end{aligned} \quad (54)$$

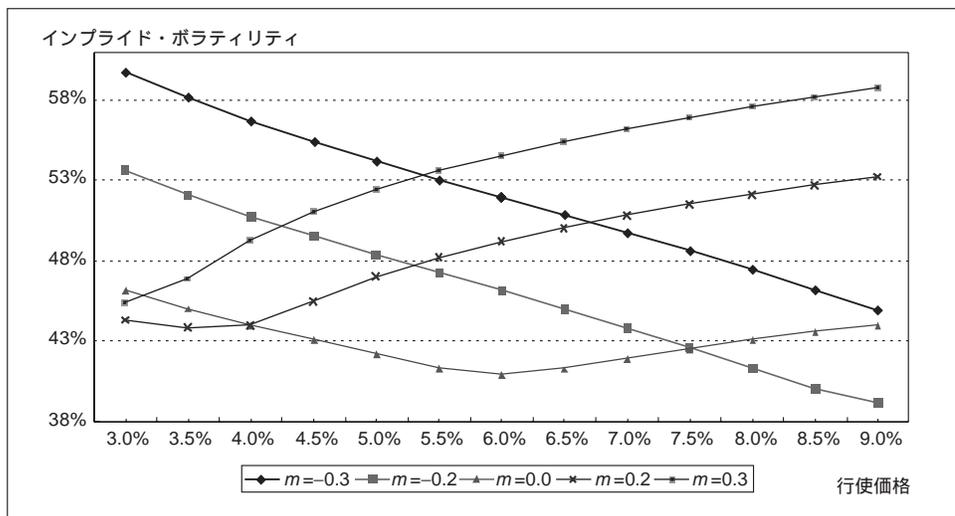
以下は、(53)式が、ボラティリティ・スマイルを表現できることを示す具体的な数値計算例である。ボラティリティ・スマイル形状に最も影響を与えるジャンプ幅の平均 $m$ を-0.3から0.3までの5通りとし、その他のパラメータの値は以下のとおりとした。

表11 数値計算に使用したパラメータ

満期 ( $T$ )	2年
利払間隔 ( $\delta$ )	0.5年
フォワード・レート (一定)	6.0%
ボラティリティ ( $\gamma$ : 定数)	0.05
生起率 ( $\hat{\lambda}$ )	1.0
ジャンプ幅平均 ( $m$ )	-0.30、-0.20、0、0.20、0.30
ジャンプ幅標準偏差 ( $s$ )	0.45

表11のパラメータを用いて、(53)式のジャンプLIBORモデルのキャブレット理論価格を算出し、そこからブラック・モデル式((6)式)によってインプライド・ボラティリティを求めた。その結果をプロットしたものが以下の図18である。

図18 ボラティリティ・スマイル計算例



$m=0$ 、つまりジャンプ幅の平均が0であるジャンプを仮定しているときに、スマイルの形状が表れている。

また、 $m < 0$  ( $m > 0$ ) のとき、つまりジャンプが平均的に金利下落 (上昇) 方向に起こると仮定する場合には、右下がり (左下がり) のスキュー形状 (行使金利が低い < 高い > 方が、ボラティリティが高い) がみられる。

このように、Glasserman and Kou [ 2000 ] のモデルはスマイルを表現できる点で、モデルの表現力は高いといえるが、実際にパラメータの推定を行うには、各キャブレットに対し、ブラック式による複数の行使金利のインプライド・ボラティリティが必要となる。また、ボラティリティとジャンプ・パラメータの両方を推定すると、パラメータ数が多い分、推定は不安定になりやすく、安定的にパラメータを推定するためには、何らかの工夫が必要となる。

## (2) CEVモデルの組み合わせ ( Andersen and Andreasen [ 2000 ] のモデル )

Andersen and Andreasen [ 2000 ] は、LIBORマーケット・モデルにCEVモデルを組み合わせ、キャブレット、スワプションの解析解を導出し<sup>40</sup>、インプライド・

40 ここでは、キャブレットの結果のみを紹介する。

ボラティリティのスキューを表せることを示した<sup>41</sup>。LIBORマーケット・モデルのCEVモデルを用いた拡張は、(4)式で、ある正の定数 $\alpha$ を用いて、

$$dL_i(t) = L_i(t)^\alpha \sigma_i(t) dw^{i+1}(t), \quad (55)$$

とすることで表現される。 $\alpha$ により、ボラティリティがフォワードLIBOR依存する度合いを調節することが可能となる。このとき、以下のキャブレットの解析解が得られる。

【CEVモデルを用いたキャレット公式】

$$a = \frac{K^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 \gamma_i^2}, \quad b = \frac{1}{1-\alpha}, \quad c = \frac{L_i(t)^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 \gamma_i^2},$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{L_i(0)}{K}\right) + \frac{1}{2}\gamma_i^2}{\gamma_i}, \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{L_i(0)}{K}\right) - \frac{1}{2}\gamma_i^2}{\gamma_i}, \quad \gamma_i^2 = \int_0^{T_i} \|\sigma_i(t)\|^2 dt$$

と書き、フォワードLIBORが(55)式に従うとき、以下が成り立つ。

a)  $0 < \alpha < 1$  で、 $L_i(t) = 0$  が吸収壁である<sup>42</sup>とき、

$$C_i^{\text{CEV}}(L_i(0), K, \gamma_i) = \delta_i D_i(0) [L_i(0) (1 - \chi^2(a, b+2, c)) - K \chi^2(c, b, a)] \quad (56)$$

b)  $\alpha = 1$  のとき、

$$C_i^{\text{CEV}}(L_i(0), K, \gamma_i) = \delta_i D_i(0) [L_i(0) N(d_1)] - KN(d_2)$$

c)  $\alpha > 1$  のとき、

$$C_i^{\text{CEV}}(L_i(0), K, \gamma_i) = \delta_i D_i(0) [L_i(0) (1 - \chi^2(c, -b, a)) - K \chi^2(a, 2-b, c)]$$

ただし、 $N(\cdot)$  は標準正規分布の分布関数、 $\chi^2(\cdot, D, \lambda)$  は非心率 $\lambda$ 、自由度 $D$ の非心カイ二乗分布に従う分布関数とする<sup>43</sup>。

41 インプライド・ボラティリティのスキューは表せるが、スマイルは表現できない。

42  $L_i(t) = 0$  となった以降の $L_i(t)$ は、 $t$ によらず0となることを表す。

43 非心カイ二乗分布の分布関数は非心度 $\delta/2$ の強度を持つポアソン分布の密度関数をウエイトとしたカイ二乗分布 $v$ の加重平均(下式)で表される。

$$\chi^2(x, d, \delta) = e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta/2)^k}{k!} v(x, d+2k)$$

数値計算では、十分な精度が得られるまで和計算を行う方法のほか、Ding [1992] のアルゴリズムがある。

このモデルでは、 $\alpha < 1$ のときに、原点が到達可能な吸収壁であることが問題となる<sup>44</sup>。

この問題点を克服するために、Andersen and Andreasen [ 2000 ] は、Limited CEVモデルと呼ぶ以下のモデルを提案している。

$$dL_i(t) = \varphi(L_i(t)) \sigma_i(t) dw^{i+1}(t), \quad (57)$$
$$\varphi(x) = x \cdot \min(\varepsilon^{\alpha-1}, x^{\alpha-1}), \quad \varepsilon > 0$$

ただし $\varepsilon$ は $\alpha < 1$ のときは小さな定数、 $\alpha > 1$ のときは大きな定数。

この問題では、フォワード・レートが $\varepsilon$ を超えると、Limited CEV過程が、相対的に大きなボラティリティを持つ幾何ブラウン運動にスイッチすると解釈できる。このLimited CEVモデルでは解析解が得られないが、Andersen and Andreasen [ 2000 ] は、モンテカルロ法を用いて数値実験を行い、(56)式がLimited CEVモデルの精度の高い近似解であると主張している。

## 8 . その他の研究成果

ここでは、LIBORマーケット・モデルを用いたその他の研究成果を簡単に紹介する。

LIBORマーケット・モデルに残された課題の1つに、アメリカン・オプションやバミューダ・オプションのプライシングがある。LIBORマーケット・モデルはHJMモデル同様、マルコフ性のないモデルで、再結合する格子上でモデル化するのに向かないモデルである。これに対し、Andersen [ 2000 ] は、最小二乗モンテカルロ法で、LIBORマーケット・モデルの枠組みで、バミューダ・スワプションのプライシングを提案し、ファクター数が最適行使戦略に与える影響も比較している。

Hunt, Kennedy and Pelsser [ 2000 ] は、マルコフ性を持ったシングル・ファクターのマーケット・モデルを提唱し、市場の価格を（スマイルを含めて）表現可能であることを示している。モデルがマルコフ性を持っていることから、アメリカン・オプション等の評価に適したモデルといえるが、マルチ・ファクターへの拡張は今後の課題となっている。

また、スマイルを取り扱う他の手法としては、ブラウン運動の係数の項が確率的に変動するSV（ストキャスティック・ボラティリティ）モデルを組み合わせたモデルが挙げられる。Joshi and Rebonato [ 2001 ]、Rebonato [ 2001 ] では、LIBOR

44 正の確率でフォワード・レートが0に吸収されてしまうことは、金利が上昇したときにペイオフが発生するキャップの場合であれば、さほど問題にならないかもしれないが、よりエキゾチックな商品のプライシングには大きな問題になり得る。

マーケット・モデルに、SVモデルを組み合わせたモデルを提案し、英国の市場データによる実証分析を行っている。

## 9 . まとめ

本稿では、まず、LIBORマーケット・モデルの基本的な解説と実際にモンテカルロ・シミュレーションでプライシングを行う場合の手続を、本邦の金利派生商品のデータを用いた具体例により説明した。

次に、Rebonato [ 1999a,b ] によるスワプション・ボラティリティ近似式を用いて、キャップとスワプションのボラティリティを共に反映させたLIBORマーケット・モデルのパラメータ推定を、市場データを用いて行った。求められたパラメータは、市場で取引されるキャップとスワプション価格を概ね表現できるものであるが、推定されたパラメータ（特にブラウン運動の相関）は必ずしも市場で観測される形をうまく表すことはできなかった。今後さらに、ヒストリカル・データを用いたヘッジ効率の分析、バックテスト、パラメータ推定時の制約の付加等を行うことにより、パラメータ推定の安定性を改善させることができるものと考えられる。

次に、LIBORマーケット・モデルにおいて、ボラティリティのスマイルを取り扱うアプローチとして、Glasserman and Kou [ 2000 ] のジャンプを取り入れたモデルと、Andersen and Andreasen [ 2000 ] のCEVモデルを取り入れた2つの手法を紹介した。このうち、ジャンプを取り入れたモデルは、市場で観測されるインプライド・ボラティリティのスマイルを表現できることを数値例で示した。

このように、LIBORマーケット・モデルは、ボラティリティのモデル化に関する自由度が高く、市場データの説明力も比較的高いことから、実務への応用が期待されているモデルである。ただし、本稿の具体例からもわかるように、スマイルを考慮しないプレーンなモデルであってもパラメータの推定方法にはなお改善の必要がある。

今後の課題としては、本稿で行ったパラメータ推定手法を改善させつつ、さらにジャンプ・モデルやCEVモデル、SVモデルを取り込んだ発展型のLIBORマーケット・モデルの実務での活用を検討することが挙げられる。

## 補論．確率測度の変換とフォワード中立化法について

LIBORマーケット・モデルでは、確率測度のやや複雑な変換が行われるため、測度変換に関する正しい理解が重要となる。以下では確率測度の変換と、フォワード中立化法によるプライシングを極力直感的に説明する。

ネフツィ [ 2001 ] は確率測度の変換を次のくじの例で説明している。

「3分の1ずつの確率で10、-3、-1が出るくじを考えると、このくじの平均を0にする方法は2つある。1つめは、各数字からそれらの平均値を引くというものである。このくじの平均値は2なので、各数字から2ずつひいて、8、-5、-3が3分の1ずつの確率で出るくじに変更する方法である。2つめは、平均が0になるように確率を導入する方法である。平均が0となり、分散が不変で、確率の合計が1との条件で、新しい確率を求めると、おのおの122/429、242/429、65/429が得られる。このように、新しい確率を導入（確率測度の変換）することにより、元の分布形状を変えることなく平均をシフトさせることができる」

現実には、考える原資産の将来の平均値を知ることは基本的に不可能であるので、上記の1つめの方法はプライシングに利用できない。そこで、上記の2つめの方法で平均値をシフトさせて、プライシングを行うことになる。以下、確率測度の変換とプライシングの関係を説明する。

フォワードLIBOR  $L_i(t)$  を原資産とする派生商品のプライシングを考える。時刻  $t$  でのこの派生商品の価格を  $C_i(t)$  と書く。例えばキャプレットのときには、 $C_i(T_{i+1}) = \max(L_i(T_i) - K, 0)$  というペイオフを考えればよい。本論中では、割引債をニューメレールとしているが、それは「先渡価格」で考えていることになる。つまり、派生商品の価格  $C_i(t)$  を割引債  $D_{i+1}(t)$  で除した  $C_i(t)/D_{i+1}(t)$  は、 $C_i(t)$  の将来時刻  $T_{i+1}$  での価値を表している。

次に、先ほどのくじの例のように、新しい確率を導入することを考える。今度は、将来時刻  $T_{i+1}$  での先渡価格の期待値が、現在の先渡価格に等しくなるように確率を選ぶ。これを式で書くと、次のようになる。

$$\frac{C_i(t)}{D_{i+1}(t)} = E^{T_{i+1}} \left[ \frac{C_i(T_{i+1})}{D_{i+1}(T_{i+1})} \right]. \quad (\text{A-1})$$

ただし、 $E^{T_{i+1}}$  は、 $T_{i+1}$  での先渡価格の期待値が、時刻  $t$  での先渡価格と一致するような確率で期待値を取る操作を表している。このように、将来の期待値と現在の値が等しい状態をマルチンゲールであるという<sup>45</sup>。また、このように先渡価格がマルチンゲールとなる確率を「フォワード中立確率」と呼ぶ。また、ここでの割引債を「ニューメレール（基準財）」と呼ぶ。

45 より正確には、この期待値は時刻  $T_{i+1}$  での条件付き期待値で、確率変数の可測性や可積分性に関する条件が必要となる。この点は森村・木島 [ 1991 ] 等を参照。

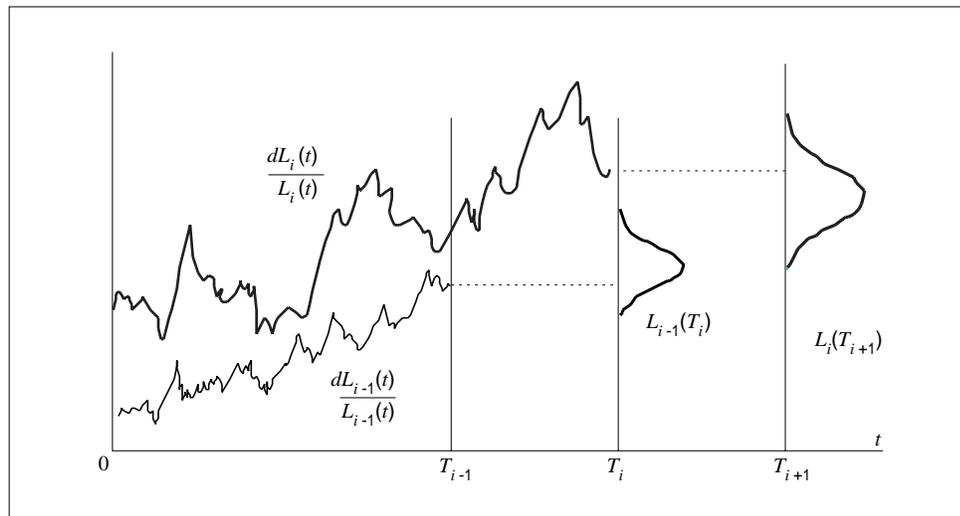
満期での割引債価格は $D_{i+1}(T_{i+1})=1$ なので、(A-1)式は以下のように書ける。

$$C_i(t) = D_{i+1}(t) E^{T_{i+1}} [C_i(T_{i+1})]. \quad (\text{A-2})$$

この式は、時刻 $t$ での価格 $C_i(t)$ は、フォワード中立確率のもとでの満期のペイオフの期待値に、満期 $T_{i+1}$ の割引債価格を乗じたものとなることを意味している。つまり、期待値演算が行いやすい（確率微分方程式が単純になる）確率で期待値を求めて、現実の世界の価値に直すために、最後にニューメレールで補正するのである。このようにしてプライシングすることを「フォワード中立化法によるプライシング」と呼ぶ。なお、本論3節のモンテカルロ・シミュレーションで行ったことは、多数のパスによるこの期待値演算の近似であった。

実確率のもとで、フォワードLIBORの変化率のパスと分布が、以下のグラフで表されるとする。

図A-1 フォワードLIBOR変化率のパスと分布（実確率下）

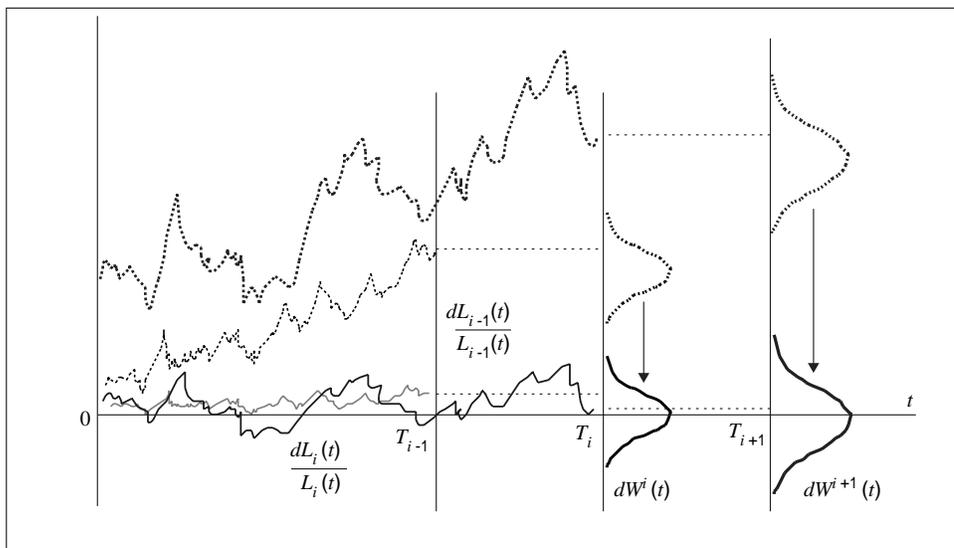


ただし、 $L_i(t)$ は、時刻 $T_i$ に支払金利が確定し、その利払日は $T_{i+1}$ である。

LIBORマーケット・モデルは、フォワードLIBOR  $L_i(t)$ が、満期 $T_{i+1}$ の割引債  $D_{i+1}(t)$ をニューメレールとするときに、対数正規過程に従う（本論中の(4)式）と仮定した。これを、上述のくじの例と同様に、フォワード中立確率を用いて、分布の形状を変えずその平均が0となるようにシフトさせると、以下の図A-2のようになる<sup>46</sup>。

46 フォワード中立確率のもとでは、考えている確率過程はマルチンゲールとなるので、同じ拡散係数を持つ標準ブラウン運動で記述できる（分布を変えずに平均をずらせる）ことをギルザノフの定理から導くことができる（拡散係数の不変性）。証明は田畑 [1993] 等を参照。

図A-2 フォワードLIBOR変化率と分布（フォワード中立確率）



この図は、ニューメレールにおのおの $D_i(t)$ と $D_{i+1}(t)$ を選んだとき、分布の平均が0となるように、分布の形状を変えずに確率過程をシフトさせていることを表している。

LIBORマーケット・モデルの以下の(A-3)式は、フォワード中立確率下では、 $\bar{\sigma}_i(t) W^{i+1}(t)$ は平均0、分散 $\bar{\sigma}_i(t)^2$ のブラウン運動であるので、 $L_i(t)$ の増減（左辺）の平均は0であるということを表している。

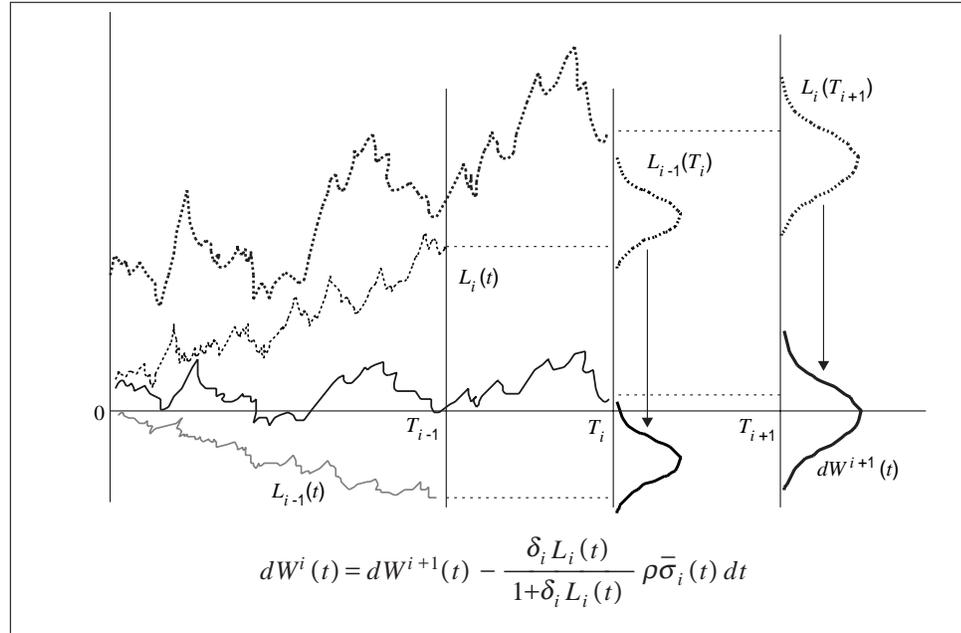
$$dL_i(t) = L_i(t) \bar{\sigma}_i(t) dW^{i+1}(t). \quad (\text{A-3})$$

(A-2)式を用いて、フォワード中立化法でプライシングを行う場合には、(A-3)式の確率過程に従う変数によって決まるペイオフの期待値を求めることになる。この計算は確率変数の積分<sup>47</sup>となるが、 $\sigma_i(t)$ が確率積分可能な条件を満たすならば解析的な解を求めることができる。

47 ここでは、伊藤積分を指す。

次に、割引債 $D_{i+1}(t)$ をニューメレールとした共通のフォワード中立確率で、 $L_i(t)$ と $L_{i-1}(t)$ を同時にみたときの図が以下の図A-3である。

図A-3  $D_{i+1}(t)$ をニューメレールとしたときの $L_i(t)$ と $L_{i-1}(t)$ の変化率



$D_{i+1}(t)$ をニューメレールとしたときには、 $L_{i-1}(t)$ の平均がずれ過ぎてしまい、マイナスのドリフトが発生している。このずれの補正幅を表す式が、本論中の(9)式である。

3節(3)のモンテカルル法を用いたプライシングでは、最長満期のフォワードLIBORが対数正規過程に従うようにニューメレールを定め、標準正規乱数から、順次手前のフォワードLIBORを求めていった<sup>48</sup>。(19)~(20)式で行っている調整は、以下のように考えることができる。(19)式で、将来の異なる時点で発生するペイオフを、時刻 $T_5$ での価格に変換する。これにより、異なる時点で発生するキャッシュ・フローに関する、時刻 $T_5$ での同じ確率のもとでの期待値を、(20)式で計算することができる。

48 このように、最も長い満期の割引債をニューメレールとしたとき、この測度をターミナル・メジャーと呼ぶ。

## 参考文献

- 木島正明、『期間構造モデルと金利デリバティブ』、朝倉書店、1999年
- 田畑吉雄、『経済の情報と数理 - 数理ファイナンス論』、牧野書店、1993年
- 伏見正則、『確率と確率過程』、講談社、1987年
- ネフツイ、S. N.、『ファイナンスへの数学 (第二版)』、朝倉書店、2001年
- ハル、J.、(東京三菱銀行金融商品開発部訳) 『ファイナンシャル エンジニアリング (第4版) デリバティブ商品開発とリスク管理の総体系』、金融財政事情研究会、2001年
- 森村英典・木島正明、『ファイナンスための確率過程』、日科技連、1991年
- 森本祐司・吉羽要直、「BGM金利モデルの実用化に向けて」、IMES Discussion Paper Series、No.99-J-39、日本銀行金融研究所、1999年
- Andersen, L., "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multi-Factor LIBOR Market Model," *Journal of Computational Finance* 3 (2), pp.5-32, 2000.
- , and J. Andreasen, "Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model," *Applied Mathematical Finance* 7, pp.1-32, 2000.
- Black, F., "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, 3, pp.167-179, 1976.
- , and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637-654, 1973.
- Brace, A., D. Gątarek, and M. Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, Vol. 7, pp. 127-155, 1997.
- Brigo, D., and Mercurio, F., *Interest Rate Models Theory and Practice*, Springer Finance, Springer-Verlag, 2001.
- Ding, C. G., "Algorithm AS275: Computing the Non-Central  $\chi^2$  Distribution function," *Applied Statistics*, 41, pp.478-482, 1992.
- Glasserman, P., and S. G. Kou, "The Term Structure of Simple Forward Rates with Jump Risk," working paper, Columbia University, 2000.
- , and N. Merener, "Numerical Solution of Jump-Diffusion LIBOR Market Models," working paper, Columbia University, 2001.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, Vol. 60, pp. 77-105, 1992.
- Hull, J., and A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities and the Implementation of the LIBOR Market Model", working paper, Joseph L. Rotman School of Management University of Toronto, 1999.
- Hunt, P., J. Kennedy, and A. Pelsser, "Markov-functional interest rate models," *Finance and Stochastics* 4, pp. 391-408, 2000.
- Jamshidian, F., "LIBOR and Swap Market Models and Measures," *Finance and Stochastics*, Vol. 1, pp. 293-330, 1997.
- Joshi, M., and R. Rebonato, "A stochastic-volatility, displaced-diffusion extension of the LIBOR market model," working paper, Quantitative Research Centre, 2001.

- Kloeden, P.E., and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, 1995.
- Pelsser, A., *Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives*, Springer Finance, Springer-Verlag, 2000.
- Rebonato, R., “Calibrating the BGM Model,” *RISK* March, 1999b.
- , *Volatility and Correlation -In the Pricing of Equity, FX and Interest-Rate*, John Wiley & Sons, Ltd, 1999b.
- , “The Stochastic Volatility Libor Market Model,” *RISK* October, 2001.

