

# 一般化状態空間モデルによる 分散変動時系列の解析

きたがわ げんしろう さとう せいしょう  
北川 源四郎 / 佐藤 整尚

## 要 旨

確率的ボラティリティ・モデルを非線形状態空間モデルで表現する方法を拡張するとトレンド、定常変動と分散変動（ボラティリティ）を同時に考慮し、これらの成分に分解することができる。このようなボラティリティの変動を考慮したモデルのAICは通常トレンドモデル等よりも著しく小さく、変動するボラティリティを明示的に表現することによってよいモデルが得られることを示している。このモデルに基づく日経225データの解析結果では、トレンドの階差と局所的な分散との間に明らかな関連がみられる。そこで、本稿ではさらにトレンドと分散の関係を仮定したモデル化を行った。日経225データに関しては、このモデル化によってさらにAICが減少し、両成分間の関係が確認できた。一方、為替データに関しては、トレンドとボラティリティ間の明らかな関係は検出できなかった。

キーワード：ボラティリティ、金融時系列、非定常、日経225データ、モンテカルロ・フィルタ、AIC

.....  
本稿は北川と佐藤がそれぞれ国内客員研究員、研究生として日本銀行金融研究所にて行った研究成果の一部をまとめたものです。他では得がたい研究の機会を与えていただいた金融研究所のスタッフの皆様には心から感謝いたします。

北川源四郎 統計数理研究所（E-mail: kitagawa@ism.ac.jp）  
佐藤整尚 統計数理研究所（E-mail: sato@ism.ac.jp）

## 1. はじめに

ボラティリティに関する多くの文献では、株価などの金融時系列  $y_n$  の対数値の一階差系列  $r_n = \Delta \log y_n = \log y_n - \log y_{n-1}$  を考え、それに対してモデルを想定している。代表的なものとしては、ARCHモデル (Engle [1982])

$$\begin{aligned} r_n &= \sigma_n w_n \\ \log \sigma_n^2 &= \alpha + \beta w_{n-1}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

や確率的ボラティリティ・モデル

$$\begin{aligned} r_n &= \sigma_n w_n \\ \log \sigma_n^2 &= \alpha + \beta \log \sigma_{n-1}^2 + v_n \end{aligned} \quad (2)$$

などがある。通常、 $w_n$  は平均0、分散1の標準正規分布と仮定する。

これらのモデルの背景には、時系列がランダムウォークに従って変動しているという仮定と、トレンドとボラティリティの間の無相関性の仮定がある。しかしながら、金融時系列に関して必ずしもこれらの仮定が妥当なわけではなく、積極的に時系列的構造やトレンドとボラティリティの関係をモデル化することによって、より良いモデルが得られる可能性がある。

確率的ボラティリティ・モデルのパラメータ推定に関しては最近、非ガウス型のフィルタを用いて最尤推定値を求める方法が提案されている。従来は、確率的ボラティリティ・モデルの推定のためには  $r_n$  を以下のように非線形変換し、線形・ガウス型の状態空間モデルで近似し、カルマンフィルタによって計算を行うことが多かった (北川・佐藤・永原 [1999])。

$$\begin{aligned} \log r_n^2 &= \log \sigma_n^2 + \log w_n^2 \\ \log \sigma_n^2 &= \alpha + \beta \log \sigma_{n-1}^2 + v_n \end{aligned} \quad (3)$$

しかしながら、以下のように観測モデルに関して非線形な、非線形状態空間モデルを用いると確率的ボラティリティ・モデルをなんら近似することなく表現することができる。さらに、本稿で示すようにこの方法を拡張すると、比較的簡単にトレンドとボラティリティを同時にモデル化するとともに、それらの間の影響を明示的にモデル化することができる。

## 2. モデル

### 2.1 トレンド + 確率的ボラティリティ型のモデル

本稿では分散変動を伴う時系列を、以下のように、直接トレンドとそのまわりを変動する系列に分解するモデルを考える。

$$y_n = T_n + \sigma_n \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \sim N(0,1) \quad (4)$$

ただし、 $T_n$  は時刻  $n$  におけるトレンド成分、 $\varepsilon_n$  は平均0、分散1の正規白色ノイズで、 $\sigma_n$  は時間とともに変動するものとする。このモデルでは、時系列  $y_n$  の分散変動は  $\sigma_n$  の時間変化によって説明される。したがって、本稿では  $\sigma_n$  を一種のボラティリティとみなし、 $\sigma_n^2$  を時変分散と呼ぶことにする。

季節調整 (Kitagawa and Gersch [1984]) の場合と同様、トレンド成分  $T_n$  は次数  $k$  の確率的階差モデル

$$\Delta^k T_n = e_{1n}, \quad e_{1n} \sim N(0, \tau_1^2) \quad (5)$$

に従うと仮定する。また、時変分散  $\sigma_n^2$  も同様に  $\log \sigma_n^2$  に関する  $\ell$  階の確率階差モデル

$$\Delta^\ell \log \sigma_n^2 = e_{2n}, \quad e_{2n} \sim N(0, \tau_2^2) \quad (6)$$

に従うものと仮定する。ただし、 $e_{1n}$  と  $e_{2n}$  はそれぞれ分散  $\tau_1^2$  および  $\tau_2^2$  の正規白色ノイズである。次数  $k$  および分散  $\tau_1^2$  はトレンドの滑らかさを、また  $\ell$  および  $\tau_2^2$  は分散の変化の滑らかさを制御するパラメータである。トレンド成分と時変分散のモデルの次数  $k$  と  $\ell$  としては通常 1 または 2 が用いられる。

### 2.2 トレンド + AR + 確率的ボラティリティ型のモデル

一般に経済時系列はさまざまな周波数成分から構成されている。したがって、このような時系列を長周期成分を中心とするトレンドと、すべての周波数成分を同じ割合で含む白色ノイズだけの和で表現するモデルでは不十分なことが多い。そこで、(4) 式のモデルをさらに拡張して、トレンド、定常変動成分および白色ノイズから構成される以下のようなモデルを考えることにする。

$$y_n = T_n + p_n + \sigma_n \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \sim N(0,1) \quad (7)$$

ただし、 $T_n$ 、 $\sigma_n$  および  $\varepsilon_n$  は (4) の場合と同様のモデル、 $p_n$  は定常時系列成分でAR



と表現できる。ただし、 $v_n$  は

$$v_n = (e_{1n}, e_{2n}, e_{3n})^T \quad (12)$$

によって定義される 3 次元白色ノイズで、その分散共分散行列は  $Q = \text{diag} \{ \tau_1^2, \tau_2^2, \tau_3^2 \}$  である。

一方、(9) 式より  $T_n$ 、 $p_n$  および  $\log \sigma_n^2$  は状態ベクトル  $x_n$  の成分の一部を構成するので、モデル(6)から時系列  $y_n$  は、適当な非線形関数  $f$  を用いて

$$y_n = T_n + p_n + \sigma_n \varepsilon_n = f(x_n, \varepsilon_n) \quad (13)$$

の形で表現でき、非線形の観測モデルが得られる。

上記の(11)式と(13)式により、 $x_n$  を状態ベクトルとする状態空間モデルが得られる。(11)式がシステムモデル、(13)式が観測モデルとなる。また  $v_n$  がシステムノイズ、 $\varepsilon_n$  が観測ノイズである。 $\sigma_n$  は状態ベクトル  $x_n$  の一成分である  $\log \sigma_n^2$  の非線形変換によって得られ、さらに  $\sigma_n$  と観測ノイズ  $\varepsilon_n$  の積が観測値  $y_n$  に含まれているので、この状態空間モデルは非線形状態空間モデルの一例となる。

## 4. モデルの推定と各成分への分解

### 4.1 状態の推定

一般に、時刻  $j$  までの観測値  $Y_j = \{y_1, \dots, y_j\}$  が得られたとき、時刻  $n$  の状態  $x_n$  を推定することを状態推定の問題という。とくに、 $j < n$ 、 $j = n-1$ 、 $j = n$  および  $j > n$  のとき状態推定の問題を予測、一期先予測、フィルタ、平滑化と呼んで区別する。

状態空間モデルの方法では、観測値  $Y_j$  から状態  $x_n$  が推定されると(9)式の定義から直ちにトレンド成分  $T_n$ 、定常変動成分  $p_n$  および時変分散  $\sigma_n^2$  あるいは“ボラティリティ”  $\sigma_n$  の推定値が得られる。すなわち、状態ベクトル  $x_n$  の第1成分  $x_n(1)$ 、第  $k+1$  成分  $x_n(k+1)$  および第  $k+m+1$  成分  $x_n(k+m+1)$  がそれぞれトレンド、定常変動成分および時変分散の対数値となる。すなわち状態推定により、時系列の分解とボラティリティの推定が同時に実現されることになる。

ただし、状態空間モデルが線形・ガウス型の場合にはカルマンフィルタ(片山 [1983]、尾崎・北川 [1998])により簡単に状態推定が実現できるが、(13)式のような非線形モデルの場合には非線形フィルタの利用が必要となる。

## 4.2 モンテカルロ・フィルタによる各成分の推定

第3節で示したように、トレンドを考慮した確率的ボラティリティ・モデルを考  
える場合には、非線形・非ガウス型の状態空間モデルを用いる必要がある。状態ベ  
クトルが3次元以下程度の場合には、数値積分を利用する非ガウス型フィルタを用  
いれば一般の状態空間のモデルに対しても正確に計算を行うことができる  
(Kitagawa [1987]、北川・佐藤・永原 [1999])。しかし、より高次元の状態ベクト  
ルをもつ非線形の状態空間モデルに対しては数値計算の直接的適用は非現実的であ  
る。モンテカルロ・フィルタはこのような状況を想定して開発されたものである  
(Kitagawa [1996]、北川 [1996])。

モンテカルロ・フィルタでは状態の一期先予測分布  $p(x_n|Y_{n-1})$ 、フィルタ分布  
 $p(x_n|Y_n)$  およびシステムノイズの分布  $p(v_n)$  を多数の“粒子”で近似する。これらの  
“粒子”は実際には  $x_n$  や  $v_n$  の次元に対応する高次元空間上の点である。 $p(v_n)$  に関し  
ては、その密度関数がモデルの仮定より決まっているので、 $p(v_n)$  に従う乱数を  $m$   
個、 $V_n^{(1)}, \dots, V_n^{(m)}$ 、発生させる。このとき、 $V_n^{(1)}, \dots, V_n^{(m)}$  で定まる経験分布関数

$$P_n(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I(x; V_n^{(j)}) \quad (14)$$

は真の分布関数

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt \quad (15)$$

の近似とみなせる。ただし、 $I(x; a)$  は

$$I(x; a) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases} \quad (16)$$

をみたす定義関数である。

一方、予測分布  $p(x_n|Y_{n-1})$  を近似する粒子  $P_n^{(j)}$  およびフィルタ分布  $p(x_n|Y_n)$  を近  
似する粒子  $F_n^{(j)}$  の生成は  $V_n$  のようには簡単ではない。しかしながら、以下の手続  
きによって計算を行うと、これらの分布に従って独立に得られたとみなせる粒子を  
必要な個数だけ生成することができる (Kitagawa [1996])。

1. 初期分布の近似： $F_0^{(j)} \sim p(x_0|Y_0)$  を生成する。
2. システムノイズの近似： $V_n^{(j)} \sim p(v)$  を生成する。
3. 予測分布の近似： $P_n^{(j)} = f(F_{n-1}^{(j)}, V_n^{(j)})$  を計算する。
4. ベイズ係数の計算： $\alpha_n^{(j)} = p(y_n|x_n = P_n^{(j)})$  を計算する。
5. リサンプリングによるフィルタ分布の近似： $\{P_n^{(j)}\}$  から  $\{F_n^{(j)}\}$  を生成する。

ステップ1では、乱数を用いて与えられた初期分布  $p(x_0|Y_0)$  に従う  $m$  個の粒子を生成する。ステップ2 - 5はデータの個数に従って  $N$  回繰り返す。ステップ2では乱数を用いてシステムノイズに従う粒子を生成し、ステップ3ではその粒子と1サイクル前のステップ5 ( $n=1$ の場合はステップ1) で求めた粒子を右辺に代入して、 $P_n^{(j)}$  を求める。ステップ4では3で求めた各粒子のベイズ係数を求める。このベイズ係数はそれぞれの粒子の重要さを表していると解釈できる。ステップ5では、このベイズ係数を確率として復元抽出を行い粒子を  $m$  個発生させる。この粒子はフィルタの分布から独立に発生させたとみなすことができる。実際の状態推定においては、このモンテカルロ・フィルタの方法は平滑化にも拡張でき、さらに精度のよい推定値、 $S_n^{(j)}$ 、が得られる (Kitagawa [1996])。

前節で述べたように状態の推定結果を用いてトレンドや確率的ボラティリティなどを求めることができる。上記のアルゴリズムで得られる粒子、 $P_n^{(j)}$ 、 $F_n^{(j)}$  および  $S_n^{(j)}$  は  $k+m+\ell$  次元のベクトルであり、その第1番目、第  $k+1$  番目、第  $k+m+1$  番目の成分はそれぞれ、 $T_{n|L}^{(j)}$ 、 $P_{n|L}^{(j)}$ 、 $\log \sigma_{n|L}^{2(j)}$  となる。

このとき、 $m$  個の1次元粒子  $\{T_{n|L}^{(1)}, \dots, T_{n|L}^{(m)}\}$ 、 $\{P_{n|L}^{(1)}, \dots, P_{n|L}^{(m)}\}$  および  $\{\log \sigma_{n|L}^{2(1)}, \dots, \log \sigma_{n|L}^{2(m)}\}$  はそれぞれ、トレンド、定常変動成分およびボラティリティの対数値となる。ただし、例えば  $T_{n|L}^{(j)}$  は  $j$  番目の粒子の第1成分を表し、 $L=n-1$ 、 $n$  および  $N$  に対応して、それぞれ一期先予測、フィルタおよび平滑値を表すものとする。

このとき、

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I(x; T_{n|L}^{(j)}), \quad \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I(x; P_{n|L}^{(j)}), \quad \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I(x; \sigma_{n|L}^{(j)}) \quad (17)$$

はそれぞれの成分の周辺分布関数の近似値となる。とくに、その平均値は

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m T_{n|L}^{(j)}, \quad \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m P_{n|L}^{(j)}, \quad \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sigma_{n|L}^{(j)} \quad (18)$$

で与えられる。

### 4.3 パラメータの推定

状態空間モデルの状態  $x_n$  の一期先予測分布  $p(x_n|Y_{n-1})$  が得られると、観測値  $y_n$  の一期先予測分布は

$$p(y_n|Y_{n-1}) = \int p(y_n|x_n)p(x_n|Y_{n-1})dx_n \quad (19)$$

で与えられる。モンテカルロ・フィルタでは一期先予測分布  $p(x_n|Y_{n-1})$  を  $m$  個の粒子  $P_n^{(1)}, \dots, P_n^{(m)}$  で近似しているため、(14)式より

$$\begin{aligned}
p(y_n|Y_{n-1}) &\approx \int p(y_n|x_n) \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I(x_n; P_n^{(j)}) dx_n \\
&= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m p(P_n^{(j)}|Y_{n-1})
\end{aligned} \tag{20}$$

と近似される。一方、一般に  $N$  個の観測値  $Y_N = \{y_1, \dots, y_N\}$  が与えられると時系列モデルの尤度は

$$L(\theta) = p(Y_N) = p(Y_{N-1})p(y_N|Y_{N-1}) = \dots = \prod_{n=1}^N p(y_n|Y_{n-1}) \tag{21}$$

と表現できる。したがって、確率的ボラティリティ・モデルの対数尤度は一期先予測分布  $p(y_n|Y_{n-1})$  を用いて

$$\ell(\theta) = \sum_{n=1}^N \log p(y_n|Y_{n-1}) \approx \frac{1}{m} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^m \log p(y_n|P_n^{(j)}) \tag{22}$$

と計算できる。

擬ニュートン法 (DFP公式やBFGS公式) などの数値的最適化のアルゴリズムを使えば、この対数尤度関数をパラメータ  $\theta$  に関して最大化することにより最尤推定値  $\hat{\theta}$  を求めることができる (北川 [1993])。実際には、(22) のようにモンテカルロ・フィルタによる計算ではモンテカルロ近似にもとづく誤差が混入するので、厳密に最尤推定値を求めることは困難である。ただし、成分モデルの分散パラメータ  $\tau_1^2, \tau_2^2, \tau_3^2$  に対する対数尤度の感度はあまり高くないので、格子点上の探索を行う等の方法により実用上十分な精度で対数尤度の最大化を行うことができることが多い。

また、上記の問題を解決するために自己組織型のモデリングの方法も開発されている (Kitagawa [1998])。この方法では、本来の状態ベクトルに未知のパラメータを付加して拡大された状態ベクトル

$$z_n = \begin{bmatrix} x_n \\ \theta \end{bmatrix} \tag{23}$$

を考える。このとき、この拡大した状態ベクトルを用いた時系列の状態空間モデルが簡単に導出できる。このモデルに対してモンテカルロ・フィルタを適用することによって状態の推定を行えるが、状態には本来の状態ベクトルと未知パラメータが含まれるので、状態推定とパラメータ推定が同時に行えることになる。

## 5. 解析例

### 5.1 日経225データ

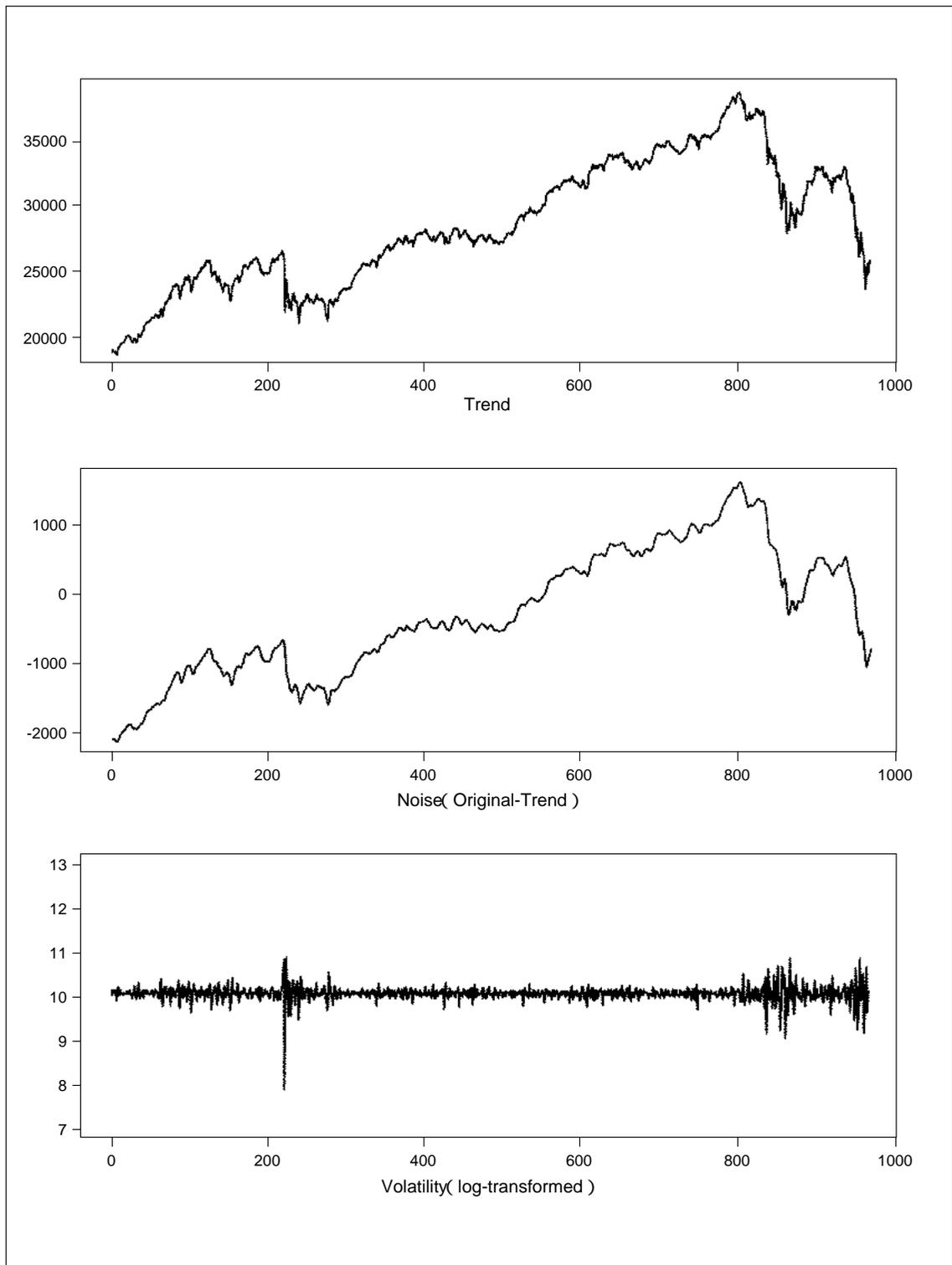
図1は日経225データ(1987年1月 - 1990年8月31日)に対して通常の季節調整ソフトを用いてトレンドとノイズに分解した結果を示す。ただし、推定には季節調整プログラムDECOMPにおいて2次のトレンドモデル

$$\begin{aligned} y_n &= t_n + w_n \\ t_n &= 2t_{n-1} - t_{n-2} + v_n \end{aligned} \quad (24)$$

を用い、ノイズ項 $w_n$ と $v_n$ はそれぞれ一定の分散 $\sigma^2$ および $\tau^2$ の正規白色ノイズと仮定している。これらの分散の最尤推定値は、 $\hat{\sigma}^2 = 4.70 \times 10^4$ 、 $\hat{\tau}^2 = 1.93 \times 10^4$ でAICの値は14,190であった。

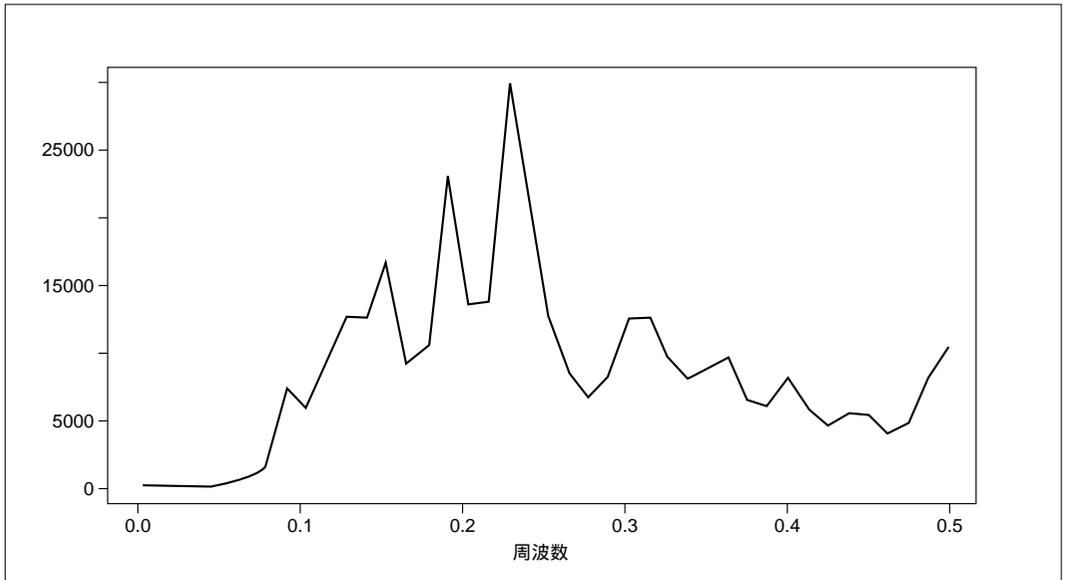
図1の(a)-(c)はそれぞれ、原系列 $y_n$ 、トレンド成分 $t_n$ およびノイズ項 $w_n$ を示す。ブラックマンデーとバブル崩壊後の株価急落時にノイズの変動幅が平常時と比較して数倍増加し、ボラティリティが著しく増大していることを示している。

図1 トレンドモデル



また、図2は、情報量規準AICを最小とする次数30のARモデルにより得られたノイズ系列  $w_n$  のパワースペクトルを示す。 $f=0.23$ 付近（周期3.5日程度）に顕著なピークが見られ、(24)のモデルは分散一定という点だけでなく、白色性の仮定にも問題があることが明らかとなる。

図2 パワースペクトル

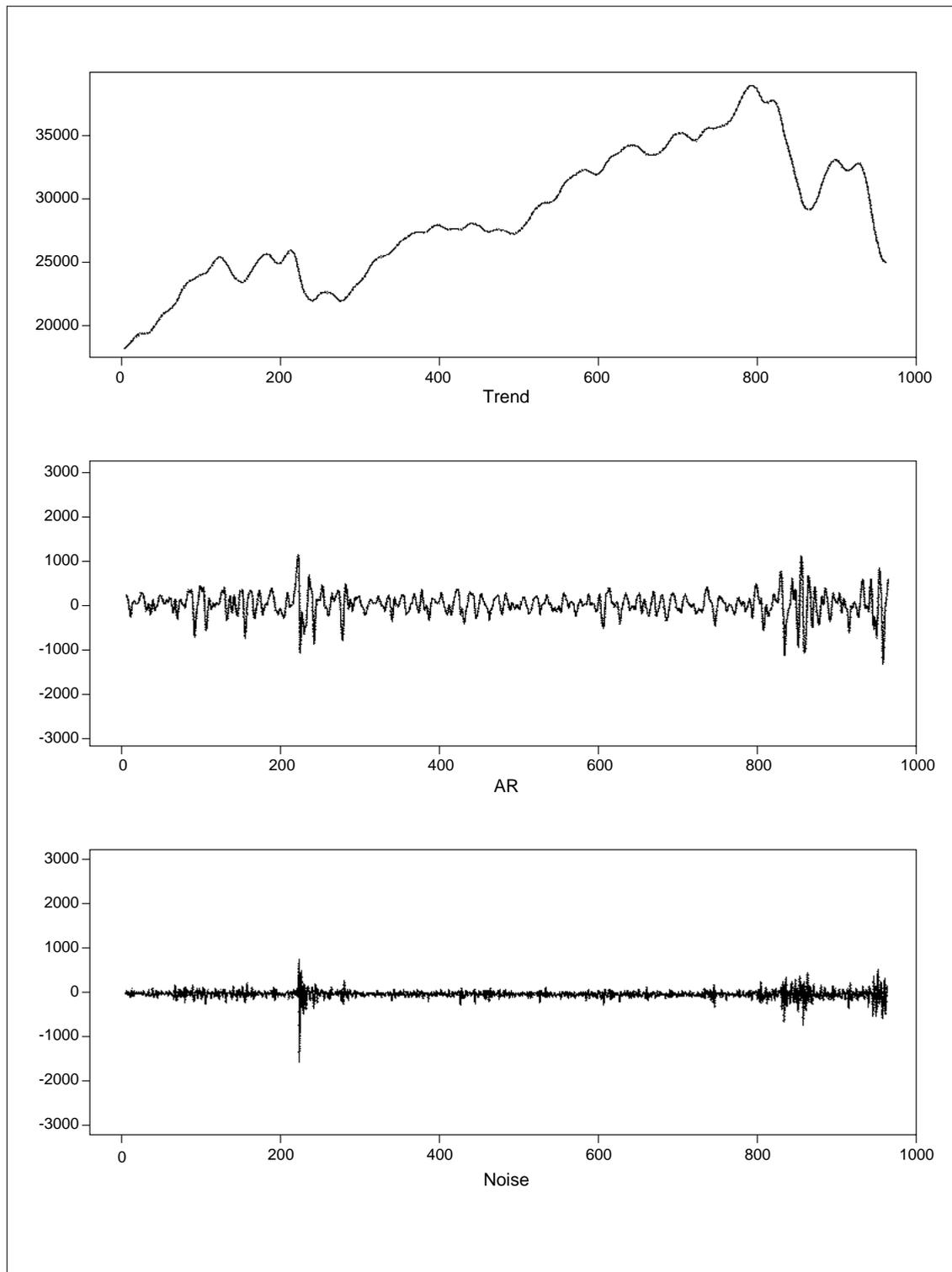


そこで、まずDECOMPにおいて $M_2=2$ として、定常AR成分を含むモデル

$$y_n = t_n + p_n + w_n \quad (25)$$

による分解を行った結果を図3に示す。ただし、ここでも各成分の分散は一定と仮定している。表1に示すように、このモデルのAICは13,882となり、(24)の場合と比較して308減少しており、モデルの当てはまりが著しく改善されたことを示している。実際、原データに含まれる循環的な変動は定常AR成分  $p_n$  として分離されている。この結果、トレンドの推定値は図1の場合と比較してかなり滑らかで変動が少ないものとなり、ノイズ項  $w_n$  は白色的な変動になっている。ただし、このモデルによる分解でもボラティリティの変動に対応して  $p_n$  および  $w_n$  の振幅はいずれも時間とともに大きく変化している。

図3 トレンドモデル (AR成分を含む)



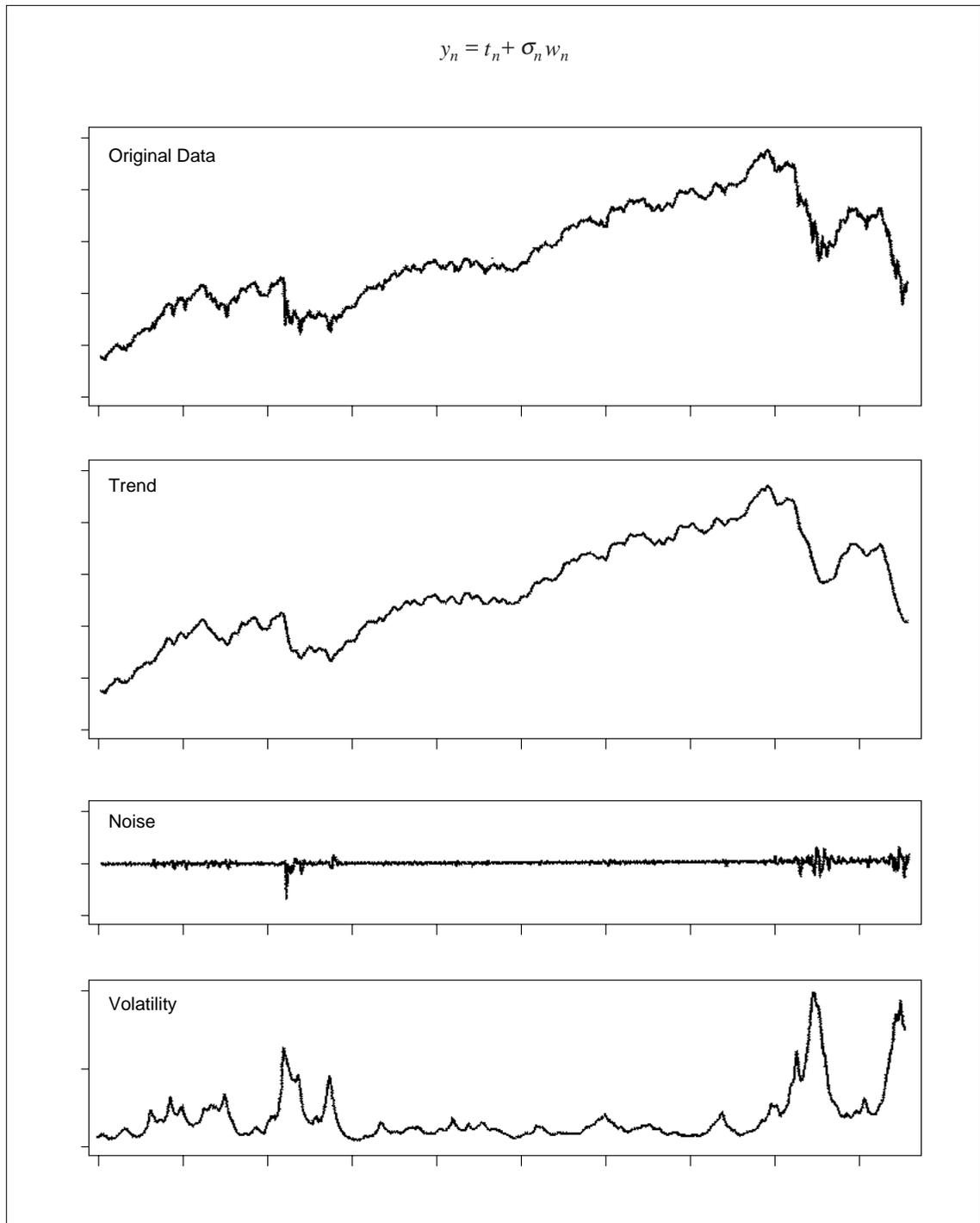
そこで次に、第3節で取り上げた分散変動を考慮したモデルの推定を行った。(4)式のトレンド+分散変動のモデルにおいて $k = \ell = 2$ とした場合には、パラメータの近似的最尤推定値は $\hat{\sigma}_1^2 = 9,000$ 、 $\hat{\sigma}_2^2 = 0.0026$ でAIC=13,580となった。分散変動を考慮しない通常のトレンドモデルのAIC=14,190と比較すると610も減少しており、著しくモデルが改善されている。

図4はこのモデルによって推定されたトレンドとノイズの各成分と、同時に推定された“ボラティリティ” $\sigma_n$ を示す。ブラックマンデー後およびバブル崩壊後のボラティリティの増加が明確に捉えられている。本例からわかるように、本稿で導入した確率的ボラティリティ・モデルは、このように最も簡単な場合でも、変動するボラティリティを自動的に捉えることができる。

表1 さまざまな確率的ボラティリティ・モデルとAIC

モデル	AIC
Constant Variance Model	
Trend + Noise	14,190
Trend + AR +Noise	13,882
Stochastic Volatility Model	
Trend +Noise	
Gauss分布	13,580
Cauchy分布	13,648
(30)式のモデル+混合分布	13,553
Trend + AR +Noise	
混合分布	13,412
(36)式のモデル	13,352
(37)式のモデル	13,339

図4 トレンド+時変分散ノイズ ( Nikkei 225 Stock Price Data )



## 6. トレンドモデルの拡張

本節では図4で推定されたトレンドに見られる傾きの急激な変化や、レベルシフトに対応するためにトレンドモデルの一般化とシステムノイズの非ガウス化を行う。

### 6.1 レベルシフトのモデル化

まず、2階のトレンドモデル

$$T_n = 2T_{n-1} - T_{n-2} + e_{n1} \quad (26)$$

において $T_n$ の一階階差を $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$ と定義すると

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + (T_{n-1} - T_{n-2}) + e_{n1} = T_{n-1} + \Delta T_{n-1} + e_{n1} \\ \Delta T_n &= T_n - T_{n-1} = (T_{n-1} + \Delta T_{n-1} + e_{n1}) - T_{n-1} = \Delta T_{n-1} + e_{n1} \end{aligned} \quad (27)$$

となる。したがって、(26)のトレンドモデルは

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + \Delta T_{n-1} + e_{n1} \\ \Delta T_n &= \Delta T_{n-1} + e_{n1} \end{aligned} \quad (28)$$

と同等である (Harvey [1989])。このモデルに対応する状態空間モデルは

$$x_n = \begin{bmatrix} T_n \\ \Delta T_n \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

で与えられる。通常のトレンドモデルでは、トレンドの変化は傾きの変化だけによって引き起こされ、レベルの変化と傾きの変化が同じという仮定がおかれていることになる。

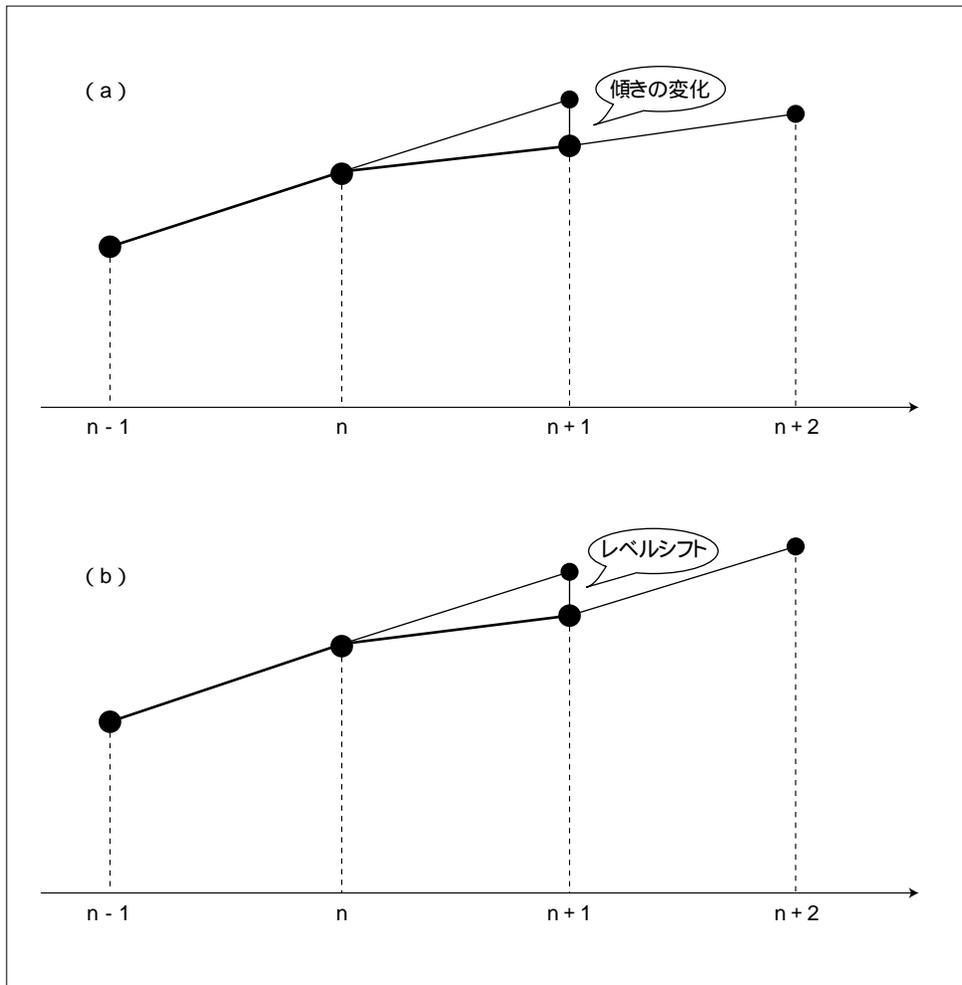
そこで、新たにノイズ項 $e_{n2}$ を導入し、

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + \delta T_{n-1} + e_{n1} + e_{n2} \\ \delta T_n &= \delta T_{n-1} + e_{n1} \end{aligned} \quad (30)$$

という拡張したモデルを考えることにする。ただし、 $e_{n1}$ はトレンドの傾斜の変化、 $e_{n2}$ はレベルシフトだけに相当するノイズとなる。ここで、 $\delta T_n$ は時刻 $n$ における $T_n$ の傾きを表すものとするが、 $\Delta T_n$ と異なり $T_n$ の差分と厳密に対応するわけではな

い。このモデルによって、トレンドの傾きの変化を伴わないレベルシフトと傾きの変化を区別し、自由に表現できるようになる（図5）。

図5 トレンドモデルにおける (a) 傾きの変化と (b) レベルシフト



## 6.2 非ガウス型分布による傾きの急激な変化とレベルシフトのモデル化

(29)式のような拡張によって、トレンドの傾きとレベルがそれぞれ別個に変化するモデルが得られる。しかしながら、このモデルでもブラックマンデー後のような急激な変化は想定していないので、この拡張したモデルでも十分には対応できない。これは、システムノイズ  $e_{n1}$  および  $e_{n2}$  の両方に正規分布（ガウス分布）を使うモデルでは、その分散（ $\tau_1^2$  や  $\tau_2^2$ ）によってノイズの出現の割合が完全に規定され、まれに起こる暴落などの現象を十分表現できないからである。そこで、本小節ではシステムノイズの分布に非ガウス型の分布を導入する。異常値を含むデータを表現するためには、以下の密度関数をもつコーシー分布がよく利用される。

$$p(v|\tau^2) = \frac{\tau}{\pi} \frac{1}{v^2 + \tau^2} \quad (31)$$

コーシー分布は正規分布と比較して、原点付近に密度が集中する反面、裾が厚く  $v$  の絶対値が大きくなる時の 0 への収束が遅いという性質をもつ。したがって、この分布は、ほとんどの場合は 0 に近い値をとるが、ごく低い確率では絶対値が大きなノイズが出現することを表現できる（北川 [1995]、Kitagawa and Matsumoto [1996]）。本稿の金融データの場合に照らして考えれば、これはごく低い確率で暴落か暴騰がありうることをモデルの中に取り込むことができることを示している。

さらに一般的な分布としては以下の Pearson VII 型の分布族がある。

$$p(v|\tau^2, b) = \frac{\tau^{2b-1} \Gamma(b)}{\Gamma(b-1/2) \Gamma(1/2)} \frac{1}{(v^2 + \tau^2)^b} \quad (32)$$

この分布では  $b$  の値を適当に設定することによって分布の形を調整することができる（Kitagawa [1987]、北川 [1993]）。

また、以下のような混合分布を用いると、マイナス側（暴落）とプラス側（暴騰）とで異なる確率をもつような分布を考えることもできる。

$$p(v) = (1 - \alpha)\phi_1(v) + \alpha\phi_2(v) \quad (33)$$

ここで、 $\alpha$  は異常な事態が発生する確率、 $\phi_1$  は正常時の分布、 $\phi_2$  は異常時の分布である。 $\phi_1$  としては適当な（未知の）分散をもつ正規分布を考えることが多い。一方、 $\phi_2$  としては分散の大きな正規分布や平均が 0 でない正規分布などを用いることもある。ただし、暴騰や暴落時には一定範囲であればどのような値も取りうるとして一様分布を使うことも考えられる。本稿の以下の分析では、レベルシフトの急

激な変化に対応するノイズとしてはマイナス側だけを考え、原点より左側だけに密度をもつ一様分布

$$\phi_2(v) \sim U(-d, 0) \quad (34)$$

を用いることにした。もちろん、以上の分布をさらに拡張して3つ以上の分布を考えることも可能である。また、このような非対称な分布をPearson IV型の分布族を用いてモデル化しようとする試みもある (Nagahara [1996])。

### 6.3 例

表1に示すように、図4の場合と同様にトレンドと確率的ボラティリティからなるモデルにおいて、システムモデルをコーシー分布に代えた場合にはAIC=13,648となって、かえってあてはまりが悪くなった。これは、大きな変化についてはその変化の仕方が非対称であることを示唆している。一方、モデルをレベルシフトを含む(30)式に代え、さらにシステムノイズを正規分布と一様分布の混合分布とするとAIC=13,553となって、AICの値が約50減少した。

さらに(7)式のトレンド、定常変動成分およびノイズ成分からなるモデルでノイズに混合分布を用いた場合にはAIC=13,412となってさらに140以上減少し、あてはまりはさらに改善されたことを示している。図6はこのモデルによって推定されたトレンド、定常AR成分、ノイズ項およびボラティリティの推定値を示す。ボラティリティの時間変化が大きく、ブラックマンデーとバブル崩壊後には通常時の10倍余りに達していることがわかる。

一方、図7は図6のトレンドの一階階差 $\Delta T_n$ 、トレンドモデルの残差系列の平方 $w_n^2$ およびそれを適当に平滑化して得られた分散の局所的推定値を示す。この局所的分散をトレンドの階差系列と比較すると、これらの二つの系列に逆相関が見られる。図8はトレンドの階差を横軸、分散の対数を縦軸にとって、散布図を描いたものである。この図からも分散とトレンドの階差には負の相関があることが明らかである。

以上のことから、この日経225系列の解析にあたってはトレンドのまわりの変動分散が時間変化し、しかもその分散がトレンドの変化と関係があることを考慮しモデル化することによって、より良いモデルが得られる可能性があることが明らかとなる。

図6 トレンド + AR + 時変分散ノイズ ( Nikkei 225 Stock Price Data )

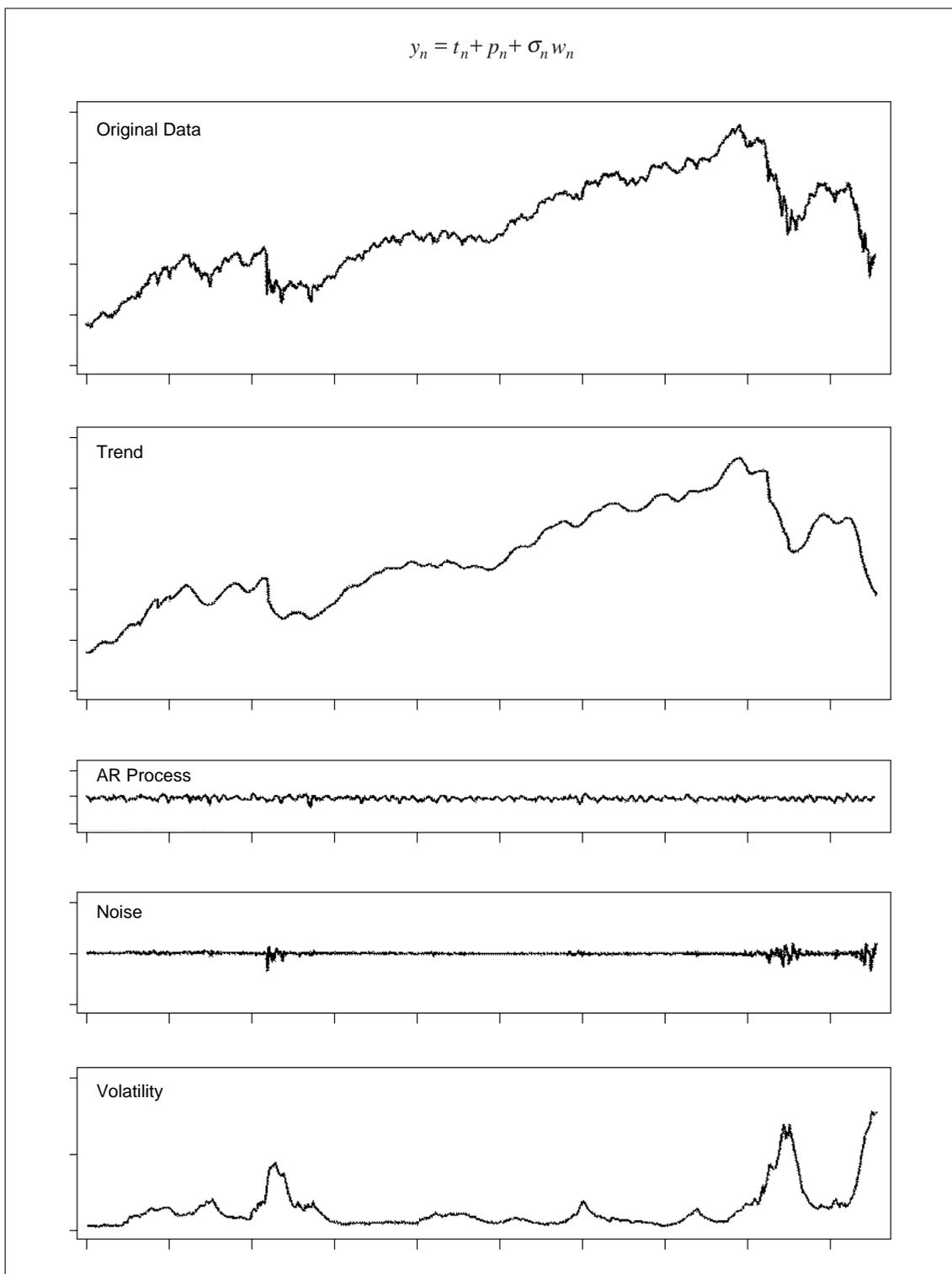


図7 Volatilityとトレンドの一階階差

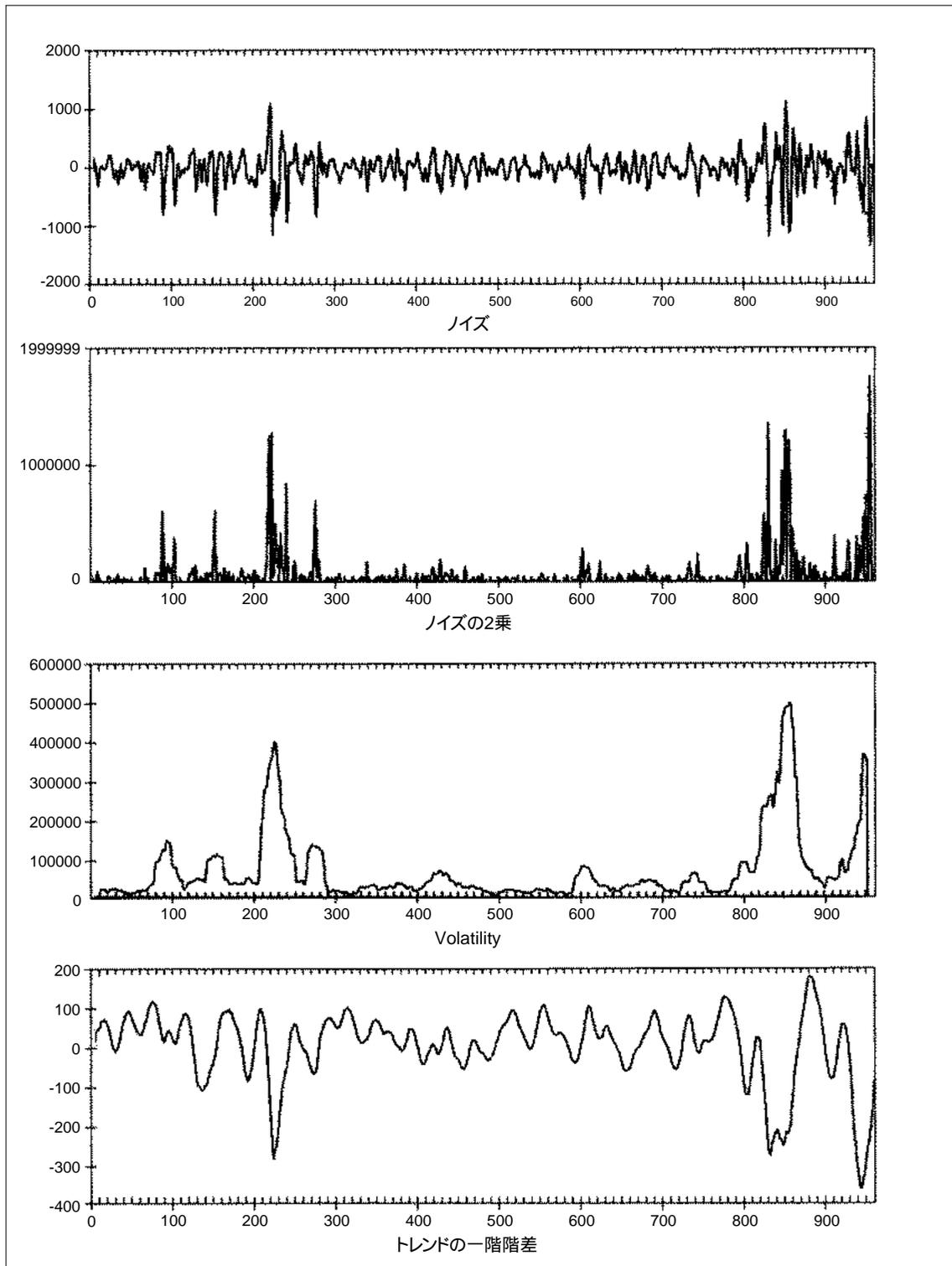
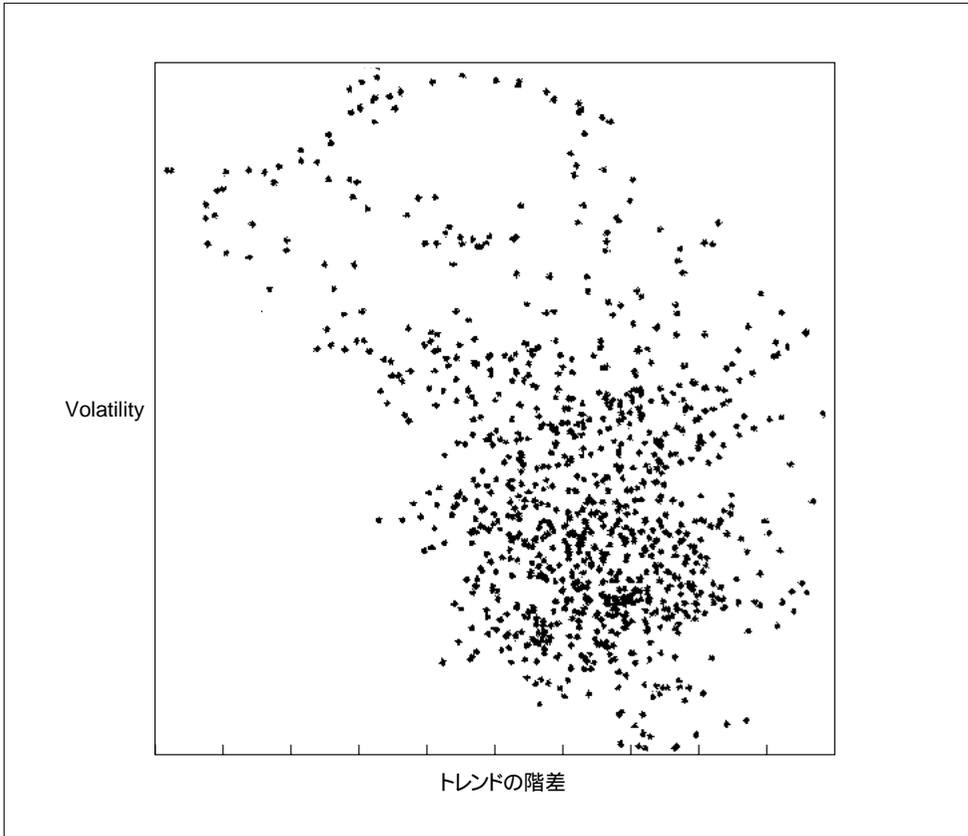


図8 トレンドとVolatilityの関係



## 7. トレンドとボラティリティ変化の関係を考慮したモデル

状態空間モデルは極めて多様なモデルを統一的に表現できるモデルであり、さまざまな拡張を容易に行うことができる。本節では、トレンド成分のレベルシフトと傾きの変化を考慮してトレンドモデルの一般化、システムノイズの非ガウス化、トレンドの変化量と分散の関係を表現するモデルの導入を行う。

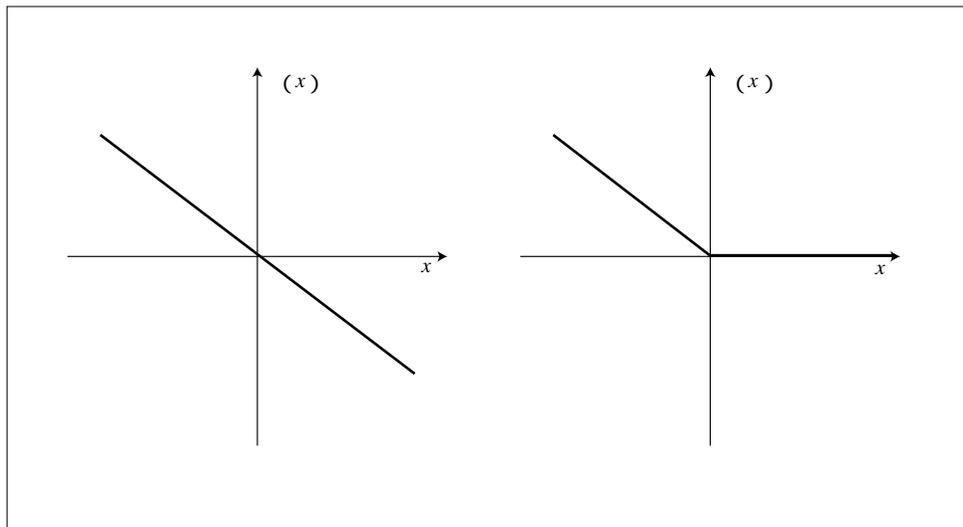
### 7.1 トレンドの変化から分散への影響

図7や図8に見られるように、トレンドの変化量が分散の変化に影響を及ぼすことを考慮すると以下のようなモデルが考えられる。

$$\log s_n^2 = \log s_{n-1}^2 + b(\Delta T_{n-1}) + u_n \quad (35)$$

ここで、 $\beta(x)$ は一般には $x$ の非線形関数である。図9(a)のように $\beta(x) = cx$ の場合には、分散の対数値の変化への影響はトレンドの変化量に比例することになる。とくに $c = 0$ の場合はトレンドと分散の変化が独立であると仮定したモデルとなる。一方、(b)のような非線形関数の場合には、トレンドが減少する場合のみ、その絶対値に比例して分散の対数が増加することになる。

図9 トrendから分散への影響関数 (a) 線形関数 (b) 非線形関数の例

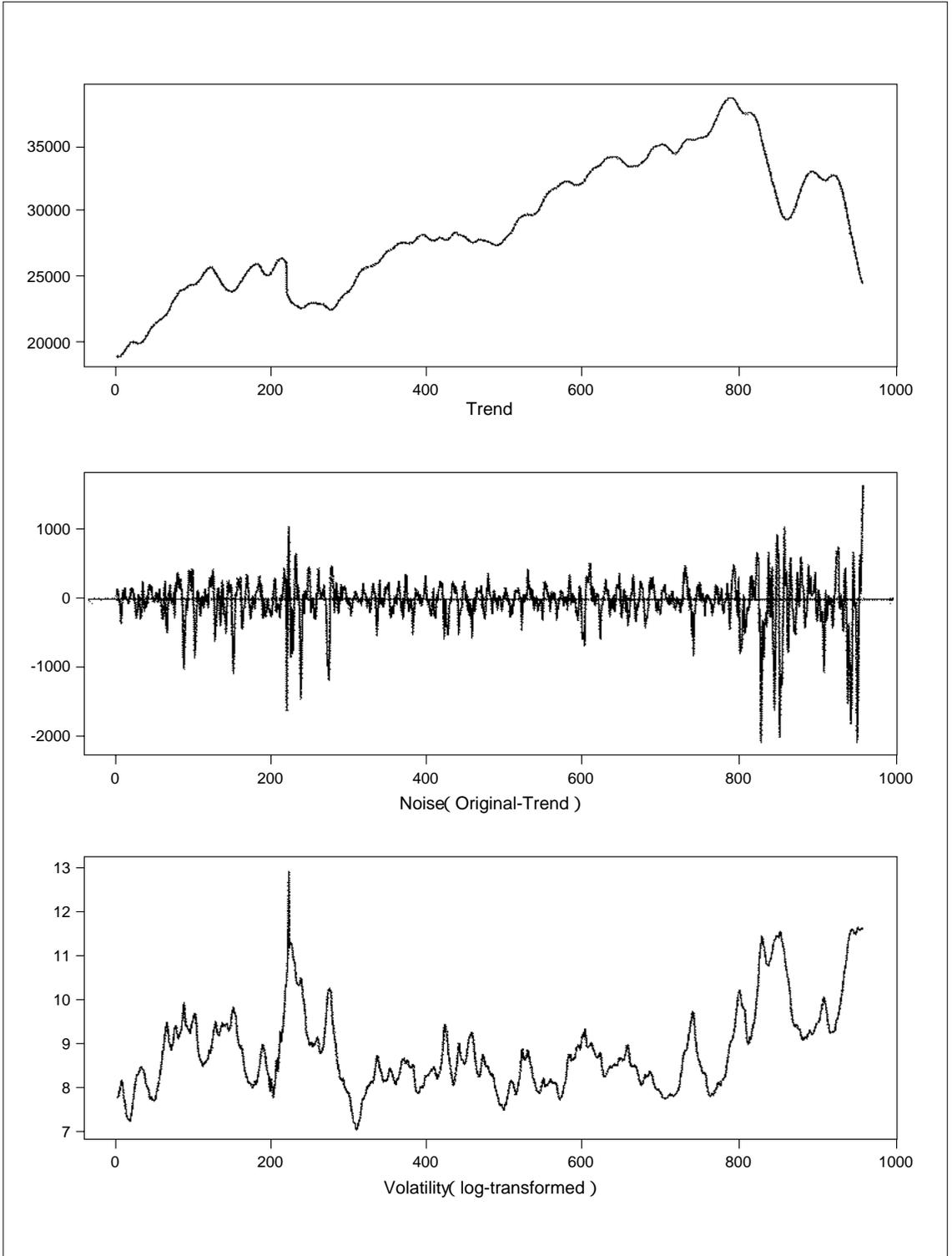


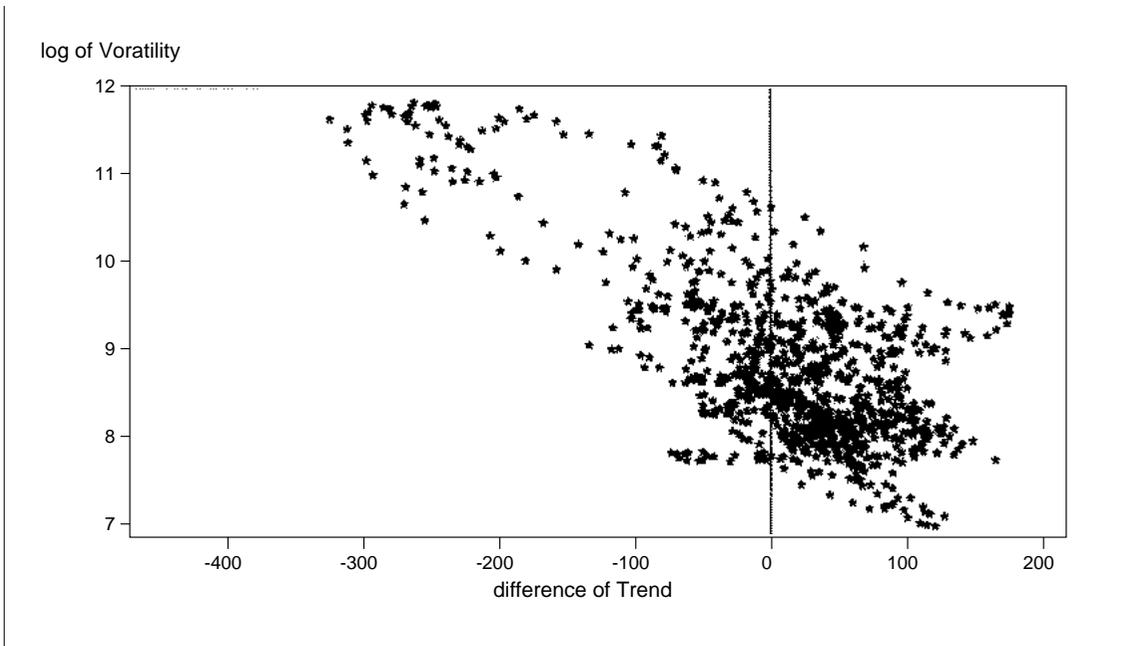
このとき、全体としては以下のようなモデルが得られる。

$$\begin{aligned}
 y_n &= T_n + p_n + \sigma_n w_n \\
 T_n &= T_{n-1} + \delta T_{n-1} + v_{sn} + v_{\ell n} \\
 \delta T_n &= \delta T_{n-1} + v_{sn} \\
 \log \sigma_n^2 &= \log \sigma_{n-1}^2 + \beta(\delta T_{n-1}) + e_{2n} \\
 p_n &= \sum_{j=1}^m a_j p_{n-j} + e_n
 \end{aligned} \tag{36}$$

日経225データに対し、このモデルのAICは13,352となり、トレンドの変化と分散の変化を独立と仮定したモデルより、さらに60減少した。図10はこのモデルによって推定した、トレンド、ノイズ成分およびボラティリティを示す。

図10 トレンドとVolatilityの相関を考慮したモデル Nikkei 225





## 7.2 分散のシステムノイズへの影響

前小節では、トレンドの変化が分散の対数の変化量の平均値に影響を及ぼすものとしてモデル化を行った。例えば、トレンドの急激な減少が分散の増加を招くような傾向が見られる場合にはこのようなモデリングが有効である。しかしながら、トレンドの変化がシステムノイズの分布形に直接影響を及ぼす以下のようなモデルを用いることによってさまざまな影響を表現できる。

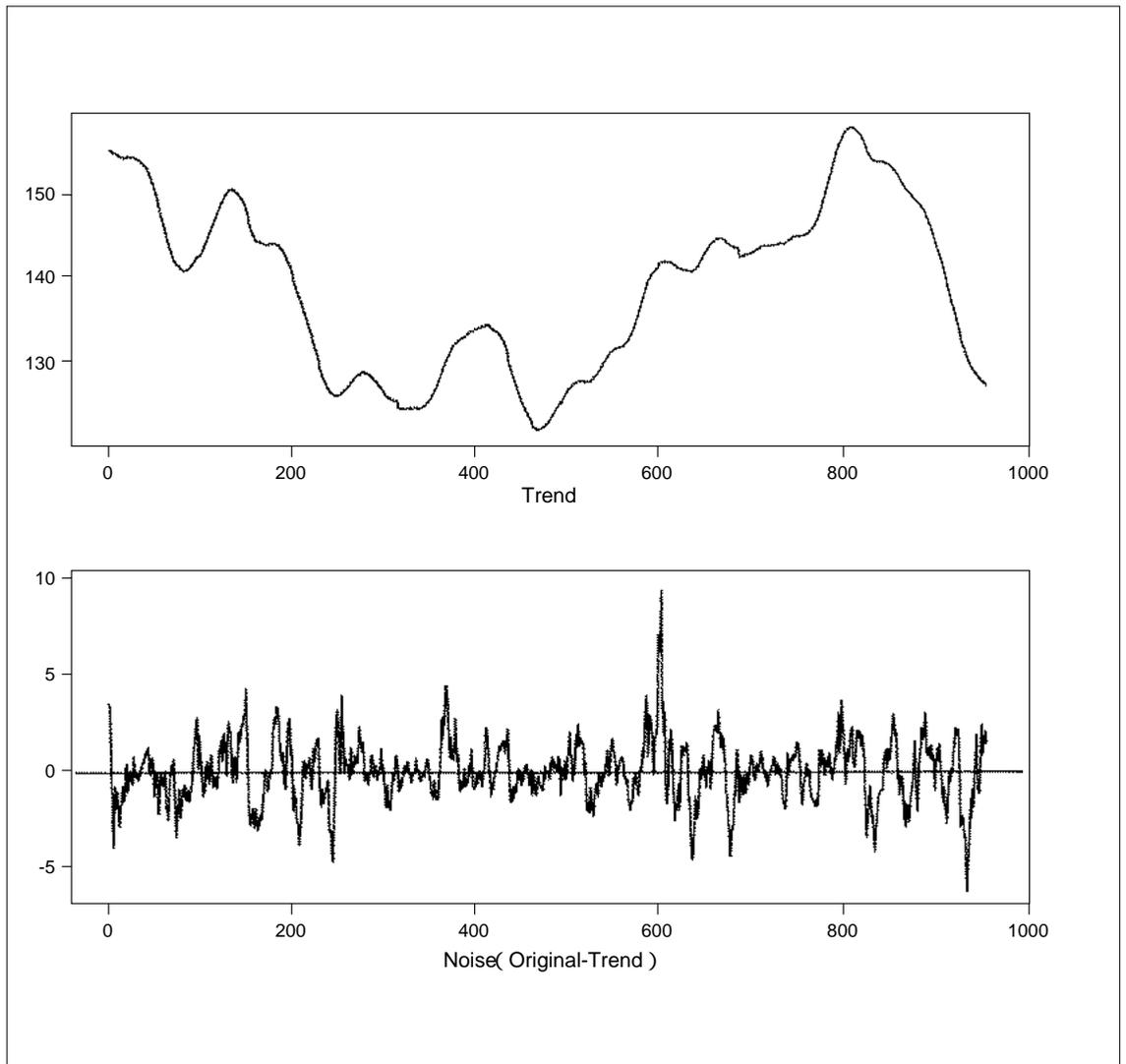
$$\begin{aligned} \log \sigma_n^2 &= \log \sigma_{n-1}^2 + u_n \\ u_n &\sim (1 - \beta(\delta T_{n-1})) \phi_0(u) + \beta(\delta T_{n-1}) \phi_1(u) \end{aligned} \quad (37)$$

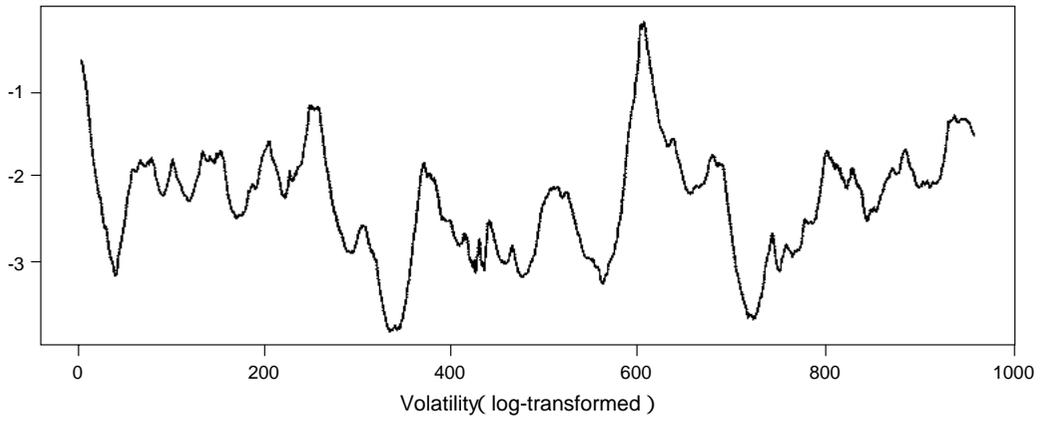
このモデルにおいては、二つの分布の混合比  $\beta(x)$  が  $\delta T_n$  の値によって変化する。したがって、 $\beta(x)$  を  $0 \leq \beta(x) \leq 1$  を満たすように定義しておく、 $\delta T_n$  に依存して  $\log \sigma_n^2$  の変化のしかたが変わるようにできる。このモデルのAICは13,339となり、前小節のモデルより少しAICの値が減少した。

## 8. 為替データの解析例

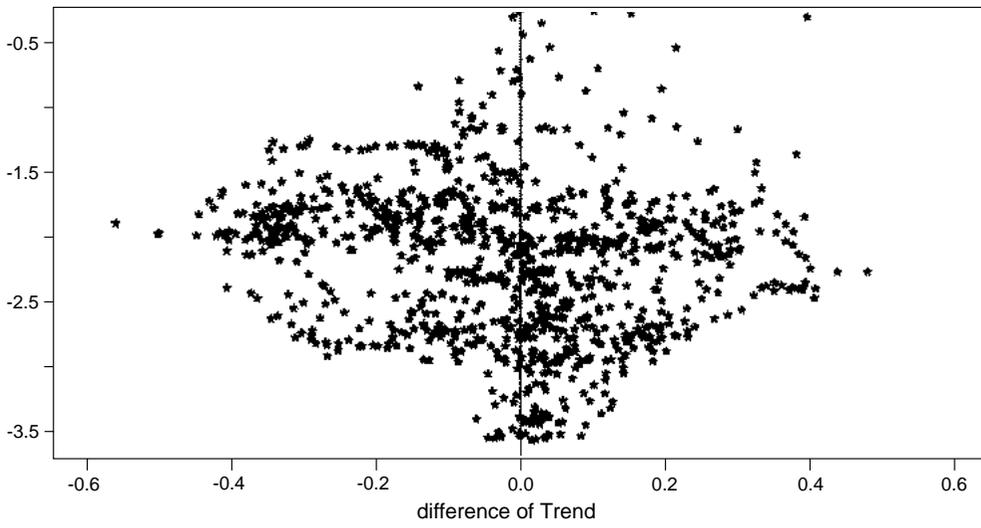
これまで、日経225データの解析を行ってきたが、同様の分析を日米為替レート（1987年1月1日 - 1991年8月31日）の系列にも適用してみた。図11にその結果の一例を示す。少なくとも今回解析を行った区間に関しては、株価と比較するとボラティリティの変化は小さいことがわかる。また、為替データについて、図8と同様にトレンドの階差とボラティリティの関係をプロットしてみた。この場合には、図8のような負の相関は見られず、このような相関関係は常に見られるものではないことを示している。

図11 トrendとVolatilityの相関を考慮したモデル Yen-Dollar





log of Voratility



## 9. まとめ

金融時系列のボラティリティは収益率のように原系列の対数階差系列の変動に関して考えていることが多い。それに対して本稿では、原系列を直接トレンドと定常変動成分と分散変動する白色ノイズに分解するモデルを提案した。このモデルは非線形状態空間モデルを用いて表現でき、その状態はモンテカルロ・フィルタおよび平滑化のアルゴリズムを用いて推定できる。このモデルの状態ベクトルにはトレンド、定常成分およびボラティリティが含まれているので、モンテカルロ平滑化によってボラティリティの推定が自動的に行われることになる。

1980年代後半の日経225データの解析結果によると、推定されたボラティリティの変化はトレンドの変化と負の相関がみられる。そこで、トレンドの変化が分散の変化に影響を与えるものとしてモデル化を行った。これらのモデルの改良によって情報量規準の値は徐々に減少し、最終的に得られたモデルは標準的なトレンドのモデルと比較して著しくよいあてはまりが得られた。

為替データについても同様の解析を行ったが、この場合にはトレンドの変化量とボラティリティにはほとんど関係は見いだせなかった。

## 参考文献

- 尾崎 統、北川源四郎編、『時系列解析の方法』、朝倉書店、1998年
- 片山 徹、『応用カルマンフィルター』、朝倉書店、1983年
- 北川源四郎、『FORTRAN 77 時系列解析プログラミング』、岩波書店、1993年
- 、『欠測値と異常値の処理』、時系列解析の実際、赤池弘次、北川源四郎編、朝倉書店、1995年、181-195頁
- 、「モンテカルロ・フィルタおよび平滑化について」、『統計数理』、特集「計算統計学の発展」、第44巻第1号、1996年、31-48頁
- 、「DECOMP」、『統計数理』、特集「季節調整法の新展開」、第46巻第2号、1998年、217-232頁
- 、佐藤整尚、永原裕一、「非ガウス型状態空間表現による確率的ボラティリティモデルの推定」、『金融研究』第18巻第1号、日本銀行金融研究所、1999年、45-64頁
- Akaike, H. et al., "TIMSAC-78," *Computer Science Monographs*, No. 11, The Institute of Statistical Mathematics, 1985.
- Harvey, A. C., *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, 1989.
- and Shephard, N., "Estimation of an Asymmetric Stochastic Volatility Model of Asset Returns," *Journal of Business & Economic Statistics*, 14 (4), 1996, pp.429-434.
- Jacquier, E., Polson, N and Rossi, P. E., "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models," (with discussion), *Journal of Business & Economic Statistics*, 12 (4), 1994, pp.371-417.
- Kitagawa, G., "Non-Gaussian State-Space Modeling of Nonstationary Time Series," (with discussion), *Journal of the American Statistical Mathematics*, 82 (400), 1987, pp.1032-1063.
- 、「Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models," *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5 (1), 1996, pp.1-25.
- 、「Self-organizing State Space Model," *Journal of the American Statistical Association*, 93 (444), 1998, pp.1203-1215.
- and Gersch, W., "A Smoothness Priors-State Space Modeling of Time Series With Trend and Seasonality," *Journal of the American Statistical Association*, 79(386), 1984, pp.378-389.
- and Matsumoto, N., "Detection of Coseismic Effect From Underground Water Level," *Journal of the American Statistical Association*, 91 (434), 1996, pp.521-528.
- Nagahara, Y., "Non-Gaussian Distribution for Stock Returns and Related Stochastic Differential Equation," *Financial Engineering and the Japanese Market*, 3 (2), 1996, pp.121-149.
- and Kitagawa, G., "Non-Gaussian Stochastic Volatility Model," *Journal of Computational Finance*, 2 (2), 1999, pp.33-47 .