多通貨間の為替相場決定理論

——複数基軸通貨体制下の為替需給分析——

深 尾 光 洋
（現調査統計局）

1. 要　　旨

近年、米ドルに加え、西独マルク、日本円、スイス・フラン等が国際的な取引に使われるようになってきており、各国準備資産中に占めるこれらの通貨のウエイトも増加してきている（第1表）。この結果、為替需給や為替相場変動の分析においても、従来の日本円対米ドルという一次元的な見方では対応できなくなってきており、日本円のドイツ・マルク、スイス・フラン、英ポンド等の主要通貨に対する為替相場をも含めて多面的に見ることが必要であると思われる。この点については、すでに深尾〔5、6〕で簡単に説明されているが、本稿では実質為替リスク・モデル（深尾〔6、pp. 33～40〕）に基づく多通貨間の為替相場決定理論について、詳しく論ずることとする。

まず第1章においては、多通貨間の為替需給を分析するには、各国通貨建資産が相互に如何なる関係をもって投資家に選択されるかが重要であり、この各国通貨建資産間（以下「各通貨間」と略述）の関係のあり方として代替性・補完性の概念を導入して説明する。そして、各通貨間の代替・補完関係は、任意の国の通貨をベースに測った各国通貨の為替相場（例えば対ドル相場）が、将来如何なる関係を持って変化すると予想されるか（例えばほぼ同様の方向で変動するか逆方向で変動するか等）、すなわち、いわゆる将来に予想される共変関係で決まることを示す。

次に第2章では、ミクロ的視点から、前章の分析を資産価格決定の理論（Capital Asset

本稿の作成にあたっては、大阪大学新開陽一教授ならびに神戸大学天野明弘教授から有益なコメントをいただいた。

第１表　公的外貨準備に占める各国通貨の構成比

（四半期末値、単位　%）

	1973：I	1975：Ⅳ	1976：Ⅳ	1977：Ⅳ	1978：Ⅳ	1979：Ⅳ*	1980：Ⅳ*
米ドル	84.5	85.2	86.7	85.2	82.8	78.9	73.1
英国ポンド	5.9	4.1	2.1	1.8	1.6	2.0	3.0
西独マルク	6.7	6.6	7.3	8.3	10.1	11.3	14.0
フランス・フラン	1.2	1.3	1.0	0.8	1.0	1.0	1.3
スイス・フラン	1.4	1.7	1.6	2.2	2.1	3.2	4.1
オランダ・ギルダー	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.7	0.9
円	−	0.6	0.7	1.2	1.9	2.8	3.7
計	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

＊　ドルに対して発行されたＥＣＵ（European Currency Unit）をドルに加え、金に対して発行されたＥＣＵを除いてある。

（資料）　大蔵省「国際金融局年報」昭和57年度版。

Pricing Model,CAPM)を使って定式化し、多数の通貨で表示された資産が存在する場合の、危険回避的な投資家による各通貨建資産への需要関数を導く。そして、各投資家の外貨建資産の持ち高は、前述の将来の予想される為替相場間の共変関係（数学的には分散・共分散）と、各国の金利、現在の為替相場体系等に依存することが示される。

第３章では、マクロ的な観点から、多数の通貨が存在する場合の為替需給を、nか国n個の通貨の場合に拡張した国際資金循環表（深尾〔４〕）によって分析し、n個の通貨が取引される外国為替市場における、需給均衡式を導出する。さらに、前章で提示された外貨建資産への需要関数と、この需給均衡式を合わせて、通貨当局による介入がない場合の多通貨間の為替相場決定式を導入する。それによれば、任意の国をベースにとった時、i国通貨とベース国通貨の為替相場は、購買力平価で決まる長期均衡相場から、i国とベース国との実質金利格差と、実質為替相場変動から生ずるリスク・プレミアム（外貨建資産の保有に伴なうリスクを補償する付加的な利益）の分だけ乖離することが示される。

また、このリスク・プレミアムは、ベース国を除く各国の累積経常収支の加重合計値に比例することを示す。

第４章では、前章のクリーン・フロートの分析に、通貨当局による不胎化された為替介入を導入し、その効果を考察する。主要な分析結果は次のとおり。

① 介入は、民間部門が保有する各通貨建資産の供給高を変化させ、リスク・プレミアムを動かすことで為替相場に影響を与えうる。

② 円を買い支えるために、ドル売りをする場合とマルク売りをする場合とでは、その円・ドル相場に与える影響が異なるが、これは通貨間の代替・補完性に依存する。

③ 日本がドル売り・円買い介入を行うと、その影響はマルク・ドル相場にも及び、逆に西独がドル売り・マルク買い介入をすれば円・ドル相場が影響を受ける。

④ 円とマルクとを同時に米ドル売却で買い支えるような協調介入は、上記の介入の第３国通貨に与える影響の存在により、単独介入以上に有効である。すなわち、日銀が円安防止のためドル売り円買いを単独で行う場合に比べ、同時に

ブンデスバンクが円を介入に使わなくてもドル売りマルク買いを協調して行ってくれれば、円の対ドル相場下落防止の効果は大きくなる。

なお多通貨間の為替相場決定理論は、n個の通貨のn－1個の独立な為替相場決定問題を扱うため、その数学的展開はかなり複雑となる。このため、理論の数学的な証明はすべて補論で行った。

2. 各国通貨建資産間の代替性と補完性

近年の外国為替市場は、最新の通信ネットワークで結ばれた真に世界的なものとなっており、ドル、マルク、円、ポンド、スイス・フラン等主要通貨間の為替相場は、各国の経済更には政治その他の諸情勢の相対関係を反映して、ある場合には同方向ある場合には逆方向のインパクトを受け、かつ相互に影響し合いながら変動している。このため、例えば円・ドル間の為替相場の変動をみても日本、米国の経済その他諸情勢だけに依存するのではなく、EC等第3国の経済その他の諸情勢や、マルク・ドル、ポンド・ドル等の他の主要な為替相場の動向如何によっても影響を受けている。そこで本章では、ある国の通貨の需給変動が、他の通貨の為替需給に及ぼす影響を分析する際に基礎となる通貨間の「代替性」と「補完性」の概念について考察する。

(1) 資産間の代替性と補完性

通常、消費については、消費者の1つの必要に対して、これを同じように満たす2つ以上の財を「代替財」と呼ぶ（例えば競合している2つの代替的な自動車会社A社およびB社の自動車）。これに対して、1つの必要を満たすのに、同時に消費されることの多い2つ以上の財を「補完財」と呼ぶ（例えば自動車とガソリン）。そして、2つの財が相互に代替財の場合には、その一方（A社の自動車）の供給の増加は、他方の財（B社の自動車）の需要を減少させるのに対し、補完財の場合には、一方（自動車）の供給の増加は、他方の財（ガソリン）の需要を増加させる。

この代替と補完の概念を、株式や外貨建債券等の危険資産について拡張してみると、次のように考えることができる。

代替資産……2つの資産の将来の価値（元本と果実の合計）に、正の相関があると予想される場合。

補完資産……2つの資産の将来の価値に負の相関があると予想される場合。

例えば、A社とB社の株価を考えてみると、両社とも同じ種類の製品を作っており、かつ輸出産業であるため、ともに消費支出や輸出の動向等同種の要因変化の影響を同一の方向に受けやすいという関係が考えられる。このため、この2つの株の将来の価値の間には正の相関が予想され、相互に代替資産である。これに対し、自動車株と石油株を考えると、前者は円高に弱い反面、後者は逆に円安に弱いという関係にあり、2つの株の将来価値に負の相関があると予想されよう。このため、これら2つの株は補完資産である。

2つの資産が上の意味で代替資産の場合には、ある投資家のポートフォリオの中で、一方の資産の額が増加すると、同一のリスクへのエクスポージャーを増加させるので、その投資家の代替資産への需要は、減少すると考えられる。逆に、2つの資産が上の意味で補完資産の場合には、投資家のポートフォリオの中で、一方の資産の額が増加すると、この資産のリスクをヘッジするためにその投資家の他方の資産への需要は増加するであろう。(注1)

(2) 通貨間の代替性と補完性

前節で述べた資産の代替性と補完性は、外貨建資産・負債の選択についても、同様に定義することができる。

ここでは例として、日本円、西独マルク、カナ

ダ・ドル、米ドルの4つの通貨を考えてみよう。まず米ドルを安全資産（habitat currency）とする米国投資家の立場からみた、円、マルク、カナダ・ドルの対米ドルの実質為替相場の過去の動き(注2)が第1図に示してある。(注3)

第2表(a)の相関係数からわかるように、円の対米ドル相場とマルクの対米ドル相場は正の相関（＋0.70）を持っているが、こうした過去の関係が将来とも続くと予想されれば、円とマルクとは米国の投資家からみて代替資産であると考えられる。一方カナダ・ドルの対米ドル相場と円の対米ドル相場あるいはカナダ・ドルの対米ドル相場とマルクの対米ドル相場は、負の相関（それぞれ－0.46、－0.19）を持っており、この結果円とカナダ・ドルおよびマルクとカナダ・ドルはそれぞれ相互に補完資産であると言えよう。

一方、米国の投資家にとって外貨である円、マルク、カナダ・ドルが自国通貨である米ドルとの間でどの程度代替的な関係にあるかは、こうした外貨の対ドル建相場が、どれくらい大きく変動するかによって、計られよう。第2表(a)の各通貨の対ドル実質為替相場の標準偏差をみると、カナダ・ドルは6％と円やマルク（各13％、12％）よりかなり小さく、米国投資家にとってカナダ・ドルの為替変動リスクは、円やマルクに比較して大幅に小さいことがわかる（第1図参照）。このため、米国投資家にとってカナダ・ドルは、マルクや円よりも米ドルのよい代替資産であると言える。

この同じ実質為替相場変動を、円を安全資産とする日本の投資家の立場からみると、米ドル、マルク、カナダ・ドルの対円相場の動きは第2図のようになる。第2表(b)からわかるように、マルクの対円相場、米ドルの対円相場、カナダ・ドルの対円相場のうち、いずれの2者間の相関係数も計測期間中は正であるため、この関係が将来続くと予想されれば、これらの外国通貨相互に代替的であり、特に米ドルとカナダ・ドルは非常によい代替資産である（相関係数0.95）と言える。

一方、日本の投資家にとって安全資産である円と、米ドル、マルク、カナダ・ドルとの代替性を考えると、マルクの対円実質為替相場の標準偏差が9％（第2表(b)）と3つの外貨のなかで最も小さく、他の2通貨に比較すれば、円との間でよい代替資産となっていると言えよう。

西独やカナダの視点からも、第3～4図と第2表(c)～(d)を用いて、同様な考察を行うことができるが、ここでは省略する。

本節においては、通貨間の代替・補完関係について、過去の為替相場相互間の共変関係を示す相関係数を基準にして説明した。本来、資産間の代替性・補完性は、将来予想される共変関係に依存しており、このような過去の共変関係だけにより判断することはできない。例えば、英国ポンドの対ドル実質為替相場は1977～78年頃までマルクの

（注1） 通常の消費者行動の理論では、ある消費者の効用水準を一定に保つように所得を維持しながら、ある財の価格を上昇させた時に別の財への需要量が増加するとき代替財、減少するとき補完財と呼ぶ。しかし本稿では、以下の分析を簡単化するために、2つの財ないし資産の需要量ないし保有高の間の関係として代替・補完を考察した。

（注2） 本稿では、分析を単純化するため、金融資産保有に伴う様々なリスクのうち、将来の金利変動、インフレ、債務不履行等のリスクを捨象し、為替相場変動に伴うリスクのみを考察する。この結果、各国投資家にとっては、自国通貨建資産は安全資産となるのに対し、外貨建資産は危険資産となる。

（注3） ここで実質為替相場を採用したのは、インフレーションの不確実性からくるリスクを捨象した実質為替リスク・モデルにより、為替需給を分析しているためである。実質為替リスク・モデルにおける為替変動リスクの定義については、深尾〔5、pp．2－5〕参照。

対ドル実質為替相場とほぼ平行して動いていたが、その後、北海油田の生産開始等を映じて、ポンドの対ドルの実質相場はマルクの対ドル実質相場とかなり独立した動きを示している（第5図）。油田の発見のような、経済あるいは貿易の基本的構造を変える事件が発生すると、当然通貨間の共変関係は変化するであろう。

とは言っても、過去の為替相場変動の共変関係は、投資家が各通貨建資産のポートフォリオを決定する上での、重要な決定要因の1つであろう。なぜなら、過去の為替相場の共変関係は、各国の基礎的な産業や貿易の構造や、特殊な政治社会的関係等、継続的な要因をかなり反映しており、ある程度の継続性を持つと考えられるからである。例

第2表　実質為替相場の共変関係(注)

―― 1973 / I ～ 1982 / II ――

(a)　対米ドル実質為替相場間の相関係数

	円	マルク	カナダ・ドル
円	1.00		
マルク	0.70	1.00	
カナダ・ドル	−0.46	−0.19	1.00
（標準偏差）	0.13	0.12	0.06

(b)　対円実質為替相場間の相関係数

	米ドル	マルク	カナダ・ドル
米ドル	1.00		
マルク	0.47	1.00	
カナダ・ドル	0.95	0.51	1.00
（標準偏差）	0.13	0.09	0.16

(c)　対マルク実質為替相場間の相関係数

	米ドル	円	カナダ・ドル
米ドル	1.00		
円	0.30	1.00	
カナダ・ドル	0.92	0.09	1.00
（標準偏差）	0.12	0.09	0.14

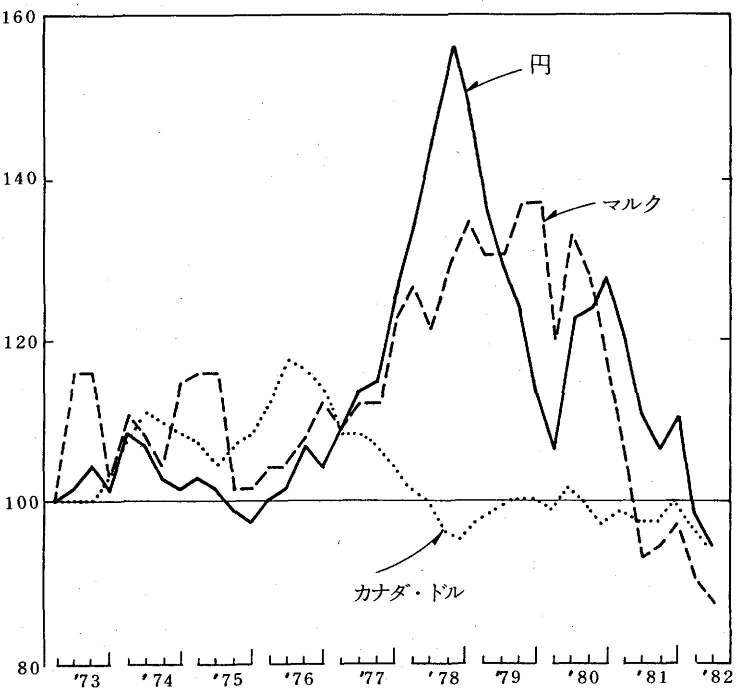
(d)　対カナダ・ドル実質為替相場間の相関係数

	米ドル	円	マルク
米ドル	1.00		
円	0.71	1.00	
マルク	0.56	0.81	1.00
（標準偏差）	0.06	0.16	0.14

（注）　相関係数と標準偏差は、実質為替相場の自然対数値から計算されている。よって標準偏差は、近似的にパーセントで計った、実質為替相場の変動の大きさを示す。例えば、(b)のマルクの対円実質為替相場の標準偏差は、0.09 × 100 = 9％ である。

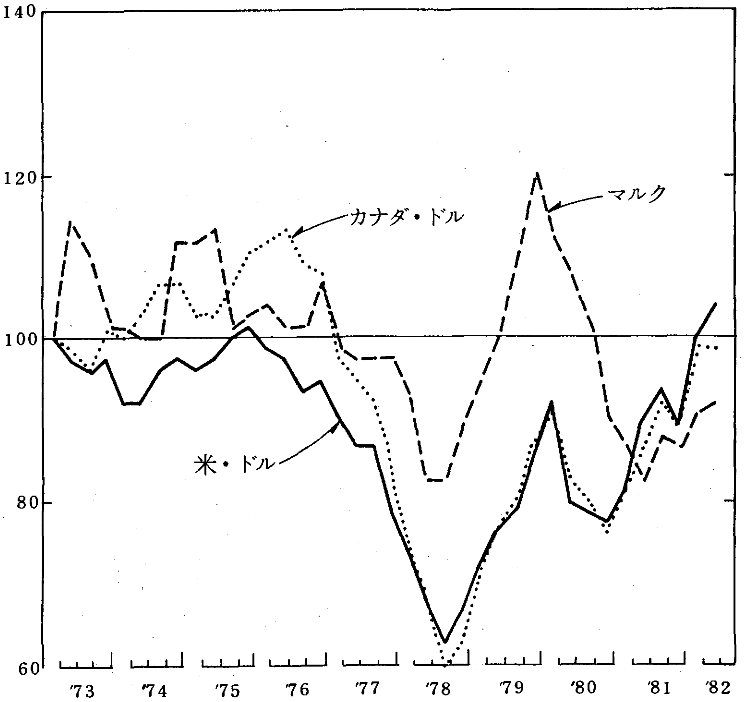
第１図　米国からみた為替相場

（各国通貨の対米ドル実質相場指数
1973年第１四半期末＝100）



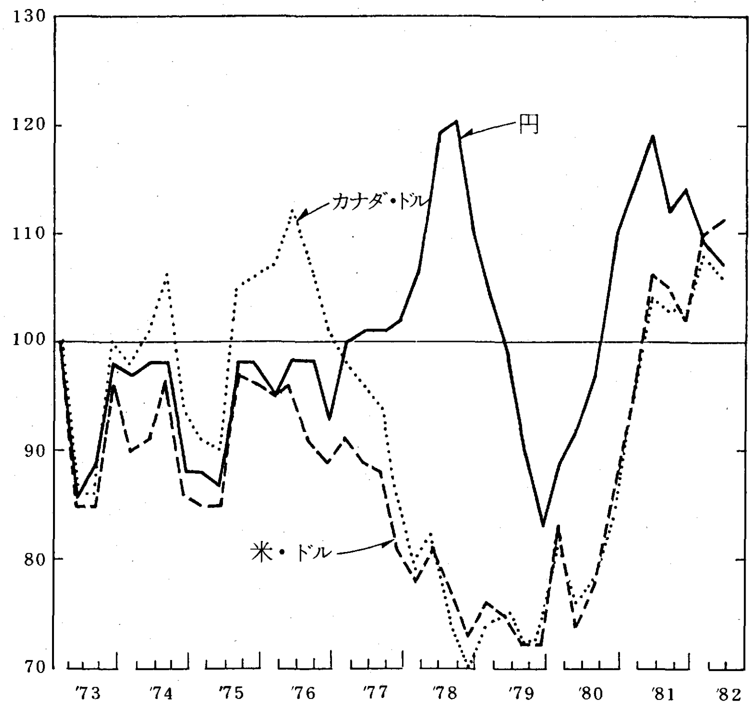
第２図　日本からみた為替相場

（各国通貨の対日本円実質相場指数
1973年第１四半期末＝100）



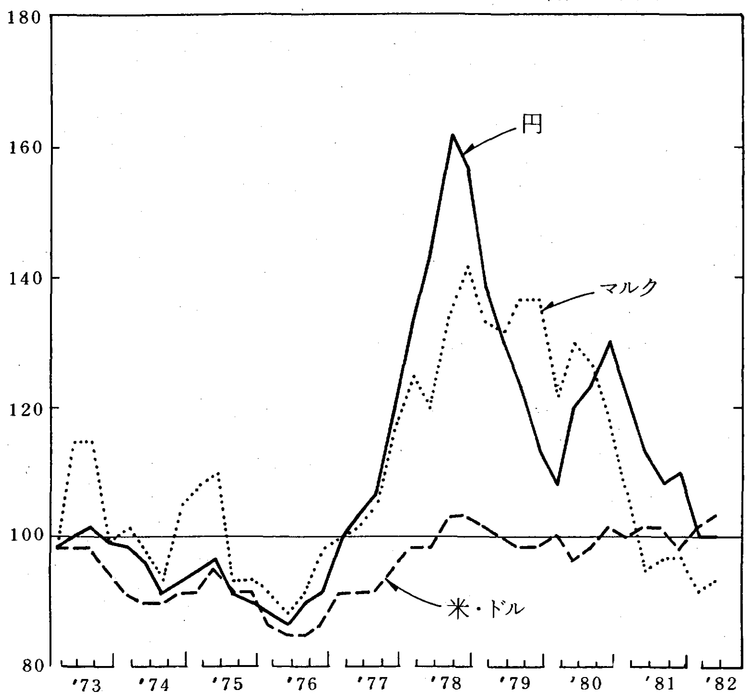
第３図　西独からみた為替相場

（各国通貨の対西独マルク実質相場指数 1973年第１四半期末＝100）

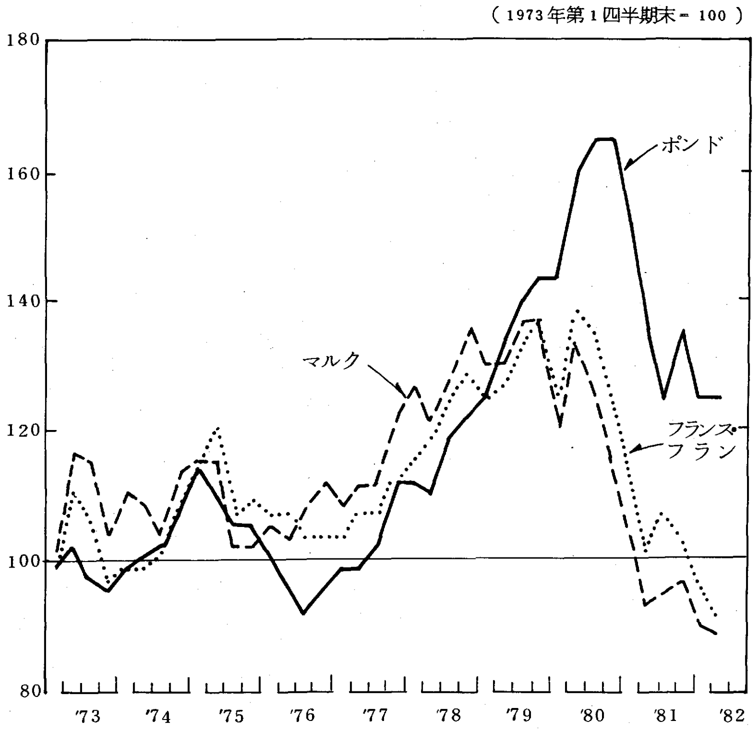


第４図　カナダからみた為替相場

（各国通貨の対カナダ・ドル実質相場指数 1973年第１四半期末＝100）



第5図　ポンド、マルク、フランの対米ドル実質為替相場指数



えば、米国とカナダや、西独とフランスのように、貿易等を通して非常に密接な経済関係を保っている国の通貨間の実質為替相場は、米ドルとカナダ・ドルとのようにフロートの関係にある場合であろうと、西独マルクとフランス・フランのようにアジャスタブル・ペッグの関係にある場合であろうと、さほど大きな変動を示していない。とくに、1つの強く統合された経済圏を作っている国々の通貨は、強い共変関係にあり、非常によい代替通貨となるであろう。また、日本と西独のように、よく似た産業・貿易構造を持ち、経済運営のスタンスも近い国の通貨も、割合よい代替通貨となるであろう。

これに対し、原料・エネルギーの輸入国である日本と、輸出国であるカナダのように相互に補完的な産業・貿易構造を持っている場合は、為替相場の変動も逆相関関係を持ち、円とカナダ・ドルは補完通貨の傾向を持つと考えられる（第2表(a)）。例えば、第1次石油ショックのあと、日本経済は大きな衝撃を受けたのに対し、カナダはネットでのエネルギー輸出国であったため、石油ショックの影響は小さかった。この結果、円は米ドルに対して下落したのに対し、カナダ・ドルは、米ドルに対しむしろ上昇し、対照的な動きを示した。

本章で論じた通貨の代替・補完関係は、為替相場の将来の共変関係に対する投資家の主観的予想で決まるため、それをある時点で直接測定することはできない。また通貨の共変関係に対する予想は、各国の政策スタンスや産業・貿易構造の変化に伴って変わるため、固定的に捉えることには無理がある。しかし現実には、企業や生命保険会社等の投資家は、日々その資産・負債の通貨構成をポートフォリオとして運用して行かなくてはならず、その際各投資家は過去の経験的な為替相場の共変関係をもとに、将来の共変関係を想定して外貨建資産を運用しているものと考えられる。次章

では過去の共変関係をもとに形成された、投資家の持つ将来の共変関係に対する予想を所与と仮定して、多数の通貨で表示された資産に対する投資家行動を、モデルによって分析する。(注4)

3. 複数基軸通貨体制下の投資家行動 ── 資産価格決定の理論による分析

本章では、前章で分析された通貨間の代替・補完関係と、その投資家のポートフォリオ決定行動との関係を、資産価格決定の理論(CAPM：Capital Asset Pricing Model)によって分析する。(注5) そして、実質為替リスク・モデルの枠組の中で、多数の通貨が同時に取引される外国為替市場での、危険回避的な投資家の外貨建資産需要関数を導出する。

(1) モデルの仮定

ここでは、nか国がそれぞれ独自の通貨を持って、相互にフロートしている場合を想定する。また為替管理や通貨当局による介入はないものと仮定する。ここで、為替相場を計算する上でのベース国として任意の国を選び、これをn番目の国(以下n国と略称)と呼ぶことにしょう。以下では、このn国の投資家について考える。

CAPMを外国為替市場の分析に応用するために、以下のような6つの仮定を置く。

(A－1)：モデルで考察する時点は"t＝0"と"t＝1"の2つしかなく、したがってすべての資産・負債はこれに対応する1期間の満期期間(maturity)を持つ。

(A－2)：n国の投資家たちは危険回避的(risk averse)で、次式で定義される期末時点での期待効用を最大化するように行動している。(注6、7)

(1) $u = a_n \mu_w - b_n \sigma_w^2$

u：n国の投資家全体の期待効用
μ_w：期末(t＝1)の資産価値の期待値
σ_w^2：期末の資産価値の分散
$a_n > 0$、$b_n > 0$：定数

すなわち、これは、ポートフォリオの期末時点(t＝1)での資産価値の期待値(μ_w)が大きいほど、またそのポートフォリオのリスクの程度を示す分散 σ_w^2 が小さいほど、投資家にとって好ましいことを意味している。

(A－3)：すべての国においてインフレーションがなく、通貨の国内価値は一定である。

(A－4)：投資家たちは、期末時点の為替相場を確率分布の形で予想している。そして、投資期間末の各通貨間の為替相場は、期待値の意味で購買力平価で決まる長期均衡為替相場に等しくなる

(注4) 理論的な投資家行動の分析においては、過去の為替相場の共変関係と投資家の予想する将来の共変関係は必らずしも同じである必要はなく、なんらかの要因により、予想される共変関係が変化することも考慮しうる。しかし投資家の予想形成過程をモデル化することは困難なため、実証分析等では過去の共変関係を投資家の予想と見なすのが通常である。

(注5) CAPMは、将来の価値が不確実な、多数の危険資産に直面する投資家の行動を分析する理論で、これまでは主に株価の分析に用いられてきた。この理論では、各投資家はポートフォリオのリスクに配慮しつつ、収益率を高くするように、保有資産を選択すると仮定されている。詳しくは、Jensen〔12〕、Ross〔15〕の展望論文を参照。

(注6) ここでは以下の式を単純化するために、n国の投資家全体の効用関数を用いているが、個々の投資家の効用関数から外貨建資産に対する需要関数を導くのは容易である。

(注7) 効用関数をこの形に書ける理由については、(付－A)参照。

と予想されている。(注8、9)

（Ａ－５）：各国の金利は外生的に与えられている。(注10)

（Ａ－６）：外国為替市場は競争的で、投資家たちは直物為替相場を所与として行動する。

これらの仮定のうち（Ａ－３）は、以下の分析を簡単化するためにのみ置かれており、最終的な為替相場決定式を求める段階で取り除かれる。そして、「インフレーションは存在するが、将来のインフレ率については確実に見通せる」との仮定が代わりに導入される。

これらの仮定からわかるように、ｎ国の投資家は期初（ｔ＝０）に安全資産である自国（ｎ国）通貨建資産と、為替変動リスクのあるｎ－１の外貨建資産・負債からなるポートフォリオを選択する。そして、その選択基準は、(1)式の効用関数で決まっている。また、投資家の投資の目標期間（仮定（Ａ－１）の"１期間"の長さ）は十分長く、期末時点の各通貨間の為替相場は不確実にしか見通せないものの、平均的には購買力平価で決まる長期均衡相場に等しくなると予想されている。さらに、各通貨建資産を保有することに伴うリスクとしては、インフレーションによる通貨価値の不確実性からくるリスクは捨象され、実質為替相場の変動によるもののみを考慮している。(注11)

(2) 各通貨建資産への需要関数

前節の仮定から、期末時点における為替相場の不確実性に直面する、ｎ国投資家たちの期待効用最大化を通じて、外貨建資産・負債に対する需要関数を導くことができる。数式による証明は補論第１節で行われているが、本節ではその結果得られる需要関数について解説する（各記号の厳密な定義については、補論を参照）。

まず、この需要関数の性質を把握するために、世界が日本、西独、米国の３か国のみで構成される（ｎ＝３）という単純化の仮定を置いて、やや詳しく分析してみよう。この時には、３番目の国である米国の投資家の外貨建資産への需要関数は、円建資産とマルク建資産についての２本の需要関数からなる。

$$(2)\quad X_1^3 = \left(\frac{c_3 M_{22}^3}{\triangle}\right)\beta_1 - \left(\frac{c_3 M_{12}^3}{\triangle}\right)\beta_2$$

$$(3)\quad X_2^3 = -\left(\frac{c_3 M_{21}^3}{\triangle}\right)\beta_1 + \left(\frac{c^3 M_{11}^3}{\triangle}\right)\beta_2$$

X_i^3：米国投資家の円（ｉ＝１）又はＤＭ（ｉ＝２）建資産需要額（購買力平価相場でドルに換算、$X_i^3 < 0$ なら負債）

（注8） ２国間の為替相場について購買力平価を定義することは容易であるが、ｎか国が多角的に貿易している場合に、ｎ－１の独立な為替相場について購買力平価を定義することはかなり困難である。本稿においてはｎか国すべての経常収支を長期的にほぼ均衡させる実質為替相場の体系を長期均衡実質為替相場と呼び、これは一定であると仮定する。そして、この長期均衡実質為替相場に対応する名目為替相場を、購買力平価相場と定義する。詳しくは（付－Ｂ）参照。

（注9） 本稿では、１～３年程度のかなり長い投資目標期間を持つ投資家を想定している。深尾〔7.第１表〕が示したように、短期間の外貨建資産に対する先物カバーなしの投資は、長期間の投資に比較してずっとリスクが大きい。このため、長期的な視野を持つ投資家の場合の方が、短期的な視野を持つ投資家に比して、為替相場変化予想に対する外貨建資産・負債需要の弾力性がより大きく、為替相場決定において短期的な投資家よりも長期的な投資家の方が重要な役割を果していると考えられる。Ｐorter〔14〕は、カナダ・ドルの対米・ドル相場決定において、２年間の投資期間を持つ投資家が重要であることを示す結果を報告している。

（注10） 純理論的には、金利と為替相場は資産市場で同時に決定されるはずである。しかし、深尾〔７〕が示したように、金利が内生的に決まっているとしても、以下の分析とほぼ同じ結果が得られる。

（注11） このモデルは実質為替リスクモデルである。深尾〔６〕参照。

M^3_{ii}：期末時点で予想される、ドル建円（ i ＝1 ）又はDM（ i＝2）相場（対数値、以下同じ）の分散で常に正

M^3_{ij}（ i ≠ j ）：期末時点で予想される、円とDMのドル建為替相場相互間の共分散で正（代替）負（補完）になりうる

$\triangle = M^3_{11} M^3_{22} - M^3_{12} M^3_{21}$：△は常に正(Lindgren〔13、p463〕参照）

他の記号は本文参照

これらの需要額は、次の式で定義される円とマルクのドルに対する期待収益率格差（ β_1 、β_2 ：外貨建資産の保有に伴なうリスクを補償する付加的な利益でリスク・プレミアムと呼ばれる）に依存している。

(4) $\beta_1 = r_1 + (\bar{f}^3_1 - e^3_1) - r_3$

(5) $\beta_2 = r_2 + (\bar{f}^3_2 - e^3_2) - r_3$

r_1 ：円金利

r_2 ：マルク金利

r_3 ：ドル金利

e^3_1 ：直物円相場（ドル建、対数値）

e^3_2 ：直物マルク相場（ドル建、対数値）

$\bar{f}^3_1$ ：期末時点に予想される、直物円相場（ドル建、対数値）の期待値

$\bar{f}^3_2$ ：期末時点に予想される、直物マルク相場（ドル建、対数値）の期待値

例えば、円とドルの期待収益率格差（β_1）は、円金利（r_1）に円の対ドル期待上昇率（$\bar{f}^3_1 - e^3_1$）を加え、ドル金利（r_3）を差し引いたものである。

そして、(2)、(3)式でβ_1とβ_2 に掛っているカッコ内の係数は、米国投資家の危険回避度（$c_3 > 0$）と、円・マルクの対ドル相場の分散と共分散（M^3_{ij}、i、j＝1、2）に依存しており、以下で説明するように各通貨間の代替・補完関係を示している。

ここで、米国投資家の円資産への需要関数(2)式に注目してみよう。この式が示すように、円資産への需要X^3_1 は、円資産とドル資産との期待収益率格差β_1 だけでなく、マルク資産とドル資産との期待収益率格差β_2 にも依存している。ここでβ_1の係数をみると、c_3、M^3_{22}、△はすべて正で、①円金利r_1が上昇するか、②ドル金利r_3 が下落するか、③円の直物相場e^3_1 が下落して円の期待上昇率（$\bar{f}^3_1 - e^3_1$）が上昇するか（現在の為替相場は、将来購買力平価に近づいて行くとの回帰的<regressive>な期待を仮定）、のいずれかにより、β_1 が上昇すれば、必ず円資産への需要X^3_1 は増加する。

これに対し、β_2 の円資産需要（X^3_1）に対する効果は、M^3_{12} の符号に依存する。もし期末時点における円とマルクの対ドル為替相場に正の相関があると予想されれば、その共分散は正となり(注12)、円資産とマルク資産は代替資産となる。この時は、β_2 の係数は負となり、マルクの期待利回りがドル金利に対して上昇（β_2 が上昇）すれば、米国投資家の需要が円からマルクへシフトして、円資産の需要X^3_1 は減少する。もし米国の投資家が、将来の円とマルクの共変性は非常に高いと予想すれば、円とマルクの対ドル相場の予想される相関係数は1に近くなる。この時△はゼロに近づ

(注12) 円とマルクの対ドル相場相互間の相関係数をρ_{12}と置くと、次の関係が成立する。

$$\rho_{12} = \frac{M^3_{12}}{\sqrt{M^3_{11}\ M^3_{22}}}$$

この式については、Lindgren〔13、p135〕等を参照。

き、[注13] β_1とβ_2に掛かる係数の絶対値は非常に大きくなる。これは、米国の投資家にとって、共変性の高い円とマルクが大変良い代替資産となり、小さな期待利回りの変化でも大きな需要のシフトが起きることを示している。

一方、期末時点における円とマルクの対ドル相場に負の相関があると予想されれば、共分散M^3_{12}は負となり、円資産とマルク資産は補完資産となる。この時は、円資産需要関数(2)式のβ_2の係数は正となり、マルクの期待利回りの上昇（β_2の上昇）は、(3)式を通じてマルク資産への需要を増加させるのみならず、円資産の需要をも増加させる。これは、円とマルクが逆相関の関係にあるので、増加したマルク持高を一部ヘッジするための円需要が増加するからである。

なお、米国投資家の自国通貨であるドル資産への需要は、円、マルク、ドルの各資産の持高合計が、米国民間部門の〔累積貯蓄－累積実物投資〕に等しいとの、バランス・シート制約式から求められる。

本章では、米国投資家の外貨建資産需要関数のみを論じたが、日本や西独の投資家についても同様に外貨建資産需要関数を導出することができる。これらの需要関数を、次章で導出される外国為替市場の需給均衡条件式に代入し、直物為替相場について解くことで、多通貨の場合の為替相場決定式を求めることができる。

なお本章では、3か国モデルの場合について論じたが、一般的なnか国モデルの場合には、次のようになる。

$$\underline{X}^n = c_n \left[M^n \right]^{-1} \left[\left(\underline{r}^n - r_n \underline{\eta} \right) + \left(\underline{f}^n - \underline{e}^n \right) \right] \tag{6}$$

この式の左辺は、n国投資家のn－1ある外貨建資産・負債の保有高を、ベクトルで表示したものである。[注14] 右辺のc_nは、n国投資家の危険回避度を示す正の係数で、回避度が大きいほどこのc_nは小さくなり、外貨建資産・負債の需要の絶対額は減少する。次にM^nは、投資家の予想する期末時点における為替相場変動からの不確実性（リスク）の程度と、為替相場相互間の共変係数を分散・共分散行列の形で表わしたものであり、右肩の－1はこの逆行列であることを示している。最後に$\left[\left(\underline{r}^n - r_n \underline{\eta} \right) + \left(\underline{f}^n - \underline{e}^n \right) \right]$は、n－1の外貨建資産と、n国投資家にとって自国通貨であるn国通貨建資産との間の、期待収益率格差を示すベクトルである。

4. 多通貨間の為替需給と為替相場決定式

既に別稿（深尾〔4、5〕）において、国際資金循環表を用い、2か国の世界における為替需給と為替相場決定の分析を行った。本章ではその分

（注13） 前の（注12）の式と、$M^3_{12} = M^3_{21}$とから、

$$\triangle = M^3_{11} M^3_{22} \left(1 - \rho_{12}^2 \right)$$

が成立するのでρ_{12}^2が1に近づくと、△はゼロに近づく。

（注14） (6)式を行列ベクトルの要素を用いて書き直すと、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} X^n_1 \\ X^n_2 \\ \vdots \\ X^n_{n-1} \end{bmatrix} = c_n \begin{bmatrix} M^n_{11} & M^n_{12} & \cdots & M^n_{1\,n-1} \\ M^n_{21} & M^n_{22} & \cdots & M^n_{2\,n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ M^n_{n-1,1} & M^n_{n-1,2} & \cdots & M^n_{n-1,n-1} \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{pmatrix} - r_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f}^n_1 \\ \bar{f}^n_2 \\ \vdots \\ \bar{f}^n_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^n_1 \\ e^n_2 \\ \vdots \\ e^n_{n-1} \end{pmatrix} \right]$$

詳しくは、補論を参照。

析を多国多通貨の場合に拡張し、多通貨間の為替相場の同時決定を分析する。

(1) 国際資金循環表による為替需給分析

まず多国多通貨の場合の国際資金循環表（残高表）の例として、3か国3通貨の場合が第3表に示されている。この表では、簡単化のために各国が1つの部門に統合されており、通貨当局による外貨建資産・負債はなく、財政赤字はすべて自国通貨建負債でファイナンスされていると仮定した。なお、ここで捨象された介入の効果についての分析は、次章において行われる。

この表を縦にみると、各国の各通貨建対外資産・負債残高を知ることができる。そして、この合計である各国の対外純金融資産保有高 B_j は、実物面での国内の〔貯蓄－投資〕の累積高に一致する。

これは、各国の累積経常収支高を為替相場変化に伴うキャピタル・ゲイン、ロスで調整したものに等しい（深尾〔5、p8〕）。この関係は、各国の対外資産保有に伴うバランス・シート制約条件と考えられ、次の3本の式で表わされる。(注15)

$$
(7)\begin{cases}
E_1^3\ Y_1^1+E_2^3\ Y_2^1+E_3^3\ Y_3^1=B_1\\
E_1^3\ Y_1^2+E_2^3\ Y_2^2+E_3^3\ Y_3^2=B_2\\
E_1^3\ Y_1^3+E_2^3\ Y_2^3+E_3^3\ Y_3^3=B_3
\end{cases}
$$

一方、各通貨建資産の需給は、この表の行によって知ることができる。すなわち、ある国の各通貨による対外負債は、他国による対外資産として保有されることから、次の3本の資産需給均衡式が成立する。

$$
(8)\begin{cases}
E_1^3(Y_1^1+Y_1^2+Y_1^3)=0\\
E_2^3(Y_2^1+Y_2^2+Y_2^3)=0\\
E_3^3(Y_3^1+Y_3^2+Y_3^3)=0
\end{cases}
$$

これらの各通貨建資産の需給均衡式と、各国のバランス・シート制約条件とから、外国為替市場の需給均衡式を導出することができる。外国為替市場は、通常、狭い意味では外国為替取引を銀行間で行うインターバンク・マーケット、広い意味ではこれに銀行の対顧客取引を含めた市場として捉えられている。しかしここでは、外国為替の需給を包括的に把握するため、より広く、各国における他国通貨建金融資産（先物持高を含む）の取引市場と考えている。

このように定義された外国為替市場は、第3表における左上から右下への対角線上（斜線部分）にない要素の取引市場と考えることができる。なぜなら、同表の斜線部分の対角要素（Y_1^1、Y_2^2、Y_3^3）は、各国投資家の保有する自国通貨建対外純資産であり、為替変動リスクがないのに対し、それ以外の欄の要素（Y_i^j、$i \neq j$）は各国の保有する外貨建対外純資産であり、為替変動リスクにさらされているからである。

各国投資家は、各通貨建資産・負債の保有高を、その期待収益率を考慮しながら調整している。その場合、事前的には各国投資家の各通貨建資産・負債の需給は一致しないが、事後的には、各国金利が所与との仮定（A－5）のもとでは、直物為替相場の変動によって需給が調整され、(8)の需給均衡式が成立することになる。

このように考えると、(8)式の各通貨建資産の需給均衡式から、(7)式のバランス・シート制約式を

(注15) この式は、各国の政府部門のバランス・シート制約式

（政府部門の自国通貨建負債）＝（累積財政赤字）

と、民間部門のバランス・シート制約式（補－1）とを統合したものである。

第３表　多国多通貨の場合の国際資金循環表（残高表）

（ドル建）

	日本 (1)	西独 (2)	米国 (3)	合計
円 (1)	$E_1^3\ Y_1^1$	$E_1^3\ Y_1^2$	$E_1^3\ Y_1^3$	0
マルク (2)	$E_2^3\ Y_2^1$	$E_2^3\ Y_2^2$	$E_2^3\ Y_2^3$	0
ドル (3)	$E_3^3\ Y_3^1$	$E_3^3\ Y_3^2$	$E_3^3\ Y_3^3$	0
合計	B_1	B_2	B_3	0

E_i^j ：j 国通貨建 i 国通貨相場（例えば E_2^3 は米ドル建マルク相場）

Y_i^j ：j 国保有の i 国通貨建対外資産残高（ただし $Y_i^j > 0$ の場合、$Y_i^j < 0$ の場合は対外負債残高）

B_j ：j 国の対外純資産高

（注）この表では、為替先物契約、輸出入契約締結に伴う代金の支払い債務ないし受け取り債権も、各部門の資産・負債に含まれている。詳しくは深尾〔４〕参照。

使って対角要素の為替リスクのない自国通貨建対外純資産を消去し書き直すことで、外国為替市場の需給均衡式を導くことができる。例えば円については、(7)式で j＝1 の場合を変形すると、

$$(9)\quad -E_1^3\,Y_1^1 = E_2^3\,Y_2^1 + E_3^3\,Y_3^1 - B_1$$

が得られる。この式の右辺は、日本の投資家の外貨の買持高（はじめの２項）と日本の累積経常赤字（$-B_1$）であり、これらはすべてストックとしての、円の供給高に対応していると考えられる。一方、円建資産の需給均衡式(8)（ i＝1 の場合）も、次のように書き直すことができる。

$$(10)\quad -E_1^3\,Y_1^1 = E_1^3\,Y_1^2 + E_1^3\,Y_1^3$$

この式の右辺は、西独、米国の円建資産の買持高で、ストックとしての円の需要高とみることができる。(9)式を用いて(10)式から $E_1^3\,Y_1^1$ を消去すると、外国為替市場における円の需給式衡式が得られる。

$$(11)\quad \underbrace{E_2^3\,Y_2^1 + E_3^3\,Y_3^1 - B_1}_{\text{円の供給}} = \underbrace{E_1^3\,Y_1^2 + E_1^3\,Y_1^3}_{\text{円の需要}}$$

ここで、為替相場の変動が外貨建資産の評価額を変化させて、為替需給に影響するという要因を無視することで、以下の分析を単純化する。（注16） すなわち(11)式の中の直物為替相場 E_i^3（ i＝1、2、3)を、購買力平価で決まる均衡為替相場 $\bar{F}_i^3$ （ i＝1、2、3）で置き換えると、次の式が得られる。

$$(12)\quad X_2^1 + X_3^1 - B_1 = X_1^2 + X_1^3$$

〔但し $X_i^j = \bar{F}_j^3\,Y_i^j$, i, j＝1, 2, 3 〕

これは円の需給均衡式であるが、他の通貨の需給

（注16） この点については、補論第２節参照。

均衡式についても同様に導くことができる。数式の展開は補論第２節に譲るが、ｎ通貨が存在する一般の場合の外国為替市場の需給均衡条件式は次のように書くことができる。(注17)

$$(13)\quad (\underline{X}-\underline{X}^t)\underline{\eta}+\underline{B}=\underline{0}$$

〔記号は補論第２節参照〕

(2) 多通貨間の為替相場決定式

第２章で提示された、ｎ国投資家の外貨建資産への需要関数(6)式に対応する式を、他のｎ－１のすべての国について求めた上で、外国為替市場の需給均衡条件である(13)式に代入して、直物為替相場について解くと、次の為替相場決定式が得られる（補論第２節参照）。

$$(14)\quad e_k^n = \bar{f}_k^n + (r_k - r_n) + \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n-1} M_{kj}^n B_j$$

e_k^n ：ｎ国通貨建ｋ国通貨相場（対数値）
$\bar{f}_k^n$ ：ｎ国通貨建ｋ国通貨相場の期末時点における購買力平価相場（対数値）
r_k ：ｋ国通貨建資産の名目金利
r_n ：ｎ国通貨建資産の名目金利
c ：世界の投資家全体の危険回避度を示す係数
M_{kj}^n ：期末時点に予想される、ｎ国通貨建のｋ国通貨為替相場とｊ国通貨為替相場の間の共分散（ｋ＝ｊならｋ国通貨の分散）
B_j ：ｊ国の対外純資産高（ほぼ累積経常収支に等しい）

しかしこの式は、各国にインフレーションがないとの仮定（Ａ－３）のもとで導かれたものであり、一般的でない。そこで、「各国にインフレーションはあるが、将来のインフレ率については確実に見通せる」との仮定を置いて、(14)式を変形すると、次の最終的な形の為替相場決定式が得られる（補論第２節（補－38）式）。

$$\boxed{(15)\quad e_k^n = g_k^n + [(r_k-\pi_k)-(r_n-\pi_n)] + \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n-1} M_{kj}^n B_j \qquad k=1,2,\cdots,n-1}$$

g_k^n ：ｎ国通貨建ｋ国通貨相場の、現時点における購買力平価相場（対数値）
π_k ：ｋ国の期待インフレ率
π_n ：ｎ国の期待インフレ率

この為替相場決定式からわかるように、ｎ国通貨建でみたｋ国通貨為替相場 e_k^n は、現時点での購買力平価相場 g_k^n と、ｋ国とｎ国との間の実質金利格差〔$(r_k-\pi_k)-(r_n-\pi_n)$〕、および分散・共分散行列要素 M_{kj}^n をウエイトとするｎ国以外の対外純資産高 B_j の加重合計値（$\sum_{j=1}^{n-1} M_{kj}^n B_j$、リスク・プレミアムを表わす）の３つによって決定される。(注18)

（注17） (13)式を、行列、ベクトルの要素を用いて書き直すと、次のようになる。

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & X_1^2 & X_1^3 & \cdots & X_1^n \\ X_2^1 & 0 & X_2^3 & \cdots & X_2^n \\ X_3^1 & X_3^2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & X_{n-1}^n \\ X_n^1 & X_n^2 & X_n^3 & \cdots\ X_n^{n-1} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & X_2^1 & X_3^1 & \cdots & X_n^1 \\ X_1^2 & 0 & X_3^2 & \cdots & X_n^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & X_n^{n-1} \\ X_1^n & X_2^n & X_3^n & \cdots\ X_{n-1}^n & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

（注18） この項がリスク・プレミアムに対応していることについては、深尾〔５〕参照。

(3) 多通貨モデルのインプリケーション

本稿で展開された為替相場決定理論から(15)式が得られたが、これは深尾〔5、p.9〕が2か国の場合の実質為替リスク・モデルについて導出した為替相場決定式を、nか国の場合に拡張したものである。各国間の実質金利差と為替相場の関係や、先物相場と期待される将来の直物相場との関係については、すでに同論文で分析されているので、本稿では論じない。また介入の効果については、次の第5章で詳述する。

2か国モデルとnか国モデルで最も大きく異なる点は、各国間の対外純資産高に依存するリスク・プレミアム項((15)式第3項)が、自国の対外純資産高のみならず第3国の対外純資産高にも依存していることである。第3国の対外純資産高が、自国とベース国との間の為替相場に影響を及ぼす程度は、投資期間末における自国通貨の為替相場および第3国通貨の為替相場(いずれもベース国通貨に対する為替相場)との間に予想される、共分散(M^n_{kj})に依存している。例えば、米国をベース国として、円対ドル相場に与える西独の対外純資産高の変動の影響度合は、円対ドル相場とマルク対ドル相場との間で将来予想される共分散の大きさに依存している。この共分散の大きさは、各通貨のベース国に対する為替相場の共変関係で決まっているため、第1章で考察した通貨間の代替・補完関係が第3国効果の強さを決定していると言える。

この第3国効果を分析するために、世界に3か国しか存在しない単純な場合を考えてみる。また、対外純資産高の為替相場に与える影響だけを考察するため、各国の実質金利は同一水準にあり、実質金利格差はないものとする。この時、為替相場決定式(15)は次のようになる。

(16) $e^3_1 = g^3_1 + \frac{1}{c}〔M^3_{11}B_1 + M^3_{12}B_2〕$

(17) $e^3_2 = g^3_2 + \frac{1}{c}〔M^3_{21}B_1 + M^3_{22}B_2〕$

よって、通貨1、2の通貨3に対する為替相場e^3_1、e^3_2は、それぞれ2つの対外純資産高B_1、B_2の影響を受けていることがわかる。ここでM^3_{11}とM^3_{22}は、期末時点に予想される為替相場の分散で、常に正である。このため、国1の対外純資産高B_1の増加($dB_1>0$)は、通貨1の通貨3で測った為替相場を必ず上昇させる($de^3_1>0$)。また国2の対外純資産高B_2の増加($dB_2>0$)も通貨2の通貨3で測った為替相場を必ず上昇させる($de^3_2>0$)。しかしM^3_{12}($=M^3_{21}$)は、通貨3からみて通貨1と2が正の相関を持つと予想され、通貨1と2が代替通貨となっている場合には正であるが、負の相関で補完通貨となっている場合には負となる。

まず通貨1と2が代替通貨となっている場合を考えてみる。これは第1章において円、マルク、米ドルの3通貨をそれぞれ通貨1、2、3とした場合にあたる。米ドルからみて、円とマルクは過去に正の相関を持って変動しており(第2表(a))、もしこれが今後とも続くと予想されれば、M^3_{12}は正となる。よって、西独の経常収支が黒字でB_2が増加すると、マルクが米ドルに対して上昇する($de^3_2>0$)と同時に、円も米ドルに対して上昇($de^3_1>0$)する。なおこの場合、$M^3_{21}=M^3_{12}>0$であることから、日本の経常黒字($dB_1>0$)は円高を生ずる($de^3_1>0$)と同時に、マルクのつれ高($de^3_2>0$)をも発生させる。この第3国効果は共分散M^3_{12}が大きいほど強く、もし円とマルクが完全にパラレルに動くと予想されれば、$M^3_{11}=M^3_{12}$が成立して円の対米ドル相場には日本と西独の対外総資産高の変化が同じウェイトで影響を与える。(注19) こうした第3国効果が発生するのは、円建資産とマルク建資産には程度の差こそあれ、ある程度の代替性があり、西独の経常収支不均衡がマルク建資産の需給を変化させると、これが円建資産の需給に影響を与えるからである。

次に、通貨1と2が補完通貨となっている場合

を考える。円、カナダ・ドル、米ドルをそれぞれ通貨1、2、3とすると、第2表(a)でみたように米ドルからみて、円とカナダ・ドルは弱い逆相関を持っており、こうした関係が将来続くと予想されれば補完通貨であると考えられる。このとき、$M^3_{12}<0$となり、カナダが経常黒字（$dB_2>0$）となった場合、カナダ・ドルが米ドルに対し上昇（$de^3_2>0$）する一方、円の対米ドル相場 e^3_1 は逆に下落する。これは、カナダが経常黒字となり、その対外負債が減少すると、非カナダ人が保有するカナダ・ドル建資産が減少し、これを部分的にヘッジする目的で保有されていた、補完資産である円建資産の需要が減少して円安になるためである。またこの補完通貨の場合、$M^3_{21}=M^3_{12}<0$ なので、日本の経常黒字（$dB_1>0$）は円高ドル安（$de^3_1>0$）を発生させるとともに、第3国通貨であるカナダ・ドルを米ドルに対して下落（$de^3_2<0$）させる。

なお以上では、あたかも各国の対外純資産高がそれぞれ自由に変動しうるかのように分析が行われたが、現実には3か国の対外純資産高合計は常にゼロとなり、次式が成立する。

$$B_1+B_2+B_3\equiv 0$$

よって、上の3か国の場合の分析では、ある国の対外純資産高の変化は、すべて米国の B_3 の変化によって吸収（accommodate）されたという暗黙の仮定が置かれている。現実には、すべての対外純資産高は、同時に変化しており、日本が経常黒字であっても、それに対応する赤字国如何によって黒字が円の対米ドル相場に与える影響は異なる。先の日本、西独、米国の3か国の例では、日本の経常黒字に対応する赤字国が西独なら、日本の黒字の円高効果（$M^3_{11}dB_1>0$）と西独の赤字の円つれ安効果（$M^3_{12}dB_2<0$）が打ち消し合って、経常黒字による円の対米ドル相場の上昇圧力は小さい。しかし、日本の黒字に対応する赤字国が米国なら、その円高効果はより強いものとなる。(注20)

5. 介入政策の効果と介入通貨選択

本稿のこれまでの分析では、各国通貨当局によ

(注19) この場合は、日本と西独が相互に為替相場を固定して、米ドルに対して共同フロートすることに相当する。$M^3_{11}=M^3_{12}$ は次のようにして証明される。期末時点での円・米ドルおよびマルク・米ドル相場を$\tilde{F}^3_1$と$\tilde{F}^3_2$の2つの確率変数で表わす。もし円とマルクが米ドルに対して完全にパラレルに動くと予想されれば、

$$\tilde{F}^3_1=\alpha\tilde{F}^3_2 \qquad \alpha: \text{正の定数}$$

となる。この対数をとって（対数値を小文字で表示）

$$\tilde{f}^3_1=\ell n\,\alpha+\tilde{f}^3_2$$

この両辺からそれぞれの期待値（$\bar{f}^3_1$、$\ell n\,\alpha+\bar{f}^3_2$）を差し引き、

$$\tilde{f}^3_1-\bar{f}^3_1=\tilde{f}^3_2-\bar{f}^3_2$$

さらに（$\tilde{f}^3_1-\bar{f}^3_1$）を両辺に乗じてから期待値をとると、

$$M^3_{11}=M^3_{12}$$

が得られる。

(注20) ここでの経常収支黒字国と赤字国の議論は、各国の、すべての他国に対する収支（multilateral な収支）についてであり、2国間の収支（bilateral な収支）についてではない。例えば、日本、西独、米国3か国の世界において、各国のmultilateral な収支が均衡していても、日本は米国に、米国は西独に、西独は日本にそれぞれ黒字でありうる。この場合のbilateral な不均衡は、本稿のモデルにおいて為替相場を変化させる圧力にならない。

る介入はないものと仮定（第２章第１節参照）してきたが、本章では理論モデルに通貨当局のバランス・シートを明示的に導入し、介入により民間部門が保有する各通貨建資産の残高が変化して、為替相場に影響を与えるメカニズムを考察する。なお以下では、介入によるハイパワード・マネーの変化が直ちに自国通貨建債券オペによって不胎化され、各国の金利が一定に保たれる場合の介入（いわゆる不胎化介入）と為替相場の関係を分析する。

この不胎化された介入行動は、通貨当局のバランス・シートにおける各通貨建債権債務の変化として記述できる。n通貨がある場合の、任意の国の通貨当局のバランス・シートは次の式で表わされる。

$$(18)\quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

（Z_i ：通貨当局の保有する i 国通貨建資産（$Z_i > 0$）負債（$Z_i < 0$））

なお、通貨当局の実物資産、資本勘定は捨象されているので、(18)式の右辺はゼロと置かれている。通貨当局のバランス・シートを第３表でみた３か国の国際資金循環表に導入すると、第４表のようになる。この表から明らかなように、どこの国の通貨当局であっても形式的には全く同様に表示できるので、ここでは単に「通貨当局」と呼ぶ。一般に、いくつかの通貨当局の行動を同時に考慮したい時は、通貨当局の統合されたバランス・シートを Z_i に代入して考えればよい。

この第４表から、次の各通貨建資産の需給均衡式

$$(19)\quad \begin{cases} X_1^1 + X_1^2 + X_1^3 + Z_1 = 0 \\ X_2^1 + X_2^2 + X_2^3 + Z_2 = 0 \\ X_3^1 + X_3^2 + X_3^3 + Z_3 = 0 \end{cases}$$

（一般には、

$$(19)'\quad \sum_{j=1}^{n} X_i^j + Z_i = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

）

と、次のバランス・シート制約式

$$(20)\quad \begin{cases} X_1^1 + X_2^1 + X_3^1 = B_1 \\ X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = B_2 \\ X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = B_3 \end{cases}$$

第４表　介入を考慮した国際資金循環表

（ドル建）

	日本 (1)	西独 (2)	米国 (3)	通貨当局	合計
円 (1)	X_1^1	X_1^2	X_1^3	Z_1	0
マルク (2)	X_2^1	X_2^2	X_2^3	Z_2	0
ドル (3)	X_3^1	X_3^2	X_3^3	Z_3	0
合計	B_1	B_2	B_3	0	0

X_j^i ：購買力平価相場 $\bar{F}_i^3$ で米ドル換算された、j 国民間部門の保有する i 国通貨建純資産高

Z_i ：購買力平価相場 $\bar{F}_i^3$ で米ドル換算された、通貨当局の保有する i 国通貨建純資産高

一般には、

$$(20)'\quad \sum_{i=1}^{n} X_i^j = B_j \qquad j=1,2,\cdots\cdots,\ n$$

$$(21)\quad Z_1+Z_2+Z_3=0$$

一般には、

$$(21)'\quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

が成立する。これらの式から、第3章第1節と同様にして、表の斜線部分の対角要素（X_1^1、X_2^2、X_3^3、一般にはX_i^i、i＝1、2、……、n）を消去すると、次の行列で表示された外国為替市場の需給均衡式が得られる（（注17）参照）。

$$(22)\quad (\underline{X}-\underline{X}^t)\,\underline{\eta}+(\underline{B}+\underline{Z})=\underline{0}$$

$$\underline{Z}=\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$ ：通貨当局のバランス・シートを表わすベクトル

この需給均衡式は、介入がない場合の(13)式を介入がある場合に一般化したものであるが、両者の差は、最後の項が$\underline{B}$から（$\underline{B}+\underline{Z}$）に変わっている点だけである。この需給均衡式(22)を用いて、前章と同様に為替レート決定式を導くと、次の式が得られる。

$$(23)\quad e_k^n=g_k^n+[(r_k-\pi_k)-(r_n-\pi_n)]+\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n-1} M_{kj}^n(B_j+Z_j)$$

この介入がある場合の為替相場決定式は、介入がない場合の(15)式のリスク・プレミアムを表わす第3項を、通貨当局のバランス・シート項目 Z_j でで修正した形をしており、このモデルの枠組では、介入が為替相場を変化させうるという意味で有効なことを示している。

通貨当局の介入は、(18)式のバランス・シート制約条件下で、その保有する各通貨建資産・負債保有高 Z_j を変化させて行われる。介入の為替相場に与える影響は、(23)式からわかるように、前章で説明された対外純資産高 B_j の変化の影響と同じであるため、ここでは簡単に論ずることにする。

ベースであるn国通貨に対するi国通貨の為替相場を支持するため、j国通貨（j＝nでもよい）を売却してi国通貨を買う介入は、次式で表わされる。

$$(24)\quad dZ_i=-dZ_j>0$$

この介入によるZ_i、Z_jの変化が、任意の国の通貨のn国通貨建為替相場に与える影響は、次のように(23)式を用いて分析することができる。すなわち、(23)式を全微分して、de_k^n、dZ_i、dZ_j以外の変数をゼロと置くと、

$$de_k^n=\begin{cases} \frac{1}{c}[M_{ki}^n\,dZ_i+M_{kj}^n\,dZ_j] & j\neq n \\ \frac{1}{c}M_{ki}^n\,dZ_i & j=n \end{cases}$$

が得られる。この式の中のdZ_jを(24)式を利用してdZ_iに置き換えると、次式が得られる。

$$(25)\quad de_k^n=\begin{cases} \frac{1}{c}[M_{ki}^n-M_{kj}^n]\,dZ_i & j\neq n \\ \frac{1}{c}M_{ki}^n\,dZ_i & j=n \end{cases}$$

この式は、通貨当局がj国通貨を売却してi国通貨を買い入れる介入を実行したときの、n国通貨建k国通貨為替相場 e_k^n への影響を表わしている。すなわち、介入の結果おきるk国通貨の為替相場変動de_k^n（k＝1、2、……、n－1）は、外国為替市場に参加している投資家全体の危険回避度（c：これが大きいほど回避度は小）、k国通貨と介入に用いられたi国、j国両通貨の間の代替・補完関係（M_{ki}^n、M_{kj}^n）および介入額（dZ_i）に依存している。

この(25)式から、直ちに多くの重要なインプリケ

ーションが得られるが、ここでは理解を容易にするために、i国を日本、ベース国（n国）を米国とし、円を米ドルに対して買い支えるために、米ドル、マルク、カナダ・ドルを売却する場合について考察する。また米ドルからみて、円とマルクは代替通貨、円とカナダ・ドルは補完通貨であると想定して、議論を進める。(注21)

ⅰ）円を買い支えるとき、売却する通貨によって、円対米ドル相場に与える効果は異なる。売却する通貨がマルクのように、米ドルからみて円の代替通貨であるとすると、その効果は米ドル売却の場合より小さい。一方売却する通貨がカナダ・ドルのように、米ドルからみて円の補完通貨なら、その効果は米ドル売却の場合より大きい。

ⅱ）介入により円買い米ドル売りを行った場合、その効果は円対米ドル相場だけでなく、マルク対米ドル相場等第3国の為替相場にも影響する。例えば、円買い米ドル売りは、米ドルからみて円と代替通貨であるマルクの対ドル相場を上昇させる反面、米ドルからみて円と補完通貨であるカナダ・ドルの対米ドル相場を下落させる。

ⅲ）円とマルクとを同時に米ドル売却で買い支えるような協調介入は、ⅱ）で考察した介入の第3国通貨に与える影響の存在により、単独介入以上に有効である。すなわち、日銀が円安防止のためドル売り円買いを単独で行う場合に比べ、同時にブンデスバンクが円を介入に使わなくてもドル売りマルク買いを協調して行ってくれれば、円安防止の効果は大きくなる。

ⅳ）一方、介入の効果が無効になるケースには、以下の2つが考えられる。まず第1のケースは、介入に使用される2つの通貨だけが非常に良い代替資産となっている時である。すなわち、例えば円をドルやマルクの売却で買い支える時に、介入に使用された通貨である円とドル、ないし円とマルクが、相互に非常によい代替資産であれば、類似の通貨をたんに交換したに止まることとなり介入は無効になる。

次に第2のケースは、「投資家がリスクに対して中立的（risk neutral）」な場合である。これは、第2章、仮定（A－2）の効用関数(1)式で、$b_n=0$の場合にあたり、このとき、投資家は自分の保有するポートフォリオのリスクを表わす指標である分散を全く考慮せず、その期待利回りだけを最大化しようとする。このため、2つの通貨建資産の利回りがわずかでも異なれば、そのうち高い方へ全資産をシフトさせようとする。この結果、すべての資産の期待利回りが一致したときにのみ、資産市場は均衡し、またこの状況においては、リスクに対して中立的な投資家にとって、すべての通貨は完全な代替資産となっている。この場合には、為替相場決定式(23)において、係数cが無限大になり（(23)式の第3項はゼロ）、為替相場は現在の購買力平価と内外の実質金利差のみに依存し、対外純資産高（≒累積経常収支）や介入額の影響を受けない。よって、投資家がリスクに対して中立的なこの場合には、どの通貨を用いる介入も無効となるばかりでなく、各国の経常収支不均衡も為替相場に影響しない。(注22)

この係数cが無限大とのケースはもちろん極

（注21） 円とマルクが代替資産であるとの想定は、かなり現実的であろう。しかし、円とカナダ・ドルの補完関係については、マイナスの相関係数も低い上、第2次石油危機後には円とマルクが米ドルに対して下落する中で、カナダ・ドルも米ドルに対して弱含みで推移しており（第1図）、問題がある。このため、以下の結論の現実への適用には、この点への注意が必要である。

（注22） この場合は、深尾〔6，pp.15－29〕のオーバーシューテイング・モデルに対応する。

端であるが、もし外国為替市場にリスクをさほどいとわない多くの投資家が参加しており、巨額の外貨ポジションでも市場が為替相場をほとんど変化させることなく吸収できれば、市場全体としてはほぼリスクに対して中立的であると考えることができる。そしてこの場合には、為替リスクに影響して、為替相場を動かすという介入の効果は期待できないこととなる。

なお本章の分析においては、介入が投資家の期待に与える影響を考慮していない。しかし外国為替市場が、内外の物価水準、金利、インフレ率、政府の政策スタンス等数多くの要因を十分消化していない場合には、通貨当局が介入を通じて市場が見落している情報を訴えることで、為替相場に影響できるはずである。この要因は、介入の短期的な効果を決める上で重要と考えられるが、理論的な分析が非常に困難なため本稿では捨象している。また、為替相場の共変関係を大きく変化させるような大幅な介入が中長期的に行われる場合や、石油ショック、国際政治・金融不安等が発生した時には、それが人々の予想する将来の為替相場の変動パターンを変化させ、各通貨間の代替・補完関係（M^n_{ij}）を動かす可能性がある。このときは、介入の効果が従来とは異なったものとなる可能性があるので、注意が必要である。

6．おわりに

本稿では、多国・多通貨の世界における為替相場決定について、理論的に分析した。

その主要なインプリケーションは、次のようにまとめることができよう。

① 円の対米ドル為替相場には、日米の経常収支だけでなくＥＣ等第３国の経常収支も影響する。このため、円と良い代替関係にある通貨を発行する第３国ないし通貨圏が大幅な経常赤字となっていれば、円の対米ドル相場は、いわゆるつれ安となり、日本の経常収支が黒字であっても、必ずしも円高とならないことがありうる。

② 不胎化された介入政策は、各国通貨建資産間の需給関係を変化させること、および投資家の期待を変化させること、の２つの経路を通じて為替相場に影響を与える。本稿では、このうち介入が為替需給関係の変化を通じて為替相場に及ぼす効果を論じたが、多通貨を分析の対象とする本論では、介入の効果についても第３国通貨との代替・補完関係を考慮する必要性が指摘されている。

この点は、第１に協調介入の効果を検討する際に重要である。円とドイツ・マルクは良い代替関係にあるため、日銀が円安防止のためドル売り円買いを行っている際に、ブンデスバンクがドル売りマルク買いの形で協調介入を行ってくれれば、円が介入通貨として使用されていなくても、日銀の単独介入の場合よりも円の対米ドル相場下落防止の効果は大きくなる。

第２に重要な点は、単独介入の場合でも売却する通貨の選択によって、その有効性が大きく異なる可能性が強いことである。因みに、わが国の場合、為替市場への介入は伝統的に円対米ドルで行われているが、仮に介入通貨を西独マルク等に拡大する場合には、これら通貨と日本円との代替・補完関係が重要な問題となるのである。すなわち、本稿の分析結果によれば、日銀が円の対米ドル相場を支持するために円買い、マルク売りをすると、マルクは円の良い代替通貨であるため、その効果は円買いドル売り介入よりもかなり小さいと考えられる。反面、円買いカナダ・ドル売りを行うと、カナダ・ドルは円の補完通貨であるため、その円対米ドル相場に及ぼす効果は円買い・米ドル売り介入自体よりもむしろ大きいと考えられる。

なお、本稿では、以上述べたような多通貨間の為替需給を分析する上で重要な要因となる通貨間の代替性・補完性は、各国為替相場間の将来予想

される共変関係に依存することを示した。しかし、この共変関係自体が、より根本的にどのような要因によって決定されるのかという問題については、分析はなお不十分であり、これは将来の重要な研究課題である。

以　上

〔補論〕　数学的証明

本文では、数式の展開を極力省略し、多通貨間の為替相場決定理論の結果のみを、厳密な証明なしで解説した。この補論では、そうした主要な結果に対して、数学的な証明を与える。

(1) 各通貨建資産への需要関数

ここでは、本文の第2章第2節で提示された、外貨建資産への需要関数(6)式を導出する。

第2章第1節で置かれた仮定（A－1）～（A－6）のもとでは、n国の投資家はリスクのない自国通貨建資産と、実質為替リスクのあるn－1種類の外貨建資産に投資している。そして、最適なポートフォリオの選択は、期初におけるバランス・シート制約条件のもとで、本文(1)式の効用関数を最大化することで求まる。

まずn国投資家の期初におけるバランス・シート制約条件式は、

$$（補－1）\quad W_o^n = \sum_{k=1}^{n-1} E_k^n Y_k^n + D^n = (\underline{E}^n)^t\ \underline{Y}^n + D^n$$

$$\left[\begin{array}{ll} W_o^n & ：\text{期初の資産保有高} \\ E_k^n & ：\text{n国通貨建k国通貨の、期初における直物為替相場} \\ Y_k^n & ：\text{k国通貨建資産保有高} \\ D^n & ：\text{自国通貨建資産保有高} \\ \underline{E}^n = \begin{pmatrix} E_1^n \\ E_2^n \\ \vdots \\ E_{n-1}^n \end{pmatrix} & ：\text{直物為替相場のベクトル} \\ \underline{Y}^n = \begin{pmatrix} Y_1^n \\ Y_2^n \\ \vdots \\ Y_{n-1}^n \end{pmatrix} & ：\text{n国投資家の保有する外貨建資産のポートフォリオ・ベクトル} \end{array}\right]$$

と書ける(注23)（本稿では、ベクトルや行列をスカラーと区別するため、アンダーラインを用いる。また転置は右肩のtで示す）。n国投資家は（補－1）式を満たしながら、そのポートフォリオであるY_1^n, Y_2^n, …, Y_{n-1}^n, D^nの組み合わせを、(1)式の効用関数

$$(1)\quad u = a_n \mu_w - b_n \sigma_w^2$$

〔記号は第2章第1節の仮定（A－2）参照〕を最大化するように決定している（付－A参照）。なおY_i^nは、正であれば資産、負であれば債務を表わし、各通貨建の資金の運用調達は、市場金利で全く自由にできるものとする。

ポートフォリオを決定する期初には、期末の為替相場が確率変数としてしか分からないため、n国投資家の期末の資産価値$\widetilde{W}^n$も確率変数となる（本稿では、確率変数を～で表わす）。そして$\widetilde{W}^n$は次のように書くことができる。

$$（補－2）\quad \widetilde{W}^n = \sum_{k=1}^{n-1} Y_k^n (1 + R_k)\widetilde{F}_k^n + D^n (1 + R_n)$$

$$\left[\ R_k \quad ：\text{k国の名目金利}\ \right]$$

（注23）　このバランス・シート制約式では、n国投資家の実物資産保有を捨象している。このため、W_o^nは期初におけるn国投資家の金融資産保有高となり、これはn国の対外純資産高とn国政府の累積財政赤字（すべて自国通貨建債券発行でファイナンスされたと仮定）の合計に等しい（深尾〔7、第2表〕参照）。

| $\widetilde{F}^n_k$ ：n国通貨建k国通貨の期末時点の為替相場（確率変数）
| R_n ：n国（自国）の名目金利

仮定（A－4）により、期末の為替相場$\widetilde{F}^n_k$ はその対数値$\widetilde{f}^n_k$（$\equiv \ell_n \widetilde{F}^n_k$）の期待値が、期末時点の購買力平価相場 $\bar{F}^n_k$ の対数値$\bar{f}^n_k$（$\equiv \ell_n \bar{F}^n_k$）に等しい（付－B参照）。すなわち、$\varepsilon$ を期待値のオペレーターとして

（補－3） $\varepsilon[\widetilde{f}^n_k] = \bar{f}^n_k \quad k=1,2,\cdots,n-1$

が成立する。(注24) また、投資家は、将来の為替相場の不確実性および各為替相場間の共変関係を、次の分散・共分散の形で予想しているものと仮定する。

（補－4） $\varepsilon[(\widetilde{f}^n_j - \bar{f}^n_j)(\widetilde{f}^n_k - \bar{f}^n_k)] = M^n_{jk}$

| M^n_{jk} ：$j \neq k$なら$\widetilde{f}^n_j$と$\widetilde{f}^n_k$の間の共分散 $j=k$なら、$\widetilde{f}^n_j$ の分散

さらに、以下の式を単純化するため、内外金利に1を加えたものの対数値を次のように定義する。

（補－5） $r_k = \ell_n(1+R_k) \quad k=1,2,\cdots,n$

以上の新しい変数を用いて、期末資産高を示す（補－2）式を書き直すと、指数関数e^xをexp(x)と表示して、

$$\widetilde{W}^n = \sum_{k=1}^{n-1} Y^n_k \exp(r_k + \widetilde{f}^n_k - \bar{f}^n_k + \bar{f}^n_k) + D^n \exp(r_n)$$

$$= \sum_k Y^n_k \exp(\bar{f}^n_k) \exp(r_k + \widetilde{f}^n_k - \bar{f}^n_k) + D^n \exp(r_n)$$

$$\cong \sum_k Y^n_k \bar{F}^n_k (1 + r_k + \widetilde{f}^n_k - \bar{f}^n_k) + D^n(1+r_n)$$ (注25)

が得られる。よって、期末資産 $\widetilde{W}^n$ の期待値μ_w と分散σ^2_w は次のように求められる。

（補－6）
$$\mu_w = \varepsilon(\widetilde{W}^n) = \sum_{k=1}^{n-1} Y^n_k \bar{F}^n_k (1+r_k) + D^n(1+r_n) = (\underline{Y}^n)^t \underline{F}^n (\underline{\eta} + \underline{r}^n) + D^n(1+r_n)$$

$$\underline{F}^n = \begin{pmatrix} \bar{F}^n_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{F}^n_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 \cdots & 0 & \bar{F}^n_{n-1} \end{pmatrix}$$ ：各通貨のn国通貨に対する購買力平価為替相場の対角行列

$$\underset{(n-1)\times 1}{\underline{\eta}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ ：n－1個の1からなるベクトル

$$\underline{r}^n = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$ ：n国以外の国の金利ベクトル

（補－7）
$$\sigma^2_w = \mathrm{Var}(\widetilde{W}^n) = \varepsilon(\widetilde{W}^n - \mu_w)^2$$

(注24) ここでは、為替相場そのものではなく、その対数値の期待値$\varepsilon[\widetilde{f}^n_k]$が、購買力平価相場の対数値 $\bar{f}^n_k$ に等しいと仮定している。

(注25) この式の変形では、小さなxについて次の近似式が用いられた。
$$e^x = \exp x \cong 1 + x$$

$$= \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n-1} Y_k^n \bar{F}_k^n (\tilde{f}_k^n - \bar{f}_k^n) \right)^2$$

$$= \sum_j \sum_k (Y_j^n \bar{F}_j^n) M_{jk}^n (Y_k^n \bar{F}_k^n)$$

$$= (\underline{Y}^n)^t \ \underline{F}^n \underline{M}^n \underline{F}^n \underline{Y}^n$$

$$\left[\underline{M}^n = \begin{pmatrix} M_{11}^n & M_{12}^n & \cdots & M_{1n-1}^n \\ M_{21}^n & M_{22}^n & & M_{2n-1}^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ M_{n-1,1}^n & \cdots & & M_{n-1,n-1}^n \end{pmatrix} \right.$$

：期末に予想される、為替相場間の分散・共分散行列で (注26) $\det \underline{M}^n \neq 0$]

投資家の最適ポートフォリオ（ $\underline{Y}^n$ 、D^n ）は、上で導かれた μ_w と σ_w^2 を(1)式に代入した次式

（補－8） $u = a_n [(\underline{Y}^n)^t \underline{F}^n (\underline{\eta} + \underline{r}^n) + D^n (1 + r_n)] - b_n [(\underline{Y}^n)^t \underline{F}^n \underline{M}^n \underline{F}^n \underline{Y}^n]$

を、制約条件（補－1）式のもとで最大化することにより求まる。

この制約条件付最大化問題の、一次の必要条件は、

（補－9） $a_n \underline{F}^n (\underline{\eta} + \underline{r}^n) - 2 b_n \underline{F}^n \underline{M}^n \underline{F}^n \underline{Y}^n - \lambda_n \underline{E}^n = \underline{0}$

（補－10） $a_n (1 + r_n) - \lambda_n = 0$

および（補－1）式となり、λ_n はラグランジェ乗数である。式（補－9）（補－10）から、n国投資家の外貨建資産需要が次のように求まる。

（補－11） $\underline{F}^n \underline{Y}^n = c_n [\underline{M}^n]^{-1} [(\underline{\eta} + \underline{r}^n) - (1 + r_n) (\underline{F}^n)^{-1} \underline{E}^n]$

［ $c_n \equiv \dfrac{a_n}{2 b_n}$ ：効用関数のパラメーター ］

この式の右辺は、次のようにして単純化できる。大かつこの内のベクトルのk番目の要素は、

$$1 + r_k - (1 + r_n) \exp (e_k^n - \bar{f}_k^n)$$

$$\cong (1 + r_k) - (1 + r_n)(1 + e_k^n - \bar{f}_k^n)$$

$$\cong (r_k - r_n) + (\bar{f}_k^n - e_k^n)$$

［ e_k^n ： 直物為替相場　E_k^n の対数値； $e_k^n = \ell n\, E_k^n$ ］

なので、次式が成立する。

（補－12） $(\underline{\eta} + \underline{r}^n) - (1 + r_n) (\underline{F}^n)^{-1} \underline{E}^n = (\underline{r}^n - r_n \underline{\eta}) + (\underline{f}^n - \underline{e}^n)$

$$\left[\underline{f}^n = \begin{pmatrix} \bar{f}_1^n \\ \bar{f}_2^n \\ \vdots \\ \bar{f}_{n-1}^n \end{pmatrix} \right.$$ ：期末時点の購買力平価相場の対数値 $\bar{f}_k^n$ のベクトル

$$\underline{e}^n = \begin{pmatrix} e_1^n \\ e_2^n \\ \vdots \\ e_{n-1}^n \end{pmatrix}$$ ：直物為替相場の対数値 e_k^n のベクトル ］

これを（補－11）式に代入すると、本文第2章で(6)式として示されたn国投資家による外貨建資産需要関数が、次のように求まる。

（補－13） $\underline{X}^n = c_n [\underline{M}^n]^{-1} [(\underline{r}^n - r_n \underline{\eta}) + (\underline{f}^n - \underline{e}^n)]$

(注26)　$\det M^n \neq 0$ の仮定は、n通貨のどれもがフロートしていて、他の通貨や通貨バスケットに対してペッグしていないことを意味する。この分散・共分散行列の性質については、Lindgren〔13、p.464〕等を参照。

なお、$\underline{X}^n \equiv \underline{F}^n \underline{Y}^n$ は、購買力平価相場を用いてn国通貨建に直された、n国投資家の外貨建資産需要である。

この外貨建資産需要関数において、投資家の効用関数のパラメーター c_n は、投資家の危険回避度を示す係数と関係している。(注27)

また $\underline{M}^n$ は、将来の為替相場変動からの不確実性（リスク）の程度と、為替相場相互間の共変関係を分散・共分散行列の形で示している。最後に〔$(\underline{r}^n - r_n \underline{\eta}) + (\underline{f}^n - \underline{e}^n)$〕は、内外資産間の期待収益率格差を示すベクトルである。すなわち、この第k要素は、

$$(r_k + \bar{f}^n_k - e^n_k) - r_n$$

と書き直せるが、このうち第1項はk国通貨建資産の金利 r_k とk国通貨のn国通貨建為替相場の期待上昇率（$\bar{f}^n_k - e^n_k$）の和で、k国通貨建資産の期待収益率を表わしている。一方、第2項はn国通貨建資産の利回りを示しており、この両者の差はn国投資家にとっての内外通貨建資産間の予想利回り格差となっている。

この外貨建資産需要関数（補－13）式の性質については、すでに本文の第2章第2節で詳述されているので、ここでは論じない。なお、n国投資家の自国通貨建資産への需要額 D^n は、（補－13）式とバランス・シート制約式（補－1）式とから求めることができる。すなわち、

$$（補－14）\quad D^n = W^n_o - \sum_{k=1}^{n-1} E^n_k Y^n_k$$

$$= W^n_o - \sum_{k=1}^{n-1} E^n_k \left(\frac{X^n_k}{\bar{F}^n_k}\right)$$

が成立する。(注28) ここで上の式の X^n_k は、（補－13）式から求められる。

(2) 為替相場決定式

本節では、本文の第3章第2節で提示された、為替相場決定式(15)を導出する。まず外国為替市場の需給均衡式を行列表示で導いたあと、n国投資家だけが外貨建資産・負債を保有し、他の国の投資家は為替リスクを伴う外貨建資産・負債を一切保有しないという特別な場合について、為替相場決定式を導出する。最後に、この特別な場合と同じ形の式が、すべての国の投資家が外貨建資産・負債を保有するという一般の場合にも、成立することを示す。

（外国為替市場の需給均衡式）

外国為替市場における円資産の需給均衡式は、本文の第3章第1節で(11)式として導出されたが、ここではこの式を行列表示により、nか国の場合に一般化する。まず次の行列を定義する。

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} 0 & Y^2_1 & Y^3_1 & \cdots\cdots & Y^n_1 \\ Y^1_2 & 0 & Y^3_2 & \cdots\cdots & Y^n_2 \\ Y^1_3 & Y^2_3 & 0 & \cdots\cdots & Y^n_3 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & Y^n_{n-1} \\ Y^1_n & Y^2_n & \cdots & Y^{n-1}_n & 0 \end{pmatrix} \quad n \times n$$

(注27) 通常仮定されているように、投資家の純資産が増加するとその主体の危険回避度が小さくなるとすれば、n国の資産高が増加するに伴って c_n は大きくなり、外貨建資産の需要は拡大する。しかしここでは、c_n は一定を仮定して分析を進める。

(注28) （補－14）式における D^n は、n国投資家の自国通貨建資産保有高総額を表わしているので、自国通貨建対外純資産高とは異なる。例えば、第3表において、米国をn国と考えると、ドル建対外純資産高 Y^3_3 は、米国民間部門のドル建資産保有高 D^3 とは異なる。これは米国民間部門が、ドル建米国国債などの国内の資産を保有できるからである。

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} E_1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_2^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & E_3^n & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & E_n^n \end{bmatrix} \quad n \times n$$

$$\begin{array}{cc} n\times 1 & n\times 1 \text{（注29）} \\ \underline{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} & \underline{\eta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

これらの行列を用いて、外国為替市場の需給均衡条件は

（補－15）　$\underline{Y}^t \underline{E}^t \underline{\eta} - \underline{B} = \underline{E}\,\underline{Y}\,\underline{\eta}$

あるいは

$$\boxed{\text{（補－16）}\quad (\underline{E}\,\underline{Y} - \underline{Y}^t \underline{E}^t)\,\underline{\eta} + \underline{B} = \underline{0}}$$

と書くことができる。

この需給均衡式は、nだけある通貨に対応してn本から成り立っている。そして、n－1の通貨についてその需給均衡が成立していれば、n番目の通貨についても需給が一致しているはずなので、n本の式は独立ではない（Walrasの法則）。これは、次のように（補－16）式の左辺にη^tを左から掛けることで示すことができる。すなわち、

$$\underline{\eta}^t(\underline{E}\,\underline{Y} - \underline{Y}^t\underline{E}^t)\,\underline{\eta} + \underline{\eta}^t\underline{B} = \underline{\eta}^t\underline{E}\,\underline{Y}\,\underline{\eta} - \underline{\eta}^t\underline{Y}^t\underline{E}^t\underline{\eta} + \underline{\eta}^t\underline{B} = \underline{\eta}^t\underline{E}\,\underline{Y}\,\underline{\eta} - \underline{\eta}^t\underline{E}\,\underline{Y}\,\underline{\eta} + \underline{\eta}^t\underline{B}$$
$$= \underline{\eta}^t\underline{B}$$

ここで、$\underline{\eta}^t\underline{B}$は、各国の対外純資産残高の合計で、ゼロとなるからである（第3表参照）。

以上で導かれた、外国為替市場の需給均衡条件（補－16）式は正確なものであるが、以下の分析のために変形しておく。ここで、世界経済の仮想的な長期均衡状態を考えてみる。すなわち、各国の為替相場E_j^nは購買力平価で決まる均衡相場$\bar{F}_j^n$に一致し、また各国の実質金利（本章では当面仮定（A－3）によりインフレを捨象しているので、名目金利に等しい）も同一になると仮定しよう。このとき、前節で導かれたn国の外貨建資産需要関数（補－13）式からわかるように、各国の外貨建資産への需要はすべてゼロとなる。よって、この長期均衡では、

（補－17）　$\underline{Y} = \underline{0}$

（補－18）　$\underline{E} = \underline{F}$

$$\left(\underline{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^n & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \bar{F}_2^n & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \cdots & \bar{F}_n^n \end{bmatrix} \text{：購買力平価相場の対角行列。} \right)$$

が成立する。（補－16）式にこの長期均衡状態を起点とする全微分を施すと、次式が得られる。

（補－19）

$$(\underline{dE}\,\underline{Y} + \underline{E}\,\underline{dY} - \underline{dY}^t\underline{E}^t - \underline{Y}^t\underline{dE}^t)\,\underline{\eta} + \underline{dB} = \underline{0}$$

ここで$\underline{dE}$、$\underline{dY}$、$\underline{dB}$は、$\underline{E}$、$\underline{Y}$、$\underline{B}$の全微分である。（補－19）式に（補－17），（補－18）両式を代入して、

（補－20）　$(\underline{F}\,\underline{dY} - \underline{dY}^t\underline{F}^t)\,\underline{\eta} + \underline{dB} = \underline{0}$

が得られる。よって長期均衡点のまわりでは、小

（注29）　先の（補－6）式ではηは（n－1）×1であったが、ここではn×1と定義されている。

さな$\underline{Y}$、$\underline{B}$に対して次の外国為替市場の需給均衡条件を用いることができる。

(補－21)　$(\underline{F}\,\underline{Y}-\underline{Y}^t\,\underline{F}^t)\,\underline{\eta}+\underline{B}=\underline{0}$

あるいは、新しい行列$\underline{X}$を次のように定義して

(補－22)　$\underline{X}\equiv\underline{F}\,\underline{Y}$

次式が得られる。

(補－23)　$(\underline{X}-\underline{X}^t)\,\underline{\eta}+\underline{B}=\underline{0}$

この式は、長期均衡からの乖離幅が小さければ、外国為替市場の需給均衡条件において、外貨建資産需要関数 Y_i^j を合計するのに購買力平価相場 $\overline{F}_j^n$ を使えることを示している。(補－23)式の形の需給均衡条件により、分析を非常に単純化できるので、以下では同式を用いることとしたい。

(為替相場決定式 ── 一国のみによる為替リスク負担の場合)

ここでは簡単化のために、ベース国であるn国の投資家だけが外貨建資産・負債を保有し、他のn－1か国は一切外貨建資産・負債を保有しない場合を考える。この極めて強い仮定のもとで、為替相場決定式を導くが、後に示すようにたとえこの仮定を取り除いた、nか国すべての投資家が外貨建資産・負債を保有する一般の場合でも、この特別な場合と同一の式が成立する。よってこの特別な場合の分析結果は、十分一般的なものである。

このn国のみが為替リスクを負担する場合には、国際資金循環表は補－1表(4か国の場合)のようになる。なおここでは、(補－23)式導出における分析結果を利用して、購買力平価相場によって外貨建資産持高を評価しているので、表はX_i^jで表示されている。

この表に対応する$\underline{X}$行列は、対角要素をゼロと置いて次のようになる((補－22)式および(補－15)式の$\underline{Y}$の定義参照)。

$$\underline{X}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & X_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & X_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & X_3^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これを(補－23)式の外国為替市場の需給均衡条件に代入すると、

(補－24)　$(\underline{X}-\underline{X}^t)\,\underline{\eta}+\underline{B}$

$$=\begin{pmatrix} X_1^4+B_1 \\ X_2^4+B_2 \\ X_3^4+B_3 \\ -X_1^4-X_2^4-X_3^4+B_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

補－1表　米国だけが外貨建資産・負債を保有する場合の国際資金循環表(残高表)

(ドル建)

	日本 (1)	西独 (2)	カナダ (3)	米国 (4)	合計
円 (1)	X_1^1	0	0	X_1^4	0
マルク (2)	0	X_2^2	0	X_2^4	0
カナダ・ドル (3)	0	0	X_3^3	X_3^4	0
米・ドル (4)	0	0	0	0	0
合計	B_1	B_2	B_3	B_4	0

X_i^j ：購売力平価相場 $\overline{F}_i^4$ で米ドル換算された j 国の i 通貨建対外純資産高
($X_i^j=F_i^4\,Y_i^j$　i, j＝1～4)

が得られる。

一般のnか国の場合にも、上と同じ形の次のような需給均衡条件が得られる。

$$(\text{補}-25)\quad \begin{pmatrix} X_1^n + B_1 \\ X_2^n + B_2 \\ \vdots \\ X_{n-1}^n + B_{n-1} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} X_i^n + B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

しかし、この均衡条件はWalrasの法則からn本全部が独立ではなく、任意のn－1本を選ぶことができる。ここでは初めのn－1本を選ぶと、次の外国為替市場の需給均衡条件が得られる。

$$(\text{補}-26)\quad \underline{X}^n + \underline{B}^n = \underline{0}$$

$$\underset{(n-1)\times 1}{\underline{B}^n = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{pmatrix}}$$ ：n国以外の対外純資産高のベクトル

為替相場決定式は、上の(補－26)式に、n国投資家の外貨建資産需要関数(補－13)を代入し、直物為替相場について解くことで得られる。

すなわち、

(補－27)

$$c_n[M^n]^{-1}[(\underline{r}^n - r_n\underline{\eta}) + (\underline{f}^n - \underline{e}^n)] + \underline{B}^n = \underline{0}$$

をe^nについて解いて、

$$\boxed{(\text{補}-28)\quad \underline{e}^n = \underline{f}^n + \underline{r}^n - r_n\underline{\eta} + \frac{1}{c_n}\underline{M}^n\,\underline{B}^n}$$

ここで$c_n \equiv \frac{a_n}{2b_n}$は、n国投資家全体としての、危険回避度を示す係数である。このベクトル表示の式の第k要素をみると、次のようなk国通貨とn国通貨の間の為替相場決定式が得られる。

$$\boxed{(\text{補}-29)\quad e_k^n = \bar{f}_k^n + (r_k - r_n) + \frac{1}{c_n}\sum_{j=1}^{n-1} M_{kj}^n B_j}$$

この式からわかるように、n国通貨建のk国通貨為替相場e_k^nは、期末時点の直物為替相場の期待値$\bar{f}_k^n$、k国とn国の金利差($r_k - r_n$)、およびn国以外の対外純資産高B_jの、分散・共分散行列要素M_{kj}^nをウエイトとする加重合計値($\sum_{j=1}^{n-1} M_{kj}^n B_j$)でリスク・プレミアムを表す項、の3つによって決定される。(注30) この式は、n国のみが外貨建資産・負債を保有するとの仮定のもとで導出されたが、この仮定を取り除いても、以下で示すようにまったく同じ形の式が成立する。

(為替相場決定式 ── すべての国が為替リスクを負担する場合)

これまでの分析を、nか国の投資家がそれぞれ外貨建資産・負債を保有するという、一般の場合に拡張する。まずベース国でない、j国の投資家の、外貨建資産への需要関数は、n国の投資家の(補－13)式と同様にして求められ、次のようになる。

$$(\text{補}-30)\quad \underline{X}^j = \bar{F}_j^n\,\underline{F}^j\,\underline{Y}^j$$
$$= \bar{F}_j^n c_j[\underline{M}^j]^{-1}(\underline{r}^j - r_j\underline{\eta}) + (\underline{f}^j - \underline{e}^j)$$

$$\underline{X}^j = \begin{pmatrix} X_1^j \\ X_2^j \\ \vdots \\ X_{j-1}^j \\ X_{j+1}^j \\ \vdots \\ X_n^j \end{pmatrix}$$ ：j国投資家の外貨建資産需要ベクトル。ここでは購買力平価相場$\bar{F}_i^n$を用いてn国通貨建に換算されている。

c_j ：j国投資家の効用関数のパラメーター、c_nに対応。

$$\underline{E}_j = \begin{bmatrix} E^j_1 \\ E^j_2 \\ \vdots \\ E^j_{j-1} \\ E^j_{j+1} \\ \vdots \\ E^j_n \end{bmatrix}$$ ：直物為替相場・ベクトル。ここで E^j_k は j 国通貨建相場で、j 国からみた n − 1 通貨の為替相場・ベクトル。

$\underline{e}^j$、$\underline{\tilde{f}}^j$、$\underline{f}^j$、$\underline{F}^j$ はすべて E_j と同じように定義された、ベクトルおよびマトリックスで、この補論第 1 節の、n を添文字にする変数に対応している。また

$$\varepsilon(\underline{\tilde{f}}^j) = \underline{f}^j$$

$$\begin{aligned} Var(\underline{\tilde{f}}^j) &= \varepsilon(\underline{\tilde{f}}^j - \underline{f}^j)(\underline{\tilde{f}}^j - \underline{f}^j)^t \\ &= \underline{M}^j \end{aligned}$$

$$\underline{r}^j = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{j-1} \\ r_{j+1} \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$ ：j 国以外の国の金利ベクトルで対数で表示。すなわち、R_k を k 国の金利として、

$$r_k = \ell n\,(1 + R_k)$$

$$\underline{Y}^j = \begin{bmatrix} Y^j_1 \\ Y^j_2 \\ \vdots \\ Y^j_{j-1} \\ Y^j_{j+1} \\ \vdots \\ Y^j_n \end{bmatrix}$$ ：j 国投資家の外貨建資産需要関数で、それぞれ対応する外貨表示。すなわち、Y^j_k は j 国投資家保有の k 国通貨建資産保有高で、k 国通貨表示。

この $\underline{X}^j$ を、外国為替市場の需給均衡式（補－23）の中の $\underline{X}$ 行列に代入し、直物為替相場・ベクトル $\underline{e}^j$ について解けば、為替相場決定式が求まるはずである。しかし、それぞれの $\underline{X}^j$（$j = 1$、2、‥‥、n）はそれぞれ自国を視点とした変数やベクトル（$\underline{M}^j$、$\underline{r}^j$、$\underline{f}^j$、$\underline{e}^j$）が用いられており、このままでは変数が多すぎて解くことは困難である。よって以下では、j 国を視点とした式（補－30）を、n 国を視点とした式に変換することで、この問題を解くことにする。

本文の第 1 章で示したように、円、マルク、カナダ・ドル、米・ドルの 4 通貨の間の為替相場変動は、どの国からみるかによって大きく異なる（第 1 ～ 4 図）が、この視点の移動に伴って、為替相場・ベクトルや為替相場の共変関係を表わす分散・共分散行列も変化する。ここでは、ベース国を視点とするベクトル $\underline{e}^n$ や行列 $\underline{M}^n$ と j 国を視点とするベクトル $\underline{e}^j$ や行列 $\underline{M}^j$ の間の変換を考察する。

ベクトルおよび行列間の変換には、次の諸定理が成立する。

定理 1（Solnik）(注31)

(i) $\underline{e}^j = \underline{H}_j\, \underline{e}^n$

(ii) $\underline{\tilde{f}}^j = \underline{H}_j\, \underline{\tilde{f}}^n$

(iii) $(\underline{r}^j - r_j \underline{\eta}) = \underline{H}_j(\underline{r}^n - r_n \underline{\eta})$

ここに、

$$\underline{H}_j = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & -1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & -1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccccc} & & & & & \uparrow & & & \\ & & & & & j\text{例} & & & \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c}(n-1)\times \\ (n-1)\end{array}$$

(注30) この項がリスク・プレミアムであることについては、深尾〔5、6〕参照。

(注31) この定理は Solnik〔16〕によって証明された。

（証明）

(i)　為替相場の定義から

$$E_k^j = E_k^n \,/\, E_j^n$$

が成立する。この対数を取って

$$e_k^j = e_k^n - e_j^n$$

となる。ここで $e_n^n = \ell n\ E_n^n = \ell n\,1 = 0$ に注意して、

$$\underline{e}^j = \begin{pmatrix} e_1^j \\ e_2^j \\ \vdots \\ e_{j-1}^j \\ e_{j+1}^j \\ \vdots \\ e_{n-1}^j \\ e_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^n - e_j^n \\ e_2^n - e_j^n \\ \vdots \\ e_{j-1}^n - e_j^n \\ e_{j+1}^n - e_j^n \\ \vdots \\ e_{n-1}^n - e_j^n \\ -e_j^n \end{pmatrix} = \underline{H}_j\,\underline{e}^n$$

(ii)も同様に証明される。

(iii)は右辺の行列の積を実行することで左辺が得られることから、証明できる。

系１

(i)　$\underline{f}^j = \underline{H}_j\ \underline{f}^n$

(ii)　$\underline{M}^j = \underline{H}_j\,\underline{M}^n\,\underline{H}_j^t$

（証明）

(i)　これは定理１の(i)の両辺の期待値を取れば証明される。

(ii)　$\underline{M}^j = \varepsilon\,(\,\underline{\tilde{f}}^j - \underline{f}^j\,)\,(\,\underline{\tilde{f}}^j - \underline{f}^j\,)^t$

$$= \varepsilon\,[\,\underline{H}_j(\,\underline{\tilde{f}}^n - \underline{f}^n\,)\,(\,\underline{\tilde{f}}^n - \underline{f}^n\,)^t\cdot\underline{H}_j^t\,]$$

$$= \underline{H}_j\,\underline{M}^n\,\underline{H}_j^t$$

定理２

$\underline{H}_j = \underline{H}_1\,\underline{A}_j$

ここに、

$$\underline{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (n-1)\times(n-1)$$

（証明）

定理１における $\underline{H}_j$ の定義から、

$$\underline{H}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \\ -1 & 0 & & & 1 & 0 \\ -1 & 0 & & & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (n-1)\times(n-1)$$

$\underline{H}_1$ に $\underline{A}_j$ を右から乗ずると、$\underline{A}_j$ は $\underline{H}_1$ の列を次のようにシフトさせる。

$\underline{A}_j$を乗ずる
前の列番号 1, 2, 3, 4, ……,　j−1, j, j+1, …, n−1

$\underline{A}_j$を乗じた
後の列番号 1, 2, 3, …, j−2, j−1, j, j+1, …, n−1

この新しい行列は、明らかに $\underline{H}_j$ である。

定理３

$$\underline{H}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & & & & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (n-1)\times(n-1)$$

（証明）

$\underline{H}_1$ に上の $\underline{H}_1^{-1}$ を乗ずると、単位行列が得られる。

定理4

$$\underline{H}_j^{-1}=\underline{A}_j^t\,\underline{H}_1^{-1}$$

（証明）

上の定理2から、次式が成立する。

$$\underline{H}_j^{-1}=〔\underline{H}_1\,\underline{A}_j〕^{-1}=\underline{A}_j^{-1}\,\underline{H}_1^{-1}$$

ここで、$\underline{A}_j^{-1}=\underline{A}_j^t$ であることは、$\underline{A}_j$と$\underline{A}_j^t$ を次のように乗ずればわかる。

$$\underline{A}_j\underline{A}_j^t=\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
0&0&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\
1&0&0&&0&0&0&&0\\
0&1&0&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\
0&0&1&\ddots&0&0&0&&\vdots\\
\vdots&&&\ddots&1&0&0&&\vdots\\
\vdots&&&&0&0&1&\ddots&\vdots\\
\vdots&&&&&&&\ddots&0\\
0&\cdots&&\cdots&0&0&\cdots&0&1
\end{pmatrix}
&
\begin{pmatrix}
0&1&0&\cdots&&&&&0\\
0&0&1&\ddots&&&&&0\\
\vdots&\vdots&&&\ddots&&&&\vdots\\
0&0&&&0&1&0&\cdots&0\\
1&0&\cdots&&0&0&0&\cdots&0\\
0&0&&&0&0&1&\ddots&\vdots\\
\vdots&&&&&&&\ddots&0\\
0&0&\cdots&&&&&0&1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{列}\\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{c}\uparrow\\ j\text{列}\end{array} &
\end{array}$$

$$=\underline{I}$$

よって、

$$\underline{H}_j^{-1}=\underline{A}_j^t\,\underline{H}_1^{-1}$$

以上の4つの定理が、為替相場変動を見る視点の変換に必要な数学的準備である。これらの定理を用いてj国の視点に立つ（補－30）式を、n国の視点に変換する。まず定理1.系1から、同式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\underline{X}^j&=\bar{F}_j^n c_j\ 〔\underline{H}_j\,\underline{M}^n\underline{H}_j^t〕^{-1}\cdot\\
&\quad〔\underline{H}_j(\underline{r}^n-r_n\underline{\eta})+\underline{H}_j(\underline{f}^n-\underline{e}^n)〕\\
&=\bar{F}_j^n c_j〔\underline{H}_j^t〕^{-1}〔\underline{M}^n〕^{-1}\underline{H}_j^{-1}\,\underline{H}_j\cdot\\
&\quad〔(\underline{r}^n-r_n\underline{\eta})+(\underline{f}^n-\underline{e}^n)〕\\
&=\bar{F}_j^n c_j〔\underline{H}_j^t〕^{-1}〔\underline{M}^n〕^{-1}〔(\underline{r}^n-r_n\underline{\eta})+\\
&\quad(\underline{f}^n-\underline{e}^n)〕
\end{aligned}$$

これを、（補－13）式を用いて単純化すると、

$$\underline{X}^j=\frac{\bar{F}_j^n c_j}{c_n}〔\underline{H}_j^t〕^{-1}\cdot\underline{X}^n=\frac{\bar{F}_j^n c_j}{c_n}〔\underline{H}_j^{-1}〕^t\cdot\underline{X}^n$$

ここで定理4により

$$\begin{aligned}
\underline{X}^j&=\frac{\bar{F}_j^n c_j}{c_n}〔\underline{A}_j^t\ \underline{H}_1^{-1}〕^t\cdot\underline{X}^n\\
&=\frac{\bar{F}_j^n c_j〔\underline{H}_1^{-1}〕^t\,\underline{A}_j\,\underline{X}^n}{c_n}\\
&=\frac{\bar{F}_j^n c_j}{c_n}\begin{pmatrix}
0&1&0&0&\cdots&&0\\
0&0&1&0&&&0\\
0&0&0&1&&&\vdots\\
\vdots&\vdots&&&\ddots&&\vdots\\
\vdots&\vdots&&&&1&0\\
0&0&0&0&\cdots&0&1\\
-1&-1&-1&-1&\cdots&-1&-1
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
X_j^n\\ X_1^n\\ X_2^n\\ \vdots\\ X_{j-1}^n\\ X_{j+1}^n\\ \vdots\\ X_{n-1}^n
\end{pmatrix}\\
&=\frac{\bar{F}_j^n c_j}{c_n}\begin{pmatrix}
X_1^n\\ X_2^n\\ \vdots\\ X_{j-1}^n\\ X_{j+1}^n\\ \vdots\\ X_{n-1}^n\\ -\sum_{k=1}^{n-1}X_k^n
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって、$\underline{X}^j$ は次のように、$\underline{X}^n$ を用いて表わすことができる。

（補－31）$$\underline{X}^j=\begin{pmatrix}
X_1^j\\ X_2^j\\ \vdots\\ X_{j-1}^j\\ X_{j+1}^j\\ \vdots\\ X_{n-1}^j\\ X_n^j
\end{pmatrix}=\frac{\bar{F}_j^n c_j}{c_n}\begin{pmatrix}
X_1^n\\ X_2^n\\ \vdots\\ X_{j-1}^n\\ X_{j+1}^n\\ \vdots\\ X_{n-1}^n\\ -\sum_{k=1}^{n-1}X_k^n
\end{pmatrix}$$

この式によってj国投資家の外貨建資産需要関数$\underline{X}^j$と、n国投資家の需要関数$\underline{X}^n$の関係が分かった。これにより、(補−23)式の需給均衡式の中の$\underline{X}$行列を、次のように$\underline{X}^n$の要素だけで表現することができる。

$$\underline{X}=\frac{1}{c_n}\begin{pmatrix} 0 & X_1^n & X_1^n \cdots X_1^n & X_1^n \\ X_2^n & 0 & X_2^n \cdots X_2^n & X_2^n \\ X_3^n & X_3^n & 0 \ \cdots X_3^n & X_3^n \\ \vdots & & \ddots \quad \vdots & \vdots \\ X_{n-1}^n & X_{n-1}^n & 0 & X_{n-1}^n \\ -\sum X_k^n & -\sum X_k^n & \cdots -\sum X_k^n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{F}_1^n c_1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \overline{F}_2^n c_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & & 0 \cdots 0 & \overline{F}_n^n c_n \end{pmatrix}$$

ここで、$\sum$はkの1〜n−1についての和を表わし、$\overline{F}_n^n=1$である。上の式を、外国為替市場の需給均衡式(補−23)のXに代入して整理すると、次の式が得られる。

$$(\text{補}-32)\ \frac{c}{c_n}\begin{pmatrix} X_1^n \\ X_2^n \\ \vdots \\ X_{n-1}^n \\ -\sum_{j=1}^{n-1} X_j^n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-1} \\ B_n \end{pmatrix}=\underline{0}$$

ここに$c\equiv\sum_{j=1}^{n}\overline{F}_j^n c_j>0$である。

Walrasの法則から、(補−32)式の始めのn−1本を選ぶと、次式が成立する。

$$(\text{補}-33)\quad \frac{c}{c_n}\underline{X}^n+\underline{B}^n=\underline{0}$$

この式に、n国投資家の需要関数(補−13)式を代入すると、

$$c\,[\underline{M}^n]^{-1}[(\underline{r}^n-r_n\underline{\eta})+(\underline{f}^n-\underline{e}^n)]+\underline{B}^n=\underline{0}$$

となり、これを直物為替相場・ベクトル$\underline{e}^n$について解くと、次の為替相場決定式が得られる。

$$\boxed{(\text{補}-34)\ \underline{e}^n=\underline{f}^n+\underline{r}^n-r_n\underline{\eta}+\frac{1}{c}\underline{M}^n\underline{B}^n}$$

この式はベクトル表示であるが、そのk番目の要素をみると、本文第3章第2節で(14)式として提示された次式が得られる。

$$\boxed{(\text{補}-35)\ e_k^n=\overline{f}_k^n+(r_k-r_n)+\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n-1}M_{kj}^n B_j}$$

これらの、nか国すべてが外貨建資産を保有する一般の場合の為替相場決定式は、n国1国のみが外貨建資産を保有する特別の場合の式(補−29)と全く同じ形をしており、$\underline{B}^n$の係数$\frac{1}{c_n}$が$\frac{1}{c}$になっているだけであることがわかる。

(インフレーション下の為替相場決定式)

補論でのこれまでの分析は、インフレーションがないとの仮定(A−3)のもとで導かれている。このため、為替相場決定式(補−35)においても、期初における購買力平価と期末における購買力平価が同じ$\overline{F}_k^n$(あるいはその対数値$\overline{f}_k^n$)で示されていた。しかし、ここで完全に予見可能なインフレーションを導入すると、期初の購買力平価と期末の購買力平価(=期待直物相場)が内外のインフレ格差により異ってくる。すなわち、次の式が成立する。(注32)

$$(\text{補}-36)\quad \overline{F}_k^n=\frac{1+\Pi_n}{1+\Pi_k}G_k^n$$

[Π_n :n国の期待インフレ率]

(注32) 期初と期末の間に貿易財産業と非貿易財産業の労働生産性上昇率が異なる等の実体経済面の変化があると、(補−36)式は必ずしも成立しなくなる。すなわち、購買力平価は、内外のインフレ格差以外の要因で変化するが、以下ではこの要因を捨象する((付−B)参照)。

$$\left\{\begin{array}{ll} \Pi_k & ：k国の期待インフレ率 \\ G_k^n & ：期初の購買力平価相場 \\ \bar{F}_k^n & ：期末の購買力平価相場 \end{array}\right\}$$

あるいは、この対数値をとって、

（補－37）　$\bar{f}_k^n \quad \pi_n - \pi_k + g_k^n$

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{f}_k^n \equiv \ell_n \ \bar{F}_k^n \\ \pi_n \equiv \ell_n \ (1+\Pi_n) \\ \pi_k \equiv \ell_n \ (1+\Pi_k) \\ g_k^n \equiv \ell_n \ G_k^n \end{array}\right\}$$

これを、為替相場決定式（補－35）に代入すると、インフレーションがある場合の為替相場決定式が得られる。

（補－38）

$$e_k^n = g_k^n + [\,(r_k - \pi_k) - (r_n - \pi_n)\,] + \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n-1} M_{kj}^n B_j$$

これは、前出のインフレーションのない場合の（補－35）式で、右辺の期待直物相場 $\bar{f}_k^n$ を期初の購買力平価 g_k^n で、また名目金利差（$r_k - r_n$）を実質金利差〔（$r_k - \pi_k$）－（$r_n - \pi_n$）〕で置き換えたものである。(注33) そして、この式が本文第3章で提示された最終的な為替相場決定式(15)である。

（付－A）　CAPMにおける平均・分散型効用関数使用の理由について

Hal R. Varian によれば、一般の期待効用関数（Varian〔17, pp.104～11〕参照）は、次の場合に平均・分散型効用関数となる。

ⅰ）もし効用関数 $f(\tilde{W})$ が2次式なら、

$$f(\tilde{W}) = c_1 + c_2\tilde{W} + c_3\tilde{W}^2 \quad ここで\ c_2>0、c_3<0$$

$$u = \varepsilon\,[\,f(\tilde{W})\,] = c_1 + c_2\bar{W} + c_3(\bar{W}^2 + \sigma_w^2)$$

が成立する。よってこの全微分をとって

$$du = (\,c_2 + 2\bar{W}c_3\,)\,d\bar{W} + c_3\ d\sigma_w^2$$

が得られ、これから、(1)式との次の対応関係が成立する。

$$a_n \longleftrightarrow c_2 + 2\bar{W}c_3$$

$$-b_n \longleftrightarrow c_3$$

ⅱ）効用関数 $f(\tilde{W})$ は、Wの期待値Wの近傍の点 W_0 を中心に、2次のTaylor展開を行うと、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} f(\tilde{W}) &\cong f(W_0) + f'(W_0)(\tilde{W} - W_0) + \\ &\quad \frac{1}{2}f''(W_0)(\tilde{W} - W_0)^2 \\ &= f(W_0) + f'(W_0)\,[\,(\tilde{W} - \bar{W}) + \\ &\quad (\bar{W} - W_0)\,] + \frac{1}{2}f''(W_0)\,[\,(\tilde{W} - \bar{W}) \\ &\quad + (\bar{W} - W_0)\,]^2 \end{aligned}$$

この期待値を取ると、

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon\,[\,f(\tilde{W})\,] \\ &= f(W_0) + f'(W_0)(\bar{W} - W_0) + \frac{1}{2}f''(\sigma_w^2 \\ &\quad + (\bar{W} - W)^2) \end{aligned}$$

が成立する。ここで，W_0 が $\bar{W}$ に近いので、$(\bar{W} - W_0)^2$ を無視すれば、

$$u = f(W_0) + f'(W_0)(\bar{W} - W_0) + \frac{1}{2}f''(W_0)\sigma_w^2$$

が得られる。上の式を全微分すると

$$du = f'(W_0)\,d\bar{W} + \frac{1}{2}f''(W_0)\,d\sigma^2$$

となるので，( )式とは次の対応関係が成立する。

(注33) インフレーションがある場合には、厳密には、外国為替市場の需給均衡条件式（補－23）においても、換算相場として $\bar{F}_j^n$ の代わりに G_j^n を用いる必要があり、この結果、（補－38）式右辺の第3項で B_j を多少調整しなくてはならない。ここでは、この要因を捨象した。

$$a_n \longleftrightarrow f'(W_0)$$

$$-b_n \longleftrightarrow \frac{1}{2} f''(W_0)$$

ここで、$2\frac{b_n}{a_n} = -\frac{f''}{f'}$はArrow−Prattによる危険回避度の指数である（measure of absolute risk aversion）。よって、（補−13）や（補−29）式における c_n は、この指数の逆数となっている。もし、投資家の効用関数が、通常仮定されるようにその資産保有高が多くなるにつれて、この指数が低下するタイプならば、c_n はこれに伴って上昇する。

iii）もし投資家の効用関数がconstant−absolute−risk−aversionであり、期末の資産高の価値が正規分布に従えば、

$$f(\widetilde{W}) = -\exp(-a\widetilde{W})$$

$$\widetilde{W} \sim N(\bar{W}, \sigma_w^2)$$

が成立する。また期待効用の定義から、次式が成立する。

$$u = \varepsilon[f(\widetilde{W})] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_w}\int \exp\left(-aW - \frac{(W-\bar{W})^2}{2\sigma_w^2}\right) dW$$

この式の積分の内側は次のように変形できる。

$$-aW - \frac{(W-\bar{W})^2}{2\sigma_w^2} = -\frac{W^2 + 2(a\sigma^2 W - \bar{W})W + \bar{W}^2}{2\sigma_w^2}$$

$$= -\frac{[W + (a\sigma_w^2 - \bar{W})]^2 - (a^2\sigma_w^4 - 2\bar{W}a\sigma_w^2)}{2\sigma_w^2}$$

$$= -\frac{[W + (a\sigma_w^2 - \bar{W})]^2}{2\sigma_w^2} - a\left(\bar{W} - \frac{a}{2}\sigma_w^2\right)$$

よって次式が成立し、

$$u = -\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_w}\int \exp\left(-\frac{W + (a\sigma_w^2 - \bar{W})^2}{2\sigma_w^2}\right) dW\right] \cdot$$

$$\exp\left(-a\left(\bar{W} - \frac{a}{2}\sigma_w^2\right)\right)$$

このカッコ内が正規分布関数であることから、1に等しくなる。よって

$$u = -\exp\left(-a\left(\bar{W} - \frac{a}{2}\sigma_w^2\right)\right)$$

さらに、この単調変換（monotonic transformation）によって

$$u = \bar{W} - \frac{a}{2}\sigma_w^2$$

が得られる。ここで、

$$a = -\frac{f''}{f'}$$

が成立することから、aは前述の危険回避度の指数である。

（付−B）　nか国n通貨の場合における、購買力平価体系の定義について

ここでは、nか国n通貨の世界における、n−1ある独立な為替相場について、購買力平価体系の定義づけをすることを試みる。まず、次の長期均衡相場の定義を考えてみる。

定　義

長期均衡実質為替相場体系とは、nか国全部の経常収支を、長期的に均衡させるような、実質為替相場の組である。

この定義により、n−1の独立な実質為替相場に対し、一意的にその均衡相場体系が定まる。これは次のように証明できる。まず次の変数を定義する。

$T_{ij}(\underline{S}^n)$　：i国からj国への財貨・サービスの輸出額（n国通貨建）で（n−1）次の交易条件ベクトル $\underline{S}^n$ の関数

$$\underline{S}^n = \begin{pmatrix} S_1^n \\ S_2^n \\ \vdots \\ S_{n-1}^n \end{pmatrix}$$

：n国とk国の間の交易条件 S_k^n を要素とするベクトル

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$ ：各国のn国通貨建経常収支

$$\underline{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ ：n個の1からなるベクトル

$$\underline{T}(\underline{S}^n) = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & 0 & T_{23} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & T_{n-1n} \\ T_{n1} & T_{n2} & & T_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$ ：貿易フロー行列

これらの定義により、次の恒等式が成立する。

$$(\underline{T}(\underline{S}^n) - \underline{T}(\underline{S}^n)^t)\,\underline{\eta} = \underline{c}$$

このn個の式は、次の関係式を満たす。

$$\underline{\eta}^t(\underline{T}(\underline{S}^n) - \underline{T}(\underline{S}^n)^t)\,\underline{\eta} = 0 = \underline{\eta}^t\,\underline{c}$$

よって、次の各国の経常収支均衡条件式

$$(\underline{T}(\underline{S}^n) - \underline{T}(\underline{S}^n)^t)\,\underline{\eta} = \underline{0}$$

のうちのn－1本を $\underline{S}^n$ について解くことで、長期均衡実質為替相場体系が求められる。この長期均衡実質為替相場に対応する名目為替相場を、購買力平価と呼ぶことができる。

この購買力平価は、実体経済の変化が小さい時には、主に内外のインフレ率格差を反映して変化し、いわゆる購買力平価説が成立する。しかし、経済各部門間の相対的な生産性上昇率格差、新資源の発見等の実体経済の変化が大きいと、購買力平価はこうした要因によっても変化する。

【参考文献】

[1] 経済企画庁　「世界経済モデルにおけるアメリカ経済の短期予測モデル」『経済分析』第81号、1981年3月

[2] 〃　「世界経済モデルにおける日本経済の短期予測モデル」『経済分析』第82号、1981年4月

[3] 〃　「世界経済モデルにおける西ドイツ経済の短期予測モデル」『経済分析』第83号、1981年5月

[4] 深尾光洋　「国際収支表と為替需給：国際資金循環表による分析」研究資料（57）研1－1、日本銀行金融研究局、1982年2月

[5] 〃　「為替レートとリスク・プレミアム」『金融研究資料』第13号、日本銀行金融研究局、1982年6月

[6] 〃　「変動相場制度下における為替相場決定理論の発展」『金融研究』第2巻第1号、日本銀行金融研究所、1983年3月

[7] 深尾光洋　大久保隆　「内外金利体系の相互関連」『金融研究』第1巻第1号、日本銀行金融研究所、1982年10月

[8] Fukao, Mitsuhiro.　The Risk Premium in the Foreign Exchange Market. Unpublished doctoral dissertation, Univ. of Michigan, 1981.

[9] Genburg, Hans.　"Effects of Central Bank Intervention in the Foreign Exchange Market." IMF Staff Papers 28, No. 3, September 1981.

[10] Hickman, Bert G. "Exchange Rates in Project Link." Proc. of the International Workshop on Exchange Rates in Multicountry Econometric Models, Univ. of Leuven, Belgium, November 26-28, 1981.

[11] Hooper, P., R. D. Haas and S. A. Symansky. "Revision of Exchange Rate Determination in the MCM: A Progress Report." Proc. of the International Workshop on Exchange Rates in Multicountry Models, Univ. of Leuven, Belgium, November 26-28, 1981.

[12] Jensen, Michael C. "Capital Markets: Theory and Evidence." *Bell Journal of Economics and Management Science* 3, 1972, pp. 357-98.

[13] Lindgren, Bernard W. *Statistical Theory*, 3rd ed. New York: Macmillan, 1976.

[14] Porter, Michael G. "A Theoretical and Empirical Framework for Analyzing the Term Structure of Exchange Rate Expectations." *IMF Staff Papers* 18, November 1971 pp. 613-45.

[15] Ross, Stephen A. "The Current Status of the Capital Asset Pricing Model (CAPM)." *The Journal of Finance* 33, No. 3, June 1978, pp. 885-901.

[16] Solnik, Bruno H. *European Capital Markets: Towards a General Theory of International Investment*. Lexington Books, 1973.

[17] Varian, Hal R. *Microeconomic Analysis*. New York: Norton, 1978.