

期待ショートフォールによる ポートフォリオのリスク計測

具体的な計算例による考察

やま い やすひろ よし ぼ としな お
山井康浩 / 吉羽要直

要 旨

本稿では、期待ショートフォールの実務への応用可能性を探るため、(1)その推計値の安定性、(2)それに対するリスク・ファクターの寄与度の算出、(3)それに基づくポートフォリオの最適化の3点を検討した。この結果、期待ショートフォールは、各リスク・ファクターの寄与度の算出やポートフォリオの最適化が容易な点でバリュー・アット・リスクよりも優れていることが判明した。また、デフォルト相関の高い信用ポートフォリオなど損失額分布の裾が厚い場合は、期待ショートフォールの推計値はバリュー・アット・リスクの推計値に比べ不安定化するので、期待ショートフォールの推計には、バリュー・アット・リスクの推計に比べ多くのシミュレーション回数確保する必要があるとの結論が得られた。

キーワード：期待ショートフォール、バリュー・アット・リスク、最適化

.....
本稿の作成に当たっては、山下司氏（BNPパリバ証券）から大変貴重なコメントを頂戴した。もっとも、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、全て筆者個人に属する。

山井康浩 日本銀行金融研究所研究第1課（E-mail: yasuhiko.yamai@boj.or.jp）

吉羽要直 日本銀行金融研究所研究第1課（E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp）

1 . はじめに

金融機関のリスク管理実務で、バリュー・アット・リスク（以下、VaR）は最も標準的に使用されるリスク指標となっている。しかし、そのリスク指標としての妥当性に関しては、定義上・理論上の問題（（1）VaRが信頼区間外のリスクを捉えられない、（2）VaRが劣加法性を満たさない）が指摘されている（詳細は山井・吉羽 [2001] を参照）。こうした中、これらの問題を内包しないリスク指標として、期待ショートフォールという概念が提唱されている（Artzner *et al.* [1997, 1999]）。期待ショートフォールは、損失額がVaR以上となることを条件とした損失額の条件付期待値と定義される。山井・吉羽 [2001] では、期待ショートフォールは、上記（1）と（2）の問題がないことから、概念上VaRに比べて望ましいリスク指標であることを示した。しかし、期待ショートフォールを実務に応用するためには、推計されたリスク量の安定性など、いくつかクリアすべき問題があることも指摘した。

本稿では、シミュレーションを用いてリスク計測を行う場合の期待ショートフォールの実務への応用可能性を探るため、（1）その推計値の安定性、（2）それに対するリスク・ファクターの寄与度の算出、（3）それに基づくポートフォリオの最適化、の3点を検証する。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、山井・吉羽 [2001] の結果を簡単に纏める形で期待ショートフォールの定義とその性質を説明する。3節では、損失額分布に特定の分布（対称安定分布）を仮定したうえで、期待ショートフォールおよびVaRの推計値の安定性を検討する。4節では、実務上一般的なポートフォリオの例として、米国株オプション・ポートフォリオと与信ポートフォリオを取り上げ、そのVaRおよび期待ショートフォールを計算する。5節では、VaRおよび期待ショートフォールに対する各リスク・ファクターの寄与度の算出方法を示し、サンプル・ポートフォリオを用いてそれを具体的に例示する。6節では、期待ショートフォールの最適化方法を紹介し、サンプル・ポートフォリオを用いて具体的な計算を行う。7節では結論を簡単に整理する。

1 リスク指標 ρ が劣加法性を満たすとは、全体のポートフォリオのリスク量が個別ポートフォリオのリスク量の和を下回ることを指す。直観的には、「リスク指標はポートフォリオ分散効果によるリスク削減を織り込むべきである」という要請を定式化したものであると考えられる。つまり、2つの個別ポジションの損失額を表す確率変数をそれぞれ X 、 Y とすると、任意の X 、 Y について $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ が成立する時、リスク指標 ρ は劣加法性を満たすという。

2. 期待ショートフォールについて

Artzner *et al.* [1997] は、リスク指標として、期待ショートフォール (expected shortfall conditional VaR、mean excess loss、beyond VaR、tail VaR などとも呼ばれる) を提唱した。期待ショートフォールとは、損失額が VaR を超えることを条件とした損失額の条件付期待値である。具体的な定義を以下に示す。

期待ショートフォールの定義

ポートフォリオの損失額を表す確率変数を X 、信頼水準 $100(1-\alpha)\%$ の VaR を $VaR_\alpha(X)$ とすると²、これに対応する期待ショートフォール $ES_\alpha(X)$ は以下のように定義される³。

$$ES_\alpha(X) = E[X | X \geq VaR_\alpha(X)]. \quad (1)$$

VaR が「信頼区間外の事象を除けば最大どの程度の損失を被るか」を計測する指標であるのに対し、期待ショートフォールは「損失が VaR を超える場合に平均的にどの程度の損失を被るか」を測定する。損失額が正規分布に従うことを仮定できない場合、VaR は、(1) 信頼区間外の損失を把握できない、(2) 劣加法性を満たさないことがある、といった問題点を持つのに対し、期待ショートフォールは、信頼区間外の損失も平均値の形で取り込んでいるほか、劣加法性を満たすことが示されている。つまり、期待ショートフォールは VaR よりも概念上優れたリスク指標であるといえる。しかし、実際に期待ショートフォールを実務で使う際には、期待ショートフォールの推計値が安定的か否かを検討する必要がある。

3. 期待ショートフォールの推計値の安定性

(1) 推計値の安定性

一般に、乱数を使ったシミュレーションでリスク量を推計する場合、乱数を使っているがゆえに、1回ごとのシミュレーションによって推計値にばらつきが生じる。ここでは、推計値のばらつきが少ない状態を「推計値が安定している」状態と呼ぶことにする。一般に推計値が安定するためには、シミュレーションの数を多くすることが必要となる。

² 本稿では、VaR を損失額分布の上側 $100\alpha\%$ 分位点 (quantile) として定義する。

³ $E[X|B]$ は事象 B が成立する条件のもとでの確率変数 X の条件付期待値である。なお、本稿では X は損失額と定義しているため、損失は正值、利益は負値となる。

(2) 対称安定分布を仮定した場合の推計値の振れ

本節では、損失額が安定分布⁴に従うと仮定し、VaRと期待ショートフォールの推計値の安定性を検討する。確率変数 X が安定分布に従う場合、そのi.i.d.な(独立かつ同一の分布に従う) n 個の和 S_n について、

$$S_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + \gamma_n^5, \quad (2)$$

となるような定数 α 、 γ_n が存在する。 α を特性指数といい、 α が小さいほど分布の裾は厚くなる。安定分布の代表例には正規分布($\alpha=2$ の場合)、コーシー分布($\alpha=1$)⁶がある(図1参照)。同じ型の安定分布に従う確率変数の和が同じ型の安定分布に従うという点で、安定分布は正規分布の自然な一般化であると考えられることができる。

まず、損失額分布が特定の特性指数($\alpha=2.0, 1.9, \dots, 1.2, 1.1$)を持つ対称安定分布⁷に従うと仮定し、1,000回のシミュレーション⁸をそれぞれ10,000セット行い、期待ショートフォールおよびVaRの10,000個の推計値⁹について、平均、標準偏差および95%信頼区間を求めた¹⁰。

4 安定分布の詳細は、例えばFeller [1969]、Shiryaev [1999]などを参照。

5 $\stackrel{d}{=}$ は分布が等しいことを示す。

6 コーシー分布($\alpha=1$)では、分布の期待値は定義できない(無限大である)。このため、損失額がコーシー分布に従う場合は、裾部分の期待値である期待ショートフォールも定義できない。

7 対称安定分布に従う確率変数の特性関数 $\Phi(\theta)$ は、特性指数を α 、尺度パラメータを σ 、位置パラメータを μ として、以下で表すことができる($i=\sqrt{-1}$ である)。

$$\Phi(\theta) = \exp\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha + i\mu\theta\},$$

本稿のシミュレーションでは、位置パラメータ $\mu=0$ 、尺度パラメータ $\sigma=1/\sqrt{2}$ とした。なお、尺度パラメータを $\sigma=1/\sqrt{2}$ としたのは、 $\alpha=2$ のときの分布が標準正規分布となるようにするためである。

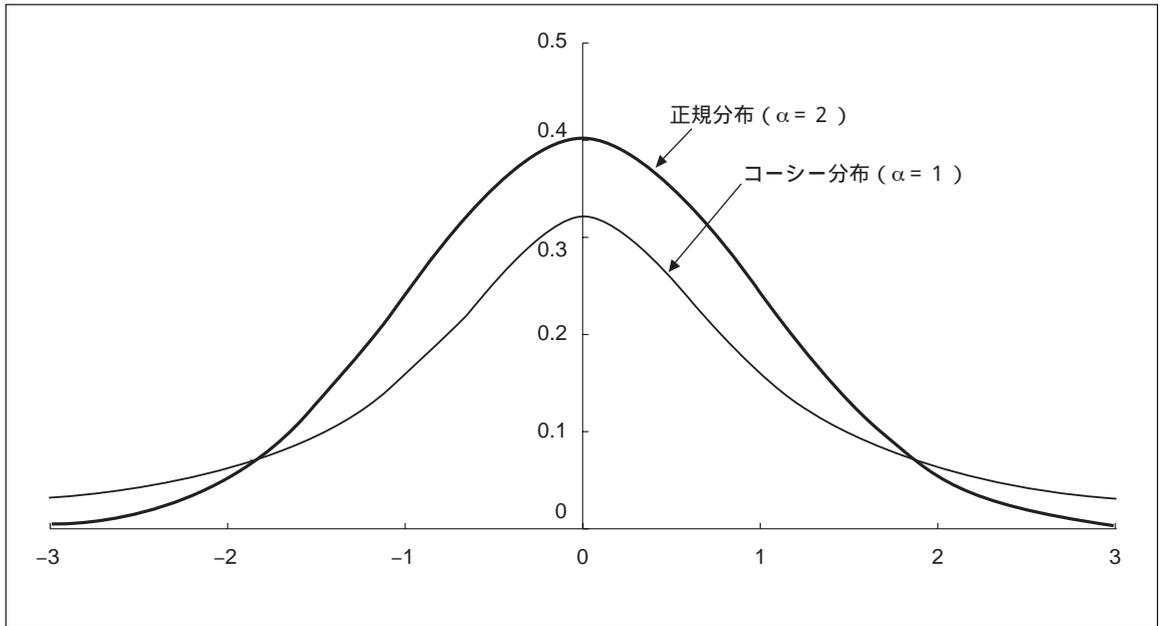
8 安定分布に従う乱数は、メルセンヌ・ツイスターによる一様乱数をChambers, Mallows, and Stuck [1976]のアルゴリズムにより変換して生成した。

9 信頼水準が $100(1-\alpha)\%$ のVaRの推計値は、損失額分布の分位点である。ここでは、 n 回のシミュレーションで得た損失額を昇順に並べた値を $X_{(n)}, X_{(n-1)}, \dots, X_{(n\alpha+1)}, X_{(n\alpha)}, \dots, X_{(1)}$ として、VaRの推計値を $X_{(n\alpha+1)}$ とした。一方、期待ショートフォールの推計値は次式とした。

$$ES_\alpha = \frac{X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{(n\alpha+1)}}{n\alpha+1}.$$

10 推計値の安定性の評価に関しては、VaRの推計値の標準偏差の解析的な算出方法があるほか、期待ショートフォールの推計値の標準偏差の近似による解析的算出方法がある(詳細は補論1参照)。損益額が正規分布または t -分布など比較的裾の薄い分布に従う場合は、推計値の標準偏差を解析的な方法で求めた値とシミュレーション結果を用いて求めた値とは両者に大きな差はない。しかし、損失額がパレート分布などの裾の厚い分布に従う場合、両者は大きく異なるという問題がある。

図1 正規分布、コーシー分布の確率密度



結果は、表1～2、図2～5のとおりである。相対標準偏差（標準偏差/平均値）をみると、 α が2に近い場合（正規分布に近い場合）はVaRと期待ショートフォールとで大きな違いがないことがわかる。一方、 α が1に近づく（分布の裾が厚くなる）に従い、期待ショートフォールの相対標準偏差は、VaRのそれに比べてより大きくなり、推計値がより不安定となることがわかる。

このように分布の裾が厚くなるにつれて期待ショートフォールの推計値が不安定になる理由は、以下のように考えることができる。ポートフォリオで十分大きな損失が発生する確率を考える。損失額が裾の厚い分布に従う場合の確率と正規分布に従う場合の確率とを比べると、前者が後者を上回っている。期待ショートフォールは裾におけるすべての損失を勘案するので、シミュレーションによる期待ショートフォールの計測では、損失額分布の裾が厚いと、期待ショートフォールの推計値は、発生確率の極めて小さい大幅な損失がシミュレーション回数の中で発生するか否かでかなり変動し得る。この理由により、損失額が裾の厚い分布に従う場合は、期待ショートフォールとVaRを同じ回数のシミュレーションで求めると、前者の推計値の方が不安定になると考えられる。

次に、シミュレーション回数を増やすことにより、期待ショートフォールの推計値の安定性を高めることが可能かを確認する。ここでは、損失額分布が特定の特性指数（ $\alpha = 2.0, 1.5, 1.1$ ）を持つ対称安定分布に従うと仮定し、それぞれ、1,000回、10,000回、100,000回、および1,000,000回のシミュレーションを1,000セット行い、得られた1,000個の推計値について、平均、標準偏差および95%信頼区間を求めた。

表1 対称安定分布を仮定した場合のVaRおよび期待ショートフォール(信頼水準95%)

| α | リスク指標 | 推計値の 平均値(a) | 推計値の 標準偏差(b) | 相対標準偏差 (c)=(b)/(a) | 推計値の 信頼区間(95%) |
|---------------|------------|----------------|-----------------|-----------------------|-------------------|
| 2.0 (正規分布) | VaR | 1.64 | 0.07 | 0.04 | [1.51 1.77] |
| | 期待ショートフォール | 2.05 | 0.08 | 0.04 | [1.90 2.21] |
| 1.9 | VaR | 1.70 | 0.08 | 0.04 | [1.55 1.85] |
| | 期待ショートフォール | 2.42 | 0.80 | 0.33 | [2.06 3.14] |
| 1.8 | VaR | 1.77 | 0.09 | 0.05 | [1.60 1.95] |
| | 期待ショートフォール | 2.90 | 1.81 | 0.63 | [2.28 4.20] |
| 1.7 | VaR | 1.86 | 0.11 | 0.06 | [1.67 2.08] |
| | 期待ショートフォール | 3.53 | 3.84 | 1.09 | [2.58 5.60] |
| 1.6 | VaR | 1.98 | 0.13 | 0.07 | [1.75 2.26] |
| | 期待ショートフォール | 4.39 | 8.34 | 1.90 | [2.96 7.62] |
| 1.5 | VaR | 2.15 | 0.16 | 0.08 | [1.86 2.50] |
| | 期待ショートフォール | 5.67 | 19.31 | 3.41 | [3.48 10.71] |
| 1.4 | VaR | 2.38 | 0.21 | 0.09 | [2.02 2.82] |
| | 期待ショートフォール | 7.71 | 48.95 | 6.35 | [4.16 15.76] |
| 1.3 | VaR | 2.68 | 0.26 | 0.10 | [2.22 3.25] |
| | 期待ショートフォール | 11.46 | 139.60 | 12.19 | [5.10 25.13] |
| 1.2 | VaR | 3.08 | 0.34 | 0.11 | [2.49 3.85] |
| | 期待ショートフォール | 19.79 | 463.10 | 23.40 | [6.48 42.45] |
| 1.1 | VaR | 3.65 | 0.46 | 0.13 | [2.86 4.67] |
| | 期待ショートフォール | 44.41 | 1,866.40 | 42.03 | [8.59 81.44] |

表2 対称安定分布を仮定した場合のVaRおよび期待ショートフォール(信頼水準99%)

| α | リスク指標 | 推計値の 平均値(a) | 推計値の 標準偏差(b) | 相対標準偏差 (c)=(b)/(a) | 推計値の 信頼区間(95%) |
|---------------|------------|----------------|-----------------|-----------------------|-------------------|
| 2.0 (正規分布) | VaR | 2.30 | 0.12 | 0.05 | [2.09 2.54] |
| | 期待ショートフォール | 2.62 | 0.14 | 0.05 | [2.36 2.90] |
| 1.9 | VaR | 2.57 | 0.20 | 0.08 | [2.25 3.03] |
| | 期待ショートフォール | 3.94 | 3.68 | 0.93 | [2.70 7.02] |
| 1.8 | VaR | 3.00 | 0.35 | 0.12 | [2.47 3.86] |
| | 期待ショートフォール | 5.58 | 8.36 | 1.50 | [3.27 11.25] |
| 1.7 | VaR | 3.61 | 0.55 | 0.15 | [2.78 4.94] |
| | 期待ショートフォール | 7.70 | 17.74 | 2.30 | [4.05 16.84] |
| 1.6 | VaR | 4.40 | 0.78 | 0.18 | [3.23 6.29] |
| | 期待ショートフォール | 10.66 | 38.62 | 3.62 | [5.01 25.03] |
| 1.5 | VaR | 5.41 | 1.08 | 0.20 | [3.81 8.00] |
| | 期待ショートフォール | 15.16 | 89.50 | 5.91 | [6.31 37.93] |
| 1.4 | VaR | 6.76 | 1.49 | 0.22 | [4.56 10.37] |
| | 期待ショートフォール | 22.76 | 226.92 | 9.97 | [8.02 60.08] |
| 1.3 | VaR | 8.63 | 2.10 | 0.24 | [5.58 13.64] |
| | 期待ショートフォール | 37.59 | 647.21 | 17.22 | [10.39 100.13] |
| 1.2 | VaR | 11.34 | 3.04 | 0.27 | [7.00 18.77] |
| | 期待ショートフォール | 72.74 | 2,147.04 | 29.52 | [13.90 176.21] |
| 1.1 | VaR | 15.53 | 4.63 | 0.30 | [9.09 26.85] |
| | 期待ショートフォール | 181.77 | 8,653.26 | 47.61 | [19.63 351.63] |

図2 対称安定分布における推計値の相対標準偏差（信頼水準95%）
（実線：期待ショートフォール、破線：VaR）

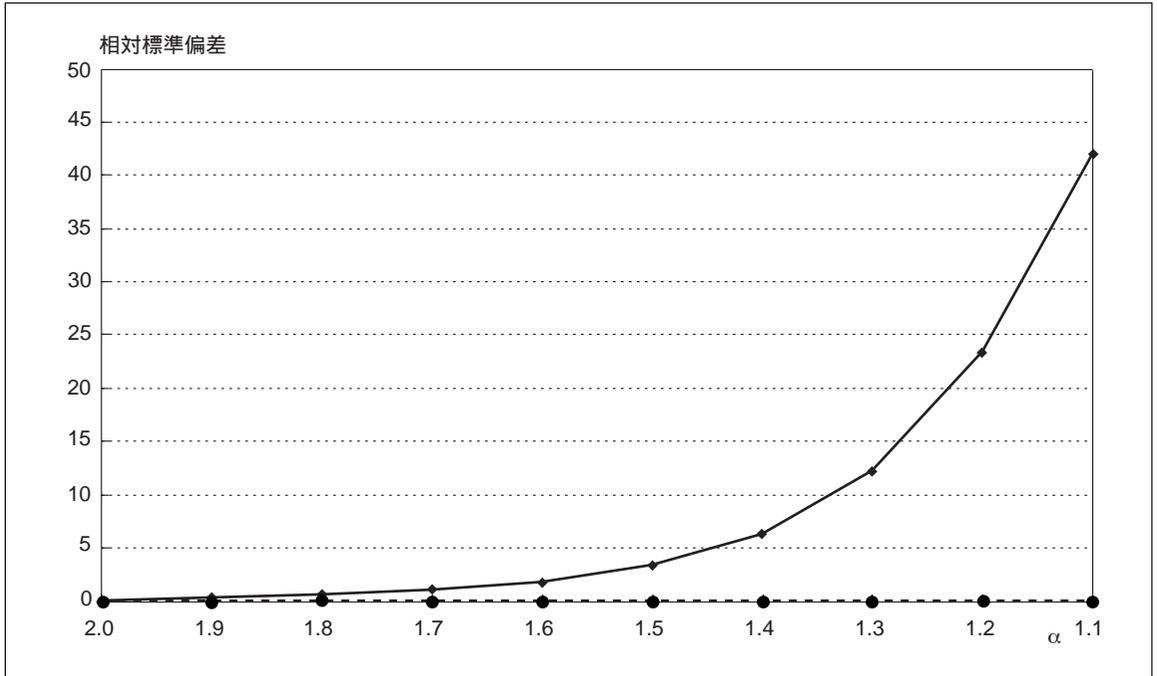


図3 対称安定分布における推計値の相対標準偏差（信頼水準95%） 1.9 2の拡大図
（実線：期待ショートフォール、破線：VaR）

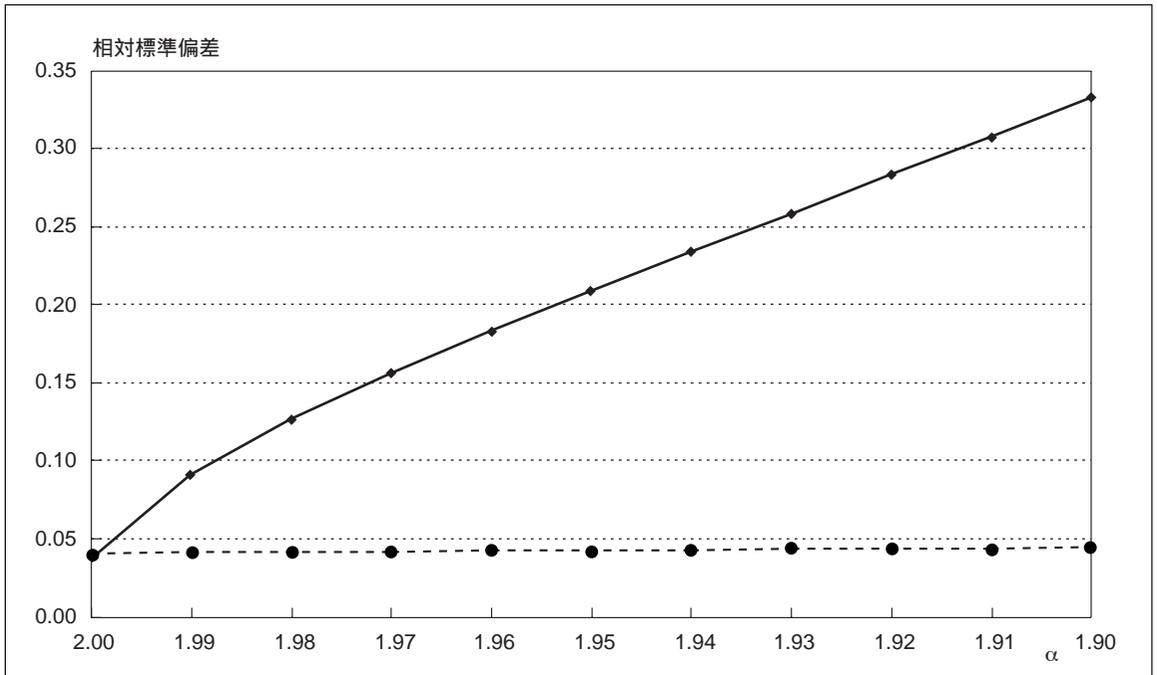


図4 対称安定分布における推計値の相対標準偏差（信頼水準99%）
（実線：期待ショートフォール、破線：VaR）

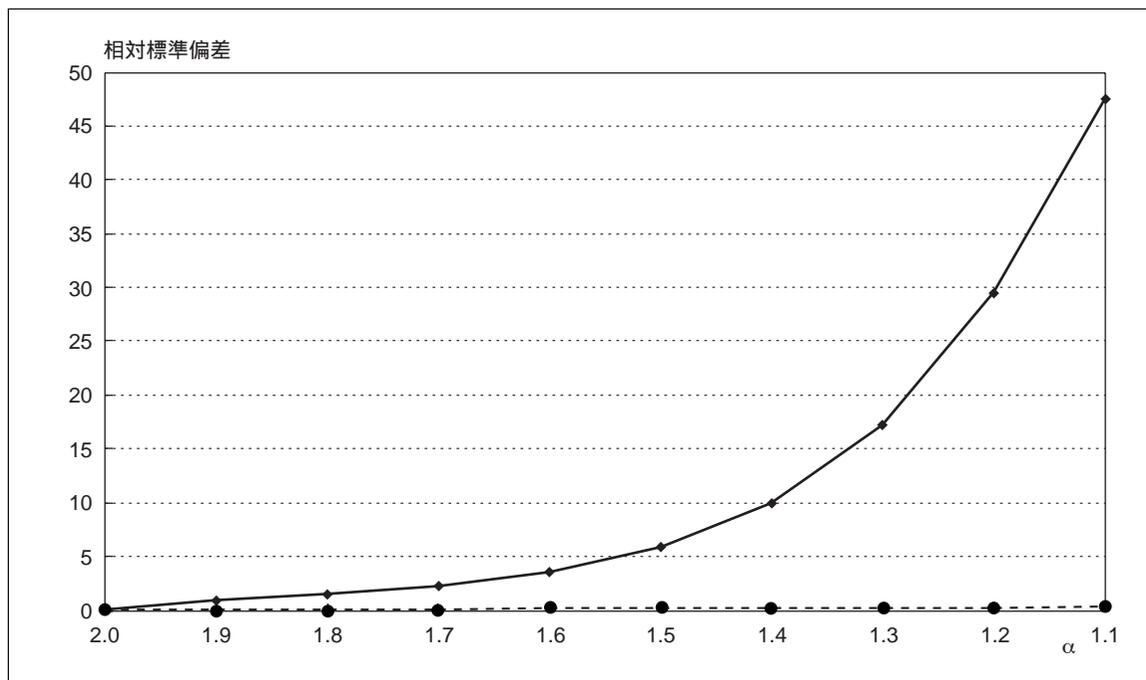
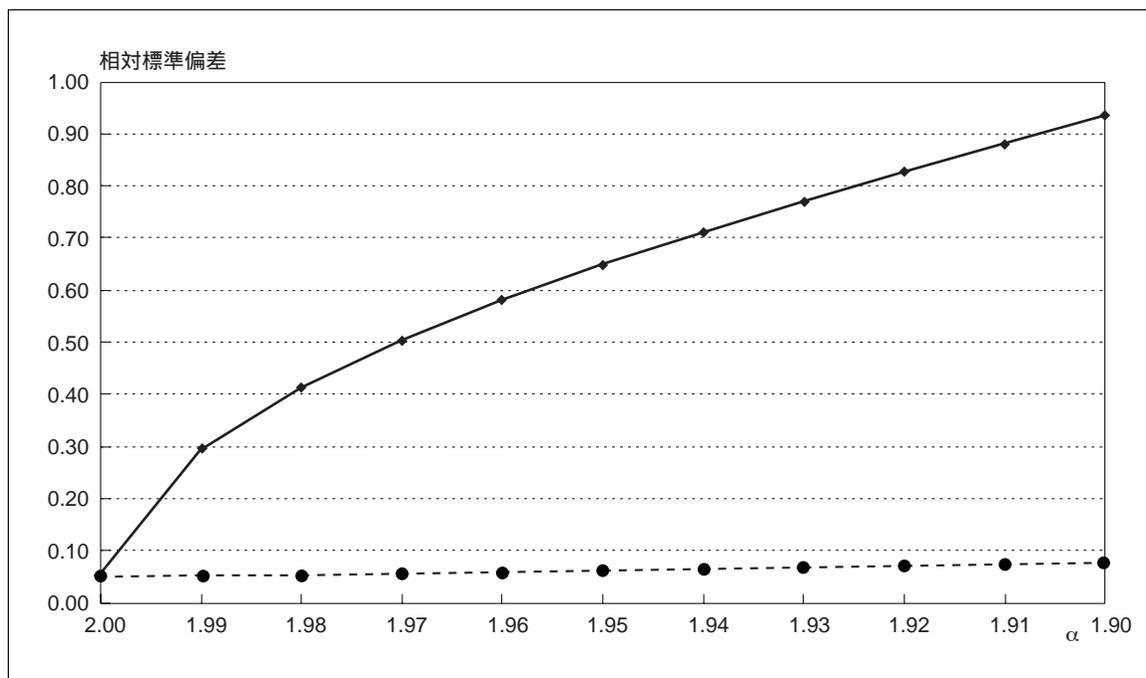


図5 対称安定分布における推計値の相対標準偏差（信頼水準99%） 1.9 2の拡大図
（実線：期待ショートフォール、破線：VaR）



標準偏差がシミュレーション回数の増加に応じて減少すれば、シミュレーション回数を増やすことにより推計値の安定性を高められる可能性が高い。

結果は、表3～4、図6のとおりである。それぞれの相対標準偏差（標準偏差/平均値）をみると、シミュレーション回数が増加するに従って相対標準偏差が減少しており、期待ショートフォールの推計値の安定性が増していることがわかる¹¹。したがって、シミュレーション回数を増やすことにより、期待ショートフォールの推計値の安定性を高められると推測できる¹²。

表3 対称安定分布を仮定した場合の期待ショートフォールの収束（信頼水準95%）

| シミュレーション回数 | $\alpha=2.0$ | | $\alpha=1.5$ | | $\alpha=1.1$ | |
|------------|--------------|---------------|--------------|----------------|--------------|-----------------|
| | 相対標準偏差 | 推計値の信頼区間(95%) | 相対標準偏差 | 推計値の信頼区間(95%) | 相対標準偏差 | 推計値の信頼区間(95%) |
| 1,000回 | 0.04 | [1.90 2.21] | 3.41 | [3.48 10.71] | 42.03 | [8.59 81.44] |
| 10,000回 | 0.01 | [2.01 2.11] | 0.47 | [4.51 8.01] | 8.29 | [14.02 75.20] |
| 100,000回 | 0.00 | [2.05 2.08] | 0.15 | [5.09 6.91] | 2.07 | [18.80 76.69] |
| 1,000,000回 | 0.00 | [2.06 2.07] | 0.05 | [5.41 6.28] | 0.64 | [22.64 71.65] |

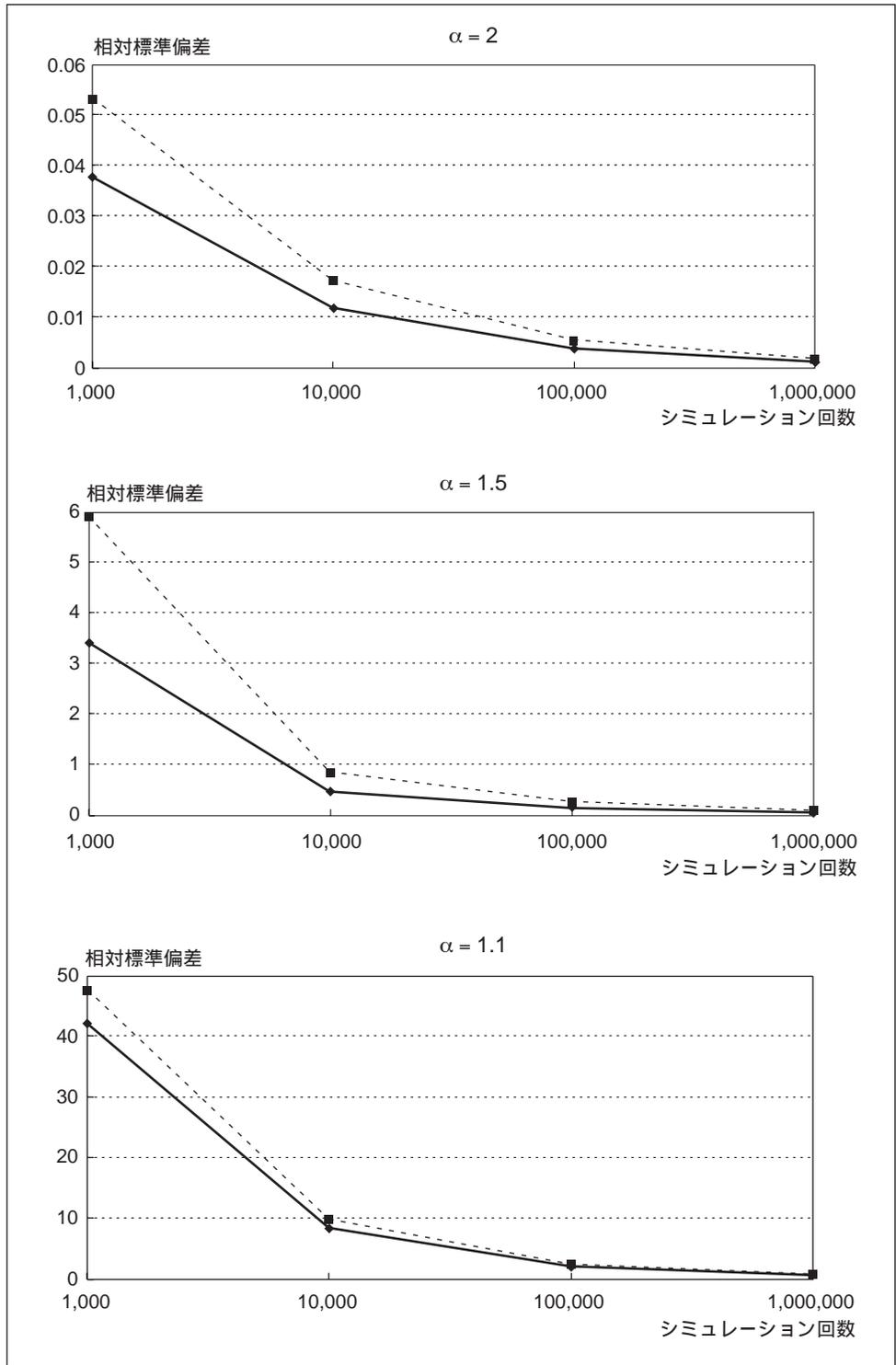
表4 対称安定分布を仮定した場合の期待ショートフォールの収束（信頼水準99%）

| シミュレーション回数 | $\alpha=2.0$ | | $\alpha=1.5$ | | $\alpha=1.1$ | |
|------------|--------------|---------------|--------------|-----------------|--------------|------------------|
| | 相対標準偏差 | 推計値の信頼区間(95%) | 相対標準偏差 | 推計値の信頼区間(95%) | 相対標準偏差 | 推計値の信頼区間(95%) |
| 1,000回 | 0.05 | [2.36 2.90] | 5.91 | [6.31 37.93] | 47.61 | [19.63 351.63] |
| 10,000回 | 0.02 | [2.57 2.75] | 0.84 | [10.40 27.33] | 9.91 | [43.86 346.70] |
| 100,000回 | 0.01 | [2.64 2.69] | 0.26 | [13.07 22.08] | 2.50 | [66.87 356.04] |
| 1,000,000回 | 0.00 | [2.67 2.67] | 0.10 | [14.58 18.96] | 0.78 | [85.99 330.92] |

11 なお、表3より、損益額が特性指数 $\alpha=1.5$ の対称安定分布に従う場合、シミュレーション回数1,000回のVaR（信頼水準95%）の推計値と同程度の安定性（相対標準偏差：0.08）を期待ショートフォール（信頼水準95%）の推計値で確保するためには、数十万回から1百万回程度のシミュレーション回数（VaRの場合の数百倍から1千倍程度）が必要であることがわかる。

12 この結果は、Acerbi and Tasche [2001] の「期待ショートフォールの推計値はシミュレーション回数を増やすと確率1で収束する（Proposition 3.1）」という定理と整合的である。

図6 対称安定分布を仮定した時の期待ショートフォールの推計値の収束
 (実線：信頼水準95%、破線：信頼水準99%)



4. 期待ショートフォールの推計の具体例

本節では、3節の考察を踏まえ、具体的なサンプル・ポートフォリオの期待ショートフォールの算出を行い、推計値の安定性をさらに考察する。ここではサンプル・ポートフォリオとして、米国株オプション・ポートフォリオと与信ポートフォリオを取り上げる。

(1) 米国株オプション・ポートフォリオ

サンプル・ポートフォリオは、米国株式3銘柄（ジェネラル・エレクトリック GE、マクドナルド、インテル）とこれらを原資産とする個別株オプションのショート・ポジションからなるポートフォリオである（表5参照）。このポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールをシミュレーションにより計測する。各銘柄の株価収益率をリスク・ファクターとし、これらが多変量正規分布に従うと仮定する。リスク・ファクターの分散・共分散行列はヒストリカル・データから推計する。保有期間は1日で、ボラティリティは保有期間中一定であるとする（シミュレーション方法の詳細は補論2を参照）。図7は当該ポートフォリオの損益額のヒストグラムである。コール・オプションのショート・ポジションがポートフォリオに含まれているため、損益額分布が大きく左に歪んでいる。

表5 オプション・ポートフォリオ

| | 満期までの 期間(日) | ストライク (米ドル) | 価格 (オプション・ プレミアム、ドル) | 投資金額 (千米ドル) | ポジション (千枚) |
|------------------|----------------|----------------|----------------------------|----------------|---------------|
| GE株式 | | | 49-13/16 | 1,000 | 20.1 |
| マクドナルド株式 | | | 31-1/4 | 1,000 | 32.0 |
| インテル株式 | | | 42-1/32 | 1,000 | 23.8 |
| GE株コール・オプション | 18 | 50.00 | 2 | -100 | -50.0 |
| マクドナルド株コール・オプション | 18 | 30.00 | 1-3/4 | -100 | -57.1 |
| インテル株コール・オプション | 18 | 40.00 | 3-1/2 | -100 | -28.6 |

備考：価格（2000年11月28日時点）はブルームバーグ社から取得。

表6～7は、当該ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールをシミュレーションにより推計した結果である。それぞれ、1,000回、10,000回、100,000回のシミュレーションを1,000セット行い、得られた1,000個の推計値について、平均、標準偏差および95%信頼区間を求めた。相対標準偏差をみると、VaRと期待ショートフォールはほぼ同水準であることがわかる。この結果は、3節の計算例で損失額が正規分布に従う場合（特性指数 $\alpha=2$ ）と類似している。これは、期待ショートフォールの推計が損失額分布の右裾のデータのみを利用するが、分布が全体で非正規性を示しつつも、オプションの行使価格が現在の株価に近いことから右裾の部分が正規分布に近い形状を持っているためである。

図7 サンプル・ポートフォリオの損益額分布
(シミュレーション回数10,000回)

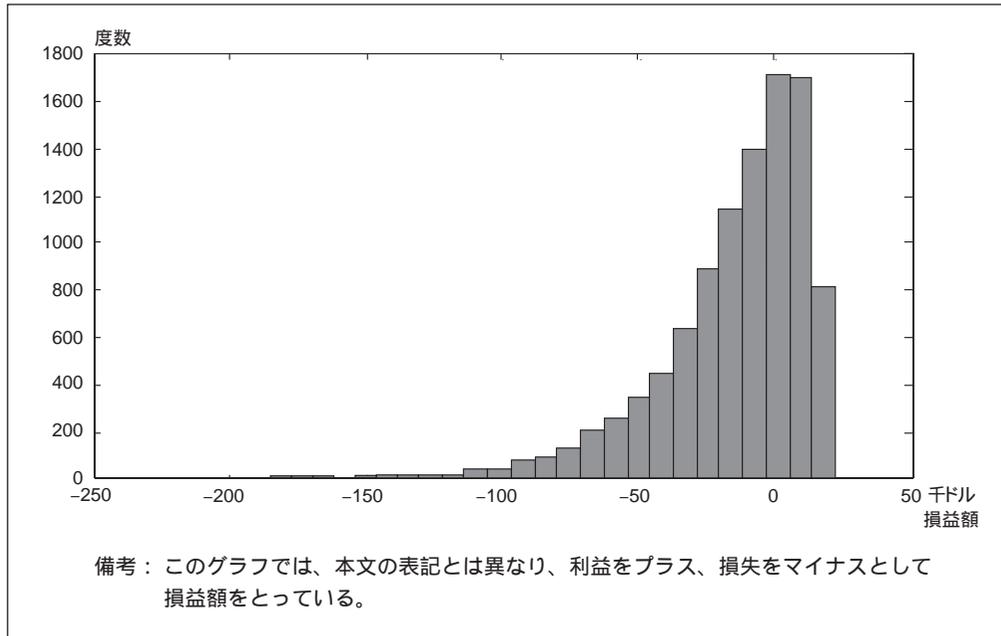


表6 オプション・ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールの推計結果
(信頼水準95%)

| シミュレーション回数 | リスク指標 | 推計値の 平均値(a) | 推計値の 標準偏差(b) | 相対標準偏差 (c)=(b)/(a) | 推計値の 信頼区間(95%) |
|------------|------------|----------------|-----------------|-----------------------|-------------------|
| 1,000回 | VaR | 68.33 | 3.34 | 0.0489 | [61.72 75.03] |
| | 期待ショートフォール | 91.20 | 4.63 | 0.0508 | [82.44 100.30] |
| 10,000回 | VaR | 68.18 | 1.05 | 0.0154 | [66.10 70.22] |
| | 期待ショートフォール | 91.56 | 1.38 | 0.0151 | [88.97 94.26] |
| 100,000回 | VaR | 68.15 | 0.33 | 0.0049 | [67.51 68.81] |
| | 期待ショートフォール | 91.57 | 0.46 | 0.0050 | [90.73 92.50] |

表7 オプション・ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールの推計結果
(信頼水準99%)

| シミュレーション回数 | リスク指標 | 推計値の 平均値(a) | 推計値の 標準偏差(b) | 相対標準偏差 (c)=(b)/(a) | 推計値の 信頼区間(95%) |
|------------|------------|----------------|-----------------|-----------------------|-------------------|
| 1,000回 | VaR | 107.00 | 7.50 | 0.0701 | [93.16 123.31] |
| | 期待ショートフォール | 127.10 | 9.47 | 0.0745 | [109.94 146.46] |
| 10,000回 | VaR | 106.23 | 2.28 | 0.0215 | [101.82 110.81] |
| | 期待ショートフォール | 128.35 | 3.10 | 0.0242 | [122.46 134.68] |
| 100,000回 | VaR | 105.97 | 0.71 | 0.0067 | [104.53 107.37] |
| | 期待ショートフォール | 128.28 | 0.99 | 0.0078 | [126.30 130.31] |

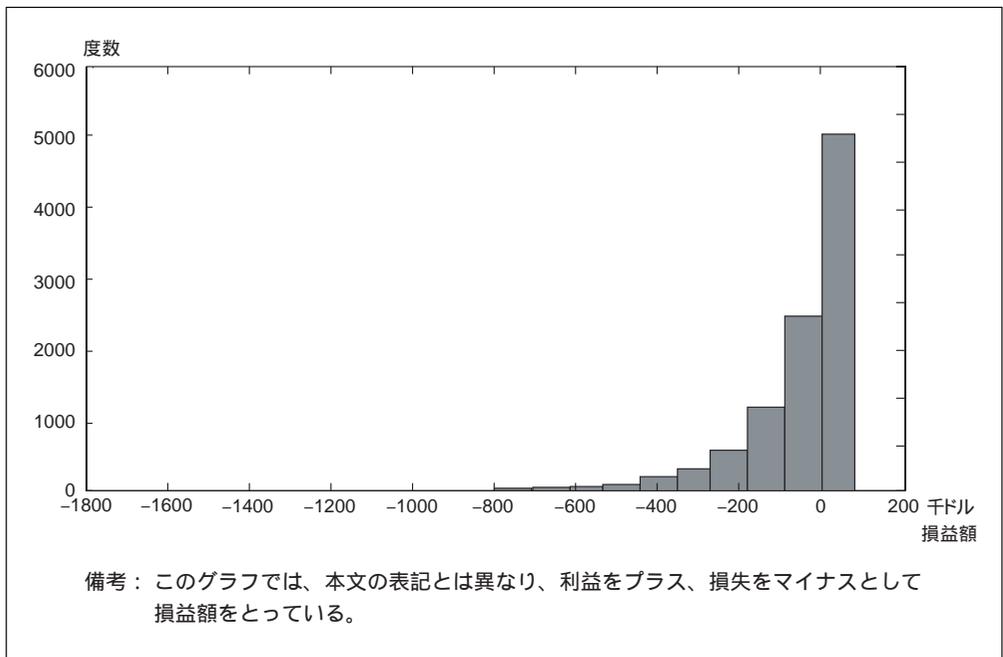
次に、表5のサンプル・ポートフォリオのオプションをファー・アウト・オブ・ザ・マネー（以下、ファー・アウト）のオプション¹³としたサンプル・ポートフォリオ(表8)のリスク計測を考察する。図8は当該ポートフォリオの損益額のヒストグラムである。オプションがファー・アウトとなったため、損益額分布が図7に比べ大きく左に歪んでいる。

表8 ファー・アウトのオプション・ポートフォリオ

| | 満期までの 期間(日) | ストライク (米ドル) | 価格 (オプション・ プレミアム、ドル) | 投資金額 (千米ドル) | ポジション (千枚) |
|------------------|----------------|----------------|----------------------------|----------------|---------------|
| GE株式 | | | 49-13/16 | 1,000 | 20.1 |
| マクドナルド株式 | | | 31-1/4 | 1,000 | 32.0 |
| インテル株式 | | | 42-1/32 | 1,000 | 23.8 |
| GE株コール・オプション | 18 | 58-3/8 | 3/16 | -100 | -533.3 |
| マクドナルド株コール・オプション | 18 | 40 | 1/16 | -100 | -1,600.0 |
| インテル株コール・オプション | 18 | 55 | 1/16 | -100 | -1,600.0 |

備考：価格（2000年11月28日時点）はブルームバーグ社から取得。

図8 ファー・アウトのオプション・ポートフォリオの損益額分布
(シミュレーション回数10,000回)



13 株価が対数正規分布に従い、そのボラティリティがヒストリカル・ボラティリティに等しいと仮定すると、保有期間（1日）中に株価がこれらファー・アウトのオプションの行使価格に達する確率は0.01%以下である。

表9～10は、表5のサンプル・ポートフォリオと同様の方法で当該ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールをシミュレーションにより推計した結果である。これをみると、オプションをファー・アウトとしたことにより、期待ショートフォールの推計値がVaRの推計値に比べて相対的に不安定化することがわかる。これに対しては以下の解釈が可能である。ショート・ポジションをとっているオプションをファー・アウトにすると、このオプションから発生する損失の発生確率が低くなる。一方、ここではオプションのショート・ポジションの金額を一定としているため、オプション・プレミアムの減少をカバーするためのショート・ポジション枚数の大幅な増加から、ここから発生し得る損失額は大きくなる。この結果、オプションをファー・アウトにすることにより損失額分布の裾は厚くなり、3節で考察した結果（損失額分布の裾が厚くなると期待ショートフォールの推計値が不安定化する）から期待ショートフォールの推計値は不安定化すると考えられる。したがって、ファー・アウトのオプションを含むポートフォリオの期待ショートフォールを推計する場合は、VaRを推計する場合に比べより多くのシミュレーション回数を確保する必要がある。

表9 ファー・アウトのオプション・ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールの推計結果（信頼水準95%）

| シミュレーション回数 | リスク指標 | 推計値の 平均値(a) | 推計値の 標準偏差(b) | 相対標準偏差 (c)=(b)/ (a) | 推計値の 信頼区間(95%) |
|------------|------------|------------------|-------------------|------------------------------|---------------------|
| 1,000回 | VaR | 334.62 | 22.01 | 0.0658 | [293.70 380.86] |
| | 期待ショートフォール | 500.46 | 35.00 | 0.0699 | [433.38 571.32] |
| 10,000回 | VaR | 332.56 | 7.06 | 0.0212 | [318.53 346.88] |
| | 期待ショートフォール | 502.01 | 11.17 | 0.0222 | [481.57 524.05] |
| 100,000回 | VaR | 332.26 | 2.15 | 0.0065 | [328.14 336.70] |
| | 期待ショートフォール | 502.19 | 3.45 | 0.0069 | [495.53 509.05] |

表10 ファー・アウトのオプション・ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールの推計結果（信頼水準99%）

| シミュレーション回数 | リスク指標 | 推計値の 平均値(a) | 推計値の 標準偏差(b) | 相対標準偏差 (c)=(b)/ (a) | 推計値の 信頼区間(95%) |
|------------|------------|------------------|-------------------|------------------------------|---------------------|
| 1,000回 | VaR | 612.56 | 58.08 | 0.0948 | [506.46 739.03] |
| | 期待ショートフォール | 781.31 | 85.48 | 0.1094 | [625.85 964.29] |
| 10,000回 | VaR | 602.79 | 18.42 | 0.0306 | [566.84 639.76] |
| | 期待ショートフォール | 790.73 | 27.46 | 0.0347 | [738.77 849.00] |
| 100,000回 | VaR | 602.25 | 5.57 | 0.0093 | [591.23 613.17] |
| | 期待ショートフォール | 792.14 | 9.13 | 0.0115 | [774.75 810.97] |

(2) 与信ポートフォリオ

次の具体例として、仮想的な与信ポートフォリオ（表11）を考える。このポートフォリオは、デフォルト率が同一（1%または0.1%）の1,000個の貸出で構成され、各貸出は平均1億円の指数分布に従うとする（貸出額の分布図は図9）。また、これら与信先間のデフォルト事象の相関は定数（0.00、0.03、0.05）であると仮定する。損失額分布の裾はこのデフォルト相関が高いほど厚くなる（家田・丸茂・吉羽[2000]を参照）。損失の定義は、債務者のデフォルトが生じる場合にのみ損失が発生するとみなすデフォルト・モードとする。リスク量は、家田・丸茂・吉羽[2000]で採用されたシュミレーション手法を使って行う。

表12～15は、サンプル・ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールの推計結果である。それぞれ、1,000回のシュミレーションを1,000セット行い、得られた1,000個の推計値について、平均、標準偏差および95%信頼区間を求めた（シュミレーション方法の詳細は補論3を参照）。

まず、表12～13（デフォルト率：1%）をみると、信頼水準95%では、VaRおよび期待ショートフォールの相対標準偏差には、デフォルト相関の水準によらず、大きな違いがない。一方、信頼水準99%では、特にデフォルト相関が高いと、期待ショートフォールとVaRの相対標準偏差の差は信頼水準95%の場合に比べて大きくなっている。一方、表14～15（デフォルト率：0.1%）をみると、いずれの信頼水準でも、デフォルト相関が0.03、0.05の場合、期待ショートフォールの相対標準偏差がVaRのそれを大きく上回っている。つまり、デフォルト率が低い場合とデフォルト相関が高い場合には、期待ショートフォールの推計値が不安定化することがわかる。

この結果に関して、以下の解釈が可能である。まず、デフォルト率が低いと、損失の発生確率も低くなる。期待ショートフォールの推計値は、シュミレーション回数の中で損失が発生するか否かに依存する。したがって、期待ショートフォールの推計では、損失の発生確率が低くなると、損失発生を安定的に再現できるほど十分なシュミレーション回数を確保する必要性が高まるため、同じ回数のシュミレーションでは、VaRに比べて期待ショートフォールの推計値が不安定化する。また、デフォルト相関が高いと、損失額分布の裾は厚くなる（家田・丸茂・吉羽[2000]を参照）ことから、3節で考察した結果（損失額分布の裾が厚くなると期待ショートフォールの推計値が不安定化する）により、推計値が不安定化することがわかる。したがって、ここでの例のような与信ポートフォリオの期待ショートフォールを推計する場合は、VaRを推計する場合に比べより多くのシュミレーション回数が必要となる。

表11 与信ポートフォリオ

| | |
|------------------|---|
| エクスポージャー総額 | 1,000億円 |
| エクスポージャー数 | 1,000先 |
| 個別与信先へのエクスポージャー額 | 平均1億円の指数分布に従う |
| 損失額の定義 | デフォルト・モード（リスク評価期間内に債務者のデフォルトが生じる場合にのみ損失が発生） |
| 回収率 | ゼロ |
| デフォルト事象の発生 | 個々のエクスポージャー間のデフォルト相関は一定で、 $\rho = 0.00, 0.03, 0.05$ をとると仮定。 |

図9 サンプル・与信ポートフォリオのエクスポージャーの分布

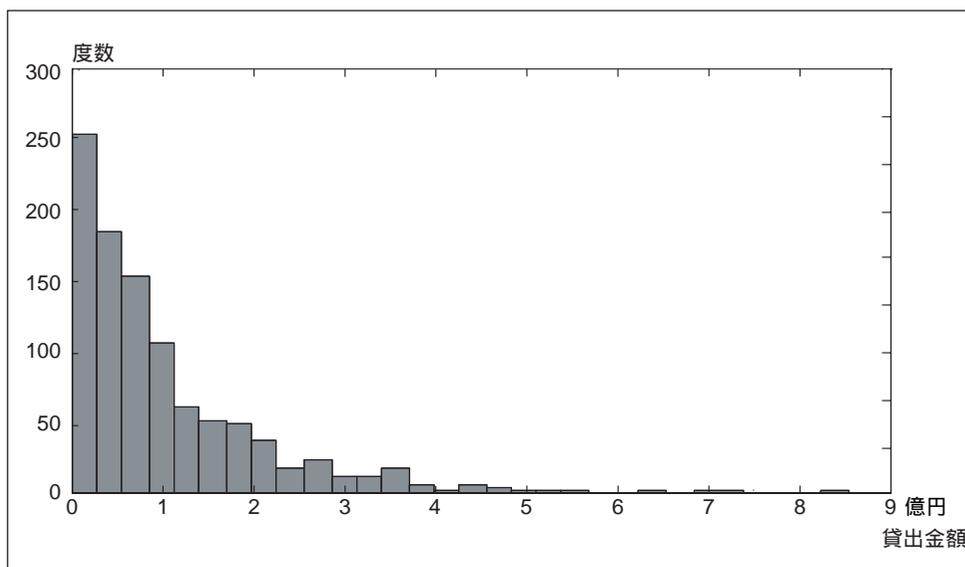


表12 与信ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールの推計結果
(信頼水準95%、デフォルト率1%、シミュレーション回数1,000回)

| デフォルト相関 | リスク指標 | 推計値の 平均値(a) | 推計値の 標準偏差(b) | 相対標準偏差 (c)=(b)/(a) | 推計値の 信頼区間(95%) |
|---------|------------|----------------|-----------------|-----------------------|-------------------|
| 0.00 | VaR | 18.28 | 0.43 | 0.0233 | [17.39 19.10] |
| | 期待ショートフォール | 20.99 | 0.52 | 0.0248 | [20.03 22.02] |
| 0.03 | VaR | 41.03 | 3.13 | 0.0763 | [35.05 47.45] |
| | 期待ショートフォール | 69.09 | 5.98 | 0.0865 | [57.71 81.80] |
| 0.05 | VaR | 45.79 | 4.37 | 0.0955 | [37.95 54.62] |
| | 期待ショートフォール | 86.16 | 8.79 | 0.1021 | [71.37 104.95] |

表13 与信ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールの推計結果
(信頼水準99%、デフォルト率1%、シミュレーション回数1,000回)

| デフォルト相関 | リスク指標 | 推計値の 平均値(a) | 推計値の 標準偏差(b) | 相対標準偏差 (c)=(b)/(a) | 推計値の 信頼区間(95%) |
|---------|------------|----------------|-----------------|-----------------------|-------------------|
| 0.00 | VaR | 22.65 | 0.79 | 0.0350 | [21.21 24.33] |
| | 期待ショートフォール | 24.90 | 1.02 | 0.0408 | [22.99 26.99] |
| 0.03 | VaR | 85.03 | 9.79 | 0.1151 | [67.39 106.34] |
| | 期待ショートフォール | 117.55 | 15.90 | 0.1353 | [89.42 151.08] |
| 0.05 | VaR | 108.34 | 14.31 | 0.1321 | [83.53 141.34] |
| | 期待ショートフォール | 158.03 | 23.53 | 0.1489 | [118.87 208.67] |

表14 与信ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールの推計結果
(信頼水準95%、デフォルト率0.1%、シミュレーション回数1,000回)

| デフォルト相関 | リスク指標 | 推計値の 平均値(a) | 推計値の 標準偏差(b) | 相対標準偏差 (c)=(b)/(a) | 推計値の 信頼区間(95%) |
|---------|------------|----------------|-----------------|-----------------------|-------------------|
| 0.00 | VaR | 3.99 | 0.20 | 0.0508 | [3.62 4.38] |
| | 期待ショートフォール | 5.45 | 0.28 | 0.0522 | [4.93 6.04] |
| 0.03 | VaR | 4.72 | 0.71 | 0.1500 | [3.50 6.37] |
| | 期待ショートフォール | 15.54 | 3.15 | 0.2029 | [10.26 22.52] |
| 0.05 | VaR | 3.92 | 0.72 | 0.1826 | [2.74 5.53] |
| | 期待ショートフォール | 17.32 | 4.23 | 0.2444 | [10.74 27.30] |

表15 与信ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールの推計結果
(信頼水準99%、デフォルト率0.1%、シミュレーション回数1,000回)

| デフォルト相関 | リスク指標 | 推計値の 平均値(a) | 推計値の 標準偏差(b) | 相対標準偏差 (c)=(b)/(a) | 推計値の 信頼区間(95%) |
|---------|------------|----------------|-----------------|-----------------------|-------------------|
| 0.00 | VaR | 6.37 | 0.48 | 0.0757 | [5.53 7.37] |
| | 期待ショートフォール | 7.70 | 0.59 | 0.0769 | [6.59 8.89] |
| 0.03 | VaR | 19.40 | 4.25 | 0.2189 | [12.74 29.76] |
| | 期待ショートフォール | 39.62 | 11.45 | 0.2891 | [22.20 66.87] |
| 0.05 | VaR | 21.11 | 5.43 | 0.2574 | [12.83 33.21] |
| | 期待ショートフォール | 49.32 | 16.06 | 0.3257 | [25.82 88.95] |

5. VaRおよび期待ショートフォールのリスク・ファクターへの分解

ポートフォリオ全体のリスク量に、各リスク・ファクターがどの程度寄与しているかを計測する方法があれば、これを経営判断などに活用することが考えられる。例えば、各リスク・ファクターのリスク寄与度に応じて、リスク資本を配分することなどが考えられる¹⁴。

本節では、VaRおよび期待ショートフォールに対する各リスク・ファクターの寄与度の算出（以下では、リスク量の各リスク・ファクターへの「分解」と呼ぶ）方法を説明し、この計算例を4節(1)の米国株オプション・ポートフォリオを用いて示す。

(1) VaRのリスク・ファクターへの分解

Hallerbach [1999] およびTasche [2000] は、シミュレーションでリスク量を算出する際に、VaRおよび期待ショートフォールをリスク・ファクターに分解する方法を提示した¹⁵。ここでは、Tasche [2000] の説明を用いてこの方法を紹介する。

まず、ポートフォリオの損失額 X は、各リスク・ファクター i の変動に伴う損失額 X_i の線形和、すなわち、

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \omega_i, \quad (3)$$

X : ポートフォリオ全体の損失額,

X_i : リスク・ファクター i の変動に伴う損失額¹⁶

ω_i : リスク・ファクター i に対するポートフォリオのセンシティビティ

であると仮定する。このとき、ポートフォリオのVaRはリスク・ファクター i に対するポートフォリオのセンシティビティ ω_i の1次同次関数であることから、

$$VaR_\alpha(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial VaR_\alpha(X)}{\partial \omega_i} \cdot \omega_i, \quad (4)$$

が成立する。つまり、ポートフォリオのVaRを $\partial VaR / \partial \omega_i$ (ω_i を1単位変化させた時

14 リスク量の分解の考え方は、Garman [1997] で示されている。なお、後述する限界VaR (marginal VaR)、構成要素VaR (component VaR) などの用語はGarman [1997] によっている。

15 Hallerbach [1999] およびTasche [2000] が提案した各リスク・ファクターのリスク量の寄与度の計算方法を解説したものに、室町 [2001] がある。

16 例えば、ある銘柄の株式を1,000株（購入時の価格：1株1,500円、現在の価格：同1,200円）持っているとする。この株式に起因する損失額は $X_i=300$ 円、センシティビティは保有株数である $\omega_i=1,000$ 株として考えることができる（逆に、この株式が1株2,000円に値上がりしている場合の損失額は、 $X_i=-500$ 円と考えることができる）。

のVaRの限界的変化額)と ω_i の積の和に分解できることがわかる¹⁷。

Tasche [2000] は、一定の条件¹⁸で以下の関係が成立することを証明した。

限界VaR (marginal VaR)

信頼水準 $100(1-\alpha)\%$ のVaRの ω_i による偏微分 (限界VaR、 $M-VaR_i$ とする) は、次の条件付期待値の形で表せる (Remark 5.4, Tasche [2000])

$$M-VaR_i = \frac{\partial VaR_\alpha(X)}{\partial \omega_i} = E [X_i | X = VaR_\alpha(X)]. \quad (5)$$

したがって、VaRの各リスク・ファクターへの分解は、(5)式の最右辺の推計が行えれば、その推計値を使って(6)式で行うことができる。

$$VaR_\alpha(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial VaR_\alpha(X)}{\partial \omega_i} \cdot \omega_i = \sum_{i=1}^n E [X_i | X = VaR_\alpha(X)] \cdot \omega_i. \quad (6)$$

ここで、 $(\partial VaR_\alpha(X) / \partial \omega_i) \cdot \omega_i$ は、全体のVaRに対するリスク・ファクター i の寄与分と考えることができる¹⁹。このことから、構成要素VaR (component VaR) を以下に定義する。

構成要素VaR (component VaR)

ポートフォリオのVaRに占めるリスク・ファクター i の寄与分 (構成要素VaR、 $C-VaR_i$ とする) を次のように定義する。

$$C-VaR_i = \frac{\partial VaR_\alpha(X)}{\partial \omega_i} \cdot \omega_i = E [X_i | X = VaR_\alpha(X)] \cdot \omega_i. \quad (7)$$

しかし、シミュレーションで得られる離散的な損失額分布から(5)式の最右辺を推計することは一般には困難である。これは、 $X = VaR_\alpha(X)$ という条件のみから条件付期待値を推計することが難しいためである。このため、Hallerbach [1999] のように、ポートフォリオの損失額がVaR近傍をとる事象を集めてそのデータから条件付期待値を推計する、といった工夫が必要となる。

17 ここで、リスク・ファクターと損失額との間に非線形関係が存在し、(3)式が成立しない場合、(4)式も一般には成立しない。ただし、オプションなど損失額が原資産価格と非線形な関係にある場合でも、原資産価格のほかオプション・プレミアムを新たにリスク・ファクターの1つとして加えることによりこの方法を応用することができる。

18 具体的には、各リスク・ファクターの同時確率分布の連続性や期待値の有限性などの条件。

19 この考え方では、各リスク・ファクターの寄与分を、 ω_i の微小変化に対するVaRの微小変化の比率である限界VaRにより定義している。したがって、リスク寄与分が相対的に大きいリスク・ファクターでは、リスク寄与度を正確に反映していない可能性がある点に注意を要する。

(2) VaRのリスク・ファクターへの分解の数値例

ここでは、4節の米国株オプション・ポートフォリオ（株式3銘柄および各銘柄を原資産とするコール・オプションのショート・ポジション）のVaRを各証券へ分解する。ここでは、Hallerbach [1999] に従い、ポートフォリオの損失額がVaR近傍をとる事象を集め、それらから条件付期待値を推計し、VaRを分解する。

まず、ポートフォリオの損失額がVaR近傍となる事象を集める。 N 回のシミュレーションのうち j 番目のシミュレーションを $s^j(1 \leq j \leq N)$ と表記する。 j 番目のシミュレーションで得られたポートフォリオの損失額を $X^j(1 \leq j \leq N)$ 、証券 i の損失額を $X_i^j(1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq N)$ とする。さらに、VaRの近傍を $[VaR_\alpha(X) - \varepsilon_d, VaR_\alpha(X) + \varepsilon_u]$ とする。VaRの近傍をとる事象の集合 Γ は、

$$\Gamma = \{ s^j | VaR_\alpha(X) - \varepsilon_d \leq X^j \leq VaR_\alpha(X) + \varepsilon_u \}, \quad (8)$$

である。この集合の要素の数を T とすると、各証券 i の限界VaRは、

$$M-VaR_i = \frac{\partial VaR_\alpha(X)}{\partial \omega_i} = E[X_i | X = VaR_\alpha(X)] \approx \frac{1}{T} \sum_j X_i^j, (s^j \in \Gamma), \quad (9)$$

と近似できる。この推計方法により、10,000回のシミュレーションで求めたポートフォリオの信頼水準95%のVaRの分解を行った²⁰（表16）

表16 サンプル・ポートフォリオにおけるVaR（信頼水準95%）の分解

| | 限界VaR (米ドル/枚) (a) | 投資金額 (千米ドル) | ポジション (千枚) (b) | 構成要素VaR (千米ドル) (c)=(a)x(b) |
|------------------|-------------------------|----------------|----------------------|----------------------------------|
| GE株式 | -2.30 | 1,000 | 20.1 | -46.12 |
| マクドナルド株式 | -1.67 | 1,000 | 32.0 | -53.58 |
| インテル株式 | 0.60 | 1,000 | 23.8 | 14.17 |
| GE株コール・オプション | -1.55 | -100 | -50.0 | 77.50 |
| マクドナルド株コール・オプション | -1.53 | -100 | -57.1 | 87.43 |
| インテル株コール・オプション | 0.37 | -100 | -28.6 | -10.71 |
| 合計 | | 2,700 | | 68.70 |

20 ここでは、(9)式の条件付期待値をVaRの近傍50個（前後25個）の値から推計した。

ここでは、この限界VaRの推計方法を評価するため、ポートフォリオ構成を微小変化させてVaRを再計算して得た限界VaR（「再計算限界VaR」と呼称）との比較を行った（表17）。具体的には、ポートフォリオ構成をわずかに（初期ポートフォリオの保有額から前後に0.1%、0.5%、1%）変化させてVaRを再計算し、このポートフォリオの微小変化に対するVaRの変化率として再計算限界VaRを得た²¹。（9）式を用いて推計した限界VaRと再計算限界VaRとを比べると、インテル株式とインテル株オプションでは符号が逆になる場合があるなど結果が大きく異なっていることがわかる。したがって、（9）式を用いた推計方法では、必ずしもポジションの微小変化に対するVaRの変化率である限界VaRを正確に推計できるとは限らないことになる。

表17 限界VaR（信頼水準95%）の比較

| | 限界VaR (米ドル/枚) | 再計算限界VaR(米ドル/枚) | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|----------------|
| | | 前後への 変化幅:0.1% | 前後への 変化幅:0.5% | 前後への 変化幅:1% |
| GE株式 | -2.30 | -1.20 | -0.44 | -1.60 |
| マクドナルド株式 | -1.67 | -2.75 | -2.55 | -1.86 |
| インテル株式 | 0.60 | -0.37 | 0.33 | 0.46 |
| GE株コール・オプション | -1.55 | -1.05 | -0.82 | -1.20 |
| マクドナルド株コール・オプション | -1.53 | -2.20 | -1.46 | -1.64 |
| インテル株コール・オプション | 0.37 | -0.14 | 0.12 | 0.50 |

(3) 期待ショートフォールのリスク・ファクターへの分解

同様に、Tasche [2000] は期待ショートフォールをリスク・ファクターに分解する方法を示した。以下、この方法を説明する。まず、(3)式が同様に成立しているとする。 $ES_{\alpha}(X)$ は ω の1次同次関数であるので、(10)式が成立する。

$$ES_{\alpha}(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial ES_{\alpha}(X)}{\partial \omega_i} \cdot \omega_i \quad (10)$$

Tasche [2000] は、VaRの場合と同様に、一定の条件²²で以下の関係が成立することを証明した。

21 同じ乱数列を用いてシミュレートしているので、限界VaRと再計算限界VaRとの差は、(9)式の推計誤差である。

22 条件はVaRの場合と同じである。

限界期待ショートフォール (marginal expected shortfall)
 信頼水準 $100(1-\alpha)\%$ の期待ショートフォールの ω_i による偏微分 (限界期待ショート
 フォール、 $M-ES_i$ とする) は、以下の条件付期待値の形で表わされる
 (Remark 5.4, Tasche [2000])、

$$M-ES_i = \frac{\partial ES_\alpha(X)}{\partial \omega_i} = E[X_i | X \geq VaR_\alpha(X)]. \quad (11)$$

したがって、期待ショートフォールの各リスク・ファクターへの分解は、以下の
 形で行うことができる²³。

$$ES_\alpha(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial ES_\alpha(X)}{\partial \omega_i} \omega_i = \sum_{i=1}^n E[X_i | X \geq VaR_\alpha(X)] \cdot \omega_i. \quad (12)$$

VaRと同様に、構成要素期待ショートフォールを以下の形で定義する。

構成要素期待ショートフォール (component expected shortfall)
 ポートフォリオの期待ショートフォールに占めるリスク・ファクターの寄与分
 (構成要素期待ショートフォール、 $C-ES_i$ とする) を次のように定義する。

$$C-ES_i = \frac{\partial ES_\alpha(X)}{\partial \omega_i} \omega_i = E[X_i | X \geq VaR_\alpha(X)] \cdot \omega_i. \quad (13)$$

VaRの場合とは異なり、(11)式の最右辺の条件付期待値の計算は $X \geq VaR_\alpha(X)$ と
 いう条件下であるので、その推計には複数のサンプルが用いられる。したがって、
 この条件付期待値の推計は容易に行うことができる。

(4) 期待ショートフォールのリスク・ファクターへの分解の数値例

ここでは、VaRと同様に、4節の米国株オプション・ポートフォリオの期待ショ
 ートフォールを分解する。ここでは、10,000回のシミュレーション結果により、期待
 ショートフォールの分解を行う。

N 回のシミュレーションのうち j 番目のシミュレーションを $s^j (1 \leq j \leq N)$ とし、 j
 番目のシミュレーションで得られたポートフォリオの損失額を $X^j (1 \leq j \leq N)$ 、各商
 品の損失額を $X_i^j (1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq N)$ とする。ポートフォリオの損失額がVaR以上と
 なる事象の集合 Γ は以下で表現することができる。

23 この分解方法も、各リスク・ファクターの寄与分を、当該リスク・ファクターのセンシティビティの微小
 変化に対するリスク量の微小変化を基に定義している点に注意を要する。脚注19参照。

$$\Gamma = \{ s^j | X^j \geq VaR_\alpha(X) \}. \quad (14)$$

この集合の要素の数を T とすると、各証券 i の限界期待ショートフォールは、

$$M-ES_i = E[X_i | X \geq VaR_\alpha(X)] = \frac{1}{T} \sum_j X_i^j. \quad (s^j \in \Gamma) \quad (15)$$

と推計できる。

この推計方法を用いて、VaRの場合と同様に、10,000回のシミュレーションで信頼水準95%の期待ショートフォールの分解を行った(表18)。また、比較のために、VaRの場合と同様にポートフォリオを微小変化させて期待ショートフォールを再計算して得た限界期待ショートフォールとの比較も行った(表19)²⁴。(11)式を用いて

表18 サンプル・ポートフォリオにおける期待ショートフォール (信頼水準95%)の分解

| | 限界ES (米ドル/枚) (a) | 投資金額 (千米ドル) | ポジション (千枚) (b) | 構成要素ES (千米ドル) (c)=(a)×(b) |
|------------------|------------------------|----------------|----------------------|---------------------------------|
| GE株式 | -3.33 | 1,000 | 20.1 | -66.92 |
| マクドナルド株式 | -2.10 | 1,000 | 32.0 | -67.1 |
| インテル株式 | 0.15 | 1,000 | 23.8 | 3.57 |
| GE株コール・オプション | -2.30 | -100 | -50.0 | 115.23 |
| マクドナルド株コール・オプション | -1.91 | -100 | -57.1 | 108.93 |
| インテル株コール・オプション | 0.08 | -100 | -28.6 | -2.28 |
| 合計 | | 2,700 | | 91.43 |

表19 限界期待ショートフォール (信頼水準95%)の比較

| | 限界ES (米ドル/枚) | 再計算限界ES(米ドル/枚) | | |
|------------------|-----------------|----------------|--------------|------------|
| | | 前後への変化幅:0.1% | 前後への変化幅:0.5% | 前後への変化幅:1% |
| GE株式 | -3.33 | -3.34 | -3.34 | -3.34 |
| マクドナルド株式 | -2.10 | -2.10 | -2.10 | -2.10 |
| インテル株式 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 |
| GE株コール・オプション | -2.30 | -2.31 | -2.31 | -2.31 |
| マクドナルド株コール・オプション | -1.91 | -1.91 | -1.90 | -1.91 |
| インテル株コール・オプション | 0.08 | 0.08 | 0.08 | 0.08 |

24 表19で、限界期待ショートフォールと再計算限界期待ショートフォールとの差は、(11)式の推計誤差である。

推計した限界期待ショートフォールと再計算限界期待ショートフォールとを比較すると、これらの数値にほとんど違いがないことがわかる。したがって、(11)式を用いた推計方法により、ポジションの微小変化に対する期待ショートフォールの変化率である限界期待ショートフォールを正確に推計できるため、VaRの場合とは異なり、再計算を行わなくとも期待ショートフォールの分解を正確に行えることがわかる。

6. 期待ショートフォールを用いたポートフォリオの最適化

損失額分布に正規分布を仮定した分散・共分散法によるVaRが普及した理由の1つとして、この方法ではVaRが標準偏差の定数倍となるため、平均・分散アプローチを用いてポートフォリオ最適化が行えることが挙げられる²⁵。ここでは、損益額分布に正規性を仮定した場合のVaRに基づくポートフォリオ最適化の考え方を示し、正規性を仮定できない場合のVaRと期待ショートフォールに基づくポートフォリオ最適化の考え方を説明する。

(1) 分散・共分散法によるVaRに基づくポートフォリオの最適化

損失額が正規分布に従う場合、VaRは標準偏差の定数倍となり、VaRに基づくポートフォリオの最適化と標準偏差に基づく最適化は同値となる。したがって、VaRに基づく最適化に平均・分散アプローチを用いることができる。このアプローチは、以下のように、ポートフォリオの期待収益率および各リスク・ファクターへのエクスポージャーの合計を所与として、収益率の分散を最小化する形で定式化される。

$$\min_{(\omega)} \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega, \quad (16)$$

$$\text{s. t.} \quad \omega' \mu = \mu_X$$

$$\omega' e = 1$$

μ : 各リスク・ファクターの期待収益率

μ_X : ポートフォリオ価値の収益率の一定値

Σ : 各リスク・ファクターの分散・共分散行列

e : 要素がすべて1である列ベクトル

ω : リスク・ファクターへのエクスポージャーを表す列ベクトル

ω' : ω の転置ベクトル

25 厳密には、損失額の分散が有限の楕円分布族に属する分布（正規分布も楕円分布族に属する）に従う場合も同様の議論が成り立つが、ここでは簡単化のために正規分布として説明する。

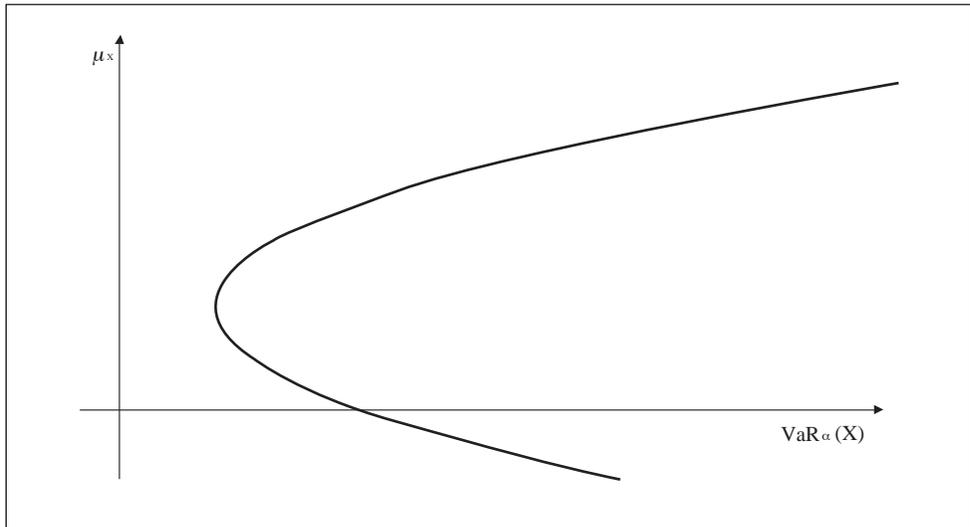
これは容易に解くことができ²⁶、この解から所与の期待収益率 μ_X と最小化された標準偏差 σ_X の組み合わせ（効率性フロンティア）が得られる。この効率性フロンティアにより、ポートフォリオの最適化が行える。ポートフォリオのVaRは標準偏差 σ_X の定数倍であることから、縦軸に期待収益率 μ_X 、横軸にVaRをとった平面上でも同様の効率性フロンティアが得られ(図10参照) ポートフォリオの最適化を行うことができる。

(2) シミュレーションで求めたVaRに基づくポートフォリオの最適化

一方、損失額分布に正規性を仮定できない場合は、VaRに基づくポートフォリオの最適化と標準偏差に基づく最適化の同値性は保証されない。したがって、(16)式のような簡単な形でVaRの最適化を行うことは困難である。

Mausser and Rosen [1998] では、シミュレーションによりリスク量を計測する場合のVaRの最適化を試みている。そこでは、一般的にVaRがポジション量に対して凸関数ではないため、VaRに基づくポートフォリオ最適化が困難であることが示さ

図10 期待収益とVaRによる効率性フロンティア



26 具体的な解は以下のとおり。

$$\omega^* = \lambda \Sigma^{-1} e + \gamma \Sigma^{-1} \mu$$

$$\lambda = \frac{C - \mu_X B}{D}, \gamma = \frac{\mu_X A - B}{D}, A = e' \Sigma^{-1} e, B = e' \Sigma^{-1} \mu, C = \mu' \Sigma^{-1} \mu, D = AC - B^2$$

これより、効率性フロンティア $\sigma_X^2 = (A\mu_X^2 - 2B\mu_X + C)/D$ が得られる。

れている²⁷。

(3) シミュレーションで求めた期待ショートフォールに基づくポートフォリオの最適化

Rockafeller and Uryasev [2000] は、シミュレーションにより期待ショートフォールを計測する場合、これに基づいてポートフォリオを最適化する簡便なアルゴリズムを示した。以下では、Rockafeller and Uryasev [2000] による最適化の考え方を説明し、サンプル・ポートフォリオを用いて具体的な最適化を行う。

これまでと同様、ポートフォリオの損失額 X は、各リスク・ファクター i の変動に伴う損失額 X_i の線形和であると仮定する。

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \omega_i, \quad (17)$$

X : ポートフォリオ全体の損失額,
 X_i : リスク・ファクター i の変動に伴う損失額²⁸,
 ω_i : リスク・ファクター i に対するポートフォリオのセンシティブリティ。

ここで各 (X_1, \dots, X_n) が従う同時確率密度関数を $p(X_1, \dots, X_n)$ とする。 $\Psi(\omega, \beta)$ を次のように定義する。

$$\Psi(\omega, \beta) = \int_{\sum_{i=1}^n X_i \omega_i \leq \beta} p(X_1, \dots, X_n) dX_1 \dots dX_n. \quad (18)$$

27 一般的に、目的関数および制約式が凸性を持たない場合の最適化問題では、複数の局所最適解が存在することが少なくなく、真の最適解を求めることは難しくなる（詳細は今野 [1998] 第15章の定理15.3および定理15.4を参照）。

Mausser and Rosen [1998] では、これをシミュレーションで求めたVaRに基づく最適化の場合に当てはめて説明しているが、その概要は以下のとおりである。

「 n 回のシミュレーションによりVaRを算出する場合は以下の手順に従う。まず、各要素が各リスク・ファクターの水準を表すベクトルの n 個のサンプル（以下、サンプル・ベクトル）を生成する。次に、これらの n 個のサンプル・ベクトルから、ポートフォリオ全体の損失額を n 個計算する。ポートフォリオのVaR（信頼水準 $100(1-\alpha)\%$ ）は、この n 個の損失額を昇順に並べた $n\alpha+1$ 番目の金額である。

次にポートフォリオ構成（各リスク・ファクターのセンシティブリティ）を変化させる。ポートフォリオ構成の変化が十分に小さいと、VaRに対応するサンプル・ベクトルはポートフォリオの変化前と同一であることが普通であるため、その場合にはVaRはセンシティブリティの変化に対して線形に変化する。しかし、ポートフォリオ構成の変化が十分に小さくないと、VaRに対応するサンプル・ベクトルが他のサンプル・ベクトルに入れ替わる可能性が大きくなり、入れ替わりがあった場合にはセンシティブリティの変化に対するVaRの（線形）変化率は入れ替わりの前と異なる水準となる。つまり、ポートフォリオ構成（センシティブリティ）の変化に対し、VaRは、区分的な直線からなる（piecewise linear）ギザギザの曲線に沿って変化する（Mausser and Rosen [1998], Figure 3参照）。したがって、ポートフォリオ構成を変化させてVaRを最適化する場合は、複数の局所最適解が存在するため、最適化が難しくなる。」

28 脚注16を参照。

これは損失額 $\sum_{i=1}^n X_i \omega_i$ が閾値 β を超えない確率を示している。

このとき、信頼水準 $100\alpha\%$ の VaR は次の $\beta(\omega, \alpha)$ で定義できる。

$$\beta(\omega, \alpha) = \min \{ \beta \in \mathbf{R} \mid \Psi(\omega, \beta) \geq \alpha \}. \quad (19)$$

一方、期待ショートフォールは損失額 $\sum_{i=1}^n X_i \omega_i$ が $\beta(\omega, \alpha)$ 以上であるとの条件下での損失額の期待値であり、

$$\Phi(\omega) = \int_{\sum_{i=1}^n X_i \omega_i \geq \beta(\omega, \alpha)} \left(\sum_{i=1}^n X_i \omega_i \right) \cdot p(X_1, \dots, X_n) dX_1 \cdots dX_n, \quad (20)$$

と定義すると、期待ショートフォールは $\Phi(\omega)/(1-\alpha)$ となる。

この(20)式を直接最適化することは、積分区間が $\beta(\omega, \alpha)$ に依存しているため難しい。Rockafeller and Uryasev [2000] は、この最適化問題は次の関数 $F(\omega, \beta)$ の最小化問題と同値であることを示した(証明は補論4参照)。

$$F(\omega, \beta) = (1-\alpha)\beta + \int_{\omega} \left(\sum_{i=1}^n X_i \omega_i - \beta \right)^+ p(X_1, \dots, X_n) dX_1 \cdots dX_n. \quad (21)$$

さらに、期待ショートフォールは最小化された $F(\omega, \beta)$ を $(1-\alpha)$ で除した値として与えられ、VaRはこのときの β であることを示した。

確率密度関数 $p(X_1, \dots, X_n)$ に従って、 X_1, \dots, X_n を J 回 ($X_{ij}, i=1, \dots, n, j=1, \dots, J$) サンプルングし、(21)式の積分を以下のように近似する。

$$\int_{\omega} \left(\sum_{i=1}^n X_i \omega_i - \beta \right)^+ p(X_1, \dots, X_n) dX_1 \cdots dX_n \approx J^{-1} \sum_{j=1}^J \left(\sum_{i=1}^n X_{ij} \omega_i - \beta \right)^+. \quad (22)$$

このとき期待ショートフォールの最小化問題は次のように表せる。

$$\min_{\omega \in \mathbf{R}^n, z \in \mathbf{R}^J, \beta \in \mathbf{R}} (1-\alpha)\beta + J^{-1} \sum_{j=1}^J z_j, \quad (23)$$

s. t.

$$z_j \geq \sum_{i=1}^n X_{ij} \omega_i - \beta, \quad z_j \geq 0, \quad j=1, \dots, J. \quad (24)$$

この近似された最小化問題は線形計画問題である。線形計画問題は、その効率的なアルゴリズムが知られている²⁹。

29 具体的な線形計画問題の解法は、今野 [1987] を参照。

ここで、期待損失（利益）額一定との制約条件は、(25)式で表される。

$$J^{-1} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^n X_{ij} \omega_i = -R. \quad (25)$$

また、ポートフォリオへの初期投資額を一定限度内に抑える制約式は(26)式で表すことができる。

$$\sum_{i=1}^n P_i \omega_i = W_0. \quad (26)$$

P_i : リスク・ファクター i の初期値
 W_0 : ポートフォリオへの初期投資額

これを解くことによって、損失額分布に正規性を仮定したVaRの場合と同様、効率性フロンティアを得ることができ、ポートフォリオの最適化を行える。

(4) 数値例

本節では、4節(1)の米国株式3銘柄とこれらを原資産とする個別株オプションを投資対象とした場合の最適化の計算例を示す。

一定の期待収益額（0から10までの0.25の倍数）に対する信頼水準95%の期待ショートフォールの最小値を、各証券価格をシミュレーションで1,000回生成し、(24)~(26)式の制約条件下で(23)式を解くことで求めた。なお、ここでは解の発散を防ぐために、株式は空売りなし、オプションはショート・ポジションのみという制約を加えた。図11は、横軸に最小期待ショートフォールおよびそれに対応するVaR、縦軸に期待収益をとってプロットした「最小期待ショートフォール・フロンティア」である。ここからわかるように、フロンティアの形状は上に凸となっており、平均・分散アプローチの最小分散フロンティアと概ね似た形状をしている。また、表20は、このフロンティアに属する最適なポートフォリオの一例として、期待収益が5千米ドルのポートフォリオ構成を示した。

図11 最小期待ショートフォール・フロンティア

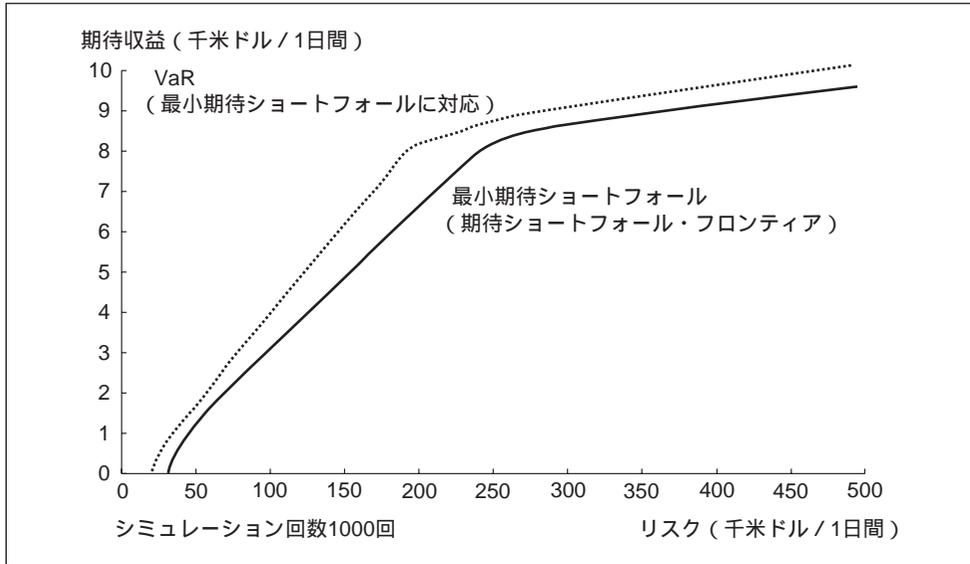


表20 最小期待ショートフォール・フロンティアのポートフォリオ構成
(期待収益額：5千米ドル、期待ショートフォール：154.4千米ドル)

| | 最適投資金額 (千米ドル) |
|------------------|------------------|
| GE株式 | 0 |
| マクドナルド株式 | 1,714.45 |
| インテル株式 | 1,113.05 |
| GE株コール・オプション | 0 |
| マクドナルド株コール・オプション | 0 |
| インテル株コール・オプション | -127.50 |

7. おわりに

本稿では、期待ショートフォールの実務への応用可能性を探るため、(1)その推計値の安定性、(2)それに対するリスク・ファクターの寄与度の算出、(3)それに基づくポートフォリオの最適化の3点を検討した。この結果、「各リスク・ファクターの寄与度の算出やポートフォリオの最適化が容易な点で期待ショートフォールはVaRよりも優れているが、損失額分布の裾が厚い場合は、期待ショートフォールとVaRを同じ回数のシミュレーションで求めると、前者の推計値の方が不安定化するため、期待ショートフォールを安定的に推計するためには、VaRの推計に比べより多くのシミュレーション回数が必要となる」との結論が得られた。

山井・吉羽 [2001] で示したように、期待ショートフォールはVaRに比べて概念的に優れたリスク指標である。これに加えて、期待ショートフォールは、リスク・ファクターの寄与度の算出やポートフォリオ最適化といった一部の実務で優れたリスク指標であることになる。しかし、シミュレーション法で期待ショートフォールを安定的に推計するためには、VaRの推計より多くのシミュレーション回数を確保する必要がある点には留意が必要である。

補論1．リスク指標の推計値の標準偏差の解析的な評価方法

(1) 解析的な評価方法

信頼水準が $100(1-\alpha)\%$ のVaRは損失額分布の分位点である。すなわち、 n 回のシミュレーションで得た損失額を昇順に並べた値を $X_{(n)}, X_{(n-1)}, \dots, X_{(n\alpha+1)}, X_{(n\alpha)}, \dots, X_{(1)}$ とすると、VaRの推計値は $X_{(n\alpha+1)}$ である。

計算回数 n が十分に大きい場合、この分位点は漸近的に正規分布に従い、その標準偏差は、次式で表されることがわかっている (Stuart and Ord [1994] pp. 356-358 を参照)。

$$\sigma_{VaR_\alpha(X)} = \frac{1}{f(x_\alpha)} \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{n}}, \quad (\text{A-1})$$

ただし、 $f(x)$ は損失額 X が従う分布の密度関数。

一方、期待ショートフォールの推計値は次式で表される。

$$ES_\alpha = \frac{X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{(n\alpha+1)}}{n\alpha+1}. \quad (\text{A-2})$$

この推計値の標準偏差は、計算回数 n が十分に大きい場合、次式で近似することができる (導出方法は後述)。

$$\begin{aligned} \sigma_{ES_\alpha(X)} = \frac{1}{\sqrt{n}} & \left[\frac{(1-\alpha)x_{1-\alpha}^2 + \beta x_{1-\beta}^2}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \int_{x_{1-\alpha}}^{x_{1-\beta}} x^2 f(x) dx \right. \\ & \left. - \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left\{ \beta x_{1-\beta} + (1-\alpha)x_{1-\alpha} + \int_{x_{1-\alpha}}^{x_{1-\beta}} x f(x) dx \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A-3}) \end{aligned}$$

ただし、 β は $\beta \ll \alpha$ なる定数、 $x_{1-\alpha}$ 、 $x_{1-\beta}$ は、それぞれ損失額 X の分布の $1-\alpha$ 、 $1-\beta$ 分位点³⁰。

30 数学的には、 $F(x)$ を損失額 X の分布関数、 $F^{-1}(x)$ を $F(x)$ の逆関数として、 $x_{1-\alpha} = F^{-1}(1-\alpha)$ 、 $x_{1-\beta} = F^{-1}(1-\beta)$ と表される。

(2) 解析的評価による結果とシミュレーション結果との比較

表A-1は、損失額が正規分布、 t -分布(自由度=5)³¹、パレート分布($\beta = 2$)³²に従うことを仮定し³³、(A-2)式と(A-3)式を用いて解析的に評価した推計値の標準偏差と、3節と同じ方法によりシミュレーションにより評価した推計値の標準偏差とを比較したものである。 t -分布、パレート分布は、正規分布に比べ裾の厚い分布である。損益額が正規分布または t -分布に従う場合は、推計値の標準偏差を解析的な方法で求めた値とシミュレーション結果を用いて求めた値とでは両者に大きな差はない。しかし、損失額がパレート分布に従う場合、両者は大きく異なる。

表A-1 VaRと期待ショートフォールの推計値の標準偏差

・信頼水準：95%

| | VaR | | 期待ショートフォール | |
|---------------------|--------|----------|------------|----------|
| | 解析的評価 | シミュレーション | 解析的評価 | シミュレーション |
| 正規分布(標準偏差=1) | 0.0668 | 0.0664 | 0.0780 | 0.0773 |
| t -分布(自由度=5) | 0.1080 | 0.1074 | 0.1885 | 0.1872 |
| パレート分布($\beta=2$) | 0.3082 | 0.3090 | 1.6124 | 2.0818 |

・信頼水準：99%

| | VaR | | 期待ショートフォール | |
|---------------------|--------|----------|------------|----------|
| | 解析的評価 | シミュレーション | 解析的評価 | シミュレーション |
| 正規分布(標準偏差=1) | 0.1181 | 0.1153 | 0.1449 | 0.1386 |
| t -分布(自由度=5) | 0.2884 | 0.2839 | 0.5346 | 0.5068 |
| パレート分布($\beta=2$) | 1.5732 | 1.5721 | 7.0509 | 8.9681 |

備考：シミュレーションによる評価に用いたシミュレーションのセット数は100,000回、期待ショートフォールの解析的評価の際の β は 10^{-5} とした。

31 自由度 m の t -分布の確率密度関数は次式で表される。

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi \cdot m} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}} \quad \text{ただし } \Gamma(\cdot) \text{ はガンマ関数}$$

32 パレート分布の確率密度関数は次式で表される。

$$f(x) = \frac{\beta}{x^{\beta+1}} \quad x \geq 1$$

33 推計値の標準偏差を解析的に評価するために、ここでは確率密度関数を解析的に表現できる分布として正規分布、 t -分布、パレート分布を例として挙げた。

(3) 期待ショートフォールの推計値の標準偏差の解析的な評価方法の導出

(A-3)式で示された期待ショートフォールの標準偏差の解析的な評価方法は、頑健推定の研究成果³⁴を用いて、以下のように導出できる³⁵。

ここでは、期待ショートフォールの推計値が順序統計量の線形結合であるため、頑健推定のL推定量で近似できることに着目する。後述するように、L推定量は、一定の前提のもとで、漸近的に正規分布に従い、その分散が定式化されている。したがって、この定式化を用いることで、期待ショートフォールの推定値の標準偏差を近似的に求めることができる。まず、 $\beta \ll \alpha$ なる定数 β をとり、 n 回のシミュレーションで得た損失額を昇順に並べた値を $X_{(n)}, X_{(n-1)}, \dots, X_{(n\alpha)}, \dots, X_{(n\beta)}, \dots, X_{(1)}$ として、以下の推計値を考える。

$$ES_{\alpha, \beta} = \frac{X_{(n\beta)} + \dots + X_{(n\alpha)}}{n(\alpha - \beta)} = \frac{1}{n} \sum_{i=n\beta}^{n\alpha} \frac{1}{\alpha - \beta} X_{(i)}. \quad (A-4)$$

この推計値は、 n が十分に大きい場合に、 β を十分に小さくとることによって期待ショートフォールの推計値((A-2)式)の近似値を与える。ここで、次式で表される重み付け関数 h を定義する。

$$h(u) = \begin{cases} 1/(\alpha - \beta) & (1 - \alpha \leq u \leq 1 - \beta) \\ 0 & (\text{その他の場合}). \end{cases} \quad (A-5)$$

このとき、(A-4)式は以下のように表すことができる。

$$ES_{\alpha, \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{i}{n+1}\right) X_{(i)}. \quad (A-6)$$

ここで、損失額が従う分布の分布関数を $F(x)$ 、密度関数を $f(x)$ 、分布関数の逆関数を $T(x) = F^{-1}(x)$ とすると、この推計量の影響曲線(あるいは影響関数)³⁶は、Huber [1981] の(3.12)式に(A-5)式を代入することで次式として得られる。

$$\begin{aligned} IC(x, F, T) &= \int_{-\infty}^x h(F(y)) dy - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F(y)) h(F(y)) dy \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ (1 - \beta) F^{-1}(1 - \beta) - (1 - \alpha) F^{-1}(1 - \alpha) - \int_{1 - \alpha}^{1 - \beta} F^{-1}(v) dv \right\} \\ &\quad - \int_{F(x)}^1 h(v) (F^{-1}(v))' dv. \end{aligned} \quad (A-7)$$

34 頑健推定の詳細に関してはHuber [1981] を参照。

35 ここでの説明は、竹内 [1989] を参考にした。

36 影響曲線の定義などの詳細はHuber [1981] を参照。

Huber [1981] の Theorem 3.2によると、一定の前提³⁷を満たすL推定量は、漸近的に正規分布に従い、その分散は $(1/n) \int_{-\infty}^{\infty} IC(x, F, T)^2 f(x) dx$ で与えられる。これを $ES_{\alpha, \beta}$ に適用すると、その分散を次式として得ることができる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ES_{\alpha, \beta}}^2 &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} IC(x, F, T)^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{(1-\alpha)x_{1-\alpha}^2 + \beta x_{1-\beta}^2}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \int_{x_{1-\alpha}}^{x_{1-\beta}} x^2 f(x) dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left\{ \beta x_{1-\beta} + (1-\alpha)x_{1-\alpha} + \int_{x_{1-\alpha}}^{x_{1-\beta}} x f(x) dx \right\}^2 \right]. \end{aligned} \quad (A-8)$$

したがって、(A-3)式が得られる。

.....
 37 (1) α をある正の定数として重み関数 h の台 (support) が区間 $[\alpha, 1-\alpha]$ に含まれていること、(2) 分布関数 F の不連続点と h の不連続点とが一致しないことなど。ここではこれらの前提はすべて満たされている。

補論2．オプション・ポートフォリオのシミュレーション方法

ここでは、4節の米国株オプション・ポートフォリオのシミュレーションによるリスク量計測方法を説明する。

(1) 株価

株価（3銘柄が対象）の対数値が3変量正規分布に従うと仮定してシミュレーションを行った。まず、過去3年分のヒストリカル・データから株価の日次対数変化率の分散・共分散行列および平均を推計した。この分散・共分散行列にコレスキー分解を施し求めた行列を互いに独立な標準正規乱数からなるベクトルにかけ、さらに平均的な価格上昇による増加分を加えて株価の1日の対数変化率とした。

(2) オプション・プレミアム

まず、表5および8にある株価とオプション・プレミアムから、各オプションのインプライド・ボラティリティを計算した。そのボラティリティが保有期間（1日）中一定であると仮定し、ブラック・ショールズ式により保有期間終了後のオプション・プレミアムを計算した。

なお、これら米国株の個別株コール・オプションはアメリカン・タイプのオプションであるが、いずれの株式もオプションの満期まで配当の支払いが見込まれていないため、そのプレミアムはヨーロピアン・タイプのオプションのそれと同じとなる³⁸。

.....
38 Hull [2000] pp. 175-176などを参照。

補論3 . 与信ポートフォリオのシミュレーション方法

以下では、4節の与信ポートフォリオのシミュレーション手法を家田・丸茂・吉羽 [2000] から抜粋・要約する形で解説する。

デフォルト率・デフォルト相関が同一である多数の与信のデフォルト事象は次のような多変量のベルヌーイ乱数 $D_i (i=1, 2, \dots, n)$ として表現することができる。

$$D_i = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } p) \\ 0 & (\text{確率 } 1-p) . \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

すなわち、 $D_i (i=1, 2, \dots, n)$ は、ポートフォリオ (n 個のエクスポージャーから構成される) 内のエクスポージャー i が確率 p で1 (デフォルト)、確率 $1-p$ で0 (非デフォルト) という値をとる。さらに、各 D_i の相関係数 (デフォルト事象の相関) を ρ (一律) とする。相関を考慮した多変量ベルヌーイ乱数を直接発生させることは難しいため、コレスキー分解を使って相関を考慮した乱数を発生させることが可能な多変量正規分布を介して、ベルヌーイ乱数を発生させる手法を考える。

まず、いずれも平均0、分散1の正規分布に従う確率変数 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ を考える (ただし、各確率変数は独立ではなく、一律の相関係数で表される相関関係があるとする)。このとき、 D_i は

$$D_i = \begin{cases} 1 & (-\infty < X_i \leq \Phi^{-1}(p)) \\ 0 & (\Phi^{-1}(p) < X_i < \infty) , \end{cases} \quad (\text{A-10})$$

ただし、 $\Phi^{-1}(\cdot)$ は標準正規分布の累積密度関数の逆関数

と表すことができる。

$D_i (i=1, 2, \dots, n)$ 間の相関係数が ρ になるためには、 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 間の相関係数 $\tilde{\rho}$ を適当に定めればよい。 ρ は

$$\rho = \frac{E[D_i D_j] - p^2}{\sqrt{p(1-p)} \sqrt{p(1-p)}} , \quad (\text{A-11})$$

と表される。ここで

$$D_i D_j = \begin{cases} 1 & (-\infty < X_i \leq \Phi^{-1}(p) , -\infty < X_j \leq \Phi^{-1}(p)) \\ 0 & (\text{otherwise}) , \end{cases} \quad (\text{A-12})$$

であるので、 $E[D_i D_j]$ は、相関係数 $\tilde{\rho}$ を持つ2次元正規分布の累積密度関数

$$E[D_i D_j] = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\tilde{\rho}^2)} \{x_i^2 + x_j^2 - 2\tilde{\rho}x_i x_j\}\right) dx_i dx_j , \quad (\text{A-13})$$

となる。

したがって、(A-13)式と(A-11)式から、(A-11)式を満たす $\bar{\rho}$ を得ることが可能である(ただし、上記定積分の値は数値計算によって求める必要がある)。

以上によって、平均0、分散1、かつ一律 $\bar{\rho}$ の相関係数を持つ n 次元の多変量正規乱数を発生させ、(A-10)式によって D_i を求めれば、目的の多変量ベルヌーイ乱数を得ることができる。ここで、エクスポージャー i の与信エクスポージャー金額を v_i 、デフォルト時の回収率を $r_i(0 \leq r_i \leq 1)$ とすると、ポートフォリオの損失額 L は、

$$L = \sum_{i=1}^n D_i v_i (1 - r_i), \quad (\text{A-14})$$

と表すことができる。

補論4．期待ショートフォールの別表現の証明

ここでは、Rockafeller and Uryasev [2000] の結果を紹介する。

$$\Psi(\beta) = \int_{x \leq \beta} dF(x), \quad (\text{A-15})$$

と置く。 $\Psi(\beta)$ は損失 x がある閾値 β を超えない確率を示している ($F(x)$ は分布関数)。このとき、信頼水準が $100\alpha\%$ の VaR は次の β_α で定義できる。

$$\beta_\alpha = \min\{\beta \in \mathbf{R} \mid \Psi(\beta) \geq \alpha\}. \quad (\text{A-16})$$

一方、期待ショートフォールは損失 x が β_α 以上という条件下での損失の期待値であり、

$$\phi_\alpha = (1 - \alpha)^{-1} \int_{x \geq \beta_\alpha} x dF(x), \quad (\text{A-17})$$

で表される。

これらから、期待ショートフォールは次の関数 $F_\alpha(\beta)$ を β について最小化したものとなる (定理 A-1)。

$$F_\alpha(\beta) = \beta + (1 - \alpha)^{-1} \int_{x \in \mathbf{R}} [x - \beta]^+ dF(x). \quad (\text{A-18})$$

定理 A-1 (Rockafeller and Uryasev [2000] の主要定理)

$F_\alpha(\beta)$ は β の関数として凸であり、連続微分可能である。期待ショートフォールは

$$\phi_\alpha = \min_{\beta \in \mathbf{R}} F_\alpha(\beta), \quad (\text{A-19})$$

で与えられる。ここで、

$$B_\alpha \equiv \arg \min_{\beta \in \mathbf{R}} F_\alpha(\beta), \quad (\text{A-20})$$

と置く³⁹。VaR は

$$\beta_\alpha = B_\alpha, \quad (\text{A-21})$$

の左端で与えられる。特に、

$$\beta_\alpha = \arg \min_{\beta \in \mathbf{R}} F_\alpha(\beta) \text{ and } \phi_\alpha = F_\alpha(\beta_\alpha), \quad (\text{A-22})$$

が成立する。

³⁹ $\arg \min_{\beta \in \mathbf{R}} F_\alpha(\beta)$ とは、 $F_\alpha(\beta)$ を最小化する β を指す。

以下では、定理A-1を証明するが、まず、次の補題を証明する。

補題

x を固定して考え、 $G(\beta) = \int_{x \in \mathbb{R}} [x - \beta]^+ dF(x)$ とすると、 $G(\beta)$ は凸であり $G'(\beta) = \Psi(\beta) - 1$ 。

【証明】

$G(\beta)$ の凸性は $\beta \mapsto [x - \beta]^+$ の凸性より示される。

また、 $G(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \beta) 1_{\{x - \beta \geq 0\}} dF(x)$ より⁴⁰、

$$\begin{aligned} G'(\beta) &= -\int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{x - \beta \geq 0\}} dF(x) + \int_{-\infty}^{\infty} (x - \beta) \frac{\partial 1_{\{x - \beta \geq 0\}}}{\partial \beta} dF(x) \\ &= -\left\{ 1 - \int_{x \leq \beta} dF(x) \right\} = \Psi(\beta) - 1. \end{aligned} \tag{A-23}$$

(証明終)

この補題を用いて、定理 A-1の証明を行う。

【定理 A-1の証明】

補題より、

$$\frac{\partial}{\partial \beta} F_{\alpha}(\beta) = 1 + (1 - \alpha)^{-1} [\Psi(\beta) - 1] = (1 - \alpha)^{-1} [\Psi(\beta) - \alpha], \tag{A-24}$$

が得られ、また $F_{\alpha}(\beta)$ が凸であることから、 $\Psi(\beta) - \alpha = 0$ を満たす β が $F_{\alpha}(\beta)$ を最小化することになる(すなわち、 $\beta \in B_{\alpha}$)。 $\Psi(\beta)$ は β に関して連続非減少関数であることから、 $\Psi(\beta) - \alpha = 0$ を満たす β は $\Psi(\beta) \geq \alpha$ を満たす β の中で最小値となる。すなわち、 $\beta = \beta_{\alpha}$ である。よって、

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}} F_{\alpha}(\beta) = F_{\alpha}(\beta_{\alpha}) = \beta_{\alpha} + (1 - \alpha)^{-1} \int_{x \in \mathbb{R}} [x - \beta_{\alpha}]^+ dF(x), \tag{A-25}$$

となる。ここで(A-25)式の積分は、次のように表せる。

$$\int_{x \geq \beta_{\alpha}} [x - \beta_{\alpha}] dF(x) = \int_{x \geq \beta_{\alpha}} x dF(x) - \beta_{\alpha} \int_{x \geq \beta_{\alpha}} dF(x). \tag{A-26}$$

40 ここで、 1_A は事象Aが真のとき1、偽のとき0をとる定義関数である。

ここで、(A-26)式の右辺第1項は期待ショートフォールの定義より $(1-\alpha)\phi_\alpha$ 、第2項は $1-\Psi(\beta_\alpha)$ であり、 $\Psi(\beta_\alpha) = \alpha$ であることから、次の関係が成立する。

$$\min_{\beta \in \mathbf{R}} F_\alpha(\beta) = \beta_\alpha + (1-\alpha)^{-1}[(1-\alpha)\phi_\alpha - \beta_\alpha(1-\alpha)] = \phi_\alpha. \quad (\text{A-27})$$

これは、定理A-1の(A-19)式である。よって定理A-1は証明された。

(証明終)

参考文献

- 家田 明・丸茂幸平・吉羽要直、「与信ポートフォリオにおける信用リスクの簡便な算出方法」、『金融研究』第19巻別冊第2号、日本銀行金融研究所、2000年、109～144頁
- 今野 浩、『線形計画法』、日科技連、1987年
- 、『理財工学 : 数理計画法による資産運用最適化』、日科技連、1998年
- 竹内 啓 (編集委員代表)、『統計学辞典』、東洋経済新報社、1989年
- 室町幸雄、「個別資産へのリスクの配分とポートフォリオの最適化」、『ニッセイ基礎研究所報』Vol. 16、ニッセイ基礎研究所、2001年、77～100頁
- 山井康浩・吉羽要直、「バリュエーション・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について 期待ショートフォールとの比較分析による理論的サーベイ」、『金融研究』第20巻第2号、日本銀行金融研究所、2001年、33～68頁
- Acerbi, C., and D. Tasche, “On the Coherence of Expected Shortfall,” Working Paper, Center for Mathematical Sciences, Munich University of Technology, 2001.
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, “Thinking Coherently,” *Risk*, 10 (11), 1997, pp. 68-71.
- 、, , and , “Coherent Measures of Risk,” *Mathematical Finance*, 9 (3), 1999, pp. 203-228.
- Chambers, J. M., C. L. Mallows, and B. W. Stuck, “A Method for Simulating Stable Random Variables,” *Journal of the American Statistical Association*, 71 (354), 1976, pp. 340-344.
- Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 2*, John Wiley and Sons, 1969. (国沢清典監訳、『確率論とその応用 (上・下)』、紀伊国屋書店、1969年)
- Garman, M., “Taking VaR to Pieces,” *Risk*, 10 (10), 1997, pp. 70-71.
- Hallerbach, W. G., “Decomposing Value at Risk: A General Analysis,” Tinbergen Institute Discussion Paper, TI 99-034/2, 1999.
- Huber, P. J., *Robust Statistics*, John Wiley & Sons, 1981.
- Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivatives*, Fourth Edition, Prentice-Hall, 2000.
- Mausser, H., and D. Rosen, “Beyond VaR: from Measuring Risk to Managing Risk,” *ALGO Research Quarterly*, 1 (2), 1998, pp. 5-20.
- Rockafeller, T., and S. Uryasev, “Optimization of Conditional Value-at-Risk,” *Journal of Risk*, 2 (3), 2000, pp. 21-41.
- Shiryaev, A. N., *Essentials of Stochastic Finance, Facts, Models, Theory*, World Scientific, 1999.
- Stuart, A., and J. K. Ord, *Kendall's Advanced Theory of Statistics Volume 1 Distribution Theory*, 6th Edition, Edward Arnold, London Melbourne Auckland, 1994.
- Tasche, D., “Risk Contributions and Performance Measurement,” Working Paper, Center for Mathematical Sciences, Munich University of Technology, 2000.

