

# 市場リスクの予測について

## - EVTとGARCHモデルを用いた バリュー・アット・リスク算定の比較分析 -

ジョン・ダニエルソン / <sup>もりもとゆうじ</sup>森本祐司

### 要 旨

本稿では、市場リスクの測定・管理、特にバリュー・アット・リスク (value at risk、VaR) のいくつかの計算手法について、日本の市場データを用いた比較分析を行う。特に、従来使われてきたGARCH (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) タイプの手法と極値理論 (extreme value theory、EVT) による推定手法を比較する。比較の基準としては、VaRを超過するデータ (バイオレーション) の発生頻度、収益率分布の対称性仮定、バイオレーションの発生の仕方 (独立に発生するのか、発生にムラ クラスタリング があるか) VaRのボラティリティを基準として選択する。われわれの検証では、今回用いたデータに対しては、GARCHタイプの手法を用いて推定されたVaRは、推定精度の低さおよびボラティリティの高さという観点で問題を含んでいることが判明した。一方、EVTにより推定されたVaRは、推定精度が高い上に、推定結果が安定しており、日本市場のリスク予測指標として実務的な適用可能性の高さを示した。

キーワード：リスク、規制、極値理論、ボラティリティ、バリュー・アット・リスク

本稿は、ダニエルソンが海外客員研究員として日本銀行金融研究所に在籍していた時に、当時金融研究所員であった森本と共同で執筆を進めたものである。日本銀行には感謝の意を表したい。本稿は、2000年1月から2月にかけて日本銀行で開催された「リスク計量に関する新たな取り組み」をテーマとする研究ワークショップへ提出された。同ワークショップ参加者および2人のレフェリーから貴重なコメントを頂戴した。論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所、または現在両執筆者が所属する機関の公式見解を示すものではない。なお、ダニエルソンの各論文は、[cep.lse.ac.uk/~jond/research](http://cep.lse.ac.uk/~jond/research)または[www.RiskResearch.org](http://www.RiskResearch.org)からダウンロードすることができる。

本稿の英語版は、Danielsson, J. and Y. Morimoto, "Forecasting Extreme Financial Risk: A Critical Analysis of Practical Methods for the Japanese Market," IMES Discussion Paper Series No. 2000-E-8, Bank of Japan, 2000である。

ジョン・ダニエルソン FMG, ロンドン・スクール・オブ・エコノミクス

(E-mail: [j.danielsson@lse.ac.uk](mailto:j.danielsson@lse.ac.uk))

森本 祐司 東京海上火災保険株式会社 (E-mail: [yuji.morimoto@alum.mit.edu](mailto:yuji.morimoto@alum.mit.edu))

## 1. はじめに

金融機関およびその監督当局は、市場性のある資産に内在するリスク（市場リスク）のインパクトに強い関心を示すようになってきている。その理由としては、規制緩和により金融機関のリスク運用の自由度が増したことや、リスク運用技術やリスク測定技術が進歩したこと、さらには金融機関が競争力強化のためにリスク運用をより増大させなければならない場合があること、などが挙げられよう。結果として、近年までは金融機関業務の中でも少数の関係者だけが理解できる業務であった市場リスク測定と管理は、現在では各金融機関および監督当局が直面する中心的課題の一つとなっている。これに対応して、監督当局は金融機関に対しリスク管理の実施およびリスク指標の報告を求めようになった。また、こうした規制によるリスク測定に加え、多くの金融機関は内部的にリスク測定および管理を行っている。金融機関のリスク管理に対するアプローチは、監督当局の要請に最低限応えるだけという消極的な対応から、統合的な内部リスク管理プログラムまで多岐にわたっている。市場リスク管理が本格化したのは近年のことであり、多くの金融機関では、最新の市場リスク計測手法が実務に導入されるには至っていない。これらの手法の多くは、世界的にみて金融機関のリスク管理が進んでいる米国において開発されたものであり、彼らの国際金融市場における卓越した役割をさらに押し進める結果となっている。

リスク管理を考える際には、規制上使用するモデルと内部管理上使用するモデルを区別する必要がある。まず、すべての主要金融センターに所在する銀行は中央銀行や日本の金融監督庁のような銀行監督機関をメンバーに持つバーゼル銀行監督委員会によって導入された、いわゆる「バーゼル規制」を遵守する必要がある（Basel Committee on Banking Supervision [1996]）。本規制のポイントは、各銀行が内部モデルを用いて計算したバリュー・アット・リスク（value-at-risk、以下VaR）に基づいて自己資本額を積むことも認められたという点である。VaRはある一定期間内にある一定確率でトレーディング・ポートフォリオが被る損失額の最大値である。規制上、VaRは日々計測されなければならない。VaRという指標はリスク指標として十分ではないというリスク管理者の批判は正しいが、それは、正確にリスクを計量化したいというニーズとテクニカルな内容に詳しくない人たちにもリスク指標が理解できるようにしたいというニーズをつなぐものである。計算に必要とされる技術は最低限で済む上に、VaRの導入により、リスク管理に積極的ではない銀行にも最低限のリスク管理を実行させることを可能としているのである。ただし、VaRという概念にはリスク管理上いくつかの欠点がある。大きなものとしては、VaRが単に最大損失額を測定しているが、これは期待損失額に比べると直観的な指標ではないという点である。例えば、VaRが10億円といっても、それを超えて発生する損失額が11億円なのか、100億円なのかを知ることはできない。それに対し、例えば期待ショートフォール、すなわちある閾値（例えばVaR）を超過したという条件下での期待損失額、など別の指標がいくつか提案されている。なお、

リスク計測モデルの性質やその規制上の資本額算出への適用については、Danielsson [2000a] を参照されたい。また、現状のVaR測定手法による測定値はかなりボラタイルであり、結果としてそれをカバーする必要資本額が大きく振れてしまうという指摘がある。しかし、実務的にみるとその指摘は該当しない。確かにほとんどのVaR測定値が非常にボラタイルであるが、規制上では、その点は銀行にとってほとんどないし全く問題とはなっていない。規制上のVaRは年に2回強程度発生する損失に該当するが、その程度の損失に対応できないような金融機関は、規制上の資本額が振れるという問題よりもさらに深刻な問題に直面するというのがその理由である。規制上必要とされる市場リスクに対する資本は、保有期間10日、信頼区間99%のVaRの3~4倍となっているが、ほとんどの銀行で実際に積まれている自己資本額は、それよりも格段に多い。これは市場リスク以上に信用リスクに備えた資本が必要とされていることに加え、市場リスクに対する資本が最低限しか積まれていない銀行は顧客から極めてリスクが高い先とみなされてしまうことなどによる。例えば、1996年のJ.P.モルガン社の平均日次VaRは3千6百万ドルと報告されている（つまり、規制上の必要資本額は約3億4千万ドル）。この値は、1996年にJ.P.モルガン社が実際に積んでいた資本額と比して驚くほど小さい。

一方、内部リスク管理は異なる課題である。ここでは金融機関は、リスク管理に当たって存在する多くの課題に対して、さまざまな技法を駆使して対応することが可能となる。その課題としては、例えば、資本の複数のリスク資産への配分、ファンド・マネージャーやトレーダーに対するモニタリングが挙げられよう。結果として、リスク計測値に内部的に求められるものは、規制に比べてより複雑かつ広範である。リスク計測値は、統合的なリスク管理からポジション限度の配分にわたる広範な経営上の目的に活用される。リスク計測手法が個々のトレーダーへのポジション限度の配分やファンド・マネージャーへの運用指図の設定に用いられる時には、リスク計測値のボラティリティの高さが重大な問題となる。大きく変動するポジション限度で個別のポジションを管理するのは極めて困難であるからである。

基本的に、すべての統計的リスク測定手法は3つのタイプないしその派生形に分類できる。それらは、収益率分布全体のモデル化に基づく完全なパラメトリック手法（本手法には通常何らかの条件付きボラティリティ・モデルを用いることが多い）、ヒストリカル・シミュレーションによるノン・パラメトリックな手法、そして収益率分布の裾のみをパラメトリックに推定する手法である。これらの手法いずれにも、正確さ、取扱いの容易さで長所・短所がある。完全な手法は存在しない。このため手法の選択は、通常、対象としている市場が何であるかということや手法を取り扱えるフィナンシャル・エンジニアリングの熟練担当者が確保できるかということによる。

本稿では、上記手法のいくつかについて比較する。特に極値理論（extreme value theory、以下EVT）および従属性の問題に焦点を当てる。まず、2章では、金融商品の収益率の一般的性質について触れ、それらがどのようにリスク管理に関連するかについて言及する。3章では、リスク測定の観点からEVTについて詳しく触れ、EVTの長所・短所について説明する。4章では実際のデータを用いた分析結果を報

告し、それについて考察する。EVTに関連する数学的導出は補論に付した。

## 2. 収益率分布とリスク予測

リスクを予測するためには、金融商品価格の動きに関する確率分布をモデル化する必要がある。金融実務の観点では、通常は損益といった実額の概念の方が扱いやすいものの、リスク管理の観点では収益率の方が望ましい測定対象である。一般に、収益率の計算には次の2つの方法がある。

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (1)$$

$$r_t = \log \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad (2)$$

リスク分析には、価格が対数正規分布に従うという見方をすることが多いことや、派生商品のプライシング・モデルとの関連から、(2)式の連続複利収益率（対数収益率）の方が一般には好まれている。流動性のある資産について収益率の特性を実証的に分析する場合には、次の3つの特性がリスクという観点からは重要になる。

- 1．収益率の非正規性
- 2．ボラティリティのクラスタリング
- 3．収益率分布の非対称性

それらに加え、リスク予測値自体のボラティリティも実務でリスク管理を行う場合には問題となる。以下、それぞれについて触れる。

### (1) 非正規性とファット・テール

収益率が正規分布でないという事実は、リスク管理の実務家および監督当局に広く認識されている。

“...as you know, the biggest problems we now have with the whole evolution of risk is the fat-tail problem, which is really creating very large conceptual difficulties. Because as we all know, the assumption of normality enables us to drop off the huge amount of complexity in our equations...Because once you start putting in non-normality assumptions, which is unfortunately what characterizes the real world, then these issues become extremely difficult, ...”

Alan Greenspan [ 1997 ]

非正規性を持つ市場データの収益率の分布は、同じ平均・分散を持つ正規分布と比較して、次のような相対的關係を持つことが知られている。

1. 収益率分布の方が中心部分は高い
2. 収益率分布の方が両サイド（中心部分と裾部分の間）は低い
3. 収益率分布の方が裾部分は高い

このことは、市場が正規分布と比べて通常は極めて静かに変動している、また時として極めて大きく振れていることを意味している。リスクという観点では3つ目の点が最も関連が深い。ファット・テール性は、正規分布を仮定した予測と比して、大きな損失または収益をもたらす頻度が高いことを示している。実際の収益率分布の裾部分に行けば行くほど、正規性という仮定から大きくはずれ、推定値は大きく乖離することとなる。例えば、仮に1987年の株価暴落の発生確率を、その直前1年間のデータを用い、正規分布の仮定の下で推定した場合、この規模の暴落はおおよそ地球誕生以降1度しか起きない程度の頻度となってしまう。それにもかかわらず、ほとんどの金融機関においては、収益率の正規性を仮定している。その理由は、他の分布と比べ、正規分布が数学的に極めて扱いやすい性質を有していることにある。正規性の仮定が置かれている実用例は金融以外の分野も含めて多く見受けられ、ほとんどの場合、その仮定が大きな問題となることはない。しかし、分布の裾の分析が中心課題であるリスク管理においては極めて問題であり、非正規性を考慮する必要がある。

## (2) ボラティリティ・クラスタリング

2つ目の特性は、収益率の推移をみるとボラティリティが高い時期と低い時期があるということである。このことは、低ボラティリティ期であることがわかれば、将来の予想損失額も小さい、ということを示唆している。ほとんどのリスク・モデルは、通常GARCH (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) モデル (Bollerslev [1986]) のような形式で、こうした性質を取り入れようとしている。このGARCHモデルが広範に使用されている理由は、それが、収益率の主要な2つの特性であるボラティリティ・クラスタリングと無条件の非正規性を考慮しているからである。最も一般的なGARCHモデルはGARCH(1,1)である。有名なリスク・メトリクス (J.P. Morgan [1995]) で用いられているのは、パラメータを $\omega=0$ ,  $\alpha+\beta=1$ としたものである。

$$r_t | r_{t-1} \sim N(\mu, \sigma_t^2) \quad (3)$$

$$\text{ただし、} \sigma_t^2 = \omega + \alpha \sigma_{t-1}^2 + \beta r_{t-1}^2, \omega, \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta < 1 \quad (4)$$

$r_t$ : 時点 t の収益率

$\omega, \alpha, \beta$ : パラメータ

このモデルの望ましい特性の1つは、(3) 式のように条件付き分布が正規分布で

あっても、時点に依存しない分布（定常分布）は正規分布とは限らないという点である<sup>1</sup>。このモデルは通常のボラティリティ、例えば収益率分布の内側90%における予測にはかなり有用である。しかしながら、ノイズの正規性を仮定したGARCHモデル（以下、正規GARCHモデル）における条件付き分布の裾は、せいぜい予測値の中で最も高いボラティリティを分散に持つ正規分布の裾程度の厚みしか持たない。これに合わせて、GARCHモデルのパラメータがサンプルデータすべてを均等に用いて算出されていることも考慮する必要がある。すなわち、裾のデータは例えば全体の1%程度しか存在しないため、パラメータ推定は裾以外のデータによってほとんど決定されてしまうのである。このことは、コルモゴロフ・スミルノフ検定がファット・テール性を持つデータに対する非正規性の検定において頑健性がないという理由にもなっている。

こうした理由から、時としてノイズが*t*-分布に従うことを仮定したGARCHモデル（以下、GARCH-*t*モデル）がリスク測定に対して用いられる。

$$\frac{r_t | r_{t-1}}{\sigma_t} \sim t_{(v)} \quad (5)$$

ここで、 $\sigma_t$  は上記と同様に（4）式で表され、自由度を表すパラメータ*v*は他のパラメータと同様に推定される。*t*-分布はファット・テール性を持つので（3章を参照されたい）、市場リスクの推定には、正規分布と比べて望ましいといえる。しかし、次の3つの理由から*t*-分布もリスク推定に理想的であるとはいえない。

- 1．収益率分布の裾の形状とは一般に異なること
- 2．*t*-分布は左右対称であること
- 3．多変量分布の表現が困難であること

つまり、GARCH-*t*モデルは、多くの場合において、正規GARCHモデルよりもよいリスク推定値を提供してくれるが、モデルの限界から実務への適用には注意が必要であることになる。

### （3）極値のクラスタリング

収益率の推移が独立でないという事実はよく知られているものの、収益率の極値、例えば上位1%といった値がどのように発生するか、すなわち独立に発生するのかまたはムラ（クラスタリング）が存在するのか、という点についてはほとんど分析がなされていない。そこで、次のような定義を導入する。

定義1：（極値のクラスタリング）あるデータにおいて、極値から次の極値までの間隔がIID（independently and identically distributed）でないとき、そのデータには極値のクラスタリングが存在するという。

.....  
1 定常分布が必ず存在するとは限らない。

さらに、分位点（パーセンタイル）を極値と考えた場合のクラスタリングは、次のような特性を持つことが予想される。

仮説1：分位点を極値と考えた場合、分位確率を小さくするにつれて、極値のクラスタリングは減少していく。

この仮説自体は、収益率がどのような分布に従っているかによって成立するか否かが決まる。この仮説が有効であるかどうかは、最適なリスク予測モデルの選択に大きな影響を与える。例えば、仮説1はGARCHモデルにおいては成立する。このことは、以下で論じるように、仮にデータがGARCHモデルから生成されているならば、分位確率が小さい場合においては条件付きでない予測技法を用いても問題ないということの意味している。さらに、分位確率を小さくしていくに従って、どの程度の速さで極値のクラスタリングが減少するかという点もモデル選択に影響を与える。速度が速ければ、条件付きでないリスク予測モデルが好まれるし、速度が遅い場合には条件付きのモデルが必要とされるであろう。GARCHモデルや関連する多くのモデルは極値のクラスタリングが速いクラスに属するので、リスク予測モデルは条件付きでない方が好まれるということになる。

ここではモデル選択を行うために、極値のクラスタリングが存在するかどうかの検定を行う。すなわち、ある閾値を設け、2つの極値（いずれもその閾値超の値）の間にあるデータ数を数え上げる。観測データが閾値を独立に超過していれば、数え上げられたデータ数は幾何分布に従うことになる<sup>2</sup>。したがって、その分布が幾何分布から大きく乖離していれば、極値のクラスタリングが存在する重要な根拠であると考えられるので、カイ2乗適合度検定によってそれを確かめることとする。

具体的には、 $r_t$  を収益率とし、 $\phi_t$  を次のように定義される統計量とする。

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & r_t > \lambda \text{ の場合} \\ 1 & r_t \leq \lambda \text{ の場合} \end{cases} \quad \lambda \gg 0 \quad (6)$$

この統計量が $\lambda$ を大きくするにつれてIIDとなるかどうかを検定するのである。

用いたデータは東証株価指数（TOPIX）、原油のインデックス（WTI）、米国の株価指数（SP-500）、ドル・円の為替レート（以下、JPY/USD）、東証2部株価指数（以下、TSE2）である。データの各種統計量に関するサマリーは表1に掲げた。ここでは、それらのデータの収益率に対して極値の独立性に関する検定を行った。同時に、それらのデータを正規GARCHモデルや、GARCH- $t$ モデル（いずれもGARCH(1,1)モデル）に当てはめ、その残差についても同様の検定を行った。閾値には両裾における5%、2.5%、1%、0.5%に相当する分位点を選択した。それらの結果は、表2～表4（9～11ページ）のとおりである。

2 幾何分布がこのような特性を持つことについては、例えば、Feller [1957] 等、確率論の基礎的テキストを参照されたい。

表1 使用データの主要統計値

データ	観測開始日	観測終了日	データ数	平均	標準偏差	歪度	尖度	一次自己相関
TOPIX	8/1/49	7/30/99	14,179	0.03%	0.88%	-0.44	19.30	0.16
TOPIX	8/1/49	7/31/59	3,007	0.05%	0.90%	-0.12	12.41	0.25
TOPIX	8/1/59	7/31/69	3,006	0.02%	0.72%	-0.36	6.46	0.16
TOPIX	8/1/69	7/31/79	2,896	0.04%	0.69%	-1.44	17.28	0.22
TOPIX	8/1/79	7/31/89	2,803	0.06%	0.79%	-2.41	70.62	0.10
TOPIX	8/1/89	7/30/99	2,467	-0.02%	1.25%	0.30	7.81	0.11
WTI	6/1/83	7/30/99	4,021	-0.01%	2.45%	-1.38	28.87	0.01
SP500	8/1/49	7/30/99	12,632	0.04%	0.85%	-1.78	50.89	0.10
SP500	8/1/49	7/31/59	2,518	0.06%	0.71%	-0.83	10.27	0.10
SP500	8/3/59	7/31/69	2,515	0.02%	0.63%	-0.50	12.82	0.16
SP500	8/1/69	7/31/79	2,543	0.01%	0.86%	0.29	5.45	0.24
SP500	8/1/79	7/31/89	2,529	0.05%	1.09%	-3.75	83.59	0.06
SP500	8/1/89	7/30/99	2,527	0.05%	0.88%	-0.50	9.31	0.01
JPY/USD	8/1/79	7/30/99	5,093	-0.01%	0.71%	-0.81	10.65	0.02
JPY/USD	8/1/79	7/31/89	2,489	-0.02%	0.66%	-0.39	5.48	0.04
JPY/USD	8/1/89	7/30/99	2,604	-0.01%	0.76%	-1.06	13.20	0.00
TSE2	8/1/69	7/30/99	8,166	0.03%	0.70%	-0.79	13.10	0.43
TSE2	8/1/69	7/31/79	2,896	0.05%	0.63%	-1.02	13.96	0.47
TSE2	8/1/79	7/31/89	2,803	0.05%	0.54%	-1.76	30.21	0.32
TSE2	8/1/89	7/30/99	2,467	-0.01%	0.91%	-0.31	7.29	0.45

表2は、収益率そのものの独立性に関するものである。仮説どおり、分位点が相対的に高いもの（5%、2.5%）では明確な従属性がみられる（独立性が棄却されている）のに対し、0.5%レベルでは独立性が棄却されていない部分もみられる。興味深いことに、1%レベルでは左裾の方は多くで明確な従属性がみられるのに対し、右裾はそれほどでもない。このことは、一般に右裾の方が薄いという経験的な事実と整合していると思われる。なお、データ数が多いもの（全期間で検定を行っているもの）は0.5%レベルでも棄却されているものがほとんどであるが、このことは極値のクラスタリング消滅の速度が遅いことを意味していると考えられ、長期間にわたるリスク予測に対しては条件付きのモデルが適しているという可能性を示している。

表3は、正規GARCHモデルの残差の独立性について検定を行ったものである。また表4は、GARCH- $t$ モデルについて同様のことを行った結果である。これも予想どおり、全体として残差の従属性はかなり薄いである。ただし、なかにはGARCHモデルでも従属性の除去ができていないデータもある。極値の発生がGARCHタイプでない場合には、GARCHモデルを使うことによって、残差の中に擬似的な極値のクラスタリングが現れてしまう可能性もある。

表2 収益率の極値発生 of 独立性検定結果

データ	期間	左裾				右裾			
		5.0%	2.5%	1.0%	0.5%	5.0%	2.5%	1.0%	0.5%
TOPIX	49-99	***	***	***	***	***	***	***	***
TOPIX	49-59	***	***	***		***	***	***	***
TOPIX	59-69	***	***	***		***	***		
TOPIX	69-79	***	***	***		***	***		
TOPIX	79-89	***	***	***	***	***	***	**	***
TOPIX	89-99	***	***	***		***	**		
WTI	83-99	***	***	***	***	***	***	***	***
SP500	49-99	***	***	***	***	***	***	***	***
SP500	49-59		**						
SP500	59-69	***	***	***		***	**	**	
SP500	69-79	***	***	***	***	***	***	***	***
SP500	79-89	***	***	***		***	***	***	***
SP500	89-99	***	***	***		***	***		
JPY/USD	79-99	***	***	***		***	***		
JPY/USD	79-89	***	***	***	***	***	***	**	***
JPY/USD	89-99	***	***	***		***	**		
TSE2	69-99	***	***	***	***	***	***	***	***
TSE2	69-79	***	***	***	***	***	***	***	***
TSE2	79-89		**						
TSE2	89-99	***	***	***		***	**	**	

備考：\*\*\*は1%、\*\*は2.5%、\*は5%レベルでそれぞれ独立性が棄却されていることを表す。

表3 正規GARCHモデルの残差に関する極値発生 of 独立性検定結果

データ	期間	左裾				右裾			
		5.0%	2.5%	1.0%	0.5%	5.0%	2.5%	1.0%	0.5%
TOPIX	49-99	**				**			**
TOPIX	49-59					***	**		
TOPIX	59-69	***							
TOPIX	69-79								
TOPIX	79-89								
TOPIX	89-99							**	
WTI	83-99								
SP500	49-99	***							
SP500	49-59								
SP500	59-69					*	*		
SP500	69-79	**				**			**
SP500	79-89					***	**		
SP500	89-99	***							
JPY/USD	79-99								
JPY/USD	79-89								
JPY/USD	89-99							**	
TSE2	69-99								
TSE2	69-79	***							
TSE2	79-89								
TSE2	89-99					*	*		

備考：\*\*\*は1%、\*\*は2.5%、\*は5%レベルでそれぞれ独立性が棄却されていることを表す。

表4 GARCH-*t* モデルの残差に関する極値発生の独立性検定結果

データ	期間	左裾				右裾			
		5.0%	2.5%	1.0%	0.5%	5.0%	2.5%	1.0%	0.5%
TOPIX	49-99	**				**	**		**
TOPIX	49-59					***	***		
TOPIX	59-69	***							
TOPIX	69-79								
TOPIX	79-89								
TOPIX	89-99							**	
WTI	83-99								
SP500	49-99	***							
SP500	49-59								
SP500	59-69					**	*		
SP500	69-79	**				**			
SP500	79-89								
SP500	89-99							**	
JPY/USD	79-99								
JPY/USD	79-89	**							
JPY/USD	89-99								
TSE2	69-99	***	**			***			
TSE2	69-79	**							
TSE2	79-89	**	**			**			
TSE2	89-99	*				**			

備考：\*\*\*は1%、\*\*は2.5%、\*は5%レベルでそれぞれ独立性が棄却されていることを表す。

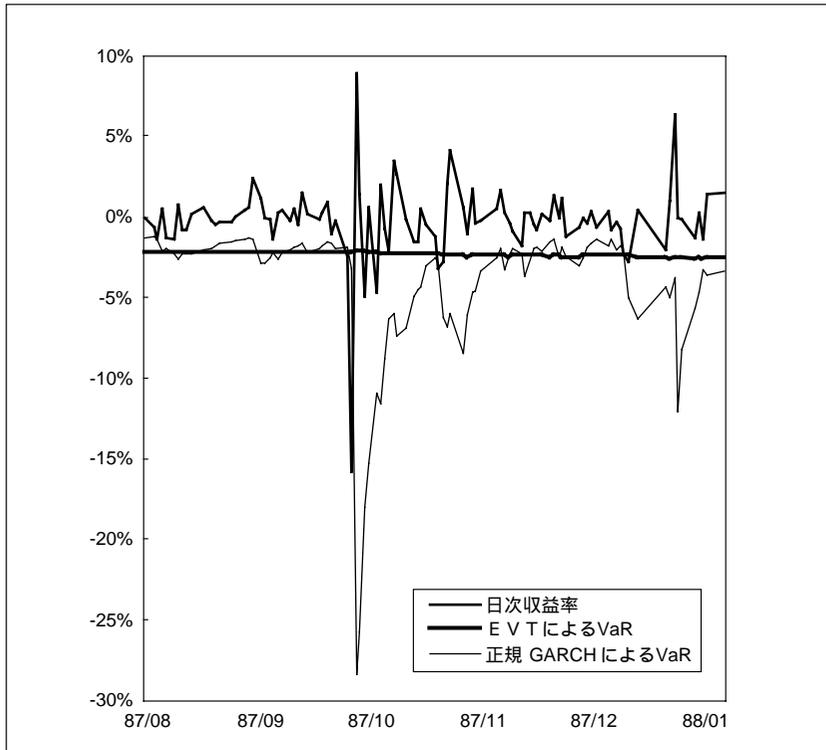
#### (4) バイオレーション・クラスタリング

極値のクラスタリングと同様、VaR等のリスク指標を超えるデータ、すなわちバイオレーションのクラスタリングに関する考察も意義があるものと考えられる。ここでは次のような定義を導入する。

定義2：(バイオレーション・クラスタリング) VaRのバイオレーション間の間隔がIIDでない時、バイオレーション・クラスタリングが存在するという。

バイオレーション・クラスタリングもデータとVaRの予測手法に依存する。実務では、全期間を通じたバイオレーション・クラスタリングはもちろん、局所的にも全くクラスタリングを生じさせないような予測手法を構築することはほとんど不可能である。局所的なバイオレーション・クラスタリングの例として、TOPIXのVaR(保有期間1日、信頼区間99%)を正規GARCHモデルとEVT手法(EVTおよびそれを用いたVaR推定手法の詳細については後述)によって予測した結果を図1に示した。GARCHモデルによるVaRは収益率に対してラグがあるものの、一度大きな負の収益率が生じると、VaRを極めて大きくすることでそれ以降のバイオレーションを過剰なまでに防ごうとしている。EVT手法ではそうしたイベントからは影響を受けていない。こうしたGARCHモデルの過剰反応性からは、より過去の変動の影響

図1 TOPIXの99% VaR推定値 - EVTと正規GARCHの比較 -



も受けるモデルが好まれるかもしれないし、そうしたモデルが使用し難い場合には EVT手法が好まれよう。

### ( 5 ) 非対称性

GARCHモデルのような多くの条件付きボラティリティ・モデルの特徴の1つは、収益率分布の対称性を仮定していることである。以下に述べるとおり、これは正しい仮定ではない。例えば、株式についていえば、収益率分布の左裾の方が右裾よりも厚い。一般に市場が上昇トレンドにある時は左裾の方が厚くなる傾向があるが、これは、トレンド方向に少しずつ進んでいき、時々大きく下落する、という動きを表していると考えられる。実際、1990年代について調べると、日経平均を除くほとんどの株価指数では、分布の左裾の方が厚くなっている。GARCHモデルなどは、条件付き正規分布や $t$ -分布を仮定しているために対称となっているが、その場合、左裾、すなわち損失の方の予測が甘めに出る可能性があり、リスク管理者に誤った安心感 ( false comfort ) を提供してしまうことになる。理論的には非対称性を導入するのは困難ではないが、実際にはモデルがかなり複雑となる。

Nelson [ 1991 ] によって導入されたEGARCH ( exponential GARCH ) モデルは、非対称性を表現できるモデルとして、ボラティリティ予測に用いられることがある。

$$y_t = \sqrt{h_t} z_t, \quad z_t \sim N(0,1)$$

$$\log(h_t) = \omega \left( 1 + \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^p \beta_i L^i \right)^{-1} \{ \theta z_{t-1} + \gamma [ |z_{t-1}| - E |z_{t-1}| ] \}$$

ここで、 $\theta$ や $\gamma$ は非対称性を表すパラメータであり、 $L^i$ はラグ作用素である。

本モデルは確率ボラティリティモデルとの関連性から、GARCHなどの離散時間モデルと、ファイナンスでよく用いられる連続時間モデルとのつながりを与えてくれる、というのが利点である。リスク予測への適用に関しては、非対称性を表現できるということがこのモデルの長所である。しかし、実際にデータに当てはめた場合、非対称性を表すパラメータの値が有意にならず、非対称性を表現できないことが多い。結果として、リスク測定への適用という観点では、このモデルがGARCHモデルと比較して明らかに優位であるとはいえず、モデルの複雑さを勘案するとあまり推奨できるモデルとはいえない。

条件付き分布として、最初から非対称な分布を用いることも考えられるが、適切な非対称分布の選択やそのパラメータ推定の困難さから、これも一般には行われていない。

## (6) VaRのボラティリティ

GARCHモデルのような条件付きボラティリティ・モデルの他の特徴として、リスク予測値そのもののボラティリティが非常に高い、ということが挙げられる。表5の下2段に、1999年の第2四半期におけるTOPIXのVaR（保有期間1日、信頼区間99%）に関する統計量を掲げている。この表は、例えば、第1四半期において1億円のTOPIXポートフォリオを保有している場合、正規GARCHモデルでのVaRはこの四半期中に180万円から412万円までかなり大きく変動するということが示されている。このため規制上の必要自己資本額（VaRの3倍～）も、かなり大きく変動することになるので、銀行は、この変動を考慮して必要以上に多めの規制上の自己資本を積んでおこうとすることになるであろう。また、内部リスク管理では、一般的にトレーダーのポジション限度としてVaRが用いられており、あまりVaRが大きく変動するようであると、実務上の対応が困難になる。すなわち、VaRを用いたポジション限度が頻繁に大きく変動すると、ポジション調節の頻度およびボリュームも、ほとんど対応不可能なレベルとなってしまふのである。こうした結果、ほとんどの銀行で、こうしたボラティリティを低減させるための各種手法が用いられている。多くの場合、分散・共分散行列の更新頻度を少なくする、例えば3カ月に一度とする、といったことが行われている。もちろん、これでも年に4回はポジション限度が大きくジャンプする可能性がある。代替的手法としては、分散・共分散行列の変動を抑えるような手法、例えば移動平均を用いること、などが考えられる。ボラティリティに関する

表5 TOPIXにおけるVaRのボラティリティ

データ / モデル	観測開始日	観測終了日	平均値	標準誤差	最小値	最大値
日次損益	7/29/1954	7/30/1999	3	85	-1,581	912
VaR	正規GARCH		-171	104	-2,828	-59
	GARCH- $t$		-186	109	-2,230	-65
	EVT		-220	70	-394	-103
日次損益	1/4/1996	7/30/1999	-1	120	-525	660
VaR	正規GARCH		-264	91	-756	-143
	GARCH- $t$		-290	92	-713	-175
	EVT		-325	21	-394	-290
日次損益	1/4/1999	3/31/1999	26	118	-241	370
VaR	正規GARCH		-259	64	-412	-180
	GARCH- $t$		-279	61	-421	-204
	EVT		-318	3	-331	-309
日次損益	4/1/1999	6/30/1999	18	100	-201	324
VaR	正規GARCH		-257	37	-357	-202
	GARCH- $t$		-282	40	-384	-223
	EVT		-317	3	-319	-309

備考：数値は万円。1億円のポートフォリオに対する日次の損益額を示している。

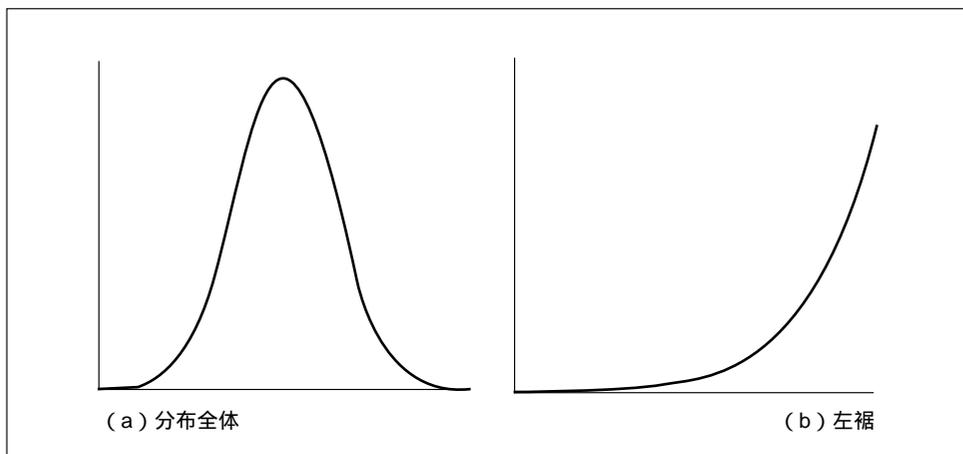
長期記憶モデルを用いるという手段もあろう。この場合、分散は定常でも非定常でもなく、フラクタル的次元を持つことになる。市場変動がボラティリティ予測に影響を与える期間は、GARCHでは極めて短期間である一方、リスクメトリクスのようなI(1)モデル<sup>3</sup>では永続的になるが、このモデルではその間となる、という長所がある。しかしながら、長期記憶モデルの取扱いは極めて難しく、リスク管理の実務に適用するには至っていないと思われる。その他の手法としては、条件付きボラティリティ手法をあきらめ、その代わりにヒストリカルシミュレーションもしくはEVTを用いるということが考えられる。リスク量のボラティリティに関する詳細な議論についてはDanielsson [2000b] を参照のこと。

3 IGARCH (1,1) モデルのこと。リスクメトリクスでは、 $\alpha+\beta=1$ となっているため、明示的にはIGARCHモデルでモデル化される。

### 3. EVT

GARCHモデルを含む通常の統計手法では、リスクが仮に100の観測値のうち1度しか発生しないものであったとしても、その予測のために全観測値を用いている。このことは、リスクの予測としては明らかに効率的な手法とはいえない。EVTの基本概念は、ある確率分布の裾部分のみに注目している場合、すべてのデータを用いて全体の分布形を推定するよりも、裾に関連したデータのみを用いて、裾の形状自体をモデル化した方がよいということもあり得る、という点にある。例えば、ダムを設計するエンジニアは最も高い水位に対してダムの高さが十分であるかのみを考慮していればよく、平常時の水位などは考える必要がない。EVTは、確率変数の中で中心から大きくはずれた値、すなわち極値の振舞いに関する理論であり、観測された極値を用いて確率変数の裾部分のみをモデル化する（図2参照）。

図2 裾について



EVTは工学、物理学、化学、保険など、さまざまな分野で広く適用されているが、金融のリスク管理への応用が展望されたのはここ2~3年のことである。

#### (1) 理論的背景

分布の裾の分類方法はさまざまである。例えば、一般に広く用いられているのは尖度が裾の厚さを表しているというものである。しかし、尖度は分布の形状全体に対する指標であることから、裾の厚みの指標として用いるのは正しくない。その点を示すために簡単なシミュレーションを行った。裾の厚い分布の例として自由度3の*t*-分布を採用し、その分布から2,000個のサンプル・データを繰り返し抽出する。各サンプル・データの中から、最大および最小のおのおの40データを排除する。したがって、このサンプル・データは両裾が切り取られた形となっており、明らかに

裾が薄いはずである。しかしながら、このサンプルデータの平均的超過尖度は7.1であり、裾の厚い分布に分類されてしまう。さらに、多くのモデル（例えば条件付き正規確率ボラティリティ・モデル）による分布は、裾が厚いファット・テール性を持つとしばしば分類されている。しかし、後述する分類では、確率ボラティリティ・モデルによる分布は裾が薄いことが示される。対照的に、GARCHモデルによる分布は、収益率過程がボラティリティ過程へ影響を与えることを背景に、ファット・テール性を有する。

正式には、確率分布の裾は次の3つの形状のいずれかに分類される<sup>4</sup>。

1. 裾が薄い、すなわち裾が切断されている（死亡率など）
2. 裾が通常の厚みを持つ、つまり裾が指数関数形で示される。正規分布がこの分類の代表例である。
3. 裾が厚い、すなわち裾が<sup>べき</sup>冪分布に従う。

金融商品の収益率は裾が厚い分布であるというのによく知られており、よって以下では第3のケースのみを考えることにする。EVTにおける非常に重要な結果として、裾の厚い分布の確率変数 $x$ においては、右裾<sup>5</sup>は必ず次の性質を持つ、という点である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad x > 0 \quad (7)$$

ここで $\alpha$ はテール・インデックスとして知られるもので、 $F(\cdot)$ は分布関数を表す。この事実が重要であるのは $x$ が従う分布が何であっても、裾は共通の形状を持ち、関連するパラメータは1つ、すなわち $\alpha$ のみである、という点である。データが裾の厚い分布から生成されていれば、その分布は一次近似としてパレート・タイプの裾、すなわち $x \rightarrow \infty$ となるにつれ、

$$P\{X > x\} \approx ax^{-\alpha}, \quad a > 0, \quad \alpha > 0 \quad (8)$$

となる。Danielsson and de Vries [1997b] と Danielsson and de Vries [1997a] では、左裾部分の分布形が

$$F(x) \cong \frac{m}{n} \left( \frac{x}{X_{m+1}} \right)^{-\alpha} \quad (9)$$

と表せることが示されている。ここで、 $n$ は観測値の数、 $m$ は裾として認識しているデータ数、 $X_{m+1}$ は観測値の順序統計量、つまり

4 この3分類に属する分布の集合は、3種類の極値分布（extreme value distribution）の最大値吸引域（maximum domain of attraction）に一致する。極値分布ならびに最大値吸引域の詳細については森本 [2000] を参照のこと。

5 左裾についての応用もデータの符号を換えることで容易に行える。

$$X_1 \geq X_2 \geq \dots \geq X_m \geq \dots \geq X_n$$

から選択されたものである<sup>6</sup>。また、パラメータ $\alpha$ は裾の厚みを表す重要なものである。すなわち、

$\alpha = \infty$ ならば、裾は指数的に減少する。つまり正規分布とほぼ同様となる。

$\alpha < \infty$ ならば、裾は厚いことになり、

$\alpha$ は有限なモーメント数を表す

例えば $t$ -分布の場合、 $\alpha$ は自由度を表す

(正規分布を除く)安定分布の場合、 $\alpha$ は特性指数を表す

ということが知られている<sup>7</sup>。

## (2) EVTの適用

金融機関にとって、EVTを適用でき得る対象は多く存在している。収益率分布の裾を推定することにより、金融機関はサンプル外の事象の推定精度を高めることができ、さらにサンプル内においてもその分位点の測定精度を高められる。本稿でもEVTのリスク管理への適用を議論の対象としているが、そのほかにもいくつかの応用事例が考えられる。例えば、EVTはファット・テール性がある場合の分散効果の測定において重要な示唆を与える。つまり、EVTは平均 - 分散アプローチに基づく標準的なポートフォリオ理論が厳密には正確ではないとの示唆を与える。さらに、派生商品、特にエキゾチック・オプションのプライシングにはファット・テールの存在が大きく影響する場合が多いと考えられ、そこでもEVTの適用可能性があると考えられる。しかしながら、金融業界においては、リスク管理がEVTの最大の活用先である。

EVTをVaRの予測に用いる際には、左裾の推定、すなわち $\alpha$ と $m$ を推定することになる。(9)式はVaR予測における基礎をなす式である。 $\alpha$ と $m$ が推定できれば、 $X_{m+1}$ が得られる。これらにサンプル数 $n$ を加えた3つの変数があれば、どのような確率、すなわち分位点と確率の組合せ( $P, Q$ )も計算ができる(ここで、 $P < m/n$ )。実際に $\text{VaR}^{p\%}$ を求める場合には、 $P \geq m/n$ かどうかを確かめる必要がある。もしその場合には、サンプル・データの $p$ -分位点、すなわちヒストリカル・シミュレーション法と同じ方法で $q(p)$ を求める。もし $P < m/n$ ならば、(9)式を用い、対応する分位点 $q(p)$ を求める。分位点 $q(p)$ の予測値がわかれば、VaRの算出ができることになる。

6 ここでは、左裾を考えるため脚注5にあるとおりすべてのデータの符号を換えていると考えていただきたい。つまり、 $X_1$ は観測値中最も低い値の符号を反転させたものである。

7 安定分布および特性指数については、例えば森本[2000]を参照のこと。

## (3) パラメータの推定

裾が(8)式にあるようなパレート分布に正確に従っている、つまり、

$$F(x) = 1 - ax^{-\alpha} \quad (10)$$

となるならば、パラメータ $\alpha$ の推定は容易である。Hill [1975]はこのパラメータの最尤法による推定値が次のとおりとなることを示した。

$$\frac{1}{\hat{\alpha}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log \frac{X_i}{X_{m+1}} \quad (11)$$

(11)式の推定値はヒル推定量として知られているものである。ここで、 $m$ は裾部分に属する観測値の数であり、 $X_{m+1}$ は裾を規定する閾値である。(10)式のパレート近似が単に漸近的に成立している場合には、ヒル推定量はモーメント法の推定量と一致することになる。 $m$ が的確に選択されれば、ヒル推定量は収益率分布を表す最適な裾のパラメータとなることが知られているが、 $m$ の的確な選択は容易ではない。 $m$ を選ぶことは裾がどこから始まるかを規定することであり、任意に、例えばサンプル数の上位1%点のデータを選ぶといった方法は推奨できない。

$m$ を変えると $\alpha$ の推定値、さらにはリスク推定値そのものも大きく変わることから、最適な閾値 $m^*$ を選択することは非常に重要である。最適な閾値 $m^*$ を選択するに当たっては、次のような手法を用いることになる。

1. パラメータの逆数 $1/\hat{\alpha}$ は漸近的に正規分布に従う
2. したがって、 $1/\hat{\alpha}$ の漸近的な平均2乗誤差 (asymptotic mean square error、以下AMSE)を構築する
3. ただし、通常 $1/\hat{\alpha}$ にはバイアスや分散が含まれていることから、それを考慮し、
  - a) 分散とバイアスの両方が $m$ の選択によって影響されることから、バイアスと分散が同じ割合で消滅していくように $m$ を選ぶのが最適。
  - b) したがって、AMSEが最小化される水準が、最適な閾値レベル $m^*$ を与えてくれる、すなわち、以下が成立する。

$$m^* = \min AMSE \left[ \left( \frac{1}{\hat{\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right)^2 \right]$$

AMSEはブートストラップ法によって与えられる。しかしながら、リサンプルするだけでは、AMSEのブレを消去することはできないので、サブ・サンプル法が必要となる。Hall [1990]は、AMSEにおける $1/\alpha$ の代替としての $\alpha$ の初期値を定めるために $m$ の初期値を決める必要があることから、サブ・サンプル法を提案した。各サブ・サンプルのブートストラップ法に対して $1/\hat{\alpha}$ の推定値が得られ、そのサブ・サンプルに対して平均を最小化するように $m_{sub}^*$ を選ぶというものである。そして、

$\hat{\alpha}_{sub}$  および  $\hat{\beta}_{sub} = \hat{\alpha}_{sub}$  (ここで $\beta$ は(7)式を極限分布を二次まで展開した場合のパラメータ) という仮定から全体のサンプルでの $m^*$ を導くことになる。しかしながらこの手法は2つの欠点がある。

1. 初期値 $\alpha$ を推定する必要があること
2. 二次のパラメータ $\beta$ に仮定を置く必要があること (Hallは $\beta = \alpha$ をよい仮定であるとしているが、例えば学生-tでは $\beta=2$ である)

Danielsson and de Vries [1997a] は  $m^*$  を決めるためのアルゴリズムとして二重サブ・サンプル・ブートストラップ法を用いることで、初期値 $\alpha$ および $\hat{\beta}$ の仮定の影響を回避することを提唱している(以下、DD推定量)。ホール推定量とDD推定量の差異は一樣に、ある理論的な値(極限的にゼロ)に収束していく。この差異の2乗はMES [ $1/\alpha$ ] の有用な推定量となり、閾値をうまく選ぶことによって最小化される。さらに、通常のフル・サンプルのブートストラップでは法則収束しか導かれないが、それ以上に望ましい確率収束を得るために、サブ・サンプル・ブートストラップ法において元のサンプル数よりも少ないサンプル数を選ぶべきであることも示されている。その理由は、サブ・サンプルでの最適な閾値からフル・サンプルでの閾値(これを用いてフルサンプルでの推定量を導くためにホール推定量を使う)を推定する際に用いる二次パラメータを推定するために、異なったサンプリング特性を持つ2つのサンプルが必要となるからである。

#### (4) EVTを適用する際の課題

時として、EVTはリスク管理に対する万能薬であるかのように表現されることもあるが、それは正しくない。EVTを金融データに適用する際の制約となるいくつかの課題がある。

##### イ. サンプル数

EVTの適用に際し、サンプル数についての本源的な制約はないが、実務上では存在する。今回掲げた推定手法を用いる上では、主に次の2つの観点でサンプル数が制約となる。

1. 極値となる事象を観測する必要があること
2. 閾値、つまり $m$ の推定は通常サブ・サンプルのブートストラップ法やさらには2重サブ・サンプルのブートストラップ法によるため、極値が各サブ・サンプルで観測される必要があること

ヒル推定量が $m$ の決定に用いられるならば、裾部分に属する観測値の数が $m+1$ である必要がある。しかし、 $m$ はサブ・サンプルから求められることになるが、このサンプルのサイズは可能な限り小さくすることが求められる。実証分析などによる経験的結果から、サブ・サンプルはサンプル数の10%程度は必要であることが指摘されている。よって、サンプル数が1,000であれば、サブ・サンプルは100となり、そこには平均的にみて50個の正值が含まれる。しかし、最小限の正值を用いて反復

されるブートストラップにおいては、使用できるサブ・サンプル数を一定値以上に多くすることはできない。実務上は、1,000が最低必要なデータ数であり、一般的には1,500程度が望ましいと考えられる。データ数が6,000以上になると、それ以上はあまり違いはないといわれている。したがって、リスク管理者は、典型的な八方塞がり状態、すなわち統計的要請からデータを多くしたいが、そうすると現状の市場実勢に合っていないデータも使わなければならない、という問題に直面する。また、多くの市場、特にエマージング市場では、そもそもそれだけのデータ数がないため、EVTにかかわらず分析が困難である、という問題もある。おそらくこうした理由から、これまでリスク管理に関して発表されている研究は、流動性が高く長期にわたるデータ取得が可能なSP500のようなデータを分析の対象とせざるを得なかったと考えられる。

#### ロ．多次元への適用

多次元EVTの研究は精力的に進められているが、GARCHモデル等多くの技法同様、次元を増やすと複雑さが増すという問題がある。現時点では、EVTを用いたりリスク管理へ多次元の手法を適用する範囲は極めて限られているが、Longin [ 1999 ] において裾に近づく際に共分散がどのように変化するかに関する考察がなされるなど、興味深い研究もいくつかみられるようになってきている。

#### ハ．独立性

EVTはデータがIIDであることを仮定しており、これも制約である。しかし、Resnick and Starica [ 1996 ] は、GARCHのようなある種の従属性の下では、独立性の前提から導かれたヒル推定量を用いても問題にはならないということを示しており、IIDか否かという点がそれほど制約にならない場合もある。

### ( 5 ) EVTでの予測

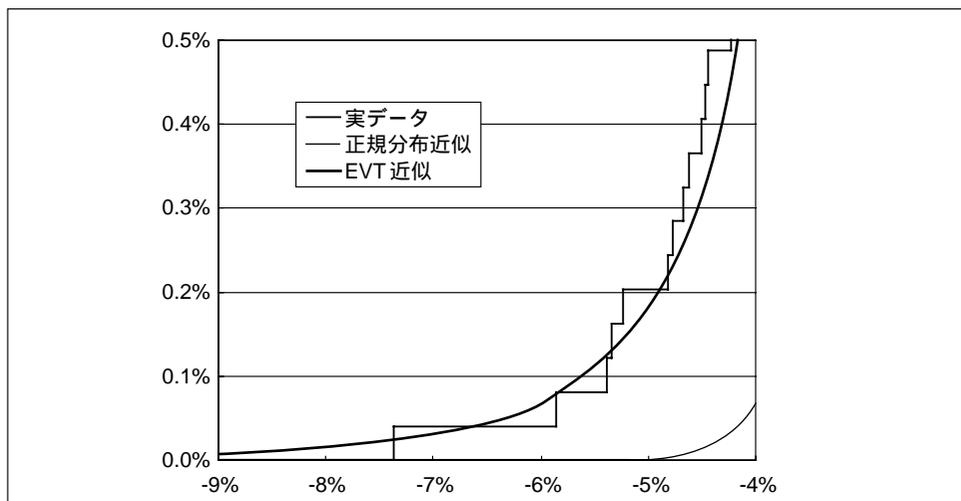
EVTを用いた推定結果を表6に、そして1990年代のTOPIXの日次対数収益率における左裾のプロットを図3に示した。表6には、EVTによって予測される20年間で発生し得る最大および最小の収益率（それぞれ表中のMax20およびMin20）も付した。データセットの中では、WTIが最もボラティルであり、20年に1度は1日に29%程度上昇し、19%程度下落し得るという予測になっている。また、90年代に入ると為替レートの変動幅が大きくなっており、9%程度の上昇率が20年に1度起こり得るという結果になっている。東証2部指数の方がTOPIXよりもリスクが小さい点は興味深い。90年代においてSP500と比べてTOPIXの下落リスクがかなり大きいというのも特徴的である。

表6 EVTによる裾の推定例

データ	観測開始日	観測終了日	$u$	$l$	$m_u$	$m_l$	Max20	Min20
TOPIX	8/1/49	7/30/99	3.83	4.02	37	30	7.34	-7.37
TOPIX	8/1/49	7/31/59	3.27	4.70	32	17	6.27	-8.26
TOPIX	8/1/59	7/31/69	4.74	3.15	20	36	6.85	-4.29
TOPIX	8/1/69	7/31/79	3.44	2.68	28	41	8.89	-5.34
TOPIX	8/1/79	7/31/89	2.92	2.88	48	29	8.26	-7.63
TOPIX	8/1/89	7/30/99	4.00	5.57	22	12	7.51	-9.73
WTI	6/1/83	7/30/99	4.25	2.82	14	32	29.50	-18.90
SP500	8/1/49	7/30/99	3.89	3.25	61	163	7.18	-6.01
SP500	8/1/49	7/31/59	4.59	2.85	33	32	7.57	-4.02
SP500	8/3/59	7/31/69	2.97	3.59	76	25	5.07	-5.78
SP500	8/1/69	7/31/79	3.46	4.81	31	23	4.79	-7.13
SP500	8/1/79	7/31/89	3.97	2.80	33	56	10.40	-6.83
SP500	8/1/89	7/30/99	3.91	3.33	29	28	7.51	-6.15
JPY/USD	8/1/79	7/30/99	4.60	3.61	25	34	6.29	-4.08
JPY/USD	8/1/79	7/31/89	6.89	6.61	14	11	3.80	-3.02
JPY/USD	8/1/89	7/30/99	3.98	2.66	29	36	9.46	-4.91
TSE2	8/1/69	7/30/99	5.20	3.13	20	34	7.56	-4.35
TSE2	8/1/69	7/31/79	4.69	2.41	23	51	8.50	-3.86
TSE2	8/1/79	7/31/89	5.95	3.37	16	32	4.53	-2.81
TSE2	8/1/89	7/30/99	4.55	7.97	17	11	5.71	-5.67

- 備考：1.  $\alpha$ は裾に関するパラメータ、 $m$ はブートストラップ法により求められた閾値を超過するデータ数を表す。  
 2. 添え字 ( $u$ または $l$ ) はそれぞれ右裾 (upper)、左裾 (lower) を表す。  
 3. Max20とMin20は計算されたパラメータに基づいて推定された20年間での日次最大上昇率および下落率である (パーセント表示)。

図3 TOPIXデータによる累積度数分布の比較  
1989年～1999年



## 4. 実証分析

本章では、いくつかのデータおよび期間を用いた実証分析を行う。使用データは、東証株価指数（TOPIX）、原油のインデックス（WTI）、米国の株価指数（SP500）、ドル・円の為替レート（以下、JPY/USD）、東証2部株価指数（以下、TSE2）である<sup>8</sup>。表1（8ページ）にそれぞれのデータに関する主要統計値をまとめた。

### （1）VaR予測

VaR予測で用いられているモデルは、上述したようにGARCHタイプのモデルである。本稿では、正規GARCHおよびGARCH- $t$ を採用し、さらに比較のために単にデータから平均と分散を計算し、正規分布性を仮定した推定値も用いた。ある時点のVaR推定に使用するデータ数はその直前の1,000日分とし、それを1日ずつずらしていく。すなわち、日々VaRの推定値を洗い替えていることになる。各VaRについて、翌日の収益率がそのVaRを超過（パイオレート）しているかどうかを調べた<sup>9</sup>。結果は表7に示しているが、他のVaRに関する研究と同様の結果となっている。すなわち、単なる正規分布および正規GARCHモデルの推定精度はあまり高くなく、次いでGARCH- $t$ モデル、そしてEVTが結果として最も高い推定精度を示している。この結果は後述するVaR自体のボラティリティの結果を考え合わせると極めて興味深い。

### （2）非対称性

正規分布、正規GARCHモデル、GARCH- $t$ モデルでは（条件付き）分布が対称性を持つことが仮定されている。このことは2つの点で問題である。第一に、対称性の仮定から、左右の裾の形状を同一としていることになるが、通常の収益率分布は対称でなく、通常は右裾の方が左裾よりも薄い。表6からもそれがみてとれる。第二に、正規GARCHモデルにおける推定では、薄い裾の方がパラメータ推定により大きな影響を与え、厚い裾（通常は左裾）の形状が推定にはあまり反映されないという問題もある。分析の結果として、GARCHモデルを使った推定には顕著な非対称性が現れている。すなわち、右裾ではVaRが高くなっている結果、VaR超過率が低く出ているのに対し、左裾ではVaRが低くなっている結果、VaRを超過するデータが多く発生している。

8 なお、ここでは、有意性によって使用するデータを選択することにより生じる問題（Data Snooping Bias）を回避するため、分析を行ったデータすべてについてその分析結果を示した。

9 VaRは保有期間1日、信頼区間としては95%、97.5%、99%、99.5%を用いた。

表7 VaRを超過したデータ発生率（バイオレーション率）の比較

モデル	データ	左裾				右裾			
		95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%
正規	TOPIX	4.50%	3.07%	1.98%	1.47%	4.10%	2.71%	1.59%	1.21%
	SP500	5.13%	3.40%	1.96%	1.41%	4.81%	2.93%	1.66%	1.19%
	JPY/USD	5.65%	3.84%	2.50%	1.89%	5.15%	3.23%	2.09%	1.53%
	WTI	5.08%	3.05%	1.98%	1.39%	4.80%	2.86%	1.90%	1.51%
	TSE2	4.76%	3.05%	2.04%	1.53%	5.06%	3.29%	1.86%	1.35%
正規GARCH	TOPIX	5.14%	3.01%	1.65%	1.25%	4.05%	2.19%	1.05%	0.63%
	SP500	5.47%	3.33%	1.81%	1.12%	4.30%	2.31%	0.99%	0.59%
	JPY/USD	5.57%	3.42%	2.12%	1.64%	4.90%	2.84%	1.50%	1.00%
	WTI	5.04%	2.98%	1.71%	1.27%	4.40%	2.66%	1.43%	1.15%
	TSE2	5.25%	3.26%	1.82%	1.26%	4.34%	2.54%	1.22%	0.72%
GARCH-t	TOPIX	5.80%	3.02%	1.25%	0.76%	4.44%	2.11%	0.71%	0.28%
	SP500	6.01%	3.18%	1.28%	0.60%	4.62%	2.11%	0.71%	0.34%
	JPY/USD	6.26%	3.01%	1.34%	0.92%	5.23%	2.31%	0.86%	0.19%
	WTI	6.27%	2.82%	1.15%	0.48%	4.68%	2.30%	0.99%	0.63%
	TSE2	5.39%	2.91%	1.29%	0.69%	4.76%	2.33%	0.89%	0.21%
EVT	TOPIX	5.23%	2.68%	1.18%	0.69%	5.38%	2.90%	1.30%	0.72%
	SP500	5.61%	3.11%	1.27%	0.69%	5.55%	3.12%	1.27%	0.70%
	JPY/USD	5.51%	2.98%	1.31%	0.95%	6.43%	3.03%	1.53%	0.81%
	WTI	5.08%	2.94%	0.87%	0.48%	5.32%	2.78%	1.23%	0.63%
	TSE2	5.45%	2.72%	1.23%	0.72%	5.75%	2.99%	1.38%	0.78%

備考：チェックしたVaRの数はTOPIX = 12,679、SP500=11,133、JPY/USD=3,593、WTI=2,521、TSE2=6,666である。

### (3) VaRのボラティリティ

VaRのボラティリティも重要な問題である。表5（14ページ）は、1億円のTOPIXポートフォリオに対する保有期間1日の1%VaRを示している。まず、サンプル期間全体でみると、正規GARCHモデルを用いた場合、VaRは最大で2,828万円になっているのに対し、その間の実際の最大損失額は1,581万円にとどまっている。ヒストリカル・データから単純に1,581万円という損失額の発生確率を計算すると0.007%に過ぎないことから、GARCHモデルの推定結果がかなり実際と乖離していることがわかる。GARCH-tモデルによる推定でも最大損失額は2,230万円となっており、あまり改善されていない。これに対して、EVTによる推定結果ではそうした問題は発生していない。次に、VaRの標準誤差をみると、正規GARCHモデルで104万円、GARCH-tモデルでは109万円であるのに対し、EVTでは70万円に過ぎず、相対的に安定していることがわかる。

同様の結果を、1999年の第1および第2四半期のデータを用いた分析でみることができる。例えば、第1四半期の場合、正規GARCHモデルによる推定では、VaRの推計値は180万円から412万円の間で大きく変動する。3カ月の間でVaRが3倍近くも変動するというのは、内部管理上の自己資本額算出をVaRに基づいて行っている金融機関にとっては問題である。GARCH-tモデルでも204万円から421万円と変動が大きい、これに対してEVTでは309万円から331万円と極めて小さなレンジに収まっている。

#### (4) バイオレーションのクラスタリング

さらに、VaRを超過するデータ、すなわち上述したようなバイオレーションのクラスタリングについても検討した。結果は表8のとおりである。観測期間全体をみると、EVTによる予測において明らかなクラスタリングがある一方、予想されたとおりGARCHモデルではクラスタリングが大幅に減少していることがわかる。しか

表8 バイオレーション・データ発生時の独立性検定結果

モデル	データ	左裾				右裾			
		95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%
正規	TOPIX	***	***	***	***	***	***	***	***
	SP500	***	***	***	***	***	***	***	***
	JPY/USD	***	***	**	***	**	**		*
	WTI	***	***	***	***	***	***	***	***
	TSE2	***	***	***	***	***	***	***	***
正規GARCH	TOPIX	***	***	*					
	SP500	***	***						
	JPY/USD								
	WTI		***						
	TSE2	***	***		*	*			
GARCH-t	TOPIX	***	***						
	SP500	***	**				**		
	JPY/USD								
	WTI								
	TSE2	***	*			**			
EVT	TOPIX	***	***	***	***	***	***	***	***
	SP500	***	***	***	***	***	***	***	***
	JPY/USD	***	***	***	***	***		***	
	WTI	***	***	***	***	***	***	***	***
	TSE2	***	***	***	***	***	***	***	***

備考：\*\*\*は1%、\*\*は2.5%、\*は5%レベルでそれぞれ独立性が棄却されていることを表す。

しながら、局所的なクラスタリング状況をみると、別の見方ができる。図1(11ページ)は、正規GARCHモデルとEVTを用いてTOPIXのVaRを推定した結果を図示している。GARCHモデルでは、分析期間の最初の大きな負の収益率には対応できないものの、その後急激に増加し、しばらくの間リスクを過大推計する結果となっている。これに対して、EVTではこのような現象はほとんどみられていない。こうしたGARCHモデルの過剰反応性からは、より過去の変動の影響も受けるモデルが好まれるかもしれないし、そうしたモデルが使用し難い場合にはEVT手法が好まれよう。

## 5. 結論

リスク管理はここ数年で大きく変貌している。GARCHモデル等の金融データの時系列分析において伝統的な手法が導入され、さらにEVTなどの新手法の適用も始まっている。この分野には唯一の正解というものは存在せず、精密さと複雑さといったよくあるトレード・オフ関係に直面することになる。本稿では、本邦の金融データを用いていくつかのVaR予測手法を比較した。

われわれの分析結果からは、今回使用したデータに関していえば、単純に収益率に正規分布を仮定した手法やGARCHモデルタイプの手法に比べ、EVTがより望ましいことが判明した。また、EVTを用いることで、VaRの予測値はより正確になり、また時間的に安定することもわかった。これらから、本邦金融機関ならびに本邦金融市場への投資を行っている投資家はEVTを使用することが望ましいと考えられる。

一方、GARCHタイプのモデルによるVaR推定は、EVTよりも精度の点で見劣りし、また実際のデータ以上に大きく振れるといった問題点が明らかになった。こうした点からも、実務的にVaRを推定する際には、GARCHタイプのモデルは勧められない。EVTとGARCHタイプのモデルによるVaR推定値を詳細に検討した結果、後者による推定値の大きな振れは、データではなく、モデル自体に基づくものであることが示された。最後に、より過去の変動の影響も受けるモデルが最もよいリスク推定値を与えるかもしれないが、このモデルは推奨できないことも指摘した。これは、モデルの推定は非常に困難であり、推定には非常に長期間のヒストリカル・データが必要となるため、事実上、このモデルは、最も実務的なリスク推定には適用できないためである。

## 補論 EVTの数学的導出について

補論では、裾の分布を推定する統計手法についての概要を説明する。この内容の詳細および証明はDanielsson and de Vries [ 1997a ] を、この手法の適用例はDanielsson and de Vries [ 1997b ] をおのおの参照されたい。

$x$  をファット・テールの分布を持つ金融資産の収益率とする。その分布関数  $F(x)$  が次のような形で収束する（これを正則変動<sup>10</sup>という）と仮定する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad x > 0 \quad (\text{A-1})$$

この仮定が成立するならば、収益率分布はファット・テール性を持ち、 $\alpha$  よりも大きなモーメントは発散してしまうことになる。(A-1)式で示されるような正則変動の仮定は、収益率  $x$  の裾部分の振舞いを分析するのに必要となる唯一の仮定である。上記のような正則変動性を持つということと、フレシェ分布の最大値吸引域に属するということは同値である（森本 [ 2000 ] を参照のこと）。

$F(x)$  の裾形状のパラメトリックな表現は、例えば高次まで展開することによって得られる。ある前提下では次のように表現できる。

$$F(x) = 1 - ax^{-\alpha} [1 + bx^{-\beta} + o(x^{-\beta})], \quad \beta > 0, \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{A-2})$$

パラメータ  $\alpha$  は次のように示されるヒル推定量（Hill [ 1975 ]）によって推定することができる。ここで、 $m$  は極値として定めたある閾値を超過するデータ数を表しており、 $X_i$  は上から  $i$  番目のデータを表している。

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log \frac{X_i}{X_{m+1}} \quad (\text{A-3})$$

この推定量については、漸近的に正規分布に従うことや、分散およびバイアスの存在が知られている。さらに、漸近的平均2乗誤差（asymptotic mean square error）を最小にするような閾値が存在することも知られており、この閾値からパラメータおよび超過データ数を求めることができる。Danielsson and de Vries [ 1997a ] は、この特性を用いて、最適な超過データ数をブートストラップ法によって求める手法を提言している。

ファット・テール性を持つ分布からサンプル・データが抽出されているとすれば、(A-2)式および(A-3)式から、サンプル・データを超過する分位点と確率の組合せ  $(P, Q)$  を推定することができる。これらの推定値の下記に述べるような特

10 正則変動については、森本 [ 2000 ] を参照のこと。

性は、 $1/\hat{\alpha}$  の特性から直接導かれるものである。また、サンプル内の  $(P, Q)$  についても同様の手法により導くことが可能である。

サンプル外の  $(P, Q)$  を推定するためには、2つの確率  $p, t$  (ただし、サンプル数を  $n$  として、 $P < 1/n < t$ ) を考える。確率  $p$  と  $t$  に対応して、 $x_p$  と  $x_t$  を分位点、すなわち、 $1-F(x_i) = i, i = t, p$  とする。(A-2) 式で得られた  $F(x)$  の展開式を用い、高位の次数を無視し、 $t$  を  $(m+1)/n$ 、 $x_t$  を  $X_{m+1}$  で置き換えることにより、

$$\hat{x}_p = X_{m+1} \left( \frac{m}{np} \right)^{\frac{1}{\hat{\alpha}}} \quad (\text{A-4})$$

と表せる。この  $\hat{x}_p$  は漸近的に正規分布に従うことが知られている。同様に変形することで、

$$\hat{p} = \frac{m}{n} \left( \frac{x_t}{np} \right)^{\hat{\alpha}} \quad (\text{A-5})$$

も得られる。ここで得られた推定値  $\hat{p}$  もまた漸近的に正規分布に従う。

## 参考文献

- 森本祐司、「金融と保険の融合について」、『金融研究』、第19巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、2000年
- Basel Committee on Banking Supervision, *Overview of the amendment to the capital accord to incorporate market risk*, 1996.
- Bollerslev, T., “Generalised autoregressive conditional heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 51, 1986, pp. 307-327.
- Danielsson J., “Limits to Risk Modelling,” mimeo, London School of Economics (www.RiskResearch.org), 2000a.
- , “(Un) Conditionality and Risk Forecasting,” mimeo, London School of Economics (www.RiskResearch.org), 2000b.
- , and C.G. de Vries, “Beyond the sample: Extreme quantile and probability estimation,” mimeo, Tinbergen Institute Rotterdam, 1997a.
- , and                      , “Tail index and quantile estimation with very high frequency data,” *Journal of Empirical Finance*, 4, 1997b, pp. 241-257.
- Feller, W., *An introduction to probability theory and its applications, Volume 1, 2nd Edition*, John Wiley & Sons, Inc., 1957
- Greenspan, A., “Discussion at Symposium: Maintaining Financial Stability in a Global Economy,” The Federal Reserve Bank of Kansas City, 1997, p. 54.
- Hall, P., “Using the bootstrap to estimate mean square error and select smoothing parameter in nonparametric problems,” *Journal of Multivariate Analysis*, 32, pp. 177-203, 1990.
- Hill, B. M., “A simple general approach to inference about the tail of a distribution,” *Annals of Statistics*, 35, 1975, pp. 1163-1173.
- J. P. Morgan, *RiskMetrics-technical manual*, Third Edition, 1995.
- Longin, F., “From value at risk to stress testing: the extreme value approach,” Discussion Paper No. 2161, Center for Economic Policy Research, 1999.
- Nelson, D.B., “Conditional heteroskedasticity in asset pricing: a new approach,” *Econometrica*, 59, 1991, pp. 347-370.
- Resnick S., and C. Starica, “Tail index estimation for dependent data,” mimeo, School of ORIE, Cornell University, 1996.

