

リアル・オプションの基本原則と 経済学への応用について

不確実性下の意思決定モデル

しろた とよいちろう ばば なおひこ
代田豊一郎 / 馬場直彦

要 旨

リアル・オプション理論は、(1)埋没的費用、(2)経済環境の不確実性、(3)投資の意思決定を先送りする可能性、という3条件が揃う場合、投資を実行するタイミングが企業にとって選択変数となることを明らかにする。近年、リアル・オプション理論がさまざまな経済分野へと応用されている。そこで本稿は、リアル・オプション理論の考え方を簡単に説明した後、その応用例を展望する。

キーワード：リアル・オプション理論、設備投資、不確実性、不可逆性

.....
本稿の作成に当たっては、倉沢資成教授（横浜国立大学）から有益なコメントを頂戴した。記して感謝したい。残された誤謬は、すべて筆者達の責に帰するものである。なお、本稿で示されている内容および意見は筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。

代田豊一郎 日本銀行金融研究所研究第一課(E-mail: toyoichirou.shirota@boj.or.jp)

馬場直彦 日本銀行金融市場局金融市場課調査役(E-mail: naohiko.baba@boj.or.jp)

1. はじめに

設備投資の意思決定基準として、ビジネスの世界では、投資の予想将来収益の割引現在価値を投資費用と比較するNPV (net present value: 割引現在純価値) 基準が広く用いられてきた。例えば、近年、米国のMBA (master of business administration) コースで広く教科書として使用されているLuenberger [1998] は、「NPV基準は極めて有用であり」(“quite compelling”, p. 25)、「一般に投資メリットを示す唯一最良の指標と考えられている」(“it is generally regarded as the single best measure of an investment’s merit”, p. 25) と述べている。

一方、マクロ経済学では、資本蓄積に不可逆的な (irreversible) 調整費用が存在するとの前提のもとで、企業価値の最大化原理から導かれるトービンのq理論 (Tobin [1969]) が設備投資決定の有力理論である。

前者の基準では、NPVが正值をとるとき、後者の基準では、資本ストックの市場価値を再取得価額で除した (平均の)qが1を上回るとき、設備投資を実行すべきと判定する¹。

しかし、設備投資に関する実証分析例をみると、NPVが正值をとったとしても、あるいはトービンのqが1を超えたとしても、おのこの臨界値をわずかに超えただけでは設備投資は実行されない場合が多い²。1980年代中頃³に生まれたリアル・オプション (real options) と呼ばれる考え方は、こうした伝統的な投資意思決定基準と実証結果の乖離に対して、合理的な説明を与えることに成功した⁴。

リアル・オプション理論は、以下の3条件が満たされる場合には、設備投資を先送りすることにオプション価値が発生することに注目する。

埋没的な (あるいは不可逆的な) 設備投資費用 (sunk cost)⁵ が存在する。

将来の経済環境に関する不確実性 (uncertainty) がある。

設備投資を先送りすることができる。

この3条件が揃うと、設備投資のタイミングは、投資先送りのオプション価値が、設備投資を実行して得られる収益の割引現在価値を下回った時点であることが示される (以下、オプション価値基準)。オプション価値基準が示唆する投資のタイ

1 Hayashi [1982] は生産関数と資本蓄積の調整費用関数の一次同次性、完全競争、効率的な株式市場という条件が満たされる場合には、平均qと限界qが一致することを示した。

2 この点については、例えばSummers [1987] を参照のこと。また、わが国でトービンのqと設備投資行動の関係を分析した例として、若杉・紺谷 [1980]、本間・跡田・林・秦 [1984]、Ogawa, Kitasaka, Watanabe, Maruyama, Yamaoka, and Iwata [1994] 等をあげることができる。なおトービンのqに基づいた投資関数の推定は、他の伝統的な投資関数モデルと比較してパフォーマンスが悪いことが指摘されている。

3 McDonald and Siegel [1985] がこの分野における先駆的な研究である。

4 後述のように、この考え方は、通常のフィナンシャル・オプションとのアナロジーで理解することができるため、リアル・オプションと呼ばれている。

5 投資を実行して市場に参入した後に退出を決定したときに、当初の投資費用を全額回収することができない場合、投資費用は埋没的 (あるいは不可逆的) であるという。より詳細な定義は、Dixit and Pindyck [1994] の1章を参照のこと。

ミングは、NPV基準がプラスに転じるタイミングやトービンの q が1を上回るタイミングと一致するとは限らない。むしろ、設備投資先送りのオプション価値が投資実行価値を上回り、現状維持が選択される可能性も大きい。

経済主体の意思決定機会の多くは、上記の3条件を同時に満たすことから、リアル・オプション理論はさまざまな不確実性下の意思決定行動分析に有用である。Dixit and Pindyck [1994] が包括的にサーベイしているように、欧米ではすでにさまざまな分野にリアル・オプション理論が応用されている。わが国でも、リアル・オプション理論を用いた研究例がみられるようになってきているものの、欧米と比較して、筆者らの知る限りその蓄積は少ない⁶。そこで本稿は、リアル・オプション理論の基本的な考え方を直観的に説明するとともに、さまざまな経済問題への応用例を紹介する。

本稿の構成は以下のとおり。2節では、同じプロジェクトに直面している投資主体がNPV基準、トービンの q 基準、オプション価値基準のいずれを採用するかによって、設備投資を実行するタイミングについて異なる結論を得る可能性を2項過程モデルを用いた簡単な数値例で示す。3節では、一般的な確率過程を用いてリアル・オプション理論の基本原則を説明する。4節では、リアル・オプション理論の応用例を紹介するとともに、不確実性と設備投資行動に関する実証分析例を概観する。5節では、リアル・オプション理論の限界を指摘したうえで、本稿の議論を総括する。

2 . 2項過程モデルを用いた投資意思決定方法の説明

(1) 具体例

2節では、以下の例を用いてリアル・オプション理論に基づいた投資意思決定過程を、ほかの投資基準と対比しながら説明する。

ある企業が、現在操業していない金鉱山への投資を検討している。いま、鉱山保有者に採掘設備と金鉱山のリース料25万円を年初に支払い、操業を開始すると、1年間に100オンスの金を1オンス当たり0.99万円の費用で採掘できる。

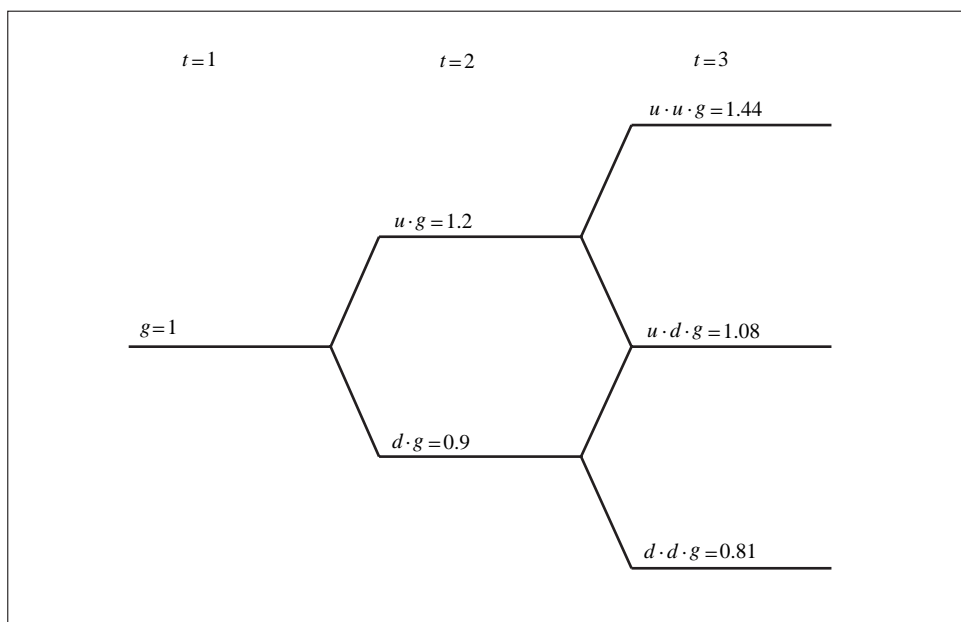
リースは3年契約とし、4年目以降は操業を行わない。契約の途中解約と採掘権利の転売は認められないため、リース料の25万円は埋没的な投資費用となる⁷。ただし、金価格の低下により損失が発生する場合、追加的な費用負担なしに操業を一時停止できる。

6 Kanoh and Murase [1999]、Baba [2001a, b] 等がこれに当たる。

7 以下では、簡単化のため、費用が完全に埋没的である場合を扱っている。

ここで、1年目に1オンス当たり g 万円である金価格はランダムに変化する。具体的には、1年後に確率 y で $u \cdot g$ の水準に上昇し、確率 $1-y$ で $d \cdot g$ の水準に下落する（ただし $0 < y < 1$ 、 $0 < d < 1 < u$ ）。以下では、 g 、 y 、 u 、 d をそれぞれ $g=1$ 、 $y=0.75$ 、 $u=1.2$ 、 $d=0.9$ と仮定する。図表1には、金価格が3年間のリース契約中にとり得るすべての値が記されている。簡単化のため、安全資産利子率 r は $r=0.1$ （グロス・ベースの利子率は $R=1+r$ ）と仮定する⁸。さらに、金価格は年初に決まり年内は一定、採掘された金を販売する機会は年末だけとする。この企業の投資の意思決定は各年初に行われる。ここで、リース料は年初に支払うものの、収益は年末に得られることから各年初時点では収益を安全資産利子率で割り引くことになる。

図表1 金価格（単位:万円）



(2) プロジェクトの割引現在価値の計算

以下では、金鉱山のリース契約の価値（以下、プロジェクト価値、 V_t ）を計算する方法を説明する。

まず、1年目時点のプロジェクト価値は、1年目の収益に2年目、3年目の期待割引収益を加えたものとなる。次に、2年目時点のプロジェクト価値は、2年目の収益に3年目の期待割引収益を加えたものになる。最後に、3年目時点のプロジェクト価値は、翌年以降操業を行わないため、3年目の収益に一致する。

⁸ 安全資産と金鉱山への投資が、それぞれ意味がある投資であるためには、 $d < R < u$ の条件が必要である。

そこで、1年目時点のプロジェクト価値を求めるには、3年目のプロジェクト価値を2年目時点に割り引き、2年目の収益を加えて2年目時点のプロジェクト価値を得る。2年目のプロジェクト価値を1年目時点に割り引き、1年目の収益を加えて1年目時点のプロジェクト価値を得る、というステップを踏むことが必要となる。

ここで注意が必要なのは、1、2年目時点において翌年のプロジェクト価値を割り引くときの割引率と、期待値を計算するための確率の選択である。企業がプロジェクト価値を算出する際には、当該企業がもつ将来時点においてある収益額が実現する確率（この数値例では、金価格の変動確率 y 、 $1-y$ に相当）と、安全資産利子率にリスク・プレミアムを加えた主観的割引率を用いるのが通例である。しかし、本稿では、以下の理由により、リスク中立確率を用いて将来の収益の期待値を計算し、安全資産利子率を用いてそれを割り引くこととする。

リスク中立確率とは、リスクに対する市場評価を織り込んだ確率のことで、この確率を用いて期待値を計算するときは安全資産利子率を用いて割引現在価値を計算できる。2節(4)で説明するオプション理論に基づくプロジェクト価値の評価は、このような想定のもとで行われるフィナンシャル・オプションのプライシング理論を応用している。本稿ではフィナンシャル・オプション理論に基づく評価との間で理論的整合性を保つため、リスク中立確率と安全資産利子率を用いてプロジェクト価値を計算する。以下では、議論の前提となる裁定理論に基づく資産価値評価法をまず簡単に説明し、そのうえでリスク中立確率と安全資産利子率によるプロジェクト価値の計算過程を示す。

裁定理論によれば、ある資産 X の価値は、次のように求められる。いま、金融市場には資産 X 以外にさまざまなリスクとリターンをもつ資産が存在しており、それらを適切に組み合わせたポートフォリオ Y を保有することで資産 X と同じリスク・リターンを実現できるとする。そのとき、任意の資産 X とポートフォリオ Y の価値は、市場の裁定によって一致するはずである。なぜなら同じリスク・リターンをもたらす2つの資産の価値が異なれば、割高な資産を売却して割安な資産を購入する裁定取引が、両者の価値が一致するまで行われるはずだからである。

上記のような考え方を金鉱山リース契約の例に適用し、2年目時点で、3年目のプロジェクト価値を計算してみよう。2年目時点に割り引かれた3年目のプロジェクト価値を \hat{X} とする。3年目のプロジェクト価値は金価格の上昇・下落と1対1対応で上昇・下落する可能性があり、それぞれ $V3h$ 、 $V3l$ という値をとるものとする。裁定理論を応用するために、このプロジェクト価値と同じ価値をもたらす、金と安全資産からなるポートフォリオを考えよう。具体的には、2年目時点で金 x 万円分と安全資産 b 万円分を購入し、3年目に $V3h$ と $V3l$ を生み出すポートフォリオ \hat{Y} を作成すればよい。

3年目に金価格が上昇・下落した場合に、ポートフォリオ \hat{Y} のペイオフは $u \cdot x + R \cdot b = V3h$ 、 $d \cdot x + R \cdot b = V3l$ となる必要がある。この2本の式を満たす x と b の値は以下のとおりである。

$$\begin{cases} x = \frac{V3h - V3l}{u - d} \\ b = \frac{u \cdot V3l - d \cdot V3h}{R \cdot (u - d)} \end{cases}$$

ここで、プロジェクト価値 \hat{X} と同じペイオフを実現するポートフォリオである $\hat{Y}=x+b$ は、上述の裁定理論によれば、2年目時点で \hat{X} と同じ資産価値になる。したがって、次の(1)式が成り立つ。

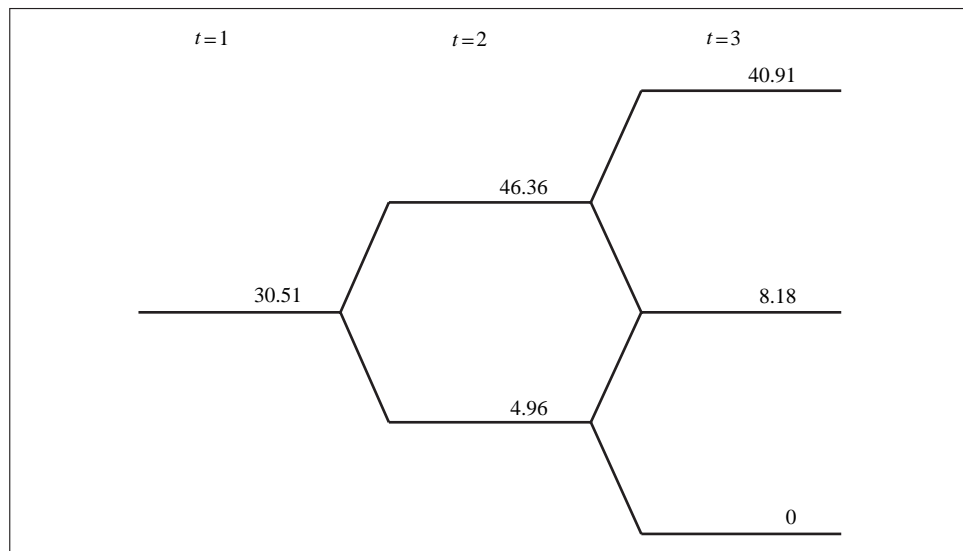
$$\hat{X} = x + b = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{R-d}{u-d} \cdot V3h + \frac{u-R}{u-d} \cdot V3l \right) = \frac{1}{R} \cdot [q \cdot V3h + (1-q) \cdot V3l] \quad (1)$$

(1)式の最後の項は、 q という確率を用いて期待値を計算し、その期待値を安全利子率 R で割り引いたものと解釈できる。この確率 $q \equiv (R-d)/(u-d) = 2/3$ が前述のリスク中立確率である。言い換えると、翌年のプロジェクト価値をリスク中立確率で評価すると、その収益率は安全資産利子率に一致する。

それでは具体的に、リスク中立確率と安全利子率を用いて、各時点におけるプロジェクト価値を評価する。各時点でのプロジェクト価値の計算結果は、図表2に示している。

まず3年目時点では、年末に得られる収益を年初時点で割り引くことでプロジェクト価値を得ることができる。例えば金価格が上昇し続けて1.44(万円)となった場合、プロジェクト価値は、 $[100 \cdot (1.44 - 0.99)] / 1.1 \approx 40.91$ (万円)となる。金価格が上昇・下落して1.08(万円)となった場合、 $[100 \cdot (1.08 - 0.99)] / 1.1 \approx 8.18$ (万円)となる。ただし3年目に、金価格が下落し続けて0.81(万円)となった場合、金価格が経常費用を下回るため損失が発生する。企業は損失が発生する場合、追加的費用負担なしで操業を一時停止することができるため、プロジェクト価値はゼロとなる。

図表2 各時点のプロジェクト価値(単位:万円)



次に2年目時点におけるプロジェクト価値は、リスク中立確率に基づいて評価した3年目の期待プロジェクト価値と年末に発生する収益を、それぞれ安全資産利率で割り引いて合計することにより求めることができる。例えば2年目に金が高価格だった場合、リスク中立確率に基づく割引期待プロジェクト価値は $[q \cdot 40.91 + (1-q) \cdot 8.18] / 1.1 \approx 27.27$ (万円)、2年目に発生する収益は $100 \cdot (1.2 - 0.99) / 1.1 \approx 19.09$ (万円) となり、両者を合計して、 $27.27 + 19.09 = 46.36$ (万円) を得る。同様に、2年目に金が低価格となった場合と1年目のプロジェクト価値をそれぞれ求めることが可能である。1年目時点のプロジェクト価値は、満期までの収益をリスク中立確率で評価し、安全資産利率で割り引いた期待割引現在価値に等しい。

(3) NPV基準・トービンのq基準に基づく投資決定

図表2を用いて、NPV基準・トービンのq基準に基づく投資意思決定を説明する。NPV基準によれば、投資収益の割引現在価値から投資費用を差し引いたものが正ならば、当該プロジェクトは実行すべきである。図表2の1年目時点を見ると、リスク中立確率に基づく投資収益の期待割引現在価値が30.51万円であるのに対し、投資費用は25万円である。したがって、NPV基準によれば、1年目に投資を実行すべきである。

次に、プロジェクトの再構築費用の代理変数としてリース料をとり、プロジェクト収益のリスク中立確率に基づく期待割引現在価値との比を Q とすると、 $Q \equiv 30.51 / 25 \approx 1.22$ となる。 Q はトービンの q と類似の概念であり、このケースでは1を上回る。したがって、トービンの q 基準に依拠した場合にも投資を1年目に実行すべきである。

このように、NPV基準やトービンの q 基準を用いた場合には、投資を1年目に実行すべきであり、2年目に先送りすることは非合理的にみえる。しかし、投資を先送りする可能性を権利(オプション)として捉えた場合、多くの実物的なプロジェクトはフィナンシャル・コール・オプションと同様の性格を有している。このような投資を先送りするオプションを考慮した場合には、上述の議論は以下の2節(4)のように修正される。

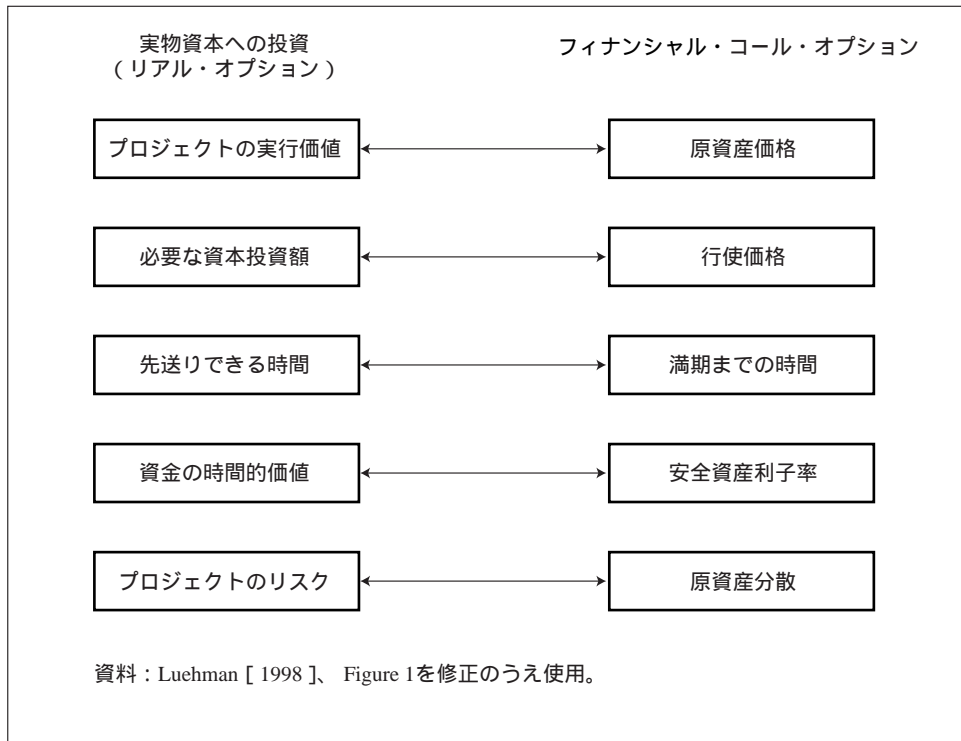
(4) オプション価値基準に基づく投資決定

オプション価値基準の説明に先立ち、実物資産への投資と、フィナンシャル・コール・オプションの類似点を図表3により整理しておこう。実物資産への投資を実行するに当たり必要な埋没費用がコール・オプションの行使価格に、意思決定を先送り可能な時間がコール・オプションの満期までの時間に、それぞれ対応する。

コール・オプションは、満期時に権利行使可能なヨーロピアン・タイプと、満期前に権利行使可能なアメリカン・タイプの2種類に分類できる。本稿の議論では、最適なタイミングで実行できるタイプのオプションを想定していることから、アメ

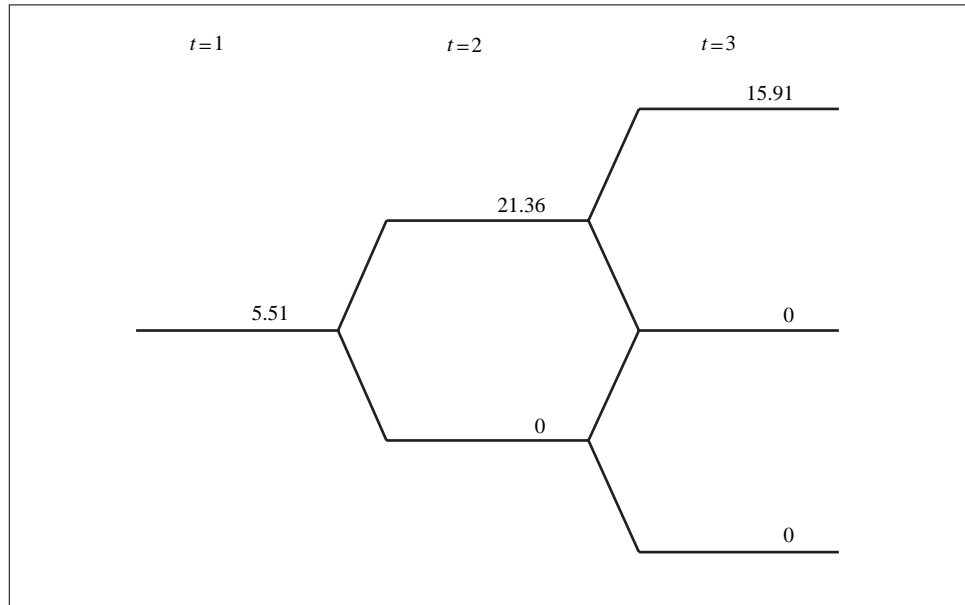
リカン・タイプのオプションを念頭においている⁹。

図表3 実物資本への投資（リアル・オプション）とフィナンシャル・コール・オプション



これらの類似点を踏まえたうえで、金鉱山のリース契約を再考する。まず、企業にとって、金鉱山のリース契約のペイオフは、投資費用控除後の価値が正のときその値を、負のときには投資を実行する義務は存在しないためゼロとなる($\max[V_t - I, 0]$)。ネットの投資実行価値 $V_t - I$ は、図表2で計算した各時点でのプロジェクト価値から投資費用 I (25万円) を差し引いたものになる。これを用いてペイオフ $\max[V_t - I, 0]$ を計算したものが図表4である。

9 ただし、アメリカン・コール・オプションが実際に早期行使 (early exercise) される可能性があるのは、原資産に配当が存在する場合のみであり、配当が存在しない場合にはヨーロピアン・コール・オプションに一致する。金鉱山の例でオプション価値を考慮する場合は、各時点での収益の現在価値を原資産とするアメリカン・コール・オプションとして捉えることになる。配当に相当するのは、各時点の収益である。

図表4 プロジェクトのペイオフ $\max[V_t - I, 0]$ (単位: 万円)

次に投資を先送りする価値、すなわち参入オプション価値 F_t を求めよう。参入オプション価値は、翌年のペイオフ¹⁰の期待値を割り引いたものになる。この理由を直観的に説明しておこう。企業は投資を実行するとその時点で期間収益を得ることができる。一方、投資を先送りすると、期間収益を放棄するものの、翌年収益環境が改善したときに参入すればむしろ高いペイオフを得ることができるかもしれない。その価値が参入オプション価値であり、翌年のペイオフの期待割引現在価値で表される。

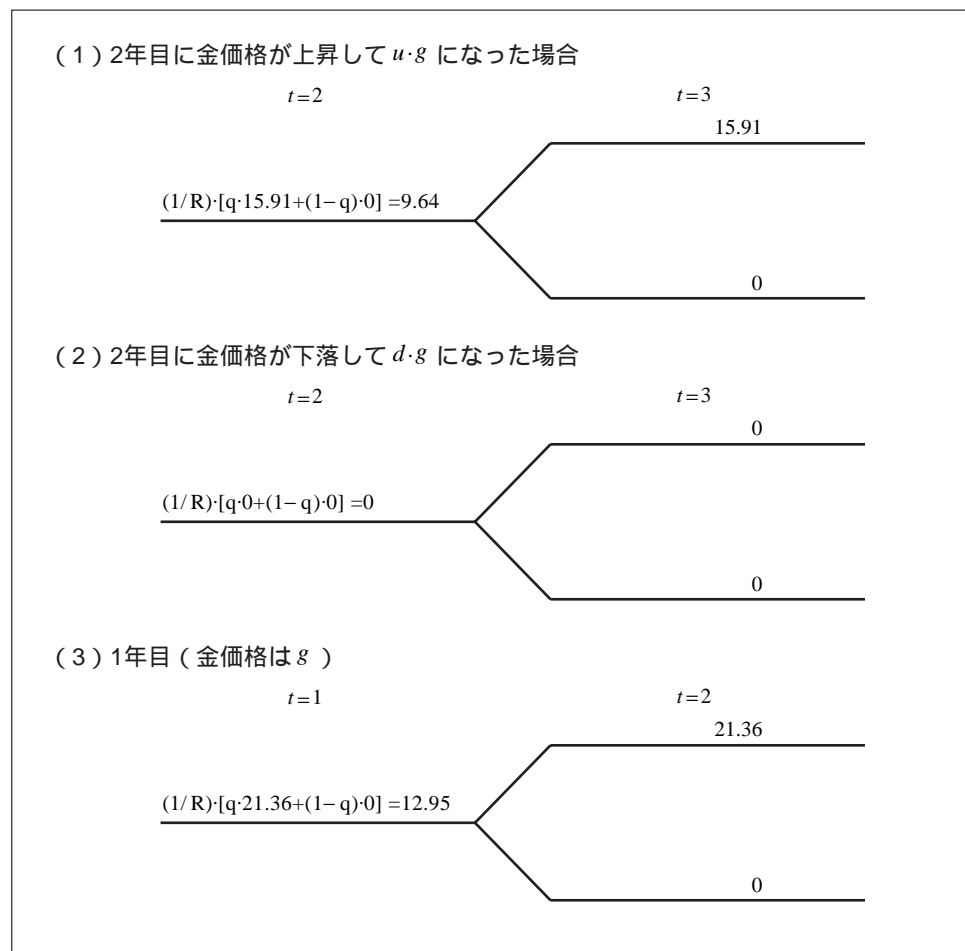
ここで、翌年のペイオフを1年前に割り引くときは、前述の図表2の計算((1)式)と同様、リスク中立確率を用いる。具体的に、2年目のオプション価値 $F_{t=2}$ を求めよう。 $PO3h$ 、 $PO3l$ を3年目に金価格が上昇・下落した場合に対応するペイオフとすると、 $F_{t=2}$ は、以下のように翌年のペイオフをリスク中立確率 q で評価し、安全資産利子率 R で割り引いたものとして示すことができる。

$$F_{t=2} = \frac{1}{R} \cdot [q \cdot PO3h + (1-q) \cdot PO3l] \quad (2)$$

10 アメリカン・コール・オプションのプライシングの観点からみれば、ここでのペイオフは、プロジェクトのペイオフではなく、オプションのペイオフに相当する。ただし、この数値例では、問題となる2、3年目時点のオプションとプロジェクトのペイオフは一致する。

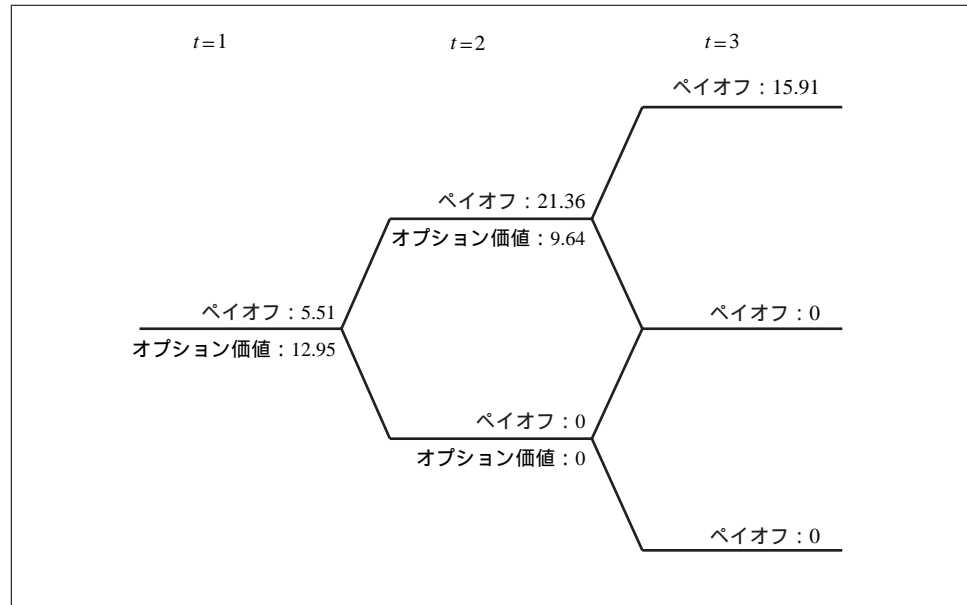
各時点のオプション価値も同様にして求めることができる。図表5は、この計算過程を示したものである。2年目に金価格が上昇した場合を示した図表5(1)をみると、対応する満期時点(3年目)のペイオフは、金価格が上昇すれば15.91(万円)、下落すれば0(万円)となる。オプション価値は(2)式から、 $(1/R) \cdot [q \cdot 15.91 + (1-q) \cdot 0] = 9.64$ (万円)となる。2年目に金価格が下落した場合、翌年のペイオフはゼロであるからオプション価値も0(万円)となる(図表5(2))。最後に、1年目では、2年目のペイオフが21.36(万円)と0(万円)であるから、オプション価値は $(1/R) \cdot [q \cdot 21.36 + (1-q) \cdot 0] = 12.95$ (万円)となる(図表5(3))。このように計算された各時点でのオプション価値とペイオフ(図表4)を書き並べたものが図表6である。

図表5 参入オプションの価値(単位:万円)



投資実行タイミングは、ペイオフが参入オプション価値を上回ったときとなる。まず、NPV基準とトービンの q 基準で投資を実行すべきとの結果が導かれた1年目をみよう。1年目のペイオフ、オプション価値はそれぞれ5.51(万円)、12.95(万円)である。これは1年目に投資を実行するメリット(ペイオフ)が参入オプション価値を下回ることを意味しており、投資は2年目以降に先送りされる。

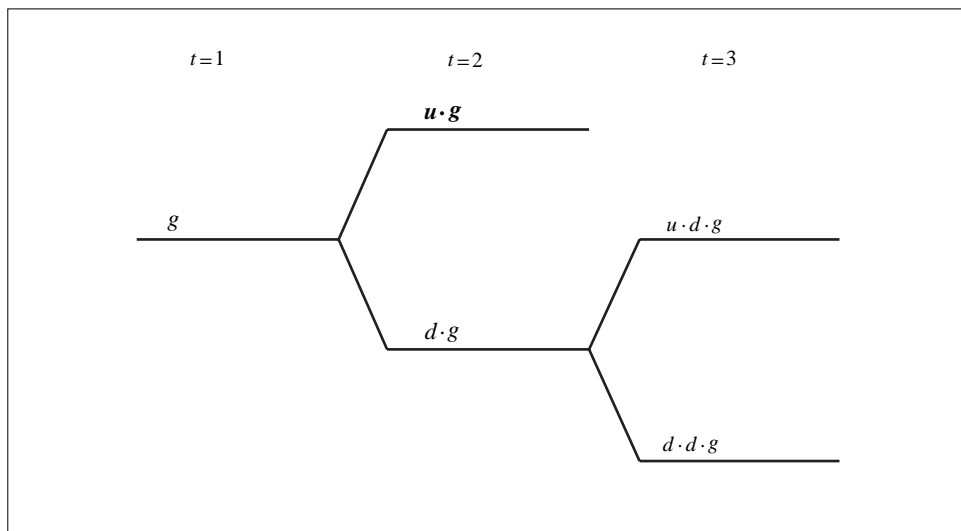
図表6 プロジェクトのペイオフとオプション価値(単位:万円)



次に2年目をみると、2年目に金が高価格だった場合、ペイオフ、オプション価値は21.36(万円)、9.64(万円)となり、投資を実行する価値が参入オプション価値を上回るため、投資が実行される。一方、2年目に金が低価格だった場合は、ペイオフ、参入オプション価値ともに0(万円)であり、投資は実行されない。

以上をまとめると、この企業が投資を行う最適なタイミングは、図表7の太字で表されている2年目の $u \cdot g$ の地点となる。すなわち参入オプション価値を考慮すると、投資の最適なタイミングは、2年目に金が高価格になったことを確認してからである。NPV基準とトービンの q 基準で投資を実行すべきと判定された1年目には、投資を実行すべきでない。

図表7 投資実行のタイミング



(5) まとめ

以上の数値例をまとめると、以下のとおり。

第1に、リアル・オプション理論が示唆する投資タイミングは、投資を実行する、投資を先送りする、という2つの選択肢を比較し、前者の価値が後者の価値を上回ったときである。

第2に、リアル・オプション理論を用いると、同じ期待割引現在価値をもたらすプロジェクトに対し、NPV基準やトービンの q 基準が示唆するよりも投資のタイミングが遅れることが合理的に説明できる。

リアル・オプション理論を提唱したMcDonald and Siegel [1986] に従い、以上の数値例の含意をやや一般化すると次のようなものになる。

不確実な収益を生み出すプロジェクトに直面する企業の投資のタイミングは、投資を検討している時点の（確定）収益が十分小さいときには、投資を先送りするオプション価値が投資を実行する価値を上回り、投資は先送りされる。投資を検討している時点の収益が大きくなるにつれて投資を先送りするメリットは薄れ、投資を先送りするオプション価値が投資を実行する価値と一致する臨界値を超えてはじめて企業は投資を行う。

次節では、こうしたリアル・オプションの理論をフィナンシャル・オプションの理論と対比しながら、一般的な確率過程を用いて説明する。

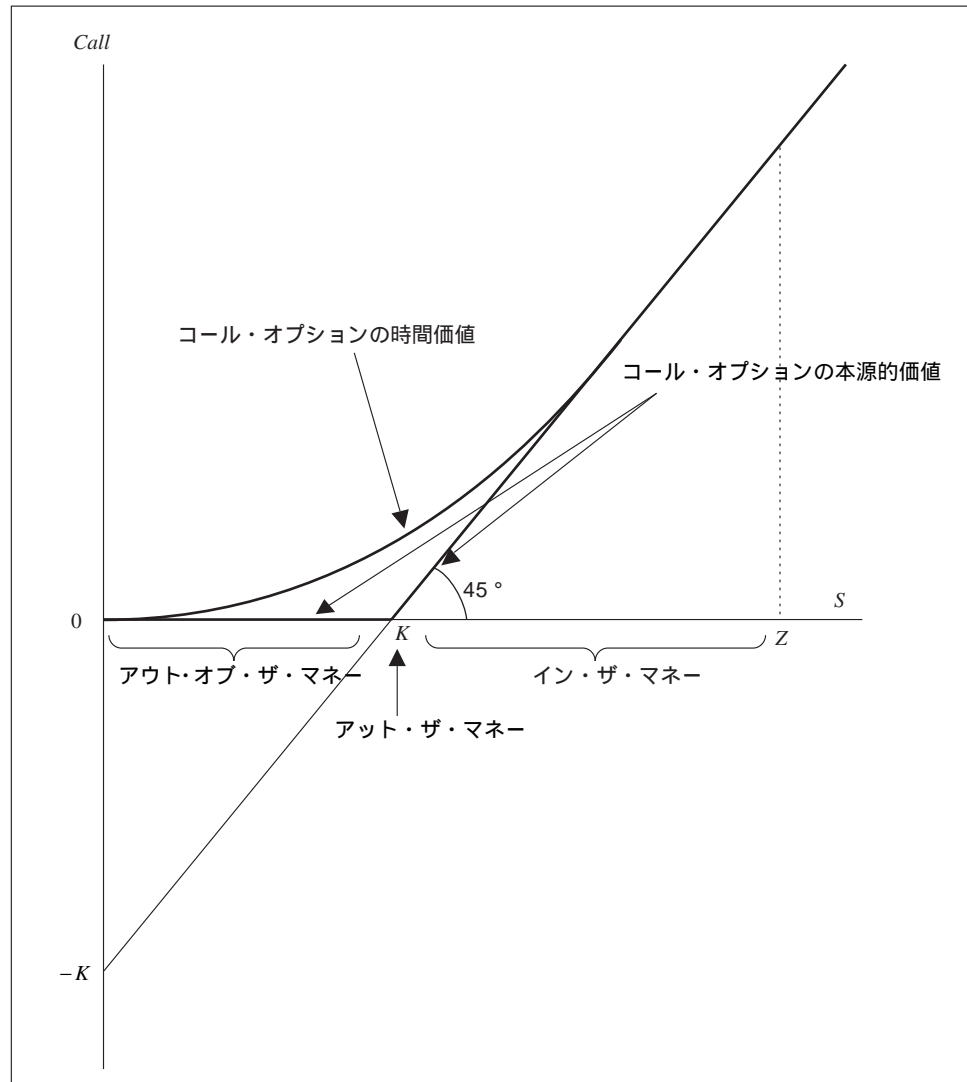
3. 一般的な確率過程を用いたリアル・オプション理論の説明

(1) フィナンシャル・オプションとリアル・オプションの対比

リアル・オプション理論を定式化したMcDonald and Siegel [1986] の論点をフィナンシャル・コール・オプションと比較したのが図表8である。

図表8は、原資産価格が S 、行使価格が K のフィナンシャル・コール・オプションを購入した場合のペイオフを示している¹¹。コール・オプションの本源的価値

図表8 フィナンシャル・コール・オプションの本源的価値と時間価値



11 2節での例と同様、満期までのどの時点でも権利を行使することができるアメリカン・タイプのコール・オプションを念頭においている。

($Call = \max[S - K, 0]$)は、オプションを行使したときに得られる価値であり、原資産価格が行使価格以下のときゼロで、原資産価格が行使価格を上回ると原資産価格と行使価格の差($S - K$)に一致する。コール・オプションの時間価値とは、満期まで時間的余裕があり、オプションの行使を先送りできる場合の価値と定義され、本源的価値よりも上方に位置している。

いま、原資産価格 S を投資収益の割引現在価値、行使価格 K を投資費用と読み替えてみよう。投資決定を先送りする可能性を捨象したNPV基準では、本源的価値がプラスになる、つまり S が K を上回れば投資は実行される。一方、投資を先送りする、参入オプション価値は、コール・オプションの時間価値と同様に考えることができる。参入オプション価値(時間価値)と投資収益の割引現在価値(以下、投資の本源的価値)は、 S が大きくなると接近する。リアル・オプション理論による投資タイミングは、コール・オプションでいうところの時間価値と本源的価値が一致する臨界値 Z であり、 Z は K よりも大きい。

3節(2)では、一般的な確率過程を導入し、参入オプション価値の導出過程を解析的に示す。直観的な議論のみに興味がある読者は、3節(3)に進めたい。

(2) 参入オプションの場合

一般的な確率過程を用いたリアル・オプションを検討するため、2節の金鉱山に投資する企業の事例を以下のように修正する。

埋没的な投資費用 I を負担して採掘を開始すると、毎年純収益 P を得る。

投資期間は無限とする。

追加的な費用負担なしには、操業を一時停止できない¹²。

純収益 P は、金市況に応じて変化する。簡単化のため、 P は毎年50%の確率で、一定割合上昇または下落すると仮定する。したがって、 P は上方・下方ともトレンドをもたないランダム・ウォーク(random walk)する確率変数として近似でき、時間単位をゼロに漸近させた場合には、幾何的ブラウン運動(geometric Brownian motion)となる¹³。

金鉱山への投資は、先送りすることもできる。

から の仮定のもとでは、図表8と同様の手法で金鉱山への参入オプション価値を図示できる¹⁴。図表9は、参入オプションの価値 $F_t(P)$ と、投資の本源的価値

12 一時的に操業を停止するオプションについては、3節(4)を参照のこと。

13 ブラウン運動とは、水に浮かべた花粉の微粒子が不規則に動く様子を記述したものである。幾何的ブラウン運動とは、変化率がブラウン運動していることを指す。経済学やファイナンス理論では、為替レートや株価、石油等天然資源の価格などを幾何的ブラウン運動で近似することが多い。

14 このプロジェクトは、原資産を収益の割引現在価値とする満期無限のアメリカン・コール・オプション(perpetual call option)と考えることができる。後述のように P は上方あるいは下方に、50%の確率かつ一定の割合で変動しトレンドがないと仮定しているため、原資産の配当率はこのプロジェクトの期待収益率である μ と一致する。

$V_t(P)-I$ を示している。以下混乱が生じない限り、下付添字 t は省略する。図表9に描かれた $F(P)$ と $V(P)-I$ は、以下の性質を満たす。

第1に、投資の本源的価値 $V(P)-I$ は収益の割引現在価値と埋没費用 I の差として定義される。仮定 1 から、 P はトレンドをもたないため、割引率を μ とすると、 $V(P)$ は以下の(3)式で表される。厳密な導出は補論1(1)を参照されたい¹⁵。

$$V(P) = \frac{P}{\mu} \quad (3)$$

したがって、図表9で $V(P)-I$ は縦軸と $-I$ 、横軸と $\mu \cdot I$ で交わる右上がりの直線になる。

第2に、参入オプション価値 $F(P)$ は、図表9に示されているような、原点を通り、本源的価値($V(P)-I$)の上方に位置する曲線で、以下の(4)式のように表現できる¹⁶。 $F(P)$ が原点を通る曲線となるのは、 P が低下してゼロに接近すると、投資実行臨界値 P^* に短時間で到達する見込みが小さくなるため、 $F(P)$ の値も低下し漸近的にゼロに接近するためである。ここで、 σ^2 は P の対数値の単位時間当たり分散を表している。(4)式の厳密な導出は補論1(2)を参照されたい。

$$F(P) = A_1 \cdot P^{\beta_1},$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 + 8 \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] > 1, \quad (4)$$

$A_1 (> 0)$ は定数

第3に、 $F(P)$ と $V(P)-I$ が接する収益 P^* で、参入オプション価値と投資の本源的価値は一致し、企業にとって投資実行と先送りが無差別になる。

第4に、投資実行の臨界値 P^* では、 $F(P)$ と $V(P)-I$ は滑らかに接している。この特性は、 P^* が投資実行の最適なタイミングとなることを保証する¹⁷。

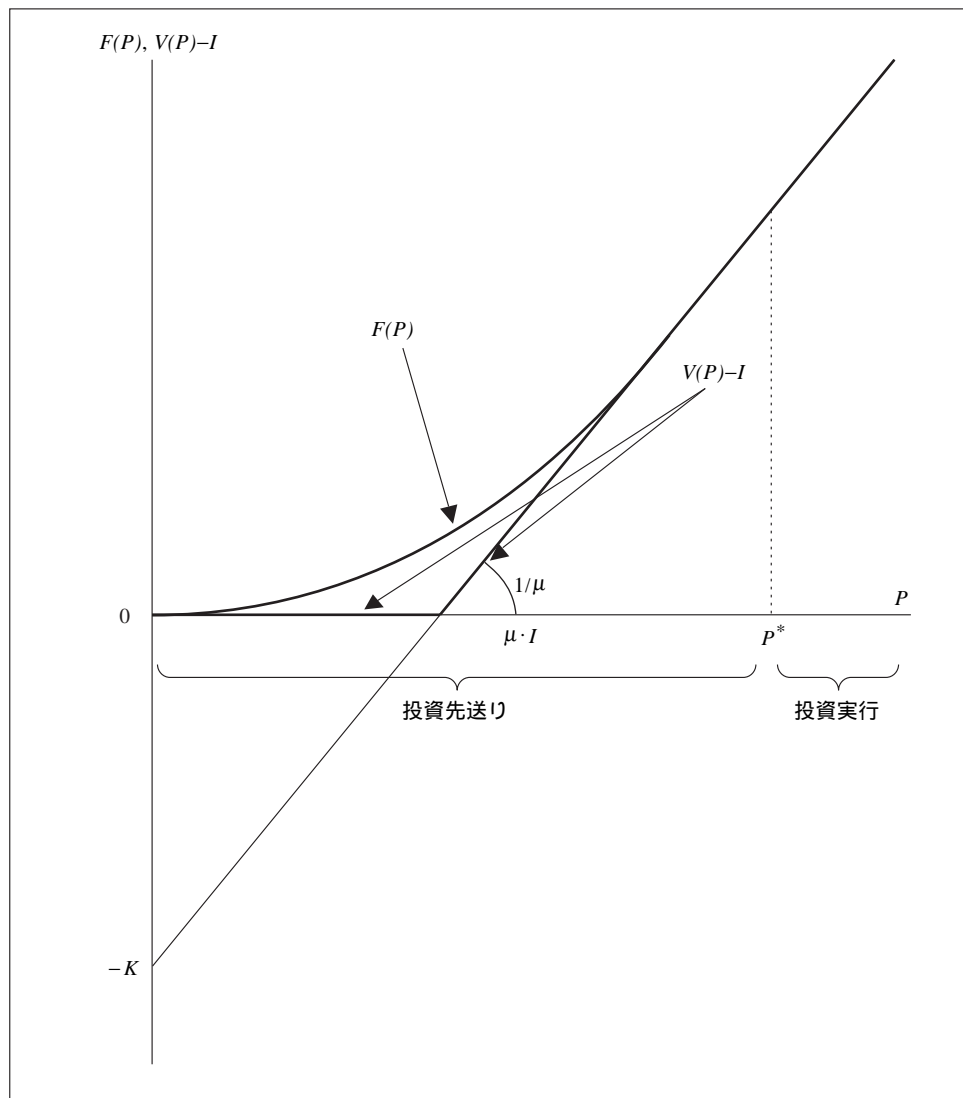
ここで、第3、第4の条件は、投資実行臨界値 P^* で $F(P^*) = V(P^*) - I$ かつ $F_p(P^*) = V_p(P^*)$ が成立していることを示す(ただし $F_p \equiv \partial F / \partial P$ 、 $V_p \equiv \partial V / \partial P$)。これらの条件に(3)、(4)式を代入すると、以下の(5)式で定義される乗数 Q^* は1を上回る。なお、(5)式導出の詳細は、補論1(3)を参照されたい。

15 2節(2)で説明したように、プロジェクトのリスクが市場全体のリスクと相関をもたない場合、あるいは市場に存在する金融資産を適切に組み合わせることによりプロジェクトのリスクと市場全体のリスクとの相関をゼロにできる場合には、リスク中立的確率で評価することができ、安全資産利率率を用いて割り引くことが可能となる。しかし、市場に存在する金融資産を適切に組み合わせることによってリスク・ヘッジができない(市場が完備でない)場合には、割引率にはリスクを調整した主観的割引率を用いる必要がある。

16 一般的に満期有限のアメリカン・コール・オプションには解析解が存在しないため、モンテカルロ・シミュレーションや有限差分法、2項ツリー展開等の数値的な方法で解くことが必要となる。

17 詳しくは補論1(3)を参照のこと。

図表9 リアル・オプションによる投資決定問題



$$Q^* \equiv \frac{V(P^*)}{I} = \frac{P^*/\mu}{I} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} > 1 \quad (5)$$

乗数 Q^* は、投資の本源的価値と投資額の比として定義されており、資本の価値とその再構築費用の比率として定義されるトービンの q と類似の概念である。リアル・オプション理論が示唆する投資実行の臨界値 P^* では、トービンの q は常に1を上回る。しかし、 $q \equiv V(P)/I$ が1を上回っていても Q^* よりも小さければ投資は実行されない。

また、(4)式の β_1 に関する公式をみると、 Q^* は割引率 μ と標準偏差（不確実性） σ に依存し、将来の不確実性 σ が大きいほど Q^* は大きくなることからわかる。つまり、リアル・オプション理論によれば、不確実性が上昇するほど投資を先送りするオプション価値が高まるため、同じ割引率であってもトービンの q が1を大きく上回らない限り投資が実行されないことを合理的に説明できる。

(3) 参入オプションに加えて退出オプションが存在するとき

3節(1)では、ある企業が金鉱山にいつ投資するか、という参入オプションのみが存在する場合を検討した。しかし、その企業は、投資後に著しく金市況が悪化した場合には鉱山の閉鎖費用等を負担してでも鉱山投資から退出することを参入時点ですでに考慮しているかもしれない。

鉱山の閉鎖費用等の埋没的な費用を負担して退出するオプションが存在する場合にも、3節(1)の議論は拡張可能である。ただし、退出オプションはコール・オプションではなく、プット・オプションとしての性質をもつ。すなわち、原資産を金鉱山投資の期待割引現在価値、配当を鉱山から得られる毎年の収益、行使価格を退出費用としたアメリカン・プット・オプションを想定すればよい。この点についてやや具体的にみると、以下のとおりである。なお、退出オプション価値導出過程の詳細は、補論2.を参照されたい。

まず、鉱山運営の経常費用を C 、粗利益を P 、純収益を $P-C$ とする。 P は前節同様の確率変数であり、 C は定数とする。

この企業が退出オプション価値を無視する場合、 P が C を下回り損失が生じた時点で鉱山投資から撤退すると予想される。一方、企業が退出オプション価値を考慮に入れる場合は、将来金市況が好転し収益が回復することを予測するならば、いま損失が発生していても鉱山投資撤退を先送りし、金市況の好転と収益回復を待つかもしれない。この場合、収益がある臨界値を超えて低下してはじめて、企業は退出費用を負担して撤退すると予想される。

(4) そのほかのオプション

現実の企業行動は多様であり、参入・退出以外にもさまざまなオプションが考えられる。以下では、こうしたオプションの代表的なものをいくつか紹介する。

第1例は、一時閉鎖オプションである。ある企業が投資費用を負担し、金採掘を開始したとする。その後、金市況が悪化し、収益が経常費用 C を下回ったとする。このとき、この企業は撤退ではなく、採掘を一時停止し、金市況回復後に採掘を再開することを考慮するかもしれない。例えば、埋没的な一時停止費用 M を負担して採掘をまず停止し、設備を維持するフローの費用 C_s （ただし $C_s < C$ ）を負担しながら、収益回復を待つというオプションが発生する。この一時閉鎖オプションには、収益が回復した後、費用を負担して操業を再開するオプションと、収益がさらに悪

化したとき退出費用を負担し金採掘から撤退する退出オプションが付随的に発生する。

第2例は、拡張オプションである。いま、金採掘を行っている企業が、埋没的な拡張費用を支出すれば、金採掘能力を拡大できるとする。収益に不確実性がある場合、この企業は、収益の期待割引現在価値が拡張費用をちょうど賄う水準では拡張を行わず、収益の期待割引現在価値が一層上昇してはじめて費用を負担して設備拡張を行うだろう。

第3例は、まず初期投資を行い追加投資を行う、多段階オプションである。例えば、金鉱山投資の前に埋蔵量を調査し、その後採掘設備投資を行う場合が、これに相当する。多段階オプションは、研究開発投資が必要な製薬会社¹⁸や製造業企業の意思決定タイミングを近似する1つの方法と言えよう。

以上のように、リアル・オプション理論を用いると、企業行動のさまざまな意思決定のタイミングについて考察することが可能となる。なお、補論3.では、プロジェクトに参入する企業の数が増える場合について、リアル・オプション理論がどのように修正されるか、簡単に説明している。

4 . リアル・オプション理論の応用例・実証分析例

リアル・オプション理論は、元来企業の設備投資行動を分析するために考案され、近年それ以外の分野にも応用されている¹⁹。本節ではまず、リアル・オプション理論の海外における代表的応用例と、わが国の経済事象にリアル・オプション理論を応用した先行研究を紹介し、リアル・オプション理論の分析の射程を検討する²⁰。次に、米国を中心とした先行研究を概観し、リアル・オプション理論の実証可能性について検討する。

(1) 代表的応用例

イ. 企業の雇用・解雇政策への応用

欧州では1970～80年代に景気回復局面でも失業率が高止まりする、いわゆる欧州病（euroclerosis）が発生した。Bentolila and Bertola [1990] によると、欧州病はリ

18 探索費用を伴う油田の開発、医薬品開発に関するケース・スタディとしてはアムラム＝クラティラカ [2001]、12、13章を参照のこと。

19 アムラム＝クラティラカ [2001]、第3部は、投資の価値評価にリアル・オプション理論を用いたケース・スタディを豊富に掲載している。

20 ここで紹介する以外にも、未開発油田の価値とその開発タイミングについて分析したPaddock, Siegel, and Smith [1988]、IT投資の最適タイミングを分析したFarzin, Huisman, and Kort [1998]、金融政策ルールと裁量的な政策運営間でのレジーム・スイッチングの問題を考察したHaubrich and Ritter [2000] 等がある。

リアル・オプション理論を用いると、高い解雇費用、第1次オイル・ショックによる期待成長率の下方屈折と不確実性の高まり、の2点から説明が可能である。

すなわち、財の需要に不確実性があり、雇用調整費用が高い場合、企業は、労働の限界生産性が賃金率をわずかに超えた時点では追加雇用を行わず、労働生産性が賃金率より十分高くなってはじめて調整費用²¹を負担して雇用を増加させる（雇用オプションを行使する）。逆に、労働の限界生産性が賃金率をわずかに下回った程度では解雇は実施されず、労働生産性が十分低下してはじめて調整費用を負担し雇用を減少させる（解雇オプションを行使する）。

上記の前提のもとでは、雇用が増加するのは景気が大きく好転したときのみであるとともに、多少経済環境が悪化しても解雇は生じない。同様に、景気が大幅に悪化してはじめて解雇が実施され、その後、経済環境が景気後退局面入りした時点の水準まで回復しても雇用は即座には増加しないため、失業率は高止まりする。このように過去のショックが将来の経済活動に影響を与える履歴効果（hysteresis effect）は、景気の不確実性が高い場合ほど強く働く。

1970～80年代の欧州では、厳しい規制により解雇費用が高かった。同時に、第1次オイル・ショック後に期待成長率が下方屈折し、景気の不確実性も高まったことから、上記のメカニズムが働き、失業率が高止まったというのがBentolila and Bertola [1990]の解釈である。さらに、Bentolila and Bertola [1990]は解雇費用引下げの試算を行い、解雇費用の削減は解雇政策には強い影響を与えるものの、新規雇用にはほとんど影響を与えないとの結果を導いている²²。

ロ. 環境保護政策への応用

環境保護政策実行の判定基準として、実行した場合の費用と便益を比較する費用便益分析（cost-benefit analysis）が用いられることが多い。しかし、環境保護政策が有する以下3つの特徴から、Pindyck [2000]はリアル・オプション理論を用いた分析の有用性を指摘した。

第1に、環境保護政策の実行により得られる便益には高い不確実性がある。例えば、CO₂排出を減少させた場合に平均気温が低下する程度やその経済効果の不確実性は高い。第2に、環境保護政策は以下2つの意味で埋没的な性格をもつ。まず、一度汚染された環境を完全に回復させることは困難である。次に、環境保護費用は回収不能である。第3に、多くの場合、環境保護政策は政策実行者が実行のタイミングを選択可能である。

こうした問題意識のもと、Pindyck [2000]は環境保護政策に関して以下のような分析を行った。

21 ここでは線形の調整費用関数が仮定されている。

22 その後、Saint-Paul [1995]は2状態マルコフ過程を用いてモデルを構築し、解雇費用の低下が新規雇用に正の影響を与えるとの結果を導いている。

環境汚染は、過去に蓄積されたストック M と今後排出されるフローの2種類に分類される。 θ を社会の構成員の選好や技術によって確率的に変動するシフト・パラメータとし、環境汚染ストックから社会が被る不効用を $\theta \cdot M$ とする。 θ が変動するため、社会が被る不効用 $\theta \cdot M$ にも不確実性が存在する。埋没的な環境保護投資費用を社会が負担すれば、環境汚染フローの排出は停止する。

この社会では、環境保護投資を先送りし現状を維持するか、埋没的な環境保護投資費用を負担して投資を実行する、との2つの選択肢が存在する。リアル・オプション理論によれば、環境保護投資の最適なタイミングは、後者の価値が前者の価値を上回る時点である。Pindyck [2000] は、社会が被る不効用に関する不確実性が高いほど、環境保護投資を先送りすることが合理的との結果を導いている。

八. わが国企業の輸出行動への応用

1980年代の円高期にわが国輸出企業が容易に米国市場から撤退しなかったことについて、Dixit [1989] は以下に示すような参入・退出オプションをとにも含むモデルを用いて分析を行った²³。

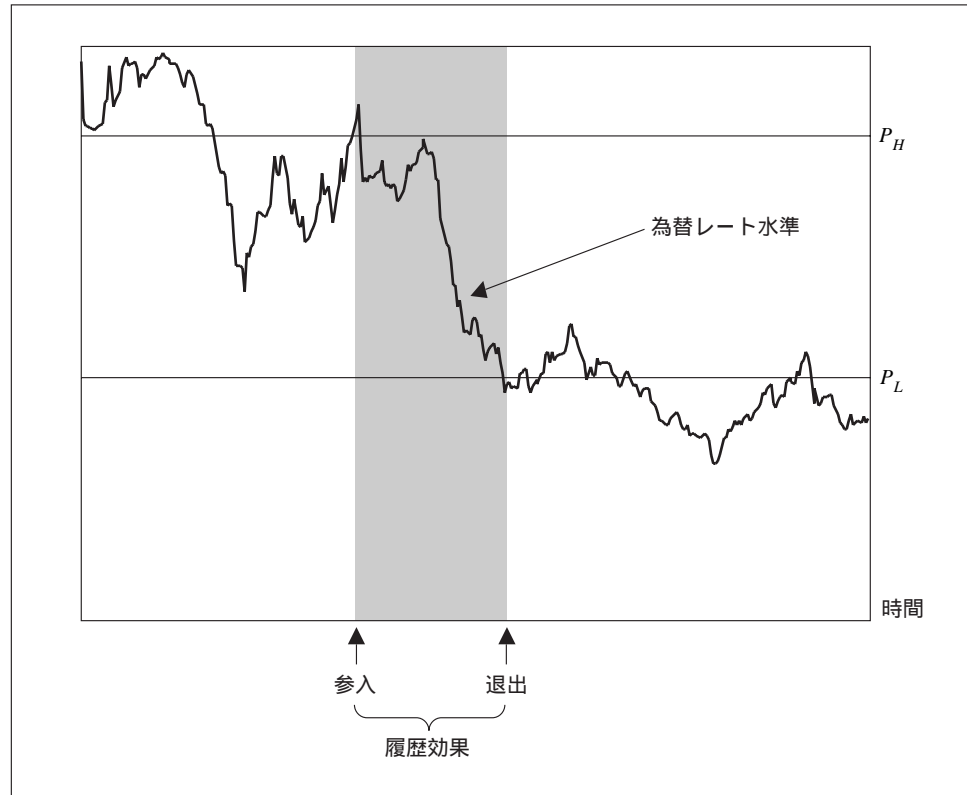
Dixit [1989] のモデルでは、不確実性の源は為替レートのみであり、企業は輸出を行う際と輸出を停止する際に、それぞれ埋没的な費用を負担する必要がある。前者は、現地での販売網構築等にかかる費用に、後者は、現地雇用者の解雇に伴う費用に相当する。

このモデルをわが国企業に当てはめた場合、為替レートが多少円安に推移しても輸出販売網は構築されない、一度資本を投下した後は、為替レートが多少円高になっても輸出を停止せず、為替レートが大幅に円高になってはじめて輸出から撤退する、との結果が得られる。

Dixit [1989] は、円/ドル為替レートが幾何的ブラウン運動に従い、分散が1年当たり1%と仮定したうえで試算を行った。試算結果によると、円/ドル為替レートが150円、米国市場の輸入浸透度が50%の状態を標準ケースとした場合には、40%円安になった場合、輸入浸透度は64%に上昇する。一方、わが国企業が退出を開始する円/ドルレートは標準ケースの150円ではなく、122円となり、輸入浸透度が50%に戻るのには112円まで円高が進行したときである。図表10は、こうした履歴効果のイメージである。為替レートが参入臨界値(P_H)以上円安になってから米国市場に参入した企業は、退出臨界値(P_L)よりも円高になるまで退出しない。また、Dixit [1989] は、参入・退出費用や不確実性が大きくなるほど、参入臨界値と退出臨界値の間の乖離は広がり、履歴効果が強く働くとの試算結果も示している。

23 この間の事情について詳しくはKrugman and Baldwin [1987] を、邦訳が存在するものとしてクルーグマン [1990] を参照のこと。

図表10 リアル・オプションとわが国企業の輸出行動の履歴効果



二. わが国住宅地価の用途転換期待への応用

Kanoh and Murase [1999] は、1980年代後半から1990年代初頭のわが国地価に生じたバブル現象は、土地の用途に関するさまざまなオプション価値を反映したものと主張した。この点についてやや詳しくみると、以下のとおりである。

いま、土地には住宅建設、駐車場などの低度な利用法と、オフィスビル建設、分譲マンション建設などの高度な利用法があるとする。いずれの利用法を選択した場合にも、土地所有者は埋没的な建設費用を負担することにより、不確実に変動する収益を得る。ただし、一度高度な利用法を選択すると、事後的に費用を負担しても用途転換はできない。その意味で、高度な利用法は不可逆的である。ここで、それぞれの利用法から得られる収益の期待割引現在価値をファンダメンタルズ価値と定義する。

こうした前提のもとでは、現在土地を低度に利用している所有者には、用途転換費用を負担して更地に戻す、建設費用を負担して土地を高度利用する、という選択肢がある。一方、更地の所有者は、建設費用を負担し、土地を高度利用ないし低度利用する、という選択肢がある。この間、土地を高度利用している所有者は、前述のように利用法を転換できない。このように考えた場合、低度利用されている

土地の地価は、低度利用法のファンダメンタルズ価値と用途転換オプション価値の和になる。高度利用されている土地の地価は、高度利用法のファンダメンタルズ価値に一致する。

ここで、高度利用法のファンダメンタルズ価値が将来大幅に上昇するとの期待形成がなされたとする。この場合、低度利用されている土地を用途転換するオプション価値も上昇するため、現在低度利用されている土地の地価も低度利用法のファンダメンタルズ価値から乖離して上昇する。

上記の分析をもとに、Kanoh and Murase [1999] は、1980年代以降の東京の住宅地価格は、将来高度な利用法に転換するオプション価値を反映している、との試算結果を示した。Kanoh and Murase [1999] は、わが国では土地利用法に関する規制が裁量的に運用されていたため、用途転換期待がもともと大きかった、1980年代後半には政府の規制緩和政策やオフィス・ビル不足から、用途転換期待がますます強まった、との事情により、土地の用途に関するさまざまなオプション価値が高まり、バブル現象が生じた、と論じた。

ホ. 邦銀の不良債権処理への応用

わが国の銀行はバブル経済崩壊後、深刻な不良債権問題に直面している。Baba [2001b] は、リアル・オプション理論からみると、不良債権処理の先送りは、純粋にミクロの経済主体としての銀行にとって合理的な選択結果と解釈可能であることを示した。その問題設定と分析結果は、以下のように要約される。

不良債権償却実行に伴って発生するロス、担保処分による不良債権の回収率、ほかの貸出や金融資産に対する再投資収益²⁴等に不確実性が存在する場合、銀行は不良債権償却を先送りする誘因をもつ。このような場合、銀行が不良債権を償却するタイミングは、処理を先送りして景気回復を待つオプション価値と、不良債権を償却し、担保処分により部分的に回収された資金を新規投資することにより得られる収益の割引現在価値の対比により決定される。後者が前者を上回ったときに不良債権償却は実行される。ただし、不良債権処理先送りがミクロの経済主体には最適戦略であるとしても、不良債権処理の遅れがマクロ経済に大きな負の影響を与えている場合、金融当局が銀行の自助努力を促すかたちで不良債権処理に補助金を出すことも検討に値する。

以上のような問題設定のもとで、Baba [2001b] は、合理的な銀行にとっての不良債権処理の最適なタイミングを評価するとともに、銀行に不良債権処理を直ちに実行させるためには、どの程度の再投資収益あるいは政府による補助金が必要なのか、といった問題について試算を行った。その結果、銀行が不良債権処理を自発的に行うためには、現在の経済状況では得られないくらい大きな再投資収益が

24 貸出償却実行に伴って発生するロスは不動産市況動向に、再投資収益は景気動向に密接に、関連している。

必要であること²⁵、また、将来金融当局から補助金を受けることができるかもしれないという期待が高まれば高まるほど、(金融当局の意図とは逆に)銀行は不良債権処理を先送る誘引をもつことが示されている。

(2) リアル・オプション理論の実証分析例

リアル・オプション理論によれば、設備投資と不確実性の間には負の相関関係が期待される。図表11に要約された米国を中心とする実証結果²⁶は、この理論的予測を概ね支持している。

ただし、図表11の第2パネルが示すように、産業別・企業別データを用いた研究では相関関係の統計的有意性は低い²⁷。産業間あるいは企業間に異質性が存在する場合、マクロ・データによる実証結果は産業・企業の個別要因をコントロールできないために、設備投資と不確実性の関係をうまく検証できていない可能性がある。そのため企業別データを用いた分析結果を重視すべきと思われる²⁸。しかし、産業別・企業別データを用いた分析結果の解釈にも以下のような注意が必要である。

第1に、リアル・オプション理論の分析対象は、個別プロジェクトであり、実証分析で用いられている企業の設備投資集計量ではない。プロジェクトごとに不確実性の源泉や、設備投資額が異なるのであれば、厳密な検証にはプロジェクト別データが必要である。

第2に、Carruth, Dickerson, and Henley [2000] が指摘するように、不確実性の源泉が特定されても、企業の主観的な期待収益率や収益の分散等の将来への見通しを測定することが困難である。この点について、近年、ARCH (autoregressive conditional heteroscedasticity)、GARCH (generalized ARCH) 等の手法を用い、条件付き分散を予測する試みが行われている。しかし、これらの手法で計測されたパラメータを個々の経済主体が共有しているとは限らない。

25 つまり、現状の金融経済環境を所与とすると、銀行は不良債権処理を自ら行う誘引をもたない、ということになる。

26 本節は基本的にCarruth, Dickerson, and Henley [2000] に依拠している。

27 ただし、わが国の製造業企業のパネル・データによる分析結果をみると (Ogawa and Suzuki [2000])、マクロ・レベルや産業レベルでの売上高に関する不確実性は、投資額と強い負の相関関係を有している。

28 一般に、企業レベルのパネル・データを用いた分析には次のような利点があると考えられている。第1に、パネル・データを用いた場合、不確実性の代理変数を企業ごとに作成できる点があげられる。一般に、リアル・オプション理論の文献では、企業の投資行動に最も大きな影響を与える不確実性は、すべての企業に一律に影響を与えると考えられる要因ではなく、企業固有の (idiosyncratic) 不確実性であることから、パネル・データを用いた分析が理論と整合的である。第2に、パネル・データの使用により、被説明変数の投資と説明変数の不確実性との間に存在する同時方程式バイアス (simultaneity bias) の問題を回避できる点をあげることができる。第3に、パネル・データの使用により、企業ごとの異質性 (heterogeneity) をコントロールすることができる。

このように、設備投資と不確実性の関係についての実証分析については、データの利用可能性や計測技術上の問題から、リアル・オプション理論が実証的に支持されたか否かについて結論を下すことは現段階では難しく、今後の研究にその判定は委ねられよう。

図表11 設備投資と不確実性に関する実証分析例

(1) マクロ・データを使用したもの

研究例	対象国	不確実性の代理変数	投資と不確実性の関係
Driver and Moreton [1991, 1992]	英国	生産・インフレ率の分散	負
Goldberg [1993]	米国	為替レート分散	弱い負
Huizinga [1993]	米国	インフレ率・実質賃金・実質利潤の分散	負 (利潤の分散は正)
Pindyck and Solimano [1993]	各国	資本の限界収益の標準偏差	負
Episcopos [1995]	米国	金利・株価指数・消費支出・GDPデフレータ	負
Price [1995, 1996]	英国	GDPの分散	負
Ferderer [1993]	米国	金利の期間構造から算出されたリスク・プレミアム	負
Ferderer and Zalewski [1994]	米国 (1930年代)	金利の期間構造から算出されたリスク・プレミアム	負
Carruth, Dickerson, and Henley [1997]	英国	金価格	負
経済企画庁 [1993]	日本	株価の予測誤差、リスク・プレミアム	負
松林 [1995]	日本	限界qの標準偏差	負

(2) 産業別・企業別データを使用したもの

研究例	対象国	データ	不確実性の代理変数	投資と不確実性の関係
Goldberg [1993]	米国	2桁分類産業別時系列データ	為替レート分散	負(無相関も)
Campa and Goldberg [1995]	米国	2桁分類産業別プールデータ	為替レート分散	無相関
Campa [1993]	米国	4桁分類海外直投パネル・データ	為替レート分散	負
Huizinga [1993]	米国	4桁分類クロスセクション・データ	実質賃金・原材料価格・生産物価格の分散	負(生産物価格の分散は正)
Ghosal and Loungani [1996]	米国	4桁分類パネル・データ	生産物価格の分散	負(集中度の低い産業)
Leahy and Whited [1996]	米国	製造業パネル・データ	株価の分散	弱い負(無相関も)
Driver, Yip, and Dakhil [1996]	米国	製造業パネル・データ	株式市場価格の分散	弱い負(無相関も)
Guiso and Parigi [1996]	イタリア	製造業クロスセクション・データ	将来の需要予測	負
Ogawa and Suzuki [2000]	日本	製造業パネル・データ	売上伸び率の標準偏差	負(マクロの不確実性)

資料：Carruth, Dickerson, and Henley [2000] Table 1、2 (pp.130-131)を加筆修正し使用。

5. おわりに

リアル・オプション理論は、さまざまな分野における投資タイミングを判定するうえで有益であるとともに、履歴効果に合理的な説明を与えるなど、分析の射程は広い。しかし、リアル・オプション理論にはいくつかの限界がある。

第1に、リアル・オプション理論は設備投資実行の臨界値に影響を与えている要素を特定化することはできるものの、設備投資の最適水準自体を決めることはできない。すなわち、「いつ」設備投資を実行するのか、またそのタイミングは不確実性やその他の経済変数にどのように影響を受けるのか、というテーマを取り扱うのがリアル・オプション理論であり、最適な資本蓄積と統合的な設備投資量の導出は、例えば最適成長理論などに依拠せねばならない。

第2に、リアル・オプション理論を用いた分析は、部分均衡分析にとどまり、一般均衡的な政策含意を引き出すことが難しいことが多い。例えば、リアル・オプション理論では、経済主体が参入・退出を決定する最重要の要因である製品価格等の経済変数が外生的な確率過程で与件とされ、参入・退出行動には影響を受けない。したがって、リアル・オプション理論の応用分野を模索する場合は、企業の意思決定と経済変数の相互依存関係をひとまず捨象し、経済環境を所与として、ミクロの経済主体が合理的に行動して発生する現象の解明をする、という問題設定がふさわしいかどうか、吟味する必要があるだろう。

本稿では、米国で幅広い分野に応用されつつあるリアル・オプション理論の基本的な考え方をできるだけ平易に解説するとともに、当初リアル・オプション理論が分析対象とした設備投資等の代表的応用例と、わが国経済への若干の応用例を紹介し、最後に米国を中心とした実証研究事例を紹介した。わが国の応用分野の範囲をみると、不確実性下の投資行動に関するリアル・オプション理論の射程は広いと考えられる。

補論1. 参入オプション価値の導出

補論1. では、参入オプション価値が単独で存在する場合の同価値を導出することを通して、本文3節で示された(3)、(4)、(5)式の導出を厳密に説明する。

(1) 本文(3)式の導出

まず、本文(3)式で定義された投資収益の割引現在価値の厳密な導出方法について説明する。企業は、埋没的な投資費用 I を負担すれば、収益 P を生み出すプロジェクトに参入できる。収益 P ²⁹は次の(A-1)式で示される幾何的ブラウン運動に従う確率変数とする³⁰。

$$dP = \alpha \cdot P \cdot dt + \sigma \cdot P \cdot dz \quad (\text{A-1})$$

(A-1)式右辺第1項の α はドリフト・パラメータ(期待成長率)である。本文3節では単純化のため、収益 P が上下に同率だけ50%の確率で変動するドリフト・パラメータがゼロの場合を説明している。

(A-1)式右辺第2項の σ は標準偏差パラメータ(不確実性)である。

(A-1)式右辺第2項の dz は $dz \equiv \varepsilon_t (dt)^{1/2}$ と表現されるヴィーナー過程(Wiener process)である。ここで、 ε_t は $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ 、 $t < s$ のとき $E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0$ との性質を満たす。

(A-1)式で与えられる幾何的ブラウン運動に従う確率変数である収益 P の変化率は、対数正規分布に従う。

t 時点の投資収益の割引現在価値 $V_t(P)$ は、次の(A-2)式を満たす。

$$V_t(P) = E_t \left[\int_t^{\infty} P_s \cdot e^{-\mu(s-t)} ds \right] = \int_t^{\infty} P_t \cdot e^{-(\mu-\alpha)(s-t)} ds = \frac{P_t}{\mu-\alpha} \equiv \frac{P_t}{\delta} \quad (\text{A-2})$$

(A-2)式で、 E_t は t 時点で得られる情報を用いた条件付き期待値を示す演算子である。 P_t は t 時点の確率変数 P の値、 μ は割引率を表す。

$\delta (\equiv \mu - \alpha)$ はプロジェクトのインカム・ゲイン率(コール・オプションでは原資産の配当率に相当)を示している。

29 投資の意思決定に際しては、製品価格、要素価格、参入に当たっての埋没費用のすべてが不確実性を伴う確率変数と想定するほうが自然である。以下では説明の簡単化のため、収益だけが確率変数として近似できる場合について検討する。

30 オプション価値の計算に当たっては、想定する確率変数 P の性質に応じて平均回帰過程(mean-reverting process)や平方根過程(square root process)が用いられることもある。いずれの場合も、オプション価値は幾何的ブラウン運動の場合とほぼ同様に算出される。詳細は、Dixit and Pindyck [1994] 5章を参照のこと。

本文3節では、ドリフト・パラメータ α が0の場合を説明している。そこで、(A-2)式の第4項で $\alpha=0$ とすると、本文の(3)式が導出される。

(2) 本文(4)式の導出

次に、本文(4)式で定義された、投資を t 時点で実行せず、先送りする参入オプション価値(時間価値) $F_t(P)$ の導出方法を説明する。以下では、混乱が生じない限り表記の簡略化のため $F(P)$ と $V(P)$ の下付添字 t は省略する。

参入オプション価値 $F(P)$ は、次の(A-3)式のように定義される。

$$F(P) \equiv \max E_t [(V(P_T) - I) \cdot e^{-\mu(T-t)}] \quad (\text{A-3})$$

ここで、 T は設備投資が実行される(つまり、参入オプションが行使される)時点であり、 t 時点では未知の時点である。しかし、参入オプションが行使される時点 T は、確率変数 P が(A-3)式右边を最大化する収益 P^* に t 時点からはじめて到達する時点と一致する、という性質を満たしているので、この性質に注目して参入オプション価値 $F(P)$ を求めることができる。

いま、参入オプションを保有し続けること、つまり投資を先送りすること自体から得られる実現収益は企業にとってゼロである。しかし、参入オプションを保有し続ける、つまり投資を先送りすることによって、将来参入オプション価値が変動することから生じるキャピタル・ゲインは享受することができる。この性質を数学的に表現すると、(A-3)式で定義された参入オプション価値 $F(P)$ はベルマン方程式(Bellman equation)(A-4)式を満たすことを意味する。

$$\mu \cdot F(P) \cdot dt = E_t [dF(P)] \quad (\text{A-4})$$

ここで、(A-4)式の左辺は参入オプションを保有し続けることから得られる総収益を、右辺は参入オプションの期待キャピタル・ゲインを表している。

以下では、 P が(A-1)式で表される確率過程に従うことを用いて、参入オプション価値 $F(P)$ の一般解を導出する。

$F(P)$ にItoのレンマを用いると、

$$dF = \alpha \cdot P \cdot F_P \cdot dt + \sigma \cdot P \cdot F_P \cdot dz + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot P^2 \cdot F_{PP} \cdot dt \quad (\text{A-5})$$

が得られる。ただし、 $F_P \equiv \partial F / \partial P$ 、 $F_{PP} \equiv \partial^2 F / \partial P^2$ である。

(A-5)式と、 P が幾何的ブラウン運動過程に従うとの(A-1)式の仮定を用いて、 $E[dz] = 0$ であることに注意すると、(A-4)式は次の(A-6)式のように簡単化できる。

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot P^2 \cdot F_{PP} + \alpha \cdot P \cdot F_P - \mu \cdot F = 0 \quad (\text{A-6})$$

(A-6)式は2次の微分方程式であり、Samuelson [1965] に示されているとおり、 $F(P)$ の一般解が以下の(A-7)式を満たすことが導出できる³¹。

$$F(P) = A_1 \cdot P^{\beta_1} \quad (\text{A-7})$$

ここで、 A_1 は定数であり後述の制約条件式(A-10) (A-11)式を満たすように決定される。また β_1 は、(A-7)式を(A-6)式に代入して得られた特性方程式

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \beta^2 + (\mu - \delta) \cdot \beta - \mu = 0 \quad (\text{A-8})$$

の正の根であり、以下の(A-9)式を満たす。

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\mu - \delta}{\sigma^2} + \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{\mu - \delta}{\sigma^2} \right]^2 + \frac{2 \cdot \mu}{\sigma^2} \right\}^{\frac{1}{2}} > 1 \quad (\text{A-9})$$

以上の準備により、本文3節の(4)式は(A-7)式と(A-9)式で、ドリフト・パラメータがゼロ、つまり、 $\alpha = \mu - \delta = 0$ とした場合に一致することが確認できる。

(3) 本文(5)式の導出

最後に、参入オプションが行使される時点の収益 P^* を導出し、本文3節の(5)式を導く。

参入オプションが行使される時点の収益 P^* は、収益 P^* において投資を先送りすることの価値と実行することの価値が等しいという臨界条件から導くことができる。数学的には以下の(A-10) (A-11)式のような臨界条件 (boundary conditions) を満たす臨界値 P^* を導くことを意味する。

$$F(P^*) = V(P^*) - I \quad (\text{A-10})$$

$$F_P(P^*) = V_P(P^*) \quad (\text{A-11})$$

.....
31(A-6)式の一般的な解は $F(P) = A_1 \cdot P^{\beta_1} + A_2 \cdot P^{\beta_2}$ 。 A_1 、 A_2 は定数、 β_1 、 β_2 はそれぞれ(A-8)式の正負の根である。本稿では、 $F(0) = 0$ の条件が追加的に必要なため、 $A_2 = 0$ となる。

まず、(A-10)式は臨界値 P^* においては、左辺の参入オプション価値と、右辺の投資の本源的価値が等しくなることを示しており、バリュー・マッチング条件 (value matching condition) と呼ばれている。

次に、(A-11)式は、臨界値 P^* において、左辺の参入オプション価値の限界的な変化と、右辺の投資の本源的価値の限界的な変化が等しくなることを示している。数学的には、 $F(P)$ と $V(P)-I$ の微小な変化が連続性 (continuity) と滑らかさ (smoothness) を保つことを示しており、スムーズ・ペイスティング条件 (smooth pasting condition) と呼ばれている。スムーズ・ペイスティング条件が満たされない場合、 P^* は最適な投資決定時点にならないことは簡単に確認できる。例えば、参入オプション価値の限界的な増分が投資の本源的価値の限界的な増分を上回っている場合には、企業は投資を先送りしたほうが好ましいことになる。逆の場合は、 P が現時点よりもわずかに低いときに投資が実行されているはずであり、いずれも最適性の条件に反している。

以上の点を総合すると、最適な投資時点 T を与える P^* は、境界条件(A-10)、(A-11)式に(A-2)式、(A-7)式を代入し、 A_1 、 P^* について解けば得ることができる。このようにして求められた A_1 、 P^* はそれぞれ以下である。

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \delta \cdot I$$

$$A_1 = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \delta \cdot I \right)^{-\beta_1} \cdot \frac{1}{\beta_1 - 1} \cdot I \quad (\text{A-12})$$

(A-12)式の P^* において、本文3節ではドリフト・パラメータがゼロ、つまり $\alpha = \mu - \delta = 0$ との条件を用いると、 $\mu = \delta$ であることから、本文3節(5)式の3つ目の等号条件 $(P^*/\mu)/I = [\beta_1 / (\beta_1 - 1)]$ を示すことができる。 $\alpha = 0$ の仮定に加え、 $\mu = 0.025$ 、 $\sigma = 0.1$ 、 $I = 4$ とした場合、 A_1 、 P^* の値はそれぞれ $A_1 = 400.3861$ 、 $P^* = 0.1558$ と計算される。

補論2 . 退出オプション価値の導出

補論2 .では、本文3節(3)で説明した、参入オプションに加え退出オプションが存在する場合について数学的に説明する。

いま、参入オプション価値を $F^0(P)$ 、退出オプション価値を $F^1(P)$ とする。補論1 .の仮定をやや一般化し、以下では企業が埋没的な投資費用 I を負担することで、粗利益 P 、経常費用 C を毎年発生させるプロジェクトに参入できるとする。簡単化のため、 C は定数で、粗利益 P は確率変数とする。さらに、参入後の企業は、粗利益 P が低下し、経常費用 C を下回るような場合、埋没的な退出費用 $E(E < I)$ を負担して、このプロジェクトから退出できるとする。

この場合、企業的意思決定の臨界値は、 P_H と P_L の2つになる($0 < P_L < P_H < \infty$)。すなわち、粗利益が P_H に達したとき、企業は投資を実行する。また、粗利益が P_L にまで下落したとき、すでに設備投資を行い市場に参入している企業は退出を決定する。したがって、粗利益 P が $0 < P \leq P_H$ の範囲内では、参入オプション価値 $F^0(P)$ が意味をもち、粗利益 P が $P_L \leq P < \infty$ の範囲内では、退出オプション価値 $F^1(P)$ が意味をもち、

次に、 $F^0(P)$ と $F^1(P)$ の満たすべき性質を検討する。

まず $F^0(P)$ は、参入オプションのみの場合と同様に、(A-6)式の微分方程式に従い、(A-7)式で示される解をもつ。関数が不変な理由は、退出を考慮するか否かにかかわらず、参入オプション関数は、「参入していない」という状態の価値を示しているからである。ただし、退出を考慮することによって、参入後の状態の価値には変化が生じる。

次に、 $F^1(P)$ はすでに市場に参入している企業のみ該当することから、プロジェクトから得られるフローの純利益 $(P - C) \cdot dt$ を考慮する必要がある。したがって、 $F^1(P)$ が満たすベルマン方程式は(A-4)式を拡張した次の(A-13)式を満たすことがわかる。

$$\mu \cdot F^1(P) \cdot dt = (P - C) \cdot dt + E_t[dF^1(P)] \quad (\text{A-13})$$

(A-13)式の左辺は退出オプションを保有し続けることから得られる総収益を、右辺は操業を継続することによる純利益と、退出を先送りすることによって得られる退出オプションの期待キャピタル・ゲインを表している。

(A-13)式にItoのレムマを適用することにより、 $F^1(P)$ が従う微分方程式は(A-14)式のように示すことができる。

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot P^2 \cdot F_{PP}^1 + (\mu - \delta) \cdot P \cdot F_P^1 - \mu \cdot F^1 + (P - C) = 0 \quad (\text{A-14})$$

(A-14)式の一般解は、以下の(A-15)式によって表される³²。

$$F^1(P) = B_2 \cdot P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{\mu} \quad (\text{A-15})$$

ここで B_2 は定数であり、後述の制約条件(A-17) (A-18)式を満たすように決定される。 β_2 は(A-15)式を(A-14)式に代入して得られる特性方程式(A-8)式の負の根であり、(A-16)式のように表される。

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\mu - \delta}{\sigma^2} - \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{\mu - \delta}{\sigma^2} \right]^2 + \frac{2 \cdot \mu}{\sigma^2} \right\}^{\frac{1}{2}} < 0 \quad (\text{A-16})$$

(A-15)式で示された退出オプション価値関数 $F^1(P)$ には、退出を先送りすることから得られる時間価値(右辺第1項)に加えて、右辺第2、3項の退出を先送りし、操業を継続することから得られる純利益の無限の将来までの割引現在価値が含まれる。

参入の臨界値 P_H では、企業は設備投資費用 I を負担し、参入オプションを放棄して退出オプションを取得する。退出の臨界値 P_L では、企業は退出費用 E を負担し、退出オプションを放棄して参入オプションを取得する。したがって、臨界条件(A-10)式(バリュー・マッチング条件)と(A-11)式(スムーズ・ペイスティング条件)は、参入時点、退出時点においてそれぞれ以下の(A-17) (A-18)式のように変更される。

$$F^0(P_H) = F^1(P_H) - I \quad F_P^0(P_H) = F_P^1(P_H) \quad (\text{A-17})$$

$$F^1(P_L) = F^0(P_L) - E \quad F_P^1(P_L) = F_P^0(P_L) \quad (\text{A-18})$$

臨界条件(A-17) (A-18)式に含まれる4本の方程式から、数値解析により4つの変数(A_1, B_2, P_H, P_L)を求めることができる。例えば、 $\alpha=0$ に加え、 $\sigma=0.1$ 、 $I=4$ 、 $E=0$ 、 $C=1$ とした場合、 A_1 、 B_2 、 P_H 、 P_L はそれぞれ $A_1=6.3638$ 、 $B_2=7.6821$ 、 $P_H=1.4667$ 、 $P_L=0.7657$ と計算される。

.....
³² (A-14)式の一般解は $F^1(P) = B_1 \cdot P^{\beta_1} + B_2 \cdot P^{\beta_2} + P/\delta - C/\mu$ である。しかし、 P が ∞ に近づくにつれて、退出オプション価値の時間価値 $B_1 \cdot P^{\beta_1} + B_2 \cdot P^{\beta_2}$ はゼロに近づいていくため、 $B_1=0$ の制約を課す必要が生じる。(A-15)式はその性質を織り込んだものである。

補論3. 市場構造とリアル・オプション理論

本文中で紹介した分析では、あるプロジェクトに投資（参入）できる企業が1つしか存在しない場合を取り扱ってきた。補論3.ではこの仮定を緩め、寡占（複占）競争者が無数に存在する、との2つの場合について、3節(1)で考察した参入のみのオプション価値関数がどのように変更されるか、Dixit and Pindyck [1994]の8、9章に従い、図表A-1によって直観的に考察する。図表A-1(1)は、3節(1)と同様、競争者が存在しない企業の参入オプション価値を示しており、図表9と同様である。

(1) 寡占（複占）の場合

いま、2企業が存在し、埋没費用 I を負担することにより1単位の財の生産が可能とする。この財に対する市場の逆需要関数 P は $P = Y \cdot D(i)$ 、 $i = 0, 1, 2$ で表されるとする。ここで、 P は財の価格、 $D(i)$ は参入している企業数 i の減少関数であり、 Y は消費者の選好によって不確実に変動するシフト・パラメータである。生産可能な財は1単位であるから、 P は企業収益と考えることができる。

図表A-1(2)は、先導者・追随者の参入オプション価値を示している³³。 Y が一定のとき、参入企業が増えれば財価格は低下するため、先に参入した企業（先導者）は、後から参入する企業（追随者）よりも高価格で財を販売できる。

追随者の参入タイミングは以下のとおりである。追随者にとっての参入を先送りすることのオプション価値 $F_2(P)$ は、先導者がすでに市場に参入している点以外は、競争者が存在しない場合と同じ方法で算出されるため、図表A-1(1)の競争者が存在しない場合と同一の形状となる。追随者は、参入オプション価値 $F_2(P)$ と設備投資を実行した場合に得られる価値 $V(P) - I$ が接する P_2^* に価格 P が達したとき、設備投資を実行する。

先導者が参入を先送りすることのオプション価値 $F_1(P)$ は、 P が臨界値 P_2^* を超えると追随者が参入してくることを考慮に入れるため、図中の $F_1(P)$ のような形状となる。したがって、先導者・追随者の投資決定基準は次のようになる。

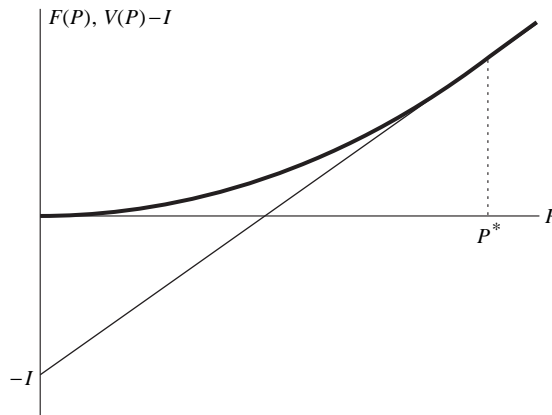
$$\begin{cases} 0 < P < P_1^* & \text{両者とも投資を実行しない} \\ P_1^* \leq P < P_2^* & \text{先導者のみ投資を実行する} \\ P_2^* \leq P & \text{両者とも投資を実行する} \end{cases}$$

すなわち、追随者が存在すると、先行者が投資を実行する価格が低下する。これ

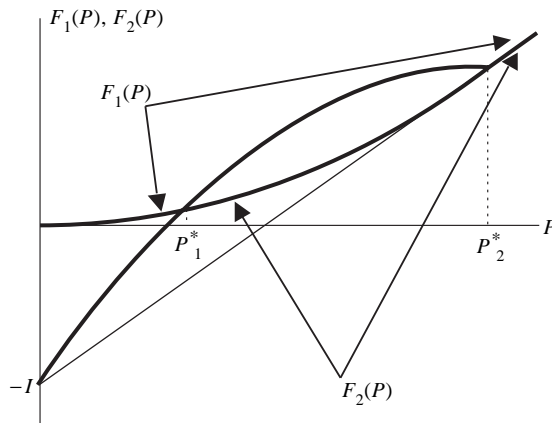
33 厳密にいうと、図表A-1(2)のペイオフは、先導者と追随者の役割がランダムな場合（つまり、2者のうちどちらが先導者になるのかは事前に決まっていない場合）を想定して描かれている。事前に先導者・追随者の役割が決まっている場合には、より複雑な形状になる。この点については、Baba [2001a] が詳細な分析を行っている。

図表A-1 市場構造とリアル・オプション理論

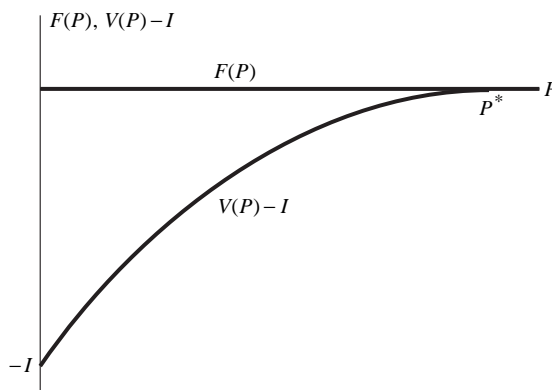
(1) 競争者が存在しない場合



(2) 寡占(複占)市場



(3) 競争者が無数に存在する場合



備考：Dixit and Pindyck[1994], Figure 8.1 (p.259), Figure 9.2(p.311) より転用

は、 P が P_2^* を超えるまで上昇すると追隨者に先を越される懸念 (fear of preemption) があるためであり、結果として投資を先送りできる期間が限定されることになる。

(2) 競争者が無数に存在する場合

最後に、競争者が無数に存在する場合を考察する。複占の場合と同様、企業は市場の逆需要関数 $P=Y \cdot D(i)$ 、 $i=0, 1, 2, \dots$ に直面しているものとする。

図表A-1(3)に描かれているように、この場合では、 P が一度臨界値 P^* の水準に達すると、それ以上上昇しない。また、投資費用 I を負担して投資を実行することの価値 $V(P)-I$ は、 P が上昇しても負の値をとり、臨界値 P^* の水準でゼロに収束する。したがって、投資を先送りすることのオプション価値 $F(P)$ は常にゼロとなる。

これは、価格が臨界値 P^* に達すると、無数の企業が投資を実行し、超過利潤が完全に消滅するまで参入が継続するため、価格が上昇しなくなるからである。各企業は、 P に上限が存在することを予知して、競争者が存在しない場合に比べて、 P が臨界値 P^* に近づくにつれて $V(P)$ の期待上昇率が小さくなる。したがって、投資を直ちに実行することによる価値 $V(P)-I$ は本文の(3)式から導かれる直線ではなく、凸関数となる。

参考文献

- アムラム・マーサ、ナリン・クラティラカ(著) 石原昌幸・中村康治・吉田二郎・脇保修司(訳) 『リアル・オプション 経営戦略の新しいアプローチ』、東洋経済新報社、2001年、(Amram, Martha and Nalin Kulatilaka, *Real Options*, Harvard Business School Press, 1994)
- クルーグマン・ポール(著) 伊藤隆敏(訳) 『為替レートの謎を解く』、東洋経済新報社、1990年、(Krugman, Paul R., *Exchange-Rate Instability*, MIT Press, 1989)
- 経済企画庁編、『平成5年度経済白書』、大蔵省印刷局、1993年
- 本間正明・跡田直澄・林 文夫・秦 邦昭、『設備投資と企業税制』、経済企画庁経済研究所研究シリーズ41号、1984年
- 松林洋一、「期待利潤率、不確実性と設備投資」、『日本経済研究』28号、1995年、31～52頁
- 若杉敬明・紺谷典子、「資本収益率とトービンの q 」、『日本証券経済研究所計測室テクニカル・ペーパー、No. 52、1980年
- Baba, Naohiko, “Uncertainty, Monitoring Costs, and Private Banks’ Lending Decisions in a Duopolistic Loan Market,” *Monetary and Economic Studies*, 19 (2), Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2001a, pp. 21-47.
- , “Optimal Timing in Banks’ Write-off Decisions under the Possible Implementation of a Subsidy Scheme: A Real Options Approach,” *Monetary and Economic Studies*, 19(3), Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2001b, pp. 113-141.
- Bentolila, Samuel, and Giuseppe Bertola, “Firing Costs and Labor Demand: How Bad is Eurosclerosis?” *Review of Economic Studies*, 57, 1990, pp. 381-402.
- Campa, Jose Manuel, “Entry by Foreign Firms in the United States under Exchange Rate Uncertainty,” *Review of Economics and Statistics*, 75, 1993, pp. 614-622.
- , and Linda S. Goldberg, “Investment in Manufacturing, Exchange Rates and External Exposure,” *Journal of International Economics*, 38, 1995, pp. 297-320.
- Carruth, Alan, Andrew Dickerson, and Andrew Henley, “Econometric Modeling of UK Aggregate Investment: The Role of Profits and Uncertainty,” Aberystwyth Economic Research Paper, No. 97-06, University of Wales, Aberystwyth, 1997.
- , and , “What do We Know about Investment under Uncertainty?” *Journal of Economic Survey*, 14, 2000, pp. 119-153.
- Dixit, Avinash, “Hysteresis, Import Penetration, and Exchange Rate Pass Through,” *Quarterly Journal of Economics*, 104, 1989, pp. 205-228.
- , and Robert S. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.
- Driver, Ciaran, and David Moreton, “The Influence of Uncertainty on Aggregate Spending: An Empirical Analysis,” *Economic Journal*, 101, 1991, pp. 1452-1459.
- , and , *Investment, Expectations and Uncertainty*, Basil Blackwell, 1992.
- , Paul Yip, and Nazera Dakhil, “Large Company Capital Formation and Effects of Market Share Turbulence: Micro-Data Evidence from the PIMS Database,” *Applied Economics*, 28, 1996, pp. 641-651.

- Episcopos, Athanasios, "Evidence on the Relationship between Uncertainty and Irreversible Investment," *Quarterly Review of Economics and Finance*, 35, 1995, pp. 41-52.
- Farzin, Y. H., K. J. M. Huisman, and P. M. Kort, "Optimal Timing of Technology Adoption," *Journal of Economic Dynamics & Control*, 22, 1998, pp. 779-799.
- Ferderer, J. Peter, "The Impact of Uncertainty on Aggregate Investment Spending: An Empirical Analysis," *Journal of Money, Credit and Banking*, 25, 1993, pp. 30-48.
- , and David A. Zalewski, "Uncertainty as a Propagating Force in the Great Depression," *Journal of Economic History*, 54, 1994, pp. 825-849.
- Ghosal, Vivek, and Prakash Loungani, "Product Market Competition and the Impact of Price Uncertainty on Investment: Some Evidence from US Manufacturing Industries," *Journal of Industrial Economics*, 44, 1996, pp. 217-228.
- Goldberg, Linda S., "Exchange Rates and Investment in United States Industry," *Review of Economics and Statistics*, 44, 1993, pp. 217-228.
- Guiso, Luigi, and Giuseppe Parigi, "Investment and Demand Uncertainty," Discussion Paper No. 1497, CEPR, 1996.
- Haubrich, Joseph G. and Joseph A. Ritter, "Dynamic Commitment and Incomplete Policy Rules," *Journal of Money, Credit and Banking*, 32-4, 2000, pp. 766-784.
- Hayashi, Fumio, "Tobin's Marginal Q and Average Q: A Neoclassical Interpretation," *Econometrica*, 50, 1982, pp. 213-224.
- Huizinga, John, "Inflation Uncertainty, Relative Price Uncertainty, and Investment in US Manufacturing," *Journal of Money, Credit and Banking*, 25, 1993, pp. 521-554.
- Kanoh, Satoru, and Hideaki Murase, "On Land Price Formation: Bubble versus Option," *Japanese Economic Review*, 50, 1999, pp. 212-226.
- Krugman, Paul R., and Richard E. Baldwin, "The Persistence of the U.S. Trade Deficit," *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, 1987, pp. 1-44.
- Leahy, John V., and Toni M. Whited, "The Effect of Uncertainty on Investment: Some Stylized Facts," *Journal of Money, Credit and Banking*, 28, 1996, pp. 64-83.
- Luehman, Timothy A., "Investment Opportunity as Real Options: Getting Started on the Number," *Harvard Business Review*, December-January issue, 1998.
- Luenberger, David G., *Investment Science*, Oxford University Press, 1998.
- McDonald, Robert L., and Daniel R. Siegel, "Investment and the Valuation of Firms when there is an Option to Shut Down," *International Economic Review*, 26, 1985, pp. 331-349.
- , and , "Value of Waiting to Invest," *Quarterly Journal of Economics*, 101, 1986, pp. 707-728.
- Ogawa, Kazuo, Shin-ichi Kitasaka, Toshio Watanabe, Tatsuya Maruyama, Hiroshi Yamaoka, and Yasuharu Iwata, "Asset Markets and Business Fluctuations in Japan," *The Keizai Bunseki* (The Economic Analysis), Economic Research Institute, Economic Planning Agency, 1994.
- , and Kazuyuki Suzuki, "Uncertainty and Investment: Some Evidence from the Panel Data of Japanese Manufacturing Firms," *Japanese Economic Review*, 51 (2), 2000, pp. 220-231.

- Paddock, James L., Daniel R. Siegel, and James L. Smith, "Option Valuation of Claims on Real Asset: The Case of Offshore Petroleum Leases," *Quarterly Journal of Economics*, 103, 1988, pp. 479-508.
- Pindyck, Robert S., "Irreversibilities and the Timing of Environmental Policy," *Resource and Energy Economics*, 22, 2000, pp.233-259.
- , and Andres Solimano, "Economic Instability and Aggregate Investment," *NBER Macroeconomics Annual* 8, 1993, pp. 259-303.
- Price, Simon, "Aggregate Uncertainty, Capacity Utilization and Manufacturing Investment," *Applied Economics*, 27, 1995, pp. 147-154.
- , "Aggregate Uncertainty, Investment and Asymmetric Adjustment in the UK Manufacturing Sector," *Applied Economics*, 28, 1996, pp. 1369-1379.
- Saint-Paul, Gilles, "The High Unemployment Trap," *Quarterly Journal of Economics*, 110, 1995, pp.527-550.
- Samuelson, Paul A., "Rational Theory of Warrant Pricing," *Industrial Management Review*, 6, 1965, pp. 41-50.
- Summers, Lawrence A., "Investment Incentives and the Discounting of Depreciation Allowances," in Martin Feldstein ed., *The Effect of Taxation on Capital Accumulation*, University of Chicago Press, 1987.
- Tobin, James, "A General Equilibrium Approach to Monetary Policy," *Journal of Money, Credit and Banking*, 1, 1969, pp. 15-29.

