

貨幣の最適な発行単位の選択について

きたむらゆきのぶ
北村行伸

要 旨

本稿では、表面的には市場のない形で並行的に流通している多種類の紙幣および铸貨が、実は広い意味では市場調整を受けているという点を説明し、それを手掛かりに、最適な貨幣発行単位の選択について検討する。

もし、貨幣が一般の財であれば、その使用価値の違いは、市場の需給を通して価格・数量ともに調整されると考えられるが、法定貨幣の価格はその貨幣単位そのものであり、市場メカニズムによって価格が調整される余地はない。したがって、それぞれの使用価値あるいは貨幣需要に違いがあれば、それはもっぱら数量で調整されることになる。

ところで、わが国で発行されている貨幣単位は実際の取引に対して最適なものであろうか。そもそも最適な貨幣単位の分布を求めることはできるものであろうか。また、もしそのような最適性が計算できるとして、現実に流通している貨幣単位はその最適性の基準からどれくらい乖離しているのだろうか。

本稿では、最適な貨幣単位とは、発行されている貨幣の使用価値が相対的に等しくなり、相対的な需要が無差別になるように定められている貨幣単位であるとしたうえで、わが国の実際の貨幣単位の設定が、貨幣流通量にどのような影響を与えているかを検討した。その結果、5000円札が貨幣流通量を大幅に歪めていることがわかった。

キーワード：貨幣、貨幣発行単位、Bâchet問題

.....
本稿は、1996年（平成8年）6月に日本銀行金融研究所の内部資料として発表され、1996年度理論・計量経済学会（9月、大阪大学）において報告したものに、加筆修正し、1997年日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー（97-J-3）として対外公表されたものである。本稿の作成に当たっては、翁 邦雄氏（当時金融研究所研究第一課長、現金融研究所長）と岡部光明教授（慶應義塾大学）から有益なコメントを頂いた。

北村行伸 一橋大学経済研究所（e-mail: kitamura@ier.hit-u.ac.jp）

1. はじめに

昨今、電子マネーなど貨幣にかかわる技術革新問題が話題に上ることが少なくない。将来、電子マネーが使われるようになると、紙幣や铸貨が利用されなくなるという議論すら見受けられることがある。しかし同時に、貨幣が電子マネーと共存する時代には、貨幣の利便性の小さな歪みが、貨幣流通量を大きく変化させる可能性も否定できない。

本稿では、表面的には市場のない形で並行的に流通している多種類の紙幣および铸貨が、実は広い意味では市場調整を受けているという点を説明し、それを手掛かりに、最適な貨幣発行単位の選択について検討する。

教科書的には、貨幣は、価値保蔵機能、交換機能（あるいは決済機能）、価値尺度機能を持つ抽象的な概念として扱われているが、具体的には、わが国では、铸貨として、1円玉、5円玉、10円玉、50円玉、100円玉、500円玉が発行されており、紙幣（日銀券）として、500円札、1000円札、5000円札、10000円札が発行されている。これらの铸貨や紙幣が教科書的な三つの機能を持つことには異論はないが、同時に、これらの铸貨や紙幣の使用価値は相対的に異なり、それぞれの需要が異なることも事実である¹。

もし、貨幣が一般の財であれば、その使用価値の違いは、市場の需給を通して価格・数量ともに調整されると考えられるが、法定貨幣の価格はその貨幣単位そのものであり、市場メカニズムによって価格が調整される余地はない。したがって、それぞれの使用価値あるいは貨幣需要に違いがあれば、それはもっぱら数量で調整されることになる。

ところで、わが国で発行されている貨幣単位は実際の取引に対して最適なものであるだろうか。そもそも最適な貨幣単位の分布を求めることはできるのであろうか。また、もしそのような最適性が計算できるとして、現実に流通している貨幣単位はその最適性の基準からどれくらい乖離しているのだろうか。

結論を先取りしていえば、最適な貨幣単位とは、発行されている貨幣の使用価値が相対的に等しくなり、相対的な需要が無差別になるように定められている貨幣単位のことを指す。ここでその貨幣の使用価値が高いとは、その貨幣を保有することによって、最適な支払いができるということであり、最適な支払いとは貨幣の受渡し（支払いとそれに対するお釣りが）最小量で行えるということを指している。また、最適性からの乖離は相対的な流通数量をみることによってわかる。以下では、そのような最適貨幣単位の求め方、現実の貨幣単位の最適単位からの乖離、現実の貨幣流通量について論じたい。

1 10000円の支払いをするのに1円玉で支払うのも、10000円札で支払うのも無差別な人は少ないだろう。同様に、1円の支払いをするのに10000円札を使う人もあまりいない。つまり、同じ交換機能はあっても、その支払額に応じて貨幣の使用価値は大いに違うのである。

2. 最適な貨幣発行単位の分布

貨幣の使用価値が相対的に等しくなり、相対的な需要が無差別になるような貨幣単位はいかにして求めることができるだろうか。基本的な考え方は、想定されるあらゆる支払いに対して貨幣の受渡し（支払いとそれに対するお釣りが）最小量で行えること、つまり、日常の生活で保有して持ち歩く貨幣量を最小化するためのさまざまな貨幣の最適な組合せを考えることである。この問題に対する理論的接近方法はTelser [1995] によって与えられている。そこで以下ではTelserの議論をたどってみたい。

話は少し飛躍するが、数学の整数論にはBâchet問題として知られているものがある。それは、1から41までの任意の整数で表される重量を天秤で計るときに必要な最小の分銅（さまざまな重さをとる）の組合せを求めよという問題である。これは、重さにかかわらず分銅の製造コストが等しいとすると、1から有限の上限までの任意の整数量を計れる分銅の組合せを最小コストで作れという問題に一般化することができる。

この一般化されたBâchet問題に対する解答は、(1)既知の重量の分銅を、未知の重量の物が乗っている側も含めて、天秤の左右両方に乗せて用いることができる場合、(2)既知の重量の分銅を天秤の片側だけに乗せて用いる場合に分けて考えられている。(1)の場合には、分銅の重量単位を3の乗数倍（つまり、1,3,9,27,81,243,...）にするということである。また、最大限 $\sum 3^k = (3^{k+1}-1)/2$ の任意の整数量まで、この分銅の組合せで計測できることもわかっている。また、(2)の場合には、分銅の重量単位を2の乗数倍（つまり、1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,...）にするということである²。

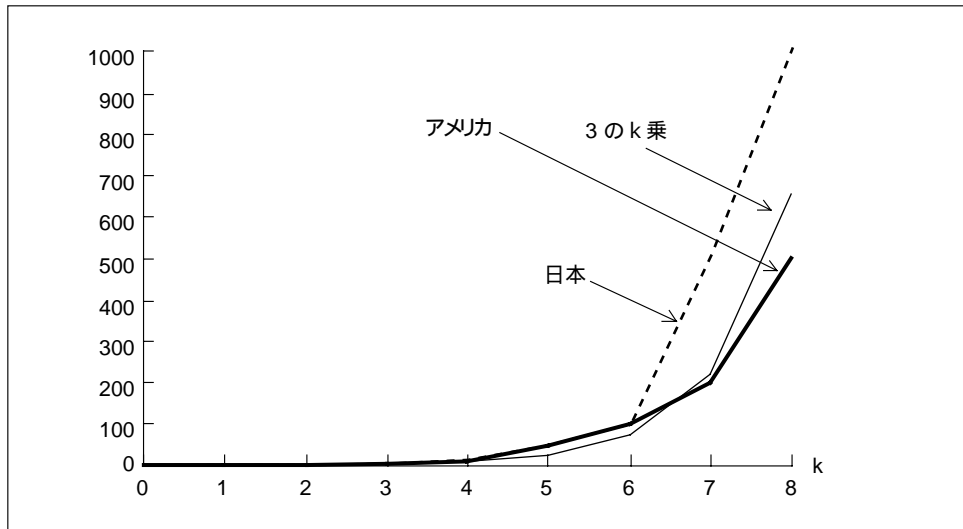
Telserは、一般化されたBâchet問題が実は任意の現金支払額に対して最適な貨幣単位の分布を求めることと同じであるということを指摘している。現金支払いに際して、釣り銭をもらうことができるのであれば、先の(1)の場合に相当し、今では珍しくなったが、バス運賃や自動販売機で釣り銭をもらうことができないケースは(2)の場合に相当する。以下では、釣り銭をもらえる(1)の場合を主として考えよう。具体的に問題となるのは、例えば、消費者が財布の中に入れておく現金、あるいはスーパーマーケットやコンビニエンスストアで準備しておくべき釣り銭の高（かさ）を最小にできるような貨幣単位の組合せを考えるということである。補論ではBâchet問題を最適貨幣単位の分布問題として解釈したうえで数学的証明が与えられている。

Bâchet問題ではあらゆる未知の重量が一樣に分布しているケースを考えたいが、現金支払いの場合にも支払額はとりあえず一樣分布していると考えて差し支えないだ

2 詳しい議論については、Hardy and Wright [1960], pp.115-117を参照されたい。

る³。図1は最小通貨単位で計った発行貨幣単位の分布を日本とアメリカについて調べ、数学的に最適な貨幣単位の分布とされる 3^k と併記したものである。

図1 貨幣単位の累進度



Telserが報告しているように、アメリカの貨幣単位の分布は数学的に最適な貨幣単位の分布とされる 3^k にきわめて近似的であることがわかる。実際にアメリカの貨幣単位の平均累進度⁴は3.34である。日本の場合は、 $k=6$ まではほぼ最適値に近似しているが、それ以降は急に累進度を増している。ちなみに、日本の貨幣単位の平均累進度は3.52である。

このように日本の累進度が最適累進度3を越えていることによって、現実の貨幣・紙幣流通量になにか不都合が起こっているだろうか。それを調べる意味で、まず理論的に最適な貨幣単位の分布と現実の貨幣単位の分布を表にしたものが表1である。

表1 貨幣単位の分布 (最小貨幣単位に基づく)

最適理論値 = 3^k	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
日本	1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000
アメリカ	1	5	10	25	100	500	1000	2000	5000

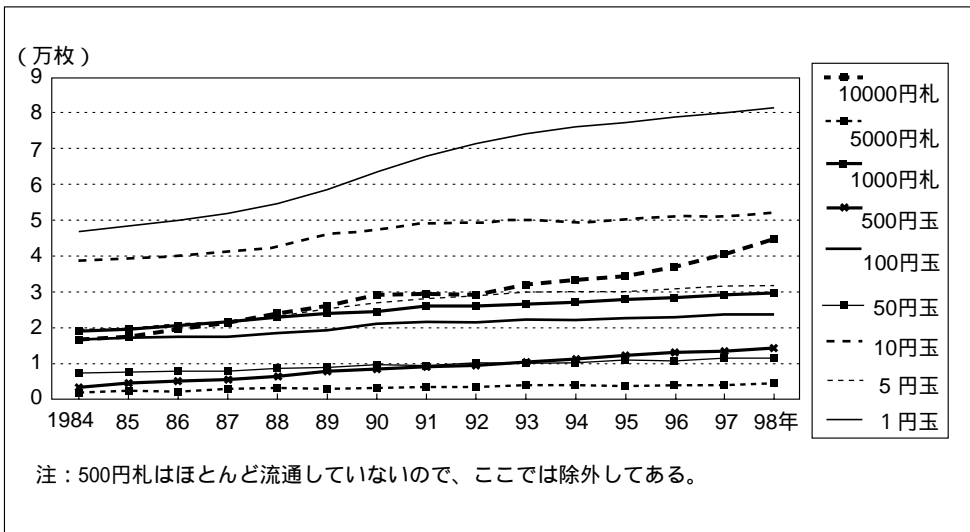
注：アメリカでは50セント玉と2ドル札は発行されているがほとんど使われていないので、ここでは除外してある。

3 例えば、単品別にみた場合、98円、100円、990円、1000円、10000円など、0や8や9といった末尾で終わる価格が、それ以外の価格よりも多いといった価格設定上の傾向はあるかもしれないが、単品で売買を行うよりも、いくつかの商品をまとめて買う可能性が高く、また消費税がかかる場合には、末尾が一様分布ではない可能性はそれほど問題にはならないだろう。

4 貨幣単位の平均累進度は(貨幣単位) = (累進度)^k (ここで $k=0,1,2,3,\dots$)として、累進度について $k=0\sim 8$ まで解いたものを平均して求めた。

この表からわかるように、日本の貨幣単位は最適値からすると近似的に25円、250円、2000円をとるべきところを、50円玉、500円玉、5000円札を発行しているために、累進度が高くなっていることがわかる。しかし、現実にはこれらの鑄貨・紙幣がその他の貨幣と無差別に使われているのならば問題はないだろう。その点を調べるために、わが国で流通している鑄貨・紙幣流通量（数量）を鑄貨・紙幣別に図示したのが図2である。

図2 鑄貨・紙幣別流通量



驚くべきことに、先ほど最適値より累進しすぎていると指摘した50円玉、500円玉、5000円札はどれもきわめて流通量は低いことがわかった。とくに、5000円札の流通量は1000円札、10000円札の流通量と比べて顕著に低い。これは、実際の現金取引において、きわめて使用価値が低いことを示唆しているのではないだろうか。

ところで、この使用価値はどのように数値化できるだろうか。これは、ある任意の支払額に対して、それぞれの貨幣を使用できる相対的範囲によって表現できるだろう。具体的には、1円玉と5円玉の使用範囲は、中間の3円を境にそれ以下であれば1円玉を、以上であれば5円玉を用いればよいということになる。ここで、1円玉の使用範囲は0～3円までの3円であり、5円玉の使用範囲は10円との境界を7.5円とすれば、3～7.5円までの4.5円である。以下同様にして、10円玉の使用範囲は22.5円、50円玉は45円、100円玉は225円、500円玉は450円、1000円札は2250円、5000円札は4500円、10000円札はそれ以上無限大である。貨幣単位が大きくなると、当然使用範囲も大きくなる。そこで、当該貨幣単位で割って基準化し、相対的使用範囲を求めてみる。すると1円玉の相対的使用価値は3であるが、10円玉、100円玉、1000円札の相対的使用価値は等しく2.25であり、10000円札は無限大である。それに対して5円玉、50円玉、500円玉、5000円札の相対的使用価値は等しく0.9であることがわかる。つまり、10円玉、100円玉、1000円札は5円玉、50円玉、500円玉、

5000円札の2.5倍の使用範囲を持っていることがわかる。これが、5円玉、50円玉、500円玉、5000円札の使用価値が低い理論的根拠である。ちなみに、最適な貨幣単位である 3^k の相対的使用価値は最小単位 1 を除いて一律1.33である。このように相対的使用価値が等しいことが、どのような貨幣も等しく保有する動機となっており、貨幣単位が最適であることの根拠となっているのである。

つぎに、現実の貨幣流通量の相対的比率が、現実の貨幣単位から理論的に求められる相対的使用価値の比率（上述の使用範囲比率である2.5）からどれくらい乖離しているかを検証してみよう。これを調べることで、貨幣単位の選択が最適でないために生じている貨幣流通量の理論的歪みによって、現実の貨幣流通量がどの程度説明できるかがわかるのである。ところで、実現値が理論値にどれくらい適合しているかを検定する統計テストとして最も標準的なものは、つぎのように定義されるカイ2乗適合度検定である。検定の結果は表2にまとめてある。

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 / \mu \quad \text{ここで } \mu = 2.5 \text{ (理論値)}$$

表2 カイ2乗適合度検定

流通量	5円玉		50円玉		500円玉		5000円札	
	1円玉	10円玉	10円玉	100円玉	100円玉	1000円札	1000円札	10000円札
χ^2	3.106**	2.606***	30.626	0.522***	4.786*	16.562	204.247	253.574

ここで $\chi^2(11) = 3.054$ (***)、 4.575 (**)、 5.578 (*)。ただし、1円玉だけは理論値 $\mu = 3.3$ として計算してある。

表2より、5円玉は1円玉と10円玉に対して理論どおりの流通量比率になっている。50円玉も100円玉に対しては理論どおりの流通量比率であるが、10円玉は理論より流通量比率が高い、つまり、より多く流通していることを示している。500円玉は100円玉に対しては10%の有意水準で理論どおりの流通量比率になっているが、1000円札は流通量比率が高くなっている。5000円札は1000円札、10000円札の両方に対してきわめて流通量が少ない、逆にいえば1000円札、10000円札は5000円札に対して相対的流通量が理論値をはるかに上回っていることを意味している。この結果を要約すれば、5円玉、50円玉、500円玉は多少の例外はあるが、ほぼ理論どおりの流通量比率になっているのに対して、5000円札は貨幣流通量を大幅に歪めているといえよう。

ただし、現実の貨幣流通量は、相対的使用価値だけではなく、平均的価格水準、一回当たりの平均支払額などの要因によっても規定されており、いちがいに貨幣単位の歪みによって1000円札、10000円札が過剰に流通しているとはいえない。しかし、他の貨幣流通量と比べた場合、5000円札の過小流通は明らかであり(図2参照)その主因は貨幣単位設定の歪みによるものと思われる。ところで、現行の貨幣単位の分布に、2000円札を加えたら貨幣流通量は全体としてどう変わるだろうか。おそ

らく1000円札、5000円札、10000円札は2000円札とある程度代替され、それぞれの流通量は少なくなるだろう。とくに1000円札との代替効果は大きく、500円玉と1000円札の流通量比率の歪みは修正されると予想される。

最後に、10000円札が5000円札に比べて相対的に過剰に流通しているのは、5000円札による歪みだけではなく、それ以上の貨幣単位がないためでもある。近年の10000円札の流通量の増加を鑑みると、つぎの貨幣単位の発行が話題となることが多い。その際、本稿で紹介したBâchet問題に対する整数論の解答は最適な貨幣単位の選択に関して、きわめて明確な答えを用意しており、将来の貨幣単位を決定するうえでも参考になる。ちなみに、 $3^k = 3^9 = 19683$ であり、もし、10000円札以上の単位の札を発行するのであれば、つぎは20000円札が理論的には望ましいことがわかる。

3. おわりに

今日、市場重視の経済政策運営が経済政策の基本理念として受け入れられている感があるが、そこでは表面的な経済規制緩和や自由化と結びつけられるだけで、本稿で論じたような表面に出てこない制度上の歪みについてはほとんど意識されていない。しかし、近年、比較制度分析の枠組みで盛んに論じられているように、ある制度は、他の制度のあり方にも影響を与えているので(これを制度的補完性と呼ぶ)市場の一部を規制緩和しても、全体として規制緩和の効果はなかなか出てこないという結果になりがちである。貨幣単位の歪みは直接的には、最適単位をとった場合に比べて、不必要な保蔵コストを生じさせているし、間接的には価格づけがある単位の周辺に集中しがちであるなどさまざまな影響を与えていると思われる。市場重視の経済政策の中には、このような表に出てこない市場の最適化へ向けての調節も含まれるべきであろう。

また、本稿で理論的基礎となったBâchet問題は、純粋数学、とくに「数学の女王」と数学者ガウスによって形容された整数論の問題であり、それが経済学の問題にほとんど変更なく適用できたということは、管理実験ができない社会科学の中では画期的なことである。最近では電子マネーなどで重要性が増している暗号論の基礎として整数論が用いられているが、市場経済の大半は整数の世界であることを考えれば、市場経済の分析にも整数論の成果がもっと幅広く応用できるのではないだろうか。

補論 Bâchet 問題の最適な貨幣発行単位の選択問題への応用

Bâchet問題は任意の現金支払額に対して準備しておくべき貨幣の種類とそれぞれの種類に応じた貨幣量を最小にするような貨幣単位の分布を求める問題と同じことである。ここではより一般的な釣り銭をもらえる支払いのケースを考えてみよう。問題の要点はつぎの二つである。(1) 適当な貨幣を組み合わせることで、任意の現金支払いが必ずできること(補助定理1)。(2) 必要な貨幣の種類とそれぞれの種類に対応した貨幣量を最小にするような貨幣単位が存在すること(定理1)。定理1の証明方法は基本的にHardy and Wright [1960], pp.115-117を踏襲している。

補助定理1 貨幣単位 $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n$ を定めておくと、任意の正整数で表される支払額 a は、釣り銭をもらえるとなると、つぎのような貨幣の組合せで支払うときが、最も貨幣量が少なくてすむ。

$$a = e_0 k_0 + e_1 k_1 + e_2 k_2 + \dots + e_n k_n$$

ただし e_i は0も含む整数である。

証明 まず a を k_1 で割って、整数商を Q_1 、余りを $e_0 k_0$ とする。

$$a = e_0 k_0 + Q_1 k_1 \quad (0 \leq e_0 k_0 < k_1)$$

つぎに、 $Q_1 k_1$ を k_2 で割って、整数商を Q_2 、余りを $e_1 k_1$ とする。

$$Q_1 k_1 = e_1 k_1 + Q_2 k_2 \quad (0 \leq e_1 k_1 < k_2)$$

これを繰り返して、

$$Q_{n-1} k_{n-1} = e_{n-1} k_{n-1} + Q_n k_n \quad (0 \leq e_{n-1} k_{n-1} < k_n)$$

この関係を順次代入するとつぎのように表せる。

$$a = e_0 k_0 + e_1 k_1 + e_2 k_2 + \dots + Q_n k_n$$

ところで $Q_n k_n$ は、 k_n 以上の貨幣単位がないので、

$$Q_n k_n = e_n k_n \quad (0 \leq e_n k_n)$$

と置き換えると、

$$a = e_0 k_0 + e_1 k_1 + e_2 k_2 + \cdots + e_n k_n = \sum_{i=0}^n e_i k_i$$

と表せる。このことは e_n を最小にするように e_{n-1} が決まっており、 e_{n-1} を最小にするように e_{n-2} が決まっていることを意味している。以下同様に $e_0, e_1, e_2, \dots, e_n$ は支払額 a に対して、所与の貨幣単位を用いて最少の貨幣量で表された組合せとなっている。(証明終わり)

$n+1$ 個の貨幣単位が最も効率的に用いられ、無駄な重複がないのは e_i が 0, -1, 1 のいずれかである場合であり、それを満たすような貨幣単位は 3 の乗数倍であることが、つぎの定理で示される。

定理 1 釣り銭をもらえるとすると、貨幣単位 $1, 3, 3^2, 3^3, \dots, 3^n$ で $(3^{n+1}-1)/2$ までの任意の額の支払いができ、この貨幣単位のもとで支払いに必要な貨幣量は最小になる。

証明 補助定理 1 より、任意の正整数 $a (\leq 3^{n+1}-1)$ は 3 の乗数倍の線形結合として表せる。

$$a = \sum_{i=0}^n f_i 3^i \quad (1)$$

ここで f_i は 0, 1, 2 のいずれかである。また、

$$b = \sum_{i=0}^n 3^i = (3^{n+1}-1)/2 \quad (2)$$

を (1) 式から引くと $c = a - b$ は $-(3^{n+1}-1)/2$ から $(3^{n+1}-1)/2$ の範囲内の任意の整数をとり、それはつぎのように表せる。

$$c = \sum_{i=0}^n g_i 3^i \quad (3)$$

ここで g_i は -1, 0, 1 のいずれかをとる。したがって、 $n+1$ 個の貨幣単位をそれぞれの単位について最大 1 個使うだけで $(3^{n+1}-1)/2$ までの任意の額の支払いができることが示されたことになる。

つぎに任意の正整数 a をそれぞれの貨幣単位について最大 1 個使うだけで表現できるのは貨幣単位が 3 の乗数倍の場合であることを示そう。

貨幣単位 k_i は必ず異なっており、つぎのように並べることができる。

$$k_0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_n \quad (4)$$

貨幣単位をそれぞれ最大 1 個だけ使って表現できる最大値 W と最大値に最も近い額 W_1 はつぎのように表せる。

$$W = k_0 + k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

$$W_1 = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

ここで W と W_1 の差は最小貨幣単位 k_0 で、これは 1 でなければならない ($k_0 = 1$)、 W_1 について大きな額 W_2 は、

$$W_2 = -k_0 + k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

であり、 $W_2 = W - 2$ と表現できる。 W_2 について大きな額 W_3 は、

$$W_3 = k_0 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$$

である。とすると $W_3 = W - 3$ のはずであるから、 $k_1 = 3$ ということになる。したがって、 $n = 1$ については成立することがわかった。

つぎに帰納法を用いて、

$$k_0 = 1, k_1 = 3, k_2 = 3^2, k_3 = 3^3, \dots, k_{s-1} = 3^{s-1}$$

が成立すると仮定しよう。最大値 W はつぎのように表せる。

$$W = \sum_{t=0}^{s-1} k_t + \sum_{t=s}^n k_t \quad (5)$$

ここで、 $k_s, k_{s+1}, k_{s+2}, \dots, k_n$ はこのままにしておく。ところで $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{s-1}$ に含まれている貨幣単位を用いると最小限、

$$-\sum_{t=0}^{s-1} k_t + \sum_{t=s}^n k_t = W - (3^s - 1)$$

まで支払える。この最小限より小さい支払額のうち最大のものは $W - 3^s$ であり、これは、

$$k_0 + k_1 + k_2 + \dots + k_{s-1} + k_{s+1} + k_{s+2} + \dots + k_n$$

でなければならない。とすれば、

$$k_s = 2(k_0 + k_1 + \dots + k_{s-1}) + 1 = 3^s$$

が成立する。したがって、すべての正整数 n に関して $k_n = 3^n$ が成立する。(証明終わり)

参考文献

- Hardy, G.H. and Wright, E.M., *An Introduction to The Theory of Numbers*, 4th edn. Oxford: Oxford University Press, 1960.
- Sumner, S., “Privatizing the Mint,” *Journal of Money, Credit and Banking*, 25, 1993, pp. 26-27.
- Telser, L.G., “Optimal Denominations for Coins and Currency,” *Economic Letters*, 49, 1995, pp. 425-427.
- Weil, A., *Number Theory for Beginners*, New York: Springer-Verlag, 1979.

