

構造変化と単位根・共和分仮説

—マクロ経済時系列への応用—

国友直人

要 旨

本稿ではまず時系列分析においてこれまで知られている単位根検定 (unit roots tests) 及び共和分検定 (co-integration tests) の方法が経済時系列のトレンドに構造変化が存在する場合には誤った結果をもたらす可能性が大きいことを指摘する。次に構造変化を含む線形時系列モデルにおいて単位根仮説及び共和分仮説に対する新たな検定統計量のクラスを提案する。尤度比検定を含むこのクラスの検定統計量は標本数が増加するにつれてブラウン運動の汎関数に収束することが示せるので、シミュレーションによりその極限分布の性質をより詳しく考察する。提案する検定を用いて外国為替レート (円・ドル・マルク) と日本の実質所得・消費系列を分析し、前者については単位根の存在に肯定的、後者については否定的な結果を得た。所得・消費の長期的変動の解釈としては共和分関係としてではなく、2つのトレンドの共変動関係と見なす方がより適当と判断される。マクロ経済時系列の実証分析において最近よく使われるようになっている単位根仮説や共和分仮説についての既存の検定方法を機械的に適用するよりも、むしろ経済構造の変化を適切に時系列モデルで表現することがより重要であろう。

キーワード：単位根・共和分問題、構造変化、見せかけの単位根、トレンドの共変動仮説

本稿は日本銀行金融研究所における客員研究員としての研究の一部分をまとめたものである (1994年11月〈第一稿〉、1995年7月〈改訂稿〉、1995年11月〈再改訂稿〉)。本稿における数値計算については佐藤整尚氏 (統計数理研究所) の協力に負っているが、数値計算を含めて誤りがあるとすれば著者の責任である。また、議論をまとめるまでの過程において副島 豊氏 (日本銀行金融研究所) との議論は有益であった。両者に感謝する。

国友直人 東京大学経済学部教授

1. はじめに

経済時系列の計量分析においては最近になって確率的な意味での非定常性が大きな問題となっている。マクロ経済データや金融データを使って単純な統計的時系列モデルを当てはめると、しばしば定常的 (stationary) 統計モデルよりもある種の非定常的 (non-stationary) 統計モデルの方があてはまりのよいことが報告されている。また、金融データ、とりわけ株式価格や外国為替レートなどの資産価格水準の変動においてはしばしば確率的定常性とは整合的でない判断されるような観察事実も見ることができる。

他方、計量経済分析の方法として伝統的に用いられている統計モデルではしばしば明示的あるいは暗黙理に確率の変動部分は統計的意味において定常的であることが仮定されている。日本のマクロ時系列を用いて過去に行われた多くの実証分析ではこの仮定は先験的になされていたと考えられるが、統計学的な見地からすると実証分析に先立って検討すべき統計的仮説の一つであろう。非定常性の仮説に関してはこれまでに計量経済学者や統計学者によって様々な検定方法が提案されている。通常、確率的な意味での定常性の条件が成り立たない場合は一般に非定常性と呼ばれるが、経済学者にとって特に興味ある非定常性としてランダム・ウォーク (random walk、酔歩)・モデルの場合が注目されている。一般にランダム・ウォーク・モデルやそれを拡張した和分過程と呼ばれる線形時系列モデルを定常的な線形時系列モデルに対して検定する問題は単位根 (unit roots) の検定、あるいは共和分 (co-integration) の検定と呼ばれている。1次元の時系列における単位根の検定方式については、例えば Dickey-Fuller [1979] が提案した方法がよく知られているが、その他にも例えば Dickey-Fuller [1981]、Phillips [1987]、Phillips-Perron [1988]、Perron [1989] などにより提唱された方法が単位根検定として実証分析において用いられるようになってきている。他方、共和分概念はもともと Engle-Granger [1987] により提唱されたが、実証分析を行っている研究者の間においては、いまだ必ずしもその意味を正確に理解されていないのが現状であろう。共和分関係の検定については異なる幾つかの解釈がありうるが、本稿においては、以下の3節で示すように多次元の単位根検定の一種としてとらえることとする。これまでに共和分検定としては Engle-Granger [1987] が提案した Dickey-Fuller 検定を利用する方法をはじめとして Phillips-Ouliaris [1990]、Johansen [1991] などが開発した方法が共和分検定として注目されて、最近ではしばしば実証分析においても用いられるようになってきている。

こうした単位根や共和分関係の統計的検定方法は特にマクロ経済やファイナンス (金融) を中心とした実証的な計量分析において利用されている。しかしながら、これまでにここで挙げた方法の他にも様々な異なる検定方式が提案されており、その中には検定の意味づけを理解することが困難な場合もあるようである。また、実際のデータ分析において様々な検定方式からどの様な方法を用いればよいのか不明なこともあるように思われる。そこで Kunitomo [1996] はこうした経済時系列分

析における非定常性のとらえ方、特に単位根仮説及び共和分仮説について提案された様々な検定方式を系統的に導き、多くの検定統計量の間の関係を整理するとともに若干の新しい方法を提案した。

本稿ではまず単位根に関連して特に共和分関係にまつわる幾つかの問題を整理する。特に、これまで提案されている共和分検定について軽視されている構造変化に係わる問題点を考察する。一般にマクロ経済や金融の時系列データでははっきりした長期的トレンドが観察されることが少なくない。したがって、こうした経済時系列における非定常性を議論する場合には分析における歴史的トレンドの扱い方が大きな問題となる。しかしながら、単位根検定に関連してこの問題を取りあげた研究は少なく、米国の実証的問題からPerron [1989] がこの問題を初めて正面から考察した。Perron は歴史的トレンドが多くの単位根検定で仮定しているような単純な時間の線形関数ではなく、既知のトレンド変化点が1個あると仮定すると単位根の検定結果が大きく変わってしまうことを指摘している。彼の研究では両大戦間を含む米国のマクロ時系列を用いて実証分析を行っているが、副島 [1994] 及び Ohara [1994] は実質GNPを含む日本のマクロ時系列についても同様の結果が得られることを報告している。こうした研究はいずれも一変数時系列についてであるが、複数の時系列を扱う場合には歴史的トレンドや構造変化の扱いはより複雑になる可能性があることに注意しておこう。このことから多次元時系列における単位根の検定問題及び共和分関係の検定問題をよりわかりやすく理論的に整理することにも多少の意義があるように考えられよう。

ここで本稿の概要をあらかじめ説明しておく、まず2節において多次元線形時系列モデルにおける共和分仮説にまつわる統計的問題を整理する。続いて3節ではトレンドにおける構造変化を自由に組み込むことができる共和分仮説に対する新しい検定統計量のクラスを提案する。その統計量のクラスには尤度比検定、ラグランジュ検定、ワルド検定などよく知られている検定方法を含んでいるので実用上は十分に役に立つ検定方法を特別な場合として含んでいる。また、本稿で提案する方法は多次元時系列において構造変化点が未知であったり、構造変化点の個数も標本数に比べて十分に小さければ未知である場合にも簡単に拡張することが可能なので極めて応用の範囲が広いことを指摘する。特に時系列が1次元の場合には共和分検定が単位根に対する検定統計量を与えることを示すことができる。したがって、本稿で導入する方法はトレンド関数に様々な構造変化を組み込んだときの単位根仮説についての尤度比検定統計量を与えてくれる。さらにここで導入する統計量は単位根仮説や共和分仮説で考える帰無仮説から生じる全ての制約条件を検定するので、1次元の時系列に対して Perron が提案した t -統計量よりも何らかの意味でより強力であることが期待される。また、Perron が扱えないようなトレンド変化をも簡単に組み込むことができるのでより柔軟性があることを指摘する。複数の時系列の線形結合が定常的であるとき共和分関係の可能性ではなくトレンド関数が共変動している可能性もあるので、トレンドの共変動仮説とそれに対する検定統計量も導入する。

次に4節では本稿で提案する統計量の漸近分布の表現を求める。得られた漸近分

布は尤度比統計量、ラグランジュ統計量、ワルド統計量について共通の形をしていることがわかった。しかしながら、ここで得られた漸近分布はブラウン運動の汎関数の分布となるので統計学や計量経済学の教科書に登場する χ^2 -分布などのようによく知られた分布表を利用することは出来ない。そこで、日本におけるマクロ実証分析で役に立つと判断されるトレンド係数が変化する場合に関して統計量の漸近分布の数表をシミュレーションにより作成したので本稿で使った分布表を報告する。

さらに5節では提案された統計量とその漸近分布の数表を使って日本のマクロ時系列の分析を行った例示的な分析結果を報告する。時系列データとして分析に用いたのは外国為替レート（円・ドル・マルク）及び日本の実質所得・実質消費系列である。検定の結果としてはまず為替レートのデータについては単位根が検出され、共和分関係があることが得られた。他方、実質所得・消費系列については構造変化を考慮すると単位根の存在には否定的な結果が得られた。むしろ実質所得・消費系列の関係はトレンドの共変動関係としてとらえることが自然であるとの結果も得られた。そして、本稿の考察から得られた結論はまとめて6節で述べる。本稿で得られた理論的結果の導出は数学付録として7節にまとめておいた。

2. 多次元時系列と非定常性

(1) 多次元時系列における共和分仮説

線形計量経済モデルにおいて内生変数を G 次元ベクトル y_t とすると線形計量経済モデルの誘導型 (reduced form) は多変量時系列モデル

$$y_t = \Gamma z_t^* + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + v_t, \quad (1)$$

で表現される。ただし z_t^* は $K^* \times 1$ の厳密な意味での外生変数 (strictly exogenous) ベクトルであることを仮定し、 Γ は $G \times K^*$ 係数行列、 $A_1, \dots, A_p$ は $G \times G$ 係数行列、さらに v_t は $G \times 1$ の誤差項ベクトルを表している。ここで F_t を変数 $y_0, z_1^*, v_1, \dots, z_t^*, v_t, z_{t+1}^*$ から生成される σ -集合体としよう。変数 y_t は F_t -可測である。ここで誤差項 v_t は条件期待値と条件付共分散行列が

$$E(v_t | F_{t-1}) = \mathbf{0} \quad \text{a.s.}, \quad (2)$$

$$E(v_t v_t' | F_{t-1}) = \Omega_t \quad \text{a.s.} \quad (3)$$

を満足するマルチンゲール (martingale) 差分過程であると仮定する。過去の情報 F_{t-1} が与えられたもとで誤差項の条件付共分散行列 Ω_t は時間の関数であることに注意しておこう¹。

1 確率変数列 $\{v_t\}$ が互いに独立で期待値 $\mathbf{0}$ 、分散・共分散行列 Ω (一定) の時にはこれらの条件は自動的に満たされる。したがって4節の定理5と定理6に必要なほとんどの条件は自動的に満たされる。一般性を気にしなければ独立性を始めから仮定してもよい。

この多変量時系列モデルの確率的挙動はモデルの自己回帰部分によって決定される。そこで自己回帰部分の固有方程式を

$$|\lambda^p \mathbf{I}_G - \sum_{i=1}^p \lambda^{p-i} \mathbf{A}_i| = 0 \quad (4)$$

とおこう。本稿では時間とともに指数的に発散する自己回帰部分を含む時系列モデルは考察しないので次のことを仮定する。

[仮定A]: 固有方程式 (4) を満足する固有値を λ_i ($i = 1, \dots, pG$) とすると

$$|\lambda_i| \leq 1$$

である。

多変量時系列モデル (1) を次のように書き直そう。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \Gamma \mathbf{z}_t^* + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + (\mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p) \mathbf{y}_{t-(p-1)} - \mathbf{A}_p \Delta \mathbf{y}_{t-(p-1)} + \mathbf{v}_t \\ &= \Gamma \mathbf{z}_t^* + \mathbf{B}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{i=2}^p \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{y}_{t-(i-1)} + \mathbf{v}_t \end{aligned} \quad (5)$$

ここでラグ作用素 L と階差作用素 $\Delta (= 1 - L)$ をそれぞれ $L \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{t-1}$, $\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1}$ により定める。係数行列は

$$\mathbf{B}_1 = \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{B}_j = -\sum_{i=j}^p \mathbf{A}_i \quad (j = 2, \dots, p)$$

で与えられる。

時系列の実証分析においては時系列データの原系列 $\{\mathbf{y}_t\}$ にトレンドがある場合には先験的に $\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}_G$ とおいて、階差系列 $\{\Delta \mathbf{y}_t\}$ に対して定常時系列モデルをあてはめることが行われることがある。一般に階差系列 $\{\Delta \mathbf{y}_t\}$ が定常確率過程にしたがうとき原系列 $\{\mathbf{y}_t\}$ は和分 $I(1)$ 過程にしたがうと呼ばれている。ここで階差系列 $\{\Delta \mathbf{y}_t\}$ の確率部分が定常的となることは次の条件で表現される。

[仮定B]: 固有方程式

$$|\lambda^{p-1} \mathbf{I}_G - \sum_{i=2}^p \lambda^{p-i} \mathbf{B}_i| = 0 \quad (6)$$

を満足する固有値を λ_i ($i = 1, \dots, (p-1)G$) とすると

$$|\lambda_i| < 1$$

である。

次に多次元時系列 $\{y_t\}$ が共和分関係にしていることを特徴づけよう。
 (5) 式において係数行列を $B_1 = I_G + B^*$ とおいて書き直すと

$$\Delta y_t = \Gamma z_t^* + B^* y_{t-1} + \sum_{i=2}^p B_i \Delta y_{t-(i-1)} + v_t \quad (7)$$

で与えられる。ここで係数行列 B^* の階数(rank)を

$$\text{rank}(B^*) = r$$

と書くことにしよう。この階数 r により多変量時系列モデル (1) で与えられる時系列 $\{y_t\}$ の非定常性は次のように分類することができる。まず階数 $r = 0$ の時は係数行列 B^* はゼロ行列となり階差系列 $\{\Delta y_t\}$ に対する線形時系列モデルが得られる。さらに仮定 B の条件下ではこの階差系列は定常的になることが分かる。次に階数が次元に一致する ($r = G$) 場合を考えよう。この場合には仮定 A の下では原系列 $\{y_t\}$ は単位根を持たないことが以下のようにして分かる。(1) における自己回帰表現の多項式を

$$A(\lambda) = \lambda^p I_G - \sum_{i=1}^p \lambda^{p-i} A_i \quad (8)$$

とおく。このとき係数行列 B^* を使って

$$A(\lambda) = -\lambda^{p-1} B^* + (\lambda - 1) \left[\lambda^{p-1} I_G - \sum_{i=2}^p \lambda^{p-i} B_i \right] \quad (9)$$

と書き直すことができる。この表現において $\lambda = 1$ を代入すれば

$$|A(1)| = |-B^*| \neq 0$$

となる。このことから単位根は固有方程式 (4) の根ではありえないことがわかる。さらにここで固有方程式の根として $\lambda = 1$ の他に $|\lambda| \neq 1$ となる根が存在しなければ原系列 $\{y_t\}$ は定常性の条件を満足していることがわかる。

階数 r についての最後の可能性は $0 < r < G$ となる場合である。この時の非定常性の分析は少し複雑になる。そこでこの場合についての条件を次のような命題としてまとめておくことにする。命題の証明は容易であるが念のために 7 節に与えておいた。

定理 1 : 時系列 $\{y_t\}$ が (1) にしたがって仮定 A を満足するとしよう。このとき次の条件 (C) と条件 (D) は同等である。

[条件C] : $\lambda_i = 1$ ($1 \leq i \leq G_0$), $|\lambda_i| < 1$ ($G_0 + 1 \leq i \leq pG$),

[条件D] : (i) $r = \text{rank}(B^*)$, $0 < r (= G - G_0) < G$,

(ii) $|\alpha'_\perp D(1) \beta_\perp| \neq 0$,

(iii) $\lambda_j \neq e^{i\theta}$ ($\theta \neq 0, j = 1, \dots, pG$).

ただし $\alpha_{\perp}$ と $\beta_{\perp}$ はそれぞれ行列 B^* の各列ベクトルと各行ベクトルに直交するベクトルを列ベクトルとして並べて作った $G \times G_0$ ($G_0 = G - r$) 行列で階数は G_0 である。また、多項式行列 $D(\lambda)$ は

$$D(\lambda) = \lambda^{p-1} I_G - \sum_{i=2}^p \lambda^{p-i} B_i \quad (10)$$

で与えられる。

ここで若干の注意事項を述べておこう。条件 (C) は単位根の存在状態を示し、単位根の数が次元よりも少ないことを意味している。条件 (D-i) は共和分関係の条件としてよく用いられている。線形代数の議論から条件 (D-i) の下では

$$B^* = \alpha\beta' \quad (11)$$

となる階数 r の $G \times r$ 行列 α, β が存在する。このとき $G \times G_0$ ($G_0 = G - r$) 行列 $\alpha_{\perp}$ と $\beta_{\perp}$ の各列ベクトルはそれぞれ行列 α, β の各列ベクトルと直交している。

この結果から共和分関係の誤差修正表現として知られている関係が得られる。条件 (D-ii) は例えば仮定 B の下では一般に成り立つ。このことは仮定 B の下では行列 $D(1)$ が正則となることより明らかである。最後に条件 (D-iii) について言及しておこう。この条件は季節単位根や負の単位根の存在を排除するものである。一般には季節単位根や負の単位根が存在する可能性を排除できるような簡単な条件を見つけ出すことは困難なようである²。

例えば仮定 B は条件 (D-iii) の必要条件でも十分条件でもない。もし、このような単位根の存在が実証的に問題とならないならば仮定 A を修正して始めからこうした単位根を排除しておくことが考えられよう。この場合には仮定 A を次のように修正する必要がある。

【仮定A'】：固有方程式 (4) を満足する固有値は条件 $|\lambda_i| < 1$ または $\lambda_i = 1$ ($i = 1, \dots, pG$) を満たしている。

例えばJohansen [1991] の定式化では外生変数が定数項のみとした上ではじめから仮定 A' をおいている。定理 1 より次の命題が得られることは明らかであろう。

系1：多変量時系列モデル (1) において仮定 A' の下では条件 (C) と条件 (D-i) 及び (D-ii) とは同等である。

2 季節性が明瞭に観察される時系列において原系列を直接に分析する場合には季節単位根や季節和分関係を巡る問題が重要であるが、本稿では季節性を巡るこれらの問題は扱わない。

(2) 階数条件の仮説検定

多変量時系列モデル (1) における単位根仮説及び共和分仮説の検定方法を考えよう。(7) を整理すれば

$$\Delta y_t = \beta z_t + v_t, \quad (12)$$

と簡潔に表現することができる。ここで z_t は $K \times 1$ の先決変数 (predetermined variables) である。(7) 式より先決変数として変数

$$z'_t = (z_t^*, y'_{t-1}, \Delta y'_{t-1}, \dots, \Delta y'_{t-(p-1)})$$

をとるので説明変数の数は

$$K = K^* + G \times p$$

となる。また係数 β は $G \times K$ の回帰係数行列である ((11) の β とは異なる)。したがって (12) 式は被説明変数が $\{\Delta y_t\}$ 、説明変数が $\{z_t\}$ の多変量回帰モデルと見なすことができる。

ここで係数行列 β の階数についての帰無仮説を考えよう。仮説を述べるために説明変数 $z'_t = (z_t^*, z_{2t})$ を $1 \times K_1$ 及び $1 \times K_2$ の先決変数ベクトルに分割し、係数行列 $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ を $G \times (K_1 + K_2)$ 行列に分割しておく。次に係数行列 β_2 の階数条件を

$$H_1: \text{rank}(\beta_2) = r$$

で表しておこう。ここで特に $\beta_2 = B^*$, $\beta_1 = (\Gamma, B_2, \dots, B_p)$ とおけば仮説 H_1 は定理 1 の条件 (D-i) に対応していることは明らかであろう。

統計的多変量解析においてよく知られているこの係数行列の階数条件仮説はもともと Anderson [1951] によつてはじめて考察された問題である³。ここで多変量回帰モデル (12) における階数仮説に対する検定統計量を導いておこう。母係数行列 β の最小自乗推定量は

$$\hat{\beta} = \sum_{t=1}^T \Delta y_t z'_t \left(\sum_{t=1}^T z_t z'_t \right)^{-1} = \Delta Y' Z (Z' Z)^{-1} \quad (13)$$

で与えられる。ただし、 T は標本数、 ΔY は変数ベクトル $\{\Delta y'_t\}$ の観測値からなる $T \times G$ 行列、 $Z = (Z_1, Z_2)$ は $K (= K_1 + K_2)$ 個の先決変数 $z'_t = (z'_{1t}, z'_{2t})$ の観測値からなる $T \times K$ 行列である。次に最小自乗推定量の行列を分割して

$$\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

としよう。ここで分割された行列はそれぞれ母数行列 $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ に対応する推定

3 さらにこの仮説は数学的には計量経済学における線形構造方程式モデルにおけるブロック識別性条件(block identification hypothesis)と同等となることを示すこともできる。後者の仮説の検定問題については最近 Anderson-Kunitomo [1992b] 及び Anderson-Kunitomo [1994] が詳しく検討している。

量である。

そこで H_1 で与えられる階数条件の検定問題を考察しよう。 $0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_G$ を固有方程式

$$\left| \frac{1}{T} \Theta_T - \mu \Omega \right| = 0 \quad (14)$$

に対応する固有根としよう。ただし

$$\begin{aligned} \Theta_T &= \beta_2' A_{22,1} \beta_2', \\ A_{22,1} &= Z_2' Z_2 - Z_2' Z_1 (Z_1' Z_1)^{-1} Z_1' Z_2, \end{aligned}$$

である。このとき階数条件 H_1 は固有根についての仮説

$$H_\mu: \mu_1 = \dots = \mu_{G_0} = 0, 0 < \mu_{G_0+1} \leq \dots \leq \mu_G \quad (G_0 = G - r)$$

と数学的に同等であることがわかる。未知母数 β_2 に対応する最小自乗推定量を代入すると固有方程式 (14) に対応する標本固有方程式は

$$|\Delta Y' (P_Z - P_{Z_1}) \Delta Y - \lambda^* \Delta Y' \bar{P}_Z \Delta Y| = 0 \quad (15)$$

で与えられる。ただし、この式を導く上で関係

$$\hat{\beta}_2' A_{22,1} \hat{\beta}_2' = \Delta Y' (P_Z - P_{Z_1}) \Delta Y$$

を用いたことに注意しておく。ここで記号 $P_Z = Z (Z' Z)^{-1} Z'$ は行列 Z の列ベクトルが張る空間への射影作用素であり、任意の退化しない行列 Z に対して直交する射影作用素は $\bar{P}_Z = I_T - P_Z$ で与えられる。

例えば帰無仮説 H_1 として変数 y_{t-1} の係数行列についての条件 $\text{rank}(B^*) = r$ を考える場合には、(15) から検定統計量を構成する時に被説明変数 (ベクトル) Δy_t 、説明変数 (ベクトル) として

$$\begin{aligned} z_t' &= (z_t^{*'}, y_{t-1}', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}'), \\ z_{1t}' &= (z_t^{*'}, \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}') \end{aligned}$$

を選べばよい。また3 (2) 節で導入する帰無仮説 H_2 と H_3 に対して (15) の固有値から検定統計量を構成するときには説明変数の選び方を少し変えれば良いことをあらかじめ注意しておこう。

多変量解析における検定の不変性 (Anderson [1984] 第8章を参照) を用いて直交変換に対して不変な十分統計量の関数のみを統計量として考えよう。このとき階数条件仮説 H_1 に対する検定統計量としてクラス RT_1 を関数

$$RT_1 = T \times g(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{G_0}^*), \quad (16)$$

により定めることができる。ここで $0 \leq \lambda_1^* \leq \dots \leq \lambda_{G_0}^*$ は固有方程式 (15) を満足する小さい方から選んだ G_0 個の固有値である。関数 $g(\cdot)$ については $g(\cdot)$ が滑らかな

関数であって次の3条件を満足するものとする。

$$(i) \ g(0, \dots, 0) = 0,$$

(ii) $g(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{G_0}^*)$ は原点 $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{G_0}^*) = (0, \dots, 0)$ において全微分可能である、

$$(iii) \ \left. \frac{\partial g}{\partial \lambda_i^*} \right|_{\lambda_1^* = \dots = \lambda_{G_0}^* = 0} = 1 \quad (i = 1, \dots, G_0).$$

ここで検定統計量に課した以上の制約条件は多分に便宜的なものである。より一般的な統計量のクラスを考えることは容易であるが、実目的からするとここで導入した検定統計量のクラスは十分に一般的であるので本稿ではこのクラスの統計量のみ限定する。この統計量 RT_1 は様々な実用的な例を含んでいる。Anderson-Kunitomo [1992b] は誤差項 $\{v_t\}$ が正規分布にしたがい、かつ条件付共分散が $\Omega_t = \Omega$ ($t = 1, \dots, T$) となる均一分散の仮定の下で統計量 RT_1 が仮説 H_1 に対する尤度比統計量、ラグランジュ乗数統計量、ワルド統計量を含んでいることを示している。仮説 H_1 の下で $(-2) \times (\text{対数尤度比})$ は

$$LR_1 = T \sum_{i=1}^{G_0} \log(1 + \lambda_i^*) \quad (17)$$

で与えられる。同様にラグランジュ乗数統計量とワルド統計量はそれぞれ

$$LM_1 = T \sum_{i=1}^{G_0} \frac{\lambda_i^*}{(1 + \lambda_i^*)}, \quad (18)$$

$$W_1 = T \sum_{i=1}^{G_0} \lambda_i^*, \quad (19)$$

となる。

関連した統計量としては Johansen [1991] は外生変数が定数項のみのモデルにおいて定理1の条件 (D-i) に対する尤度比統計量を導いている。Johansen が導いた統計量は LR_1 とほぼ同等と見なすことができる。また Kunitomo [1996] も以上で説明した枠組みの下で様々な共和分関係の仮説に対する検定統計量を導いている。ここで導いた統計量の形から3つの統計量（ワルド統計量、尤度比統計量、ラグランジュ乗数統計量）の間には不等式

$$W_1 \geq LR_1 \geq LM_1 \geq 0, \quad (20)$$

が成立する。この不等式から同一の分布を用いて検定を行うと3つの統計量の中ではワルド統計量は帰無仮説をより棄却する傾向にあり、ラグランジュ乗数統計量は同じ帰無仮説をより受容する傾向があり、尤度比統計量はその中間になることがわかる。この種の不等式は通常の線形回帰モデルにおいてはよく知られた関係である。

さらに $G = 1$ の場合には以上で説明した統計量は極めて単純になることに注意しておこう。回帰分析の標準的用語を用いて被説明変数を Δy_t 、説明変数を z_t とした

残差平方和を $URSS$ とすれば明らかに $URSS = \Delta Y' \bar{P}_Z \Delta Y$ となる。全く同様に被説明変数を Δy_t 、説明変数を z_{1t} とした残差平方和を $RRSS$ とすれば明らかに $RRSS = \Delta Y' \bar{P}_Z \Delta Y$ で与えられる。これらの記号を使うと (15) を満たすただ 1 個の固有値は

$$\lambda = \frac{RRSS - URSS}{URSS} \quad (21)$$

と表される。したがって、この場合には例えば尤度比統計量 (17) は

$$LR_1 = T \log \left(\frac{RRSS}{URSS} \right) \quad (22)$$

となる。このような統計量の形は標準的な回帰分析の教科書でよく見かける表現に一致している。

3. 構造変化と共和分

(1) トレンドの変化と固有値の挙動

ここで再び多変量時系列モデル (1) に戻って外生変数 $\{z_t^*\}$ の役割について考えてみよう。一般に経済時系列の中には時間の変化とともに傾向的変動 (トレンド) が大きく変化していると考えられる変数が少なくない。例えば米国において長期的に実質GNPや失業率などの主要なマクロ変数の時系列的変動を観察すると、明らかに1930年代より以前と以後とでは変動のトレンドが異なっていることが観察される。また、ここ30年ほどの期間について日本におけるマクロ変数の変動をとると1970年代前半におきた石油危機の前後において主要な変数におけるトレンドは変化していることが観察される。さらに、1980年代後半から日本経済には大きな構造的変化が起きているとする見方も有力であろう。

ここで考察すべき問題はこうしたマクロ・データの歴史的変動についての観察に対して、従来の単位根の検定方法はあたかもこうしたトレンドの変化がなかったこととして統計的検定の論理を使って検定を行っていることである。すなわち、統計的仮説検定の論理では帰無仮説及び対立仮説のいずれにおいても成立している前提、すなわち維持仮説として線形トレンド関数を仮定しているのである。こうしたマクロ変数におけるトレンド関数が長期的に全く変化しないことを暗黙裏に仮定して検定を行うことには問題があると言えないであろうか？この問題の重要性は一変数の場合についてPerron [1989] が行った研究により初めて明らかになった。彼の研究によれば想定されたトレンド関数が固定されたある一つの変化点があると、たとえ真の統計的線形時系列モデルが定常的であってもDickey-Fuller [1979] により提案された単位根検定による検定ではしばしば非定常性が検出されてしまうのである。

時系列が多次元の場合にはトレンドの扱いはより複雑になる。複数の時系列におけるトレンドが一樣に変化することもありうるが、金融時系列の中にはトレンドの

変化が異なるパターンを示している変数も少なくない。例えばマクロ的金融変数として重要な貨幣残高や物価指数のトレンドの変動は明らかに実質 GNP のトレンドの変動とは異なっていることが観察される。また、ほとんどの金利変数では歴史的に正のトレンドはそれほど明瞭には観察されていない。すなわち、実質 GNP などのマクロ変数、貨幣残高や物価などの金融変数、さらに金利変数などのトレンドの変動はかなり異なっていることが観察されている。これに対して共和分の統計的検出方法としてこれまでに提案されている方法、例えば Engle-Granger [1987] の方法や Johansen [1991] の方法では定数項のみが説明変数として想定されているのである。この仮定は単位根が存在する場合には自動的に時系列は時間と共に“一定”の線形トレンド関数を持つことを意味しているのである。そこで本節ではまず多次元時系列の場合にトレンド関数の変化（あるいは構造変化）を想定することにより検定方法がどのように影響を受けるかを考察することにしよう。

いま“真”の時系列モデルはトレンドの回りで定常的に変動していることを想定する。すなわち、固有方程式 (4) のすべての根の絶対値は 1 よりも小さいことと仮定しよう。次に観測期間 $[0, T]$ 上に q 個の変化点 $0 < T_1 < \dots < T_q < T$ があるととして統計モデルで表現することを考える。まず変数 $DT_i(t), i = 1, \dots, q$ を

$$DT_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < t \leq T_i \\ t - T_i & \text{if } T_i < t \leq T \end{cases}$$

により定義しよう。全く同様に変数 $DU_i(t), (i = 1, \dots, q)$ を

$$DU_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < t \leq T_i \\ 1 & \text{if } T_i < t \leq T \end{cases}$$

により定義しよう。こうして導入した 2 種類の変数 $DT_i(t)$ と $DU_i(t)$ を用いることによりトレンド関数として q 個の変化点をもつ折線関数を考えることが可能となる。例えば折線関数により幾つかの代表的なマクロ変数のトレンド関数を近似的に表現することができる。

ここで真の 1 次元時系列モデルが

$$\begin{aligned} y_t = & \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_{1i} DU_i(t) + \gamma t + \sum_{i=1}^q \alpha_{2i} DT_i(t) \\ & + \beta y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta y_{t-(i-1)} + v_t, \end{aligned} \quad (23)$$

で表される状況を考えよう。ただし $\alpha_{ji} (i = 1, \dots, q; j = 1, 2), \beta, \beta_i (i = 2, \dots, p)$ はスカラーの係数母数である。ここで真のトレンドは q 個の折線で表現されているが、 q を未知として $q_1 (< q)$ 個の変数を用いてデータ分析を行うことを考えてみよう。このときには最小自乗推定量の挙動について次のような命題が得られる。

定理 2 : (i) 一変量時系列モデル (23) を (1) で表現するとき (4) の根は $|\lambda_i| < 1 (i =$

$1, \dots, p)$ を満たし、(ii) 変化点 $T_i(T)$ ($i=1, \dots, q$) は T が増加するにつれて

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_i(T)}{T} = \delta_i, \quad (24)$$

ただし $0 < \delta_1 < \dots < \delta_q < 1$ となることを仮定する。モデル (23) において q 個のトレンド変数の代わりに $q_1 (< q)$ 個のトレンド関数を使った時に得られる β の最小自乗推定量を $\hat{\beta}$ とする。このとき $T \rightarrow \infty$ につれて

$$\hat{\beta} \xrightarrow{P} 1$$

となる。

ここで記号 $\xrightarrow{P}$ は標本数 T が大きくなるにつれて確率収束するという意味であり、例えば仮にもっとも単純化して $\beta_2 = \dots = \beta_p = 0$ とすると真の母数 $|\beta| < 1$ にもかかわらずその推定量は確率的に 1 に収束することを意味している。特に $q=1, q_1=0$ とするとこの命題は Perron [1989] の定理 1 で得られた結果に一致する。またこの命題の証明の方法も Perron が用いた方法を直接的に拡張すればよいので省略する。この Perron の定理 1 では 1 次元の単位根仮説において $G=1, q=1, q_1=0$ の場合に t -統計量により単位根仮説を受容してしまうことを示したのであるが、以上のように複数の構造変化点がある場合に拡張することは容易である。また、ここで得られる結果をより精密にして $T(\hat{\beta} - 1)$ の挙動をより詳しく調べることも可能である。

次に多次元時系列に複数の構造変化点がある場合を考察してみよう。時系列における真のトレンド変数として

$$z_t' = (1, t, DT_1(t), \dots, DT_q(t))$$

を考えよう。ところが実際には変化点の個数 q は未知であることを考慮して q_1 個 ($0 \leq q_1 \leq q$) 個の変化点を持つ単位根に対するトレンド関数

$$z_t^{*'} = (1, DU_1(t), \dots, DU_{q_1}(t))$$

を説明変数に用いて分析を行った状況を想定しよう。このときには次の命題を得ることができる。

定理 3：多変量時系列モデル

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \Gamma z_t' + v_t \quad (25)$$

において次の条件を仮定する。

- (i) 攪乱項 $\{v_t\}$ の共分散行列は $\Omega_t = \Omega$ (一定) で正定符号行列である。
- (ii) 先決変数は変数 z_t' を用いて $z_t' = (z_t^{*'}, y_{t-1}')$ である。
- (iii) $q - q_1 \geq 0, \quad G - q_1 - 1 \geq 0$.
- (iv) 変化点は条件 (24) を満足する。

(v) 固有方程式

$$|\lambda I_G - A_1| = 0$$

を満足するすべての固有値は $|\lambda_i| < 1$ ($i = 1, \dots, G$) を満たす。

以上の仮定の下でもしトレンド関数 z_t^* を誤って z_t として (15) より ($z_{1t} = z_t^*$ とおく) 小さい方から G 個の標本固有値 $0 \leq \lambda_1^* \leq \dots \leq \lambda_G^*$ を求めると $T \rightarrow \infty$ につれて次のことが成り立つ。

(vi) $\lambda_i^* \xrightarrow{P} 0$ ($i = 1, \dots, q_1 + 1$),

(vii) $\lambda_i^* \xrightarrow{P} k_i$ ($i = q_1 + 2, \dots, G$).

ただし k_i は正定数である。

この命題の証明の概要は7節に与えておいた。より一般的な p 次モデルの場合も同様な結果が得られると思われるが証明はより複雑になるはずである。定理3で用いた条件の中で誤差項の共分散行列についての条件 (i) は議論の単純化のためにおいた仮定である。変化時点についての条件 (iii) は観測データが多いときに変化点が互いに退化しないことを意味している。

ここで最も単純にトレンドを扱う場合として $q = q_1 = 0$ としてみよう。このことは長期的トレンドが時間の線形関数であるにもかかわらず、その可能性を分析において無視した場合に対応している。このときには定理2から1個の固有値は小さくなるが、他の $G - 1$ 個の固有値については (vii) より任意の $\delta > 0$, $i = q_1 + 2, \dots, G$ に対して

$$T^\delta \lambda_i^* \xrightarrow{P} \infty$$

となる。このとき、データからは共和分の仮説 $H'_1: r = G - 1$ が受容される可能性が高くなり定常性の対立仮説 $H'_{1A}: r = G$ は棄却される傾向となる。したがって、時系列データから得られるのは極限では1個の単位根であり、共和分関係の個数は $r = G - 1$ と推定される可能性が強い。この定理2で得られた結果は Perron [1989] の定理1を多次元に拡張した結果としても見ることができる。多次元時系列に複数の構造変化点がある場合にはその分析方法を直接的に拡張することは容易ではない。本節では Kunitomo [1996] が開発した分析の枠組みを利用することによりトレンド関数の変化の検定方式への影響が一般的に多次元時系列についても大きいことを示したのである。つまり、これまで実証分析で使われることのある共和分検定の方法についても単位根の場合と同様に基本的な問題があることが確認できた。

マクロ計量分析における実証的問題としては Perron は主に米国のデータを使って分析を行った結果、従来の単位根検定による実証分析に関する信頼性に対して大きな疑問を投げかけたのであるが、日本のマクロ経済データについても副島 [1994] が t -統計量を用いて実質 GDP や実質消費などについて単位根検定を行い、これら重要なマクロ変数についてはいずれも単位根仮説に対して否定的な実証結果を報告している。ここで、Perron が提案した検定方法では先験的に固定された構造変化

点が一個存在することを仮定されていたことに注意しておく。この条件を緩めて未知の構造変化点が未知であったり複数ある場合については Ohara [1994] が分析を行っている。Ohara [1994] ではより一般的な t -統計量について Kunitomo [1996] が求めた漸近分布の表現を利用して日本の主要なマクロ時系列について副島 [1994] が得た実証結果と同様な実証的結論が得られることを報告している。こうした最近に行われているマクロ経済時系列の実証分析からも単位根検定や共和分検定においては構造変化点の扱いが実証的にも無視できない重要な問題であることがわかる。計量分析では複数の単位根過程に対して形式的に回帰分析を行う時に見かけ上は有意な結果が得られる問題を「見せかけの回帰」(spurious regression)と呼んでいる。実はトレンドを持つ複数の定常過程においてトレンドの定式化を誤ることにより単位根の存在が有意に検出されるという「見せかけの単位根」(spurious unit roots) 及び「見せかけの共和分」(spurious co-integration) もまた少なくとも同程度に重要な問題なのである。

(2)トレンド変化の下での共和分仮説検定

多変量時系列モデルに構造変化点などを含むトレンドを表現する外生変数が存在する場合の単位根の検定と共和分の検定方法を考えよう。時系列モデルにトレンドが存在する場合にはトレンドと非定常性について幾つかの定式化がありうる。例えば Kunitomo [1996] では $K^* \times 1$ の外生変数 z_t^* を $z_t^{*'} = (z_{1t}^{*'}, z_{2t}^{*'})$ とそれぞれ $1 \times K_1^*$ 及び $1 \times K_2^*$ に分割して

$$H_1'' : \text{rank}(B_1^*) = r, \quad \Gamma_2 = O$$

を考察している。ここで行列 Γ_2 は変数 z_{2t}^* の係数であり、この仮説は共和分仮説の一種とみなすことが出来よう。2 番目のゼロ制約条件を仮説の中に導入した理由は、多次元時系列に単位根が存在するとドリフト項の変数 z_{1t}^* により仮説の下でより高次のトレンドが生成されるからである。例えばドリフト項の変数 z_{1t}^* の中に時間に線形な項が存在すれば単位根 (ランダム・ウォーク) は時間の 2 次のトレンドを生成してしまう。このことは経済時系列の実証分析においては重要であるにもかかわらず、必ずしも完全に理解されているとは限らないので 1 次元の簡単な時系列モデルを用いて確認しておこう。

ここで 1 次元の変数 $\{y_t\}$ が時系列モデル

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta y_{t-1} + v_t, \quad (26)$$

にしたがっているものとしよう。このとき、帰無仮説としての単位根仮説は $H_1'' : \beta = 1, \alpha_1 = 0$ である。対立仮説は $H_{1A}'' : |\beta| < 1, \alpha_1 \neq 0$ とすれば帰無仮説と対立仮説の両方の下でトレンドは時間の線形関数となる。この定式化では時系列のトレンド関数の次数は維持仮説として同一の形をとっている。2 番目のゼロ制約を無視した場合には必ずしも帰無仮説と対立仮説の下での時系列モデルにおけるトレンド関数の形は同一ではないので仮説検定の問題は入れ子 (nested) 構造ではないと解釈でき

よう。さて (26) 式を少し変形すれば

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta^* y_{t-1} + v_t, \quad (27)$$

と表現することができる。この表現では係数は $\beta^* = \beta - 1$ なので単位根仮説は $H_2: \beta^* = 0, \alpha_1 = 0$ となる必要がある。

次に多変量線形時系列モデルを考えよう。構造変化点などを含むトレンド変数を z_{2t}^* とすると時系列 $\{y_t\}$ が共和分関係にあることの一つの解釈は $G \times r$ 行列 β と $K_2^* \times r$ 行列 γ_2 が存在して、 $\beta' y_t + \gamma_2' z_{2t}^*$ が定常的となることである。そこで変数 z_{1t}^* を $z_{1t}^* = \Delta z_{2t}^*$ とおけば仮説 H_1' の代わりに

$$H_2: \text{rank}(\Gamma_2, B^*) = \text{rank}(B^*) = r$$

を考えることができる。本稿においては共和分仮説として主にこの仮説の検定問題を考えることにしよう。仮説 H_2 に対して考える検定統計量のクラス RT_2 を 2 (2) 節で導いた固有方程式 (15) の根の中から小さい方の G_0 個の根から計算した (16) 式で与えられものとしよう。したがって厳密にはこの統計量は 2 (2) 節で説明した統計量 RT_1 を構成する際に説明変数として外生変数 $z_{1t}^* = \Delta z_{2t}^*, z_t' = (z_{1t}^*, z_{2t}^*)$ に対して

$$\begin{aligned} z_t' &= (z_t^*, y_{t-1}', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}'), \\ z_{1t}' &= (z_{1t}^*, \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}'), \end{aligned}$$

と似た統計量 RT_1 のことである。ここでは誤解を避けるためにこの場合の統計量を RT_2 で表しておくことにする。帰無仮説に対する尤度比統計量 (LR_2)、ラグランジュ統計量 (LM_2)、ワルド統計量 (W_2) の形は全く同一である。このことから、帰無仮説 H_2 に対する様々な統計量は形式的には 2 (2) 節で説明した方法により計算することができる。そこで本稿では統計量 RT_2 として上のように説明変数 $z_t' = (z_{1t}', z_{2t}')$ をとる場合を扱うことにしたのである。実はこのような説明変数の選び方についてほんの僅かに見える違いが漸近分布についての結果に大きな違いをもたらすことが分かっている。

さて変化点を含む共和分関係のもう一つの定式化としては $G \times r$ 行列 β と $K^* \times r$ 行列 γ が存在して、 $\beta' y_t + \gamma' z_t^*$ が定常的となることであろう。この場合は仮説 H_2 の代わりに

$$H_2': \text{rank}(\Gamma, B^*) = \text{rank}(B^*) = r$$

を考えることができる。この仮説の検定は上の変数 z_{1t} から変数 z_{1t}^* を除くことで行うことができる。

ここで特に $G = 1$ の場合に帰無仮説 H_2 の検定問題は 1 次元時系列モデルにおける単位根仮説の問題になっていることに注意しておこう。さらに説明変数として $z_t' = (1, t), z_{1t}' = 1$ をとれば時系列モデル (24) における仮説 H_1' に一致することがわかる。Dickey-Fuller [1981] が考察したのはこの帰無仮説に対する尤度比統計量で

ある。したがって、ここでの統計量は Dickey-Fuller の研究の一般化と見ることができる。

さて、本節で導入した帰無仮説 H_2 、あるいは H'_2 を用いることにより 1 次元の単位根を使って説明した帰無仮説と対立仮説の下でのドリフト項の次数の整合性の問題を自然な形で解決できる。このことを示すためには実は Granger によって提唱された表現定理 (Engle-Granger [1987]) を少し拡張する必要がある。もともと導かれた Granger の表現定理では階差系列 Δy_t が定数のみを含む線形確率過程となることが前提とされていた。多変量時系列モデル (1) から出発する本稿の枠組みでは以下に示すようにその仮定は必要ないが、本稿では次数 p は有限であることを前提にしている。以下で示す命題は Johansen [1991] により得られた表現定理の結果をさらにわずかに修正したものである。命題の証明は 7 節に与えておいた。

定理 4：変数 $z_{1t}^* = \Delta z_{2t}^*$ と置いた多変量時系列モデル (1) において仮定 A 及び条件 (D-i), (D-ii), (D-iii) を仮定する。

(i) 仮説 H_2 の下では確率過程 $\{y_t\}$ は

$$y_t = y_0 + C \left(\sum_{s=1}^t v_s \right) + C_1(L) v_t + C_2(L) z_t^*, \quad (28)$$

と表現される。

(ii) 行列 C の階数は G_0 で

$$C = \beta_\perp (\alpha'_\perp D(1) \beta_\perp)^{-1} \alpha'_\perp \quad (29)$$

で与えられる。

(iii) (28) の右辺にあらわれる行列多項式 $C_i(L)$ ($i = 1, 2$) は

$$C_i(L) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{ik} L^k$$

と展開でき、有限の正数 q_2, ρ ($0 < \rho < 1$) が存在して

$$\|C_{ik}\| = O(k^{q_2} \rho^k)$$

となる。

(iv) 初期値の影響を除いて時系列の期待値は

$$E[\Delta y_t] = O(\Delta z_t^*)$$

$$E[\beta'_1 y_t + \gamma'_2 z_{2t}^*] = O(\Delta z_t^*)$$

と表現される。

ここで特に外生変数として定数項のみしか存在しない場合には $z_{2t}^* = 1$ であるから $\Delta z_{2t}^* = z_{1t}^* = 0$ となる。この時には条件 (iv) における右辺はゼロ行列となること

がわかる。したがって、この場合にはこの定理4は Johansen [1991] により既に得られている結果に一致する。しかしながら、より一般的に外生変数が存在する場合にはこうした単純な結果は修正されなければならない。上の表現定理において特に重要なことは (28) 式の最後の項である。仮説 H_2 の下では最初に仮定されたドリフト変数 z_{2t}^* 及びトレンド変数 z_t^* は同一の次数となる。例えば変数 z_{2t}^* の中に時間の線形関数があっても移動平均 (MA) 表現 (28) に現れるトレンドはやはり時間の線形関数より高い次数の項は生成されない。これに対して Kunitomo [1996] で導入したトレンド関数を含む共和分仮説の下では確率過程の移動平均表現はより複雑となる。

(3) トrend関数の共変動仮説

時系列モデルの確率項が定常的であるとき構造変化点などを含むトレンド変数 z_t^* が存在すればトレンド変数が共変動 (co-movement) するという仮説を導入することができる。より一般的に必ずしも $\Delta z_{2t}^* = z_{1t}^*$ とせずに、トレンド変数を $z_t' = (z_{1t}', z_{2t}')$ とおこう。このとき複数の時系列に対するトレンド関数の変動に関して

$$H_3: \text{rank}(\Gamma_2) = r$$

という仮説を考えることができる。この仮説では単位根は仮定されていないので共和分関係と呼ぶよりもトレンド変数の共変動関係という方がふさわしいと見ることができよう。こうした仮説 H_3 に対して検定統計量のクラス RT_3 は固有方程式 (15) の根の中から小さい方の G_0 個の根から選んで (16) 式により与えることができる。ただし注意すべきこととしては説明変数として外生変数

$$\begin{aligned} z_t' &= (z_t^*, y_{t-1}', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}'), \\ z_{1t}' &= (z_{1t}^*, y_{t-1}', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}'), \end{aligned}$$

とする所が統計量 RT_2 と異なっている。そこでこの統計量を RT_3 で表しておくことにする。帰無仮説に対する尤度比統計量 (LR_3)、ラグランジュ統計量 (LM_3)、ワルド統計量 (W_3) も全く同様に定義することができる。

4. 検定統計量の分布

(1) 統計量の漸近分布

本節では帰無仮説の下での検定統計量の漸近分布を考察する。誤差項 v_t は条件 (2) 式及び (3) 式を満足するマルチンゲール差分過程であって、条件付共分散行列 $\Omega_t = E(v_t v_t' | \mathbf{F}_{t-1})$ は例えば確率変数 $z_1^*, y_1, \dots, z_{t-1}^*, y_{t-1}, z_t^*$ の関数であってもよいものとおこう。ここで条件付期待値の条件 $\mathbf{F}_{t-1}$ は時刻 $t-1$ において利用可能な情報集合である。また、表現 (12) における先決変数 z_t の中には過去の被説明変数 $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}$ 、あるいはその階差系列 $\Delta y_{t-1}, \Delta y_{t-2}, \dots, \Delta y_{t-(p-1)}$ を有限個含んでいることに注意しておこう。統計量の漸近分布を導くためには変数 $\{z_t\}$

及び誤差項 $\{v_t\}$ について幾つかの条件が必要である。そこでまず本節で使う幾つかの条件を説明しておこう。

- (i) 確率変数列 $\{z_t, v_t\}$ を σ -集合体 F_t に対して z_t は F_{t-1} -可測、 v_t は F_t -可測とする⁵。行列 D_T^* は F_0 -可測であって外生変数列 $\{z_t^*\}$ は条件

$$D_T^{*-1} \sum_{s=1}^{[T]} z_s^* z_s'^* (D_T^*)^{-1} \rightarrow \int_0^1 m(s) m(s)' ds \equiv M(t), \quad (30)$$

を満足するものとしよう⁶。ここで $m(s)$ は F_0 -可測で s の関数であり、行列 $M(t)$ は正定符号行列である。また条件

$$\max_{t=1, \dots, T} z_t'^* (D_T^* D_T^*)^{-1} z_t^* \rightarrow 0 \quad (31)$$

を満足するものと仮定する。

- (ii) 確率変数列 $\{v_t\}$ は $E(v_t | F_{t-1}) = 0$ (a.s.), $E(v_t v_t' | F_{t-1}) = \Omega_t$ (a.s.) であって

$$\sum_{s=1}^{[T]} [\Omega_s \otimes D_T^{*-1} z_s^* z_s'^* (D_T^*)^{-1}] \xrightarrow{P} \Omega \otimes M(t), \quad (32)$$

を満足する。ここで Ω は一定の行列であり、この条件は漸近的には条件的共分散行列と外生変数とが無相関となることを意味している。また $a \rightarrow \infty$ のとき

$$\sup_{s=1, 2, \dots} E[v_s' v_s I(v_s' v_s > a) | F_{s-1}] \xrightarrow{P} 0 \quad (33)$$

としよう。この仮定は誤差項がリンドバーク条件として知られている条件に対する一つの十分条件になっていることを意味している。

- (iii) 条件付共分散行列については条件

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Omega_t \xrightarrow{P} \Omega \quad (34)$$

において Ω が正定符号行列となることを仮定する。

- (iv) 外生変数 $\{z_t^*\}$ については次のような追加的な条件を課する必要がある。ある δ ($0 \leq \delta < 1$) が存在して $T \rightarrow \infty$ となるにつれて、

$$\eta_T = \frac{1}{T^\delta} \text{tr}(Z_{-s}^* \bar{P} Z_{-s}^*) \quad (35)$$

4 以下の条件は多少技術的であるので応用上は注1に述べたように以下で挙げる条件を無視して次の定理5と定理6の結果のみを利用しても大きな問題とならない場合が多い。

5 条件の意味を簡単に説明すると変数 z_t には過去の変数、例えば y_{t-1} などを含んでもよいが、時点 t に発生した過去の情報からは予想されなかった変動は含まないものとしている。そのような予想されなかった変動は攪乱項 v_t に含まれていると見なしている。

6 本稿で実際に利用するのは7節の定理3の証明の概要の中で定義される系列 $\{a_t\}$ に対する基準化行列 D_T などである。注11に言及するような計算から本節の条件を簡単に調べるができる。

は高々 s, s' の多項式で抑えられる。ただし、行列 $\mathbf{Z}_{-s}^*$ は第 t 行が $\mathbf{z}_{t-s}^*$ となる $T \times K^*$ の行列である。

ここで挙げた条件の中で (i)、(ii)、(iii) についての具体的な意味とよく知られている他の条件との関係については Anderson-Kunitomo [1992a] が詳しく議論している。よく統計学や計量経済学の教科書で仮定しているような状況、例えば $\{\mathbf{v}_t\}$ が互いに独立で条件付分散共分散行列が一定の行列 $\mathbf{\Omega}$ となることを始めから仮定すれば、(ii) と (iii) の条件は自動的に満足している。ここで強調することは通常の教科書で採用している仮定をかなり緩めても実証的には大きな問題が生じないという事実である。統計的方法が漸近的にこうした性質を備えている時には漸近的頑健性を持っていると呼ぶことがある。本稿で提案した統計量はこうした性質を備えているのである。

条件 (iv) は Kunitomo [1996] が用いたある意味では特殊な仮定であり、さらに緩めることは可能と思われるが、ここではその問題については考察を加えない。例えば外生変数として多項式トレンドを表す $\mathbf{z}_t^* = (1, t, \dots, t^r)'$ や折線関数を表す変数 $DT_i(t)$ や $DU_i(t)$ を含む変数の場合にも条件 (i) と (iv) を満足していることは簡単に確認できる。したがって、本稿で用いる例については以上の条件を満足していると思ふことができよう。

ここで仮定した条件の下で本稿で導入した統計量の漸近分布を求めてみよう。ここで用いるのはマルチンゲール過程に対する中心極限定理、あるいは不変原理と一般的に呼ばれている内容である。注意する必要があるのは単位根仮説の下では通常の統計学や計量経済学の教科書で説明されている漸近正規性や漸近 χ^2 分布に基づく漸近理論が成立しないことが知られていることである。単位根が存在する場合にはランダム・ウォーク要素

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{s=1}^{[iT]} \mathbf{v}_s$$

は漸近的 ($T \rightarrow +\infty$) にブラウン運動 $\{\mathbf{B}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ と呼ばれる連続確率過程に収束する⁷。ただし $[iT]$ は iT より大きくない最大の整数を表している。そこで単位根が存在する場合には検定統計量の極限は $T \rightarrow \infty$ のときにブラウン運動の関数(汎関数)で表現する必要があることになる⁸。条件 (i)、(ii)、(iii)、(iv) の下で以下の結果が得られる。漸近分布の導出は7節に概要を説明しておいた。

7 正確には汎関数中心極限定理(functional central limit theorem)と呼ばれている。ここでの収束は弱収束と呼ばれているが確率変数列全体の分布の収束を考える必要がある。ここでブラウン運動とは $\{\mathbf{B}(t)\}$ は G_0 次元の正規分布 $N_{G_0}(0, t\mathbf{I}_{G_0})$ にしたがう時間 t について連続経路をとる確率過程である。この中心極限定理は Billingsley [1968] による確率分布の弱収束の研究から系統的に研究されているが最近の単位根問題においてはなくてはならない分析道具となっている。

8 ただし以下の表現にあらわれるブラウン運動の微分 $d\mathbf{B}(t)$ は伊藤の意味で定義される確率微分・確率積分(stochastic integral)で用いられる表現であり、通常の微分の意味とは異なるので注意する必要がある。

定理 5：確率変数列 $\{v_t, z_t^*\}$ について条件 (i)~(iv) を仮定する。また行列 Ω 及び $M(1)$ は正則行列として、さらに z_{1t}^* が Δz_{2t}^* に含まれることを仮定する。このとき帰無仮説 H_2 の下で標本数 T が増加するにつれて統計量のクラス RT_2 の極限分布は共通であって極限の確率変数は

$$RT_2^* = \text{tr} \left(\tilde{N}' \left[\tilde{M}^{-1} - \begin{pmatrix} M_{11}(1)^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \right] \tilde{N} \right), \quad (36)$$

と表現される。ここで連続確率過程 $\{B(t)\}$ は G_0 次元のブラウン運動であり、確率変数行列 $\tilde{M}, \tilde{N}$ は

$$\tilde{M} = \int_0^1 \begin{pmatrix} m(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(s) \\ B(s) \end{pmatrix}' ds, \quad (37)$$

$$\tilde{N} = \int_0^1 \begin{pmatrix} m(s) \\ B(s) \end{pmatrix} dB(s)', \quad (38)$$

と表現される。また $M_{11}(1)$ は $K_1^* \times K_1^*$ の行列で

$$M_{11}(1) = \int_0^1 m_1(s) m_1(s)' ds, \quad (39)$$

と表現される。

系 2：定理 5 と同様の仮定をおく。変数 z_{1t} から変数 z_{1t}^* を除いて作った統計量のクラス RT_2 の極限分布は帰無仮説 H_2' の下で標本数 T が増加するにつれて共通で

$$RT_2^{**} = \text{tr}(\tilde{N}' \tilde{M}^{-1} \tilde{N}), \quad (40)$$

と表現される。

ここで共和分仮説の下ではブラウン運動 $B(t)$ の次元は $G_0 (= G - r)$ であることに注意しよう。共和分仮説の下では内生変数 y_t の間に r 個の共和分関係が成り立っているので独立に変動するランダム・ウォーク項の数は G_0 となる。

特に $G = G_0$ とするとこの共和分仮説の下での漸近分布は多次元の（単純）単位根仮説の下での統計量の漸近分布となるが、この場合には Kunitomo [1996] の定理 2 の結果に一致する。さらに外生変数として定数項（すなわち $z_{1t}^* = z_{2t}^* = 1$ の場合）のみをとる尤度比検定の場合には二次形式についての簡単な計算から Johansen [1991] が得た結果に一致することを示すことができる。共和分仮説については前節で言及したように Kunitomo [1996] は本稿とは異なる仮説を考察しているが、この場合には検定統計量の極限分布の表現は上の定理の結果に比べるとより複雑になる。

さらに $G = G_0 = 1$ とおけばトレンド変化を含む 1 次元の単位根仮説に対する検定統計量の漸近分布が得られる。定理 4 で得られた漸近分布の形は統計量のクラス

RT_2 について共通なので、例えばトレンド変化を含むときの単位根仮説に対する尤度比検定統計量の漸近分布も (36) で与えられることがわかる。1次元の時系列の場合には1個の変化時点が既知の場合に Perron [1989] が t -統計量の漸近分布を求めているが、より一般の場合の t -統計量の漸近分布の表現を Kunitomo [1996] が導いている。一般にトレンドに構造変化点があるときには単位根仮説はいくつかの係数制約条件を課することを意味していると考えられる。したがって、尤度比統計量の方が t -統計量よりも何らかの意味で検出力があると考えられよう。こうしたことから定理4の結果は単位根仮説の検定にも役立つことが期待できよう。実は既に線形トレンドに変化点がない場合について Dickey-Fuller [1979] は尤度比統計量を導いているので、ここで導いた結果は彼らの結果をより一般的な状況に対して拡張したものと見なすこともできよう。

単位根が存在しない場合には極限分布の議論は標準的なものとなり、ブラウン運動による表現は必要なくなる。トレンド関数の共変動仮説の仮説 H_3 に対する検定統計量の漸近分布については Anderson-Kunitomo [1994] が用いた方法を少し修正することにより次のような結果を得ることができる。

定理6：確率変数列 $\{v_t, z_t^*\}$ について条件 (i)~(iii) を仮定する。また行列 Ω 及び $M(1)$ は正則行列とする。固有方程式 (4) のすべての根が、 $|\lambda_i| < 1$ ($i=1, \dots, pG$) を満足するとき、帰無仮説 H_3 の下では統計量のクラス RT_3 の極限分布は共通であって自由度 $(G-r)(K_2^*-r)$ の χ^2 -分布となる。

(2) 構造変化点を含む場合の極限分布

ここで実証分析に有用と思われる極限分布の幾つかの例を考えよう。一般に極限分布はブラウン運動の汎関数なので通常の分布表としては特殊な例を除いて存在しない。ここでは簡単な場合についてシミュレーションに基づいて数値的に計算した分布関数を与えておく。

例1：第3節で考察した形の変化点が存在して変化点個数が q である状況を考えよう。仮説 H_2 に対する統計量 RT_2 を $RT_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$ で表す。また尤度比統計量、ラグランジュ統計量、ワルド統計量をそれぞれ $LR_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$ 、 $LM_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$ 、 $W_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$ で表そう。ただし区間 $[0, T]$ における q 個の変化時点 $0 < T_1(T) < \dots < T_q(T) < T$ とすれば、厳密には δ_i ($i=1, \dots, q$) は標本数 T の関数である。そこで $\delta_i T_i(T)/T$ と表せば

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \delta_i(T) = \delta_i,$$

与えられる変化点の極限について非退化条件 $0 < \delta_1 < \dots < \delta_q < 1$ が必要である。外生変数については

$$\begin{aligned} z_t^{*'} &= (1, DU_1(t), \dots, DU_q(t), t, DT_1(t), \dots, DT_q(t)), \\ z_{1t}^{*'} &= (1, DU_1(t), \dots, DU_q(t)) \end{aligned}$$

とおこう。ここでブラウン運動の次元は G_0 である。例えば $q = 1$ の場合には 4×4 行列 $M(1)$ は具体的に計算すれば

$$M(1) = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1_{(\delta_1, 1]} \\ s \\ (s - \delta_1)1_{(\delta_1, 1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1_{(\delta_1, 1]} \\ s \\ (s - \delta_1)1_{(\delta_1, 1]} \end{pmatrix}' ds$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 - \delta_1 & \frac{1}{2} & \frac{(1 - \delta_1)^2}{2} \\ 1 - \delta_1 & 1 - \delta_1 & \frac{1 - \delta_1^2}{2} & \frac{(1 - \delta_1)^2}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1 - \delta_1^2}{2} & \frac{1}{3} & \frac{(1 - \delta_1)^2(2 + \delta_1)}{6} \\ \frac{(1 - \delta_1)^2}{2} & \frac{(1 - \delta_1)^2}{2} & \frac{(1 - \delta_1)^2(2 + \delta_1)}{6} & \frac{(1 - \delta_1)^3}{3} \end{pmatrix}$$

となる。

ここで構造変化点が一箇の場合 ($q=1$) の極限分布について比較的詳しい数表を表 1 に与えておいた。極限分布を求めるために行ったシミュレーションの回数は 8,000 回であり区間 $[0, 1]$ を 400 等分して連続確率過程を離散近似した。我々が行った様々な実験の結果からは求められた分布のパーセント点は少なくとも上の 2 桁は信頼できる数値と判断できる (表 1)。この数表で記号 δ_1 は構造変化点を表しているが、煩雑さを避けるために 0.1 きざみで分布を計算した。また G_0 はブラウン運動の次元である。

表 1 極限分布表 ($q=1$)

(i) $RT_2(G_0 = 1)$

δ_1	1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97.5%	99%	Mean	S.D.
0.1	2.119	2.653	3.123	3.866	7.501	13.477	15.563	17.820	20.203	8.173	3.886
0.2	2.682	3.183	3.801	4.562	8.552	14.833	16.956	18.798	21.170	9.211	4.132
0.3	3.181	3.742	4.470	5.346	9.530	15.841	18.210	20.349	23.019	10.193	4.257
0.4	3.756	4.450	5.108	5.940	10.005	16.361	18.669	20.770	23.548	10.699	4.240
0.5	3.956	4.569	5.198	6.055	10.214	16.560	18.660	20.675	22.955	10.840	4.159
0.6	3.719	4.315	5.025	5.865	10.114	16.296	18.387	20.647	22.908	10.712	4.167
0.7	3.172	3.819	4.451	5.243	9.327	15.737	17.853	20.051	22.921	10.036	4.213
0.8	2.594	3.204	3.831	4.582	8.548	14.792	16.923	19.295	21.929	9.233	4.159
0.9	2.108	2.697	3.169	3.822	7.454	13.260	15.426	17.517	19.862	8.108	3.835

(ii) $RT_2 (G_0 = 2)$

δ_1	1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97.5%	99%	Mean	S.D.
0.1	9.824	11.013	12.150	13.580	19.897	28.356	31.302	33.541	36.798	20.572	5.872
0.2	10.979	12.247	13.492	15.128	21.801	30.384	33.531	36.127	39.403	22.406	6.133
0.3	12.191	13.726	15.115	16.657	23.483	32.314	35.496	38.251	42.102	24.133	6.308
0.4	13.094	14.566	15.860	17.448	24.346	33.738	36.565	39.352	42.935	25.092	6.391
0.5	13.176	14.634	15.976	17.693	24.591	33.757	36.829	39.445	42.799	25.271	6.361
0.6	12.803	14.428	15.731	17.258	24.241	33.575	36.397	39.123	42.672	24.909	6.382
0.7	12.370	13.572	14.866	16.469	23.430	32.348	35.343	37.754	41.118	24.046	6.257
0.8	11.048	12.415	13.608	15.109	21.846	30.631	33.752	36.386	39.684	22.505	6.188
0.9	9.820	10.976	11.980	13.476	19.650	28.315	31.315	34.147	37.381	20.411	5.935

(iii) $RT(\lambda_{G_0}^*) (G_0 = 2)$

δ_1	1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97.5%	99%	Mean	S.D.
0.1	6.195	6.982	7.840	8.951	13.758	20.523	23.004	25.192	27.643	14.342	4.626
0.2	7.035	7.880	8.740	9.857	14.808	21.719	24.284	26.529	29.282	15.400	4.778
0.3	7.842	8.724	9.639	10.766	15.651	22.692	25.240	27.622	30.637	16.308	4.841
0.4	8.105	9.029	9.893	11.040	16.067	23.431	25.797	27.849	30.599	16.725	4.910
0.5	8.084	8.995	9.989	11.053	16.182	23.262	25.818	28.078	30.760	16.758	4.865
0.6	8.025	9.010	9.835	11.047	15.986	23.031	25.600	28.176	31.160	16.605	4.889
0.7	7.775	8.655	9.474	10.592	15.663	22.711	25.026	27.252	30.057	16.287	4.806
0.8	7.060	7.874	8.718	9.865	14.938	21.906	24.355	26.926	29.659	15.500	4.847
0.9	6.118	6.982	7.814	8.827	13.557	20.416	22.810	25.123	27.988	14.191	4.669

本節で報告する数表には統計量クラス RT_2 の漸近分布とともに固有方程式を満足する小さい方の G_0 個の固有値の中での最大固有値に基づく統計量のクラスとして

$$RT_2(\lambda_{G_0}^*) = g(\lambda_{G_0}^*) \quad (41)$$

の漸近分布も同時に掲載している。例えば統計量 $LR_2(\lambda_{G_0}^*)$ は

$$\begin{aligned} LR_2(\lambda_{G_0}^*) &= T \log(1 + \lambda_{G_0}^*) \\ &= T \sum_{i=1}^{G-r} \log(1 + \lambda_i^*) - T \sum_{i=1}^{G-(r+1)} \log(1 + \lambda_i^*) \end{aligned} \quad (42)$$

であることから帰無仮説 H_2 の対立仮説

$$H_2' : \text{rank}(\Gamma_2, \mathbf{B}^*) = \text{rank}(\mathbf{B}^*) = r + 1$$

に対する尤度比統計量になっていることは明らかであろう。この統計量は特に $G \geq 2$ のときにデータ分析において有益な情報を与えてくれる。

さて、例 1 ではトレンド関数の変化時点は既知と仮定して統計量の極限分布が求められた。変化時点が未知である場合においては次のように与えられた検定統計量を変更すればよい。

例 2 : 例 1 において変化時点 $T_l(T) (= \delta_l T)$ が未知の場合には検定統計量は

$$\sup_{0 < \delta_1 < \dots < \delta_q < 1} RT_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$$

として定義することができよう。この統計量 $\max_{\delta_1, \dots, \delta_q} RT_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$ で表すことにする。この統計量は変化時点を既知として計算した統計量から容易に計算できるので変化時点が未知の時に単位根や共和分を検定することが可能となる。そこで構造変化点が一箇の場合 ($q=1$) の極限分布について比較的詳しい表 (表 2) を与えておいた。シミュレーションの方法は例 1 と同様で連続確率過程を離散近似して分布表を作成した。

表 2 変化時点が未知の時の極限分布表 ($q=1$)

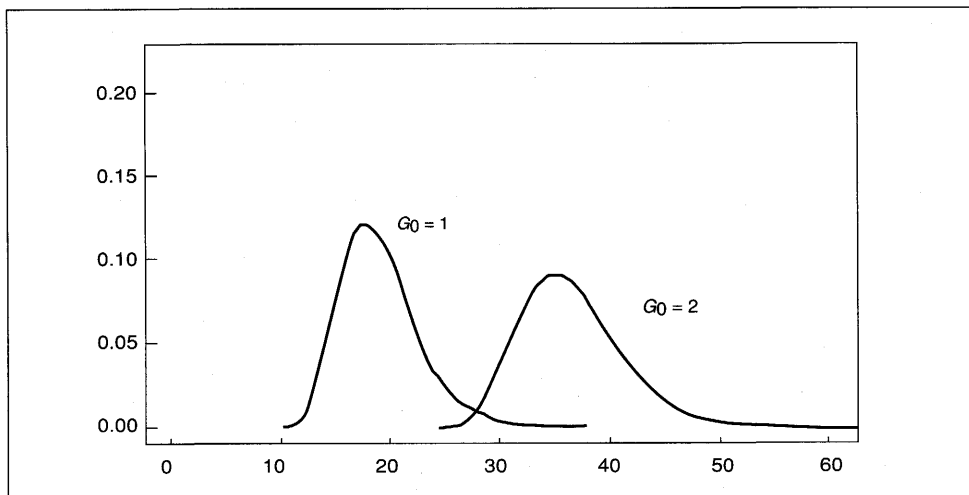
(i) $\max RT_2$

	1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97.5%	99%	Mean	S.D.
$G_0=1$	9.369	10.102	10.774	11.789	16.012	21.928	24.186	25.724	28.391	16.470	4.077
$G_0=2$	21.543	22.913	23.967	25.279	31.826	40.074	42.623	45.428	48.908	32.380	5.849
$G_0=3$	37.109	38.791	40.431	42.516	51.469	62.267	65.301	68.565	73.237	52.028	7.715
$G_0=4$	56.226	58.257	60.578	63.561	74.307	86.821	91.777	95.024	98.599	74.988	9.324
$G_0=5$	78.936	81.473	84.535	87.810	100.110	114.631	119.261	123.822	127.814	100.762	10.633

(ii) $\max RT(\lambda_{G_0})$

	1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97.5%	99%	Mean	S.D.
$G_0=1$	9.369	10.102	10.774	11.789	16.012	21.928	24.186	25.724	28.391	16.470	4.077
$G_0=2$	15.058	16.013	16.568	17.740	22.424	28.921	31.403	33.505	36.967	23.036	4.546
$G_0=3$	20.222	21.206	22.186	23.101	28.743	35.908	38.624	40.898	44.152	29.280	5.102
$G_0=4$	25.098	26.553	27.669	29.045	34.840	42.593	45.185	47.318	50.433	35.366	5.429
$G_0=5$	30.187	31.573	32.807	34.271	40.241	48.256	50.582	52.777	55.837	40.817	5.563

図 1 推定された $\max RT_2$ の極限分布



例1の他にも実証分析で応用することができる様々なトレンド関数を考察することが可能である。その極限分布は煩雑になるのでここでは報告しないが例1と例2において $q=2$ の場合における検定統計量の極限分布の数表は Kunitomo-Sato [1995] が与えている。

例3：日本のマクロ金融データではトレンド関数に非線形が見られることがある。こうした状況に対応するトレンド関数としては例えば外生変数として

$$\begin{aligned} z_t^* &= (1, DU_1(t), DT_1(t) - DT_2(t), DT_2(t), t, QT_1(t) - QT_2(t)), \\ z_{1t}^* &= (1, DU_1(t), DT_1(t) - DT_2(t)) \end{aligned}$$

を使うことが考えられる。ここで関数 $QT_i(t), i=1, 2$ は

$$QT_i(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t \leq T_i) \\ (t - T_i)^2 & (T_i < t \leq T) \end{cases}$$

で定められる2次関数である。この場合の統計量 RT_2 を $RT_2(2; \delta_1, \delta_2)$ で表しておこう。

例3ではトレンド関数の変化時点は既知と仮定して統計量の極限分布が求められた。変化時点が未知であると見なされる場合においては例2のように与えられた検定統計量を変更すればよい。次の例4における検定統計量の漸近分布の数表も Kunitomo-Sato [1995] が与えている。

例4：例2と同様に例3においても変化時点が未知の場合には検定統計量は

$$\sup_{0 < \delta_1 < \delta_2 < 1} RT_2(2; \delta_1, \delta_2)$$

として定義することができるのでこれを $\max_{\delta_1, \delta_2} RT_2(2; \delta_1, \delta_2)$ で表しておこう。

本節の締めくくりとして、ここで示したアプローチを用いることにより実はより一般的な状況を考察することができることに言及しておこう。4(2)節で示したように多次元時系列において構造変化点、あるいはトレンド変化点が複数ある場合でも3(2)節で導いた統計量の構成方法を使えば単位根検定や共和分検定を行うことができる。もし、変化点の位置を事前に指定したくなければ4(2)節のように統計量を構成すればよい。また、さらに複数の変化点を考察する場合には変化点の個数をいかに選ぶかが問題となろう。本節のアプローチからは変化点の最大個数が有限であることを仮定すれば原理的には検定方式を導くことができる。例えば例2を再び考察してみよう。

例5：例2において変化時点の個数が有限として最大可能性を q_0 としよう。変化点が q ($q \leq q_0$) 個あるとき検定統計量は $\max_{\delta_1, \dots, \delta_q} RT_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$ で与えられた。この形の統計量に対して何らかの意味での自由度 $d(\delta_1, \dots, \delta_q)$ を定めることが

できれば⁹、変化点の数を未知のときには自由度で修正した統計量

$$\max_{\delta_1, \dots, \delta_q} (1/d(\delta_1, \dots, \delta_q)) RT_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$$

をもとにさらに個数 q を動かして統計量

$$FRT_2(1; q_0) = \max_{0 \leq q \leq q_0} \max_{\delta_1, \dots, \delta_q} (1/d(\delta_1, \dots, \delta_q)) RT_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$$

を用いることができよう。

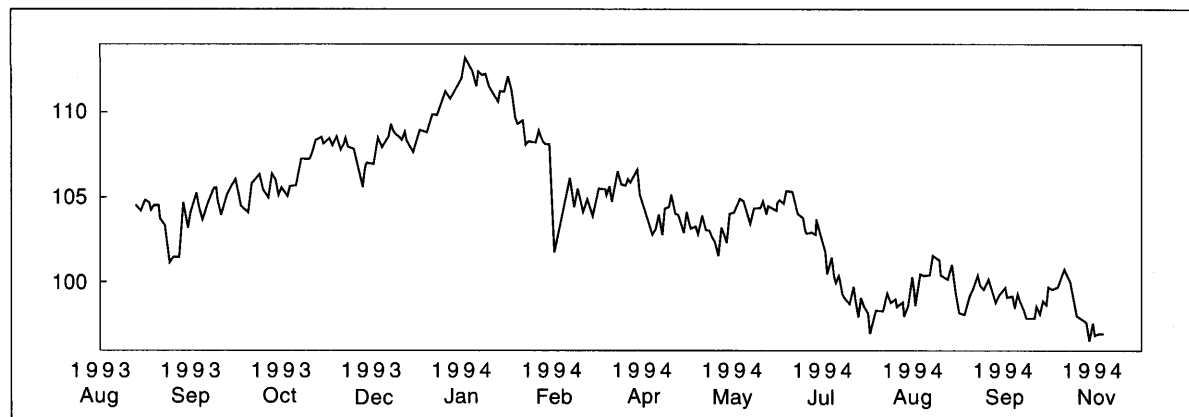
本節のはじめに言及したように単位根検定や共和分検定を行うためにこれまでに様々な検定統計量が提案されている。しかしながら、主要なマクロ経済時系列についての実証結果は必ずしも検定統計量に依存せずに一様な結果は得られていないと判断される。本稿が展開した方法を系統的に用いることによりなぜ実証分析により結果が異なるのかその原因を理解することができるようになることが期待されよう。

5. マクロ経済データ分析への応用例 —— 検定結果

本節では2種類のデータ・セットを使って前節で説明した検定を行った結果を報告する。第一のデータ・セットとしては代表的な金融時系列の例として外国為替レートを用いた。ここで使用したのは1993年8月2日～1994年10月27日において東京の外国為替市場で観察されたドル・円・レート及びドル・マルク・レートであり(図2)、日次為替レート・データとして外国為替市場が開かれて取引の行われた毎日の終値を用いた。第二のデータ・セットとしては代表的なマクロ経済時系列として1955年第2四半期～1993年第1四半期における日本の実質GDPと実質個人消費のデータを用いた(図3)。利用したデータは国民経済計算で報告されている季節調整済の四半期データである。また、実際の分析ではいずれの場合も初期値として最初の実系列の対数変換値を分析に用いた。

⁹ 通常 χ^2 分布にしたがう統計量の場合には自由度は $G_0 \times (G_0 + 1 + q)$ となるのでこれを使うのが一つの簡単な方法であろう。

図2 為替レート
USドルー円(東京)



USドルードイツ・マルク(東京)

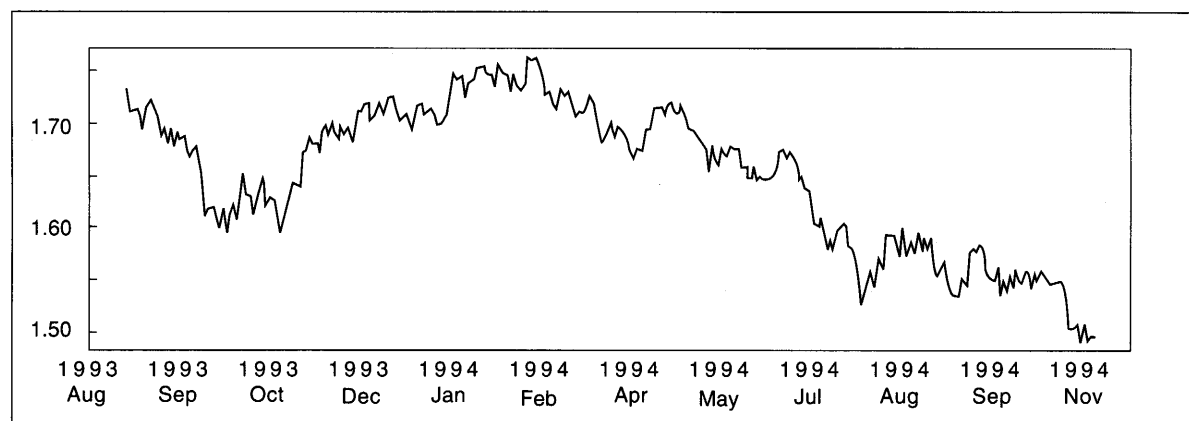
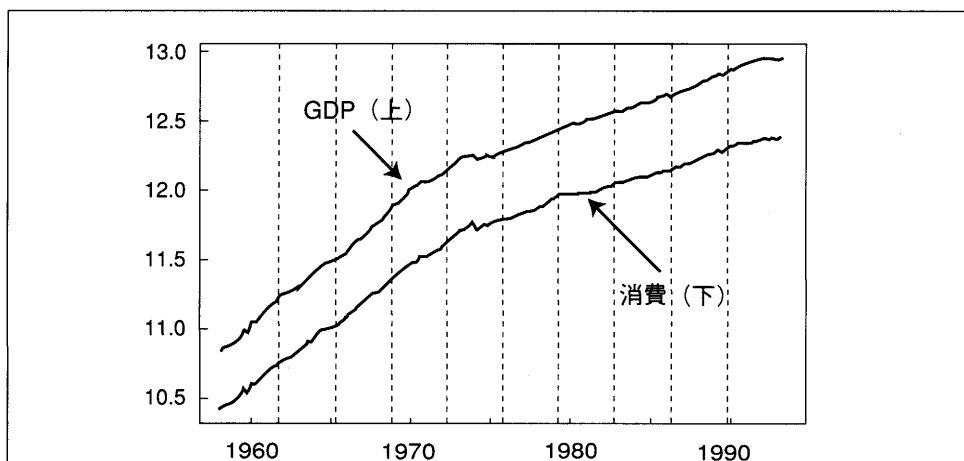


図3



(1) 為替レート

定常性の検定を行う前に自己回帰項部分のラグの次数 p を決定する必要がある。為替レートのデータを用いて推定した結果からあまり高次のラグ係数は有意とはならなかった。そこで $p = 2$ としてまず単位根についての尤度比検定を行った。表3は3節で説明したように無制約残差平方和 (URSS)、制約付残差平方和 (RRSS) 及び尤度比統計量の値をまとめたものである。ドル・円・レートのデータから計算された残差平方和は $\delta_1 = .35$ 付近で最も小さくなっている。さらにドル・円・レートのデータでは構造変化点が1個あるとき変化点に関する検定統計量の最大値は $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1) = 18.7991$ であった。ドル・マルク・レートのデータから計算された残差平方和は $\delta_1 = .15$ 付近で最も小さくなっている。さらにドル・マルク・レートの場合には構造変化点が1個あるとき変化点に関する検定統計量の最大値は $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1) = 22.8215$ であった。これに対して表2で与えられている極限分布の95%点は24.19である。したがって、5%有意水準でもドル・円レートとドル・マルクレートが単位根過程となる仮説は棄却できなかった。構造変化点がないことを仮定しても同様の結果が得られた。

表3 単位根検定—為替レート ($p=2$)

USドル—円

δ_1	LR	URSS	RRSS
0.05	8.2229	0.0114	0.0118
0.10	11.8329	0.0114	0.0118
0.15	12.4798	0.0113	0.0118
0.20	14.4460	0.0113	0.0118
0.25	13.7825	0.0112	0.0118
0.30	13.2549	0.0112	0.0117
0.35	18.6610	0.0110	0.0117
0.40	18.7991	0.0111	0.0118
0.45	11.6554	0.0114	0.0119
0.50	12.1527	0.0114	0.0118
0.55	11.4826	0.0114	0.0119
0.60	11.5083	0.0114	0.0119
0.65	12.1815	0.0114	0.0119
0.70	13.1485	0.0114	0.0119
0.75	13.8358	0.0114	0.0119
0.80	13.1132	0.0114	0.0119
0.85	13.3962	0.0114	0.0119
0.90	12.2612	0.0114	0.0119
0.95	11.7729	0.0114	0.0119

USドル—ドイツ・マルク

δ_1	LR	URSS	RRSS
0.05	5.3233	0.0114	0.0116
0.10	11.5485	0.0112	0.0116
0.15	19.0659	0.0109	0.0117
0.20	18.4411	0.0110	0.0117
0.25	18.2762	0.0110	0.0116
0.30	22.8215	0.0108	0.0117
0.35	20.6517	0.0108	0.0116
0.40	20.3671	0.0108	0.0116
0.45	14.9890	0.0111	0.0116
0.50	10.3565	0.0112	0.0116
0.55	11.0726	0.0112	0.0116
0.60	6.4159	0.0114	0.0116
0.65	5.1138	0.0114	0.0116
0.70	3.3655	0.0115	0.0117
0.75	6.0013	0.0115	0.0117
0.80	3.0852	0.0116	0.0117
0.85	4.8952	0.0115	0.0117
0.90	4.0973	0.0115	0.0117
0.95	2.7235	0.0115	0.0116

次に共和分検定の結果は表4にまとめておいた。2次元為替レートデータのデータでは構造変化点が1個あるとき変化点に関する尤度比検定統計量の最大値は $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1; G_0 = 1) = 13.7605$ 、 $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1; G_0 = 2) = 48.4236$ であった。ここで $LR_2(1; \delta_1; G_0 = 1)$ は帰無仮説 $H_2: r = 1$ の対立仮説 $H_{2A}: r = 2$ に対する尤度比統計量、 $LR_2(1; \delta_1; G_0 = 2)$ は帰無仮説 $H_2: r = 0$ の対立仮説 $H_{2A}: r = 2$ に対する尤度比統計量である。これに対して表2で与えられている極限分布の90%点は $G_0 = 1$ の場合には21.93、 $G_0 = 2$ の場合には40.07である。したがって、10%有意水準で共和分仮説を棄却できなかった。ちなみに、このデータでは2個の固有値の大きい方から求めた統計量 $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1; \lambda_2^*) = 34.5631$ の値も95%点31.40よりも大きかった。この統計量 $LR_2(1; \delta_1; \lambda_2^*)$ は帰無仮説 $H_2: r = 0$ の対立仮説 $H_{2A}: r = 1$ に対する尤度比統計量であるので、この統計量の数値も表1から共和分仮説と整合的となった。したがって、2次元データから推定された単位根の次元 G_0 は1となり、共和分関係が検出された。

実は為替レートデータの場合には分析結果はいずれもラグのとり方や変化点の選び方には結果はあまり依存しないことがわかっている。このことは二つの残差平方和はトレンドに変化点がないと見なして検定を行った結果とほとんど違いが生じないことを意味している。したがって、これまでに開発されている既存の検定方式を使うことによっても十分に信頼できる結果が得られると考えられよう。

表4 共和分検定—為替レート ($p=2$)

δ_1	λ_1^*	λ_2^*	LR($G_0=1$)	LR($G_0=2$)	LM($G_0=1$)	LM($G_0=2$)	W($G_0=1$)	W($G_0=2$)
0.05	0.0203	0.0420	5.9566	18.1454	5.8970	17.8383	6.0169	18.4602
0.10	0.0305	0.0658	8.9064	27.7642	8.7738	27.0434	9.0418	28.5132
0.15	0.0309	0.1014	9.0019	37.5994	8.8664	36.1258	9.1402	39.1647
0.20	0.0391	0.1012	11.3504	39.8811	11.1355	38.3344	11.5708	41.5218
0.25	0.0379	0.1002	10.9981	39.2758	10.7963	37.7653	11.2050	40.8774
0.30	0.0351	0.1260	10.2162	45.3435	10.0419	43.1649	10.3946	47.6911
0.35	0.0475	0.1225	13.7248	47.9401	13.4115	45.7233	14.0480	50.3192
0.40	0.0476	0.1242	13.7605	48.4236	13.4455	46.1560	14.0853	50.8597
0.45	0.0258	0.1193	7.5488	40.9162	7.4533	39.0088	7.6459	42.9668
0.50	0.0252	0.1112	7.3552	38.5619	7.2645	36.8825	7.4473	40.3584
0.55	0.0232	0.1201	6.7899	40.3733	6.7126	38.4609	6.8684	42.4310
0.60	0.0225	0.1047	6.5900	36.0609	6.5172	34.5685	6.6639	37.6519
0.65	0.0242	0.0854	7.0902	31.3433	7.0060	30.2921	7.1758	32.4502
0.70	0.0215	0.0794	6.3083	28.9274	6.2415	28.0181	6.3760	29.8818
0.75	0.0332	0.0837	9.6760	33.4724	9.5196	32.3845	9.8359	34.6149
0.80	0.0230	0.0804	6.7285	29.6106	6.6526	28.6726	6.8055	30.5954
0.85	0.0288	0.0772	8.3930	30.4097	8.2752	29.4930	8.5131	31.3693
0.90	0.0239	0.0763	7.0017	28.7656	6.9196	27.9025	7.0852	29.6691
0.95	0.0201	0.0764	5.8951	27.6968	5.8368	26.8550	5.9542	28.5789

(2) 所得・消費

ラグの次数 p はデータが四半期データであることを考慮して5とした。そこでまず単位根についての検定を行ってみたが、この例の場合もラグの次数の選び方によってほとんど検定結果は変わらなかった。ここで比較のために最近の実証分析でよく使われている Dickey-Fuller [1979] の統計量を計算すると単位根は所得と消費ともに棄却できなかったが、この結果は以前に行われた結果と整合的である。次に1個の変化点 (δ_1) がある場合の無制約残差平方和 (URSS)、制約付残差平方和 (RRSS) 及び尤度比統計量の値をまとめた結果を表5で報告しておくことにする。

表5 単位根検定—所得・消費 ($p=5$)

実質GDP

δ_1	LR	URSS	RRSS
0.05	18.8843	0.0159	0.0181
0.10	12.6797	0.0166	0.0181
0.15	16.0018	0.0163	0.0183
0.20	15.3319	0.0162	0.0181
0.25	18.3584	0.0156	0.0177
0.30	27.6683	0.0143	0.0174
0.35	14.9298	0.0144	0.0160
0.40	28.8146	0.0138	0.0169
0.45	16.4191	0.0147	0.0166
0.50	6.6378	0.0169	0.0177
0.55	6.7007	0.0169	0.0178
0.60	7.4405	0.0170	0.0179
0.65	8.8806	0.0170	0.0181
0.70	9.2234	0.0170	0.0181
0.75	10.5363	0.0169	0.0182
0.80	10.0556	0.0169	0.0182
0.85	13.2018	0.0166	0.0183
0.90	12.6687	0.0167	0.0183
0.95	10.6052	0.0168	0.0181

実質消費

δ_1	LR	URSS	RRSS
0.05	21.9292	0.0177	0.0207
0.10	17.2255	0.0183	0.0207
0.15	18.2663	0.0182	0.0207
0.20	18.6215	0.0180	0.0206
0.25	23.0714	0.0172	0.0203
0.30	24.3195	0.0167	0.0199
0.35	16.9494	0.0167	0.0188
0.40	32.1064	0.0152	0.0191
0.45	17.9438	0.0155	0.0176
0.50	7.0500	0.0183	0.0192
0.55	6.0274	0.0189	0.0197
0.60	6.0762	0.0188	0.0196
0.65	10.1811	0.0189	0.0203
0.70	10.4614	0.0189	0.0204
0.75	11.6834	0.0189	0.0205
0.80	13.1217	0.0188	0.0206
0.85	14.3732	0.0187	0.0207
0.90	14.0921	0.0188	0.0208
0.95	14.2124	0.0189	0.0209

この表からすぐにわかる問題は変化点の位置により検定結果が大きく異なることである。したがって、検定結果も変化点の取り方により大きく左右される。また変化点が端点に近い場合には統計量は変化点がないと仮定した場合に近くなっていることも観察されている。直観的には変化点として1973年前後にとるのが適当とも考えられるが、例えば変化点として1976年頃を選ぶと検定統計量が極めて小さくなる。この場合には2つの残差平方和が見かけ上であまり変わらない数値をとることが直接の原因であるが、トレンド変化点の位置を誤ると検定そのものに大きな影響を与えることが例証されていると解釈する事ができよう。したがって、構造変化点の選択に依存しない統計量の有意点を用いる必要があると考えられる。

実質GDPのデータでは構造変化点が1個あるとき変化点に関する検定統計量の最大値は $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1) = 28.8146$ であった。また実質消費のデータでは構造変化点が1個あるとき変化点に関する検定統計量の最大値は $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1) = 32.1064$ であった。これに対して表2で与えられている極限分布の90%点、95%点、97.5%点はそれぞれ21.93、24.19、25.72である。したがって、5%有意水準では実質GDPと実質消費についての単位根仮説は棄却された。このような単位根検定の結果は前にも言及した副島 [1994] やOhara [1994] が得た実証結果と整合的である¹⁰。

単位根の存在について否定的な結果を得たので共和分関係はないものと考えられる。そこで次にトレンドの共変動を表現する帰無仮説 H_3 の検定を行ってみた。具体的な仮説としてはいくつかの形が考えられるが構造変化点が1個ある共変動として変数 $z_t^* = (1, t, DT_t(\delta_1))$ 及び変数 $z_{1t}^* = 1$ を用いて計算した統計量の数値を表6にまとめておく。ここでの仮説は定数項を除いてトレンド関数が共変動していることを意味しているが、変化点を固定したときの自由度は $L = 1$ である。表6における尤度比統計量 ($LR(G_0 = 1)$) を含め $G_0 = 1$ のときの検定統計量 RT_3 の値は漸近分布の χ^2 (自由度1)と比較しても極めて小さな数値をとっている。したがってトレンド関数の共変動仮説を棄却できないと考えられる¹¹。

表6 共変動検定—所得・消費 ($p=5$)

δ_1	λ_1^*	λ_2^*	$LR(G_0 = 1)$	$LR(G_0 = 2)$	$LM(G_0 = 1)$	$LM(G_0 = 2)$	$W(G_0 = 1)$	$W(G_0 = 2)$
0.05	0.0091	0.0970	1.2827	14.3344	1.2769	13.7428	1.2885	14.9634
0.10	0.0081	0.0541	1.1380	8.5686	1.1335	8.3716	1.1426	8.7724
0.15	0.0080	0.0570	1.1257	8.9397	1.1212	8.7227	1.1302	9.1648
0.20	0.0081	0.0743	1.1308	11.2307	1.1263	10.8729	1.1354	11.6057
0.25	0.0087	0.1422	1.2283	19.9699	1.2230	18.7724	1.2337	21.2779
0.30	0.0083	0.2633	1.1639	34.1215	1.1592	30.5483	1.1688	38.2966
0.35	0.0085	0.4144	1.1912	50.0799	1.1862	42.4996	1.1963	59.6312
0.40	0.0123	0.4579	1.7210	54.8819	1.7105	45.9991	1.7315	66.3018
0.45	0.0176	0.1199	2.4588	18.4271	2.4375	17.5347	2.4804	19.3880
0.50	0.0136	0.0513	1.9045	8.9649	1.8917	8.7782	1.9174	9.1575
0.55	0.0099	0.0311	1.3937	5.7126	1.3868	5.6402	1.4006	5.7863
0.60	0.0070	0.0247	0.9799	4.4252	0.9765	4.3801	0.9833	4.4711
0.65	0.0026	0.0170	0.3692	2.7474	0.3687	2.7270	0.3697	2.7681
0.70	0.0022	0.0170	0.3167	2.6947	0.3164	2.6744	0.3171	2.7153
0.75	0.0039	0.0160	0.5468	2.7866	0.5457	2.7679	0.5479	2.8056
0.80	0.0065	0.0160	0.9186	3.1562	0.9156	3.1356	0.9216	3.1770
0.85	0.0135	0.0198	1.8909	4.6542	1.8783	4.6147	1.9036	4.6942
0.90	0.0136	0.0293	1.8992	5.9700	1.8865	5.8991	1.9120	6.0422
0.95	0.0093	0.0355	1.3077	6.2208	1.3017	6.1301	1.3138	6.3135

10 表1から日本経済におけるマクロ構造変化点がよく議論されているように1973年前後で既知とすればここの結果はさらに強化されることは明らかであろう。

11 変化時点を動かした場合の統計量の最大値は2.4588である。この統計量から統計的検定を行うには χ^2 分布の自由度を3程度にすればよいと考えられるが、いずれにしても仮説 H_3 を棄却できないのは明らかである。

ここでの実質GDPと実質消費の系列についての分析結果を次のようにまとめることができる。1次元時系列の単位根検定により構造変化点を含むときには両方ともに単位根仮説は統計的に棄却され、変化するトレンド関数を持つ定常時系列モデルが適当であるように判断される。また、検出された構造変化点を含むトレンド関数には仮説 H_3 を満たす意味での共変動関係が検出された。このトレンドに共変動関係が存在すると所得と消費に長期的な関係が存在することになるので一種の“長期の消費関数”と解釈することも可能である。また、その他に行った多くの計算結果からの経験的事実としては直接に共和分仮説をトレンドの共変動関係と区別することは難しいこともわかった。

6. 結論

経済時系列の計量分析においては最近になって確率的な意味での非定常性が問題となり、実証分析においてもしばしば単位根検定や共和分検定が行われるようになってきている。本稿ではまずこうした既存の統計的検定方法によりマクロ経済時系列や金融時系列から直接的に確率的非定常性を検出することには基本的に再検討すべき統計的問題があることを指摘した。

マクロ経済データや金融データを使って単純な線形統計的時系列モデルを当てはめると、しばしば線形定常時系列モデルよりもある種の非定常時系列モデルの方があてはまりのよいことが報告されている。単位根検定と呼ばれている統計的検定を用いるとしばしば単位根の存在が統計的に否定できない。しかしながら従来の統計的検定方法ではトレンドの扱いが機械的で単純化し過ぎていることが多いと判断することができよう。特に所得や消費を始めとする多くのマクロ経済変数の長期的変動では時には大きな構造的な変化が起こると見ることはそれほど奇異な見方とは考えられない。むしろ少なくとも戦後の日本におけるマクロ変数の変動を観察する場合には比較的自然な考え方であろう。これに対して既に存在する非定常性の検定では第2節で示したようにトレンド関数の変化が検定結果に対して決定的な影響を及ぼす可能性がある。したがってこの問題をより真剣に検討すべきであるように判断される。少なくとも、日本のマクロ経済時系列に関する限りこれまでに行われたいくつの実証研究は統計的に再検討すべきであるように結論される。

次に本稿では経済時系列における確率的トレンドの有無をデータから検証しようとする場合の統計的方法として特に共和分関係が存在する場合についての新しい検定統計量とそれに基づく検定方法を提唱した。本稿の枠組みでは共和分の次元 r がゼロの場合には共和分仮説は単位根仮説に一致するので、多次元時系列から構成される検定統計量の特殊な場合として構造変化を含む単位根仮説に対する尤度比検定統計量などを求めることができる。本稿で得られた1次元の統計量はPerron [1979] が提案している t -統計量などに対しても検出力が大きいことが期待できる。したがって、本稿で提案した検定統計量は多次元時系列における共和分仮説の検定問題

のみでなく 1 次元時系列における構造変化を含んだ単位根検定にも役立つはずである。ここで得られた統計量は帰無仮説の下で標本数が増加するにつれてブラウン運動の汎関数に収束するので既存の数表を利用することは可能ではない。そこでシミュレーションにより漸近分布のパーセント点を求めておいたが、これらの分布表は様々な実証分析において役立つことが期待できよう。

さらに本稿ではここで提案する方法を用いることにより様々な検定方式を統一的に理解できることを示したつもりである。他方、こうした分析を系統的に行うことは他のアプローチでは困難であろう。むろん、本稿で提案した検定方法についても検出力など今後の考察を待つ課題も多いことも付言しておく。

最後に本稿で提案した方法を用いて若干の日本のマクロ時系列データの分析を行った。本稿で報告するデータ分析は実証的な意味においては不完全で準備的なことは否めないが、構造変化を含む時系列に対して単純な単位根検定や共和分検定を行うときには「見かけ上の単位根」を検出するなどの問題が生じることがある。すなわち単純な統計的時系列モデルを定式化した上で検定方法を機械的にマクロ時系列に適用することには多くの問題があると考えられる。時系列データ分析への含意としては機械的に統計的な単位根検定を適用してゆくよりも、むしろモデル構築の際にはトレンド関数の変化など経済構造に関する様々な知識を利用してゆくことの方が実用的な観点からもより重要であるように結論づけられよう。

7. 数学付録

●定理 1 の証明

[i] (D) $\Leftrightarrow$ (C): 条件 (D-i) の下で (11) から行列 α, β を構成する各列ベクトルと直交するベクトルから階数 $G_0 (= G - r)$ の $(G \times G_0)$ 行列 $\alpha_{\perp}, \beta_{\perp}$ をそれぞれ選ぶことができる。そこで行列多項式 $A(\lambda)$ に対して左と右からそれぞれ正則行列 $(\alpha, \alpha_{\perp})', (\beta, \beta_{\perp})'$ を乗じると (9) より固有方程式は

$$\begin{aligned} & |(\lambda - 1)(\alpha, \alpha_{\perp})' D(\lambda)(\beta, \beta_{\perp}) - \begin{pmatrix} \alpha' \alpha \beta' \beta & O \\ O & O \end{pmatrix} \lambda^{p-1}| \\ &= (\lambda - 1)^{G_0} |(\alpha, \alpha_{\perp})' D(\lambda)((\lambda - 1)\beta, \beta_{\perp}) - \begin{pmatrix} \alpha' \alpha \beta' \beta & O \\ O & O \end{pmatrix} \lambda^{p-1}| \\ &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

となる。この方程式には G_0 個の単位根があることは明らかである。次に多項式行列 $A(\lambda)^*$ を

$$A(\lambda)^* = (\alpha, \alpha_{\perp})' D(\lambda)((\lambda - 1)\beta, \beta_{\perp}) - \begin{pmatrix} \alpha \alpha' \beta \beta' & O \\ O & O \end{pmatrix} \lambda^{p-1} \quad (44)$$

とおいて $\lambda = 1$ を代入すると、

$$A(1)^* = \begin{pmatrix} -\alpha\alpha' & \beta\beta' & \alpha'D(1)\beta_{\perp} \\ 0 & & \alpha'_{\perp}D(1)\beta_{\perp} \end{pmatrix}$$

となる。

ここで条件 (D-ii) より $|\alpha'_{\perp}D(1)\beta_{\perp}| \neq 0$ となることから $|A(1)^*| \neq 0$ となる。さらに条件 (D-iii) を用いれば仮定Aの下で条件 (C)が導かれる。

[ii] (C) $\Rightarrow$ (D): 逆に条件 (C) を仮定すると条件 (D-i) が成立する。なぜならば、もし $r = 0$ あるいは $r = G$ とすると (9) を用いた議論より矛盾が生じる。また条件 (D-ii) と (D-iii) は [i] の証明から明らかである。(QED)

●定理 3 の証明の概要

真の時系列モデルの自己回帰部分の次数が $p = 1$ であり、固有方程式 (4) のすべての根の絶対値は 1 よりも小さいので、階差系列 $\{\Delta y_t\}$ は定常過程

$$\Delta y_t = \Gamma \Delta z_t^{\dagger} + A \Delta y_{t-1} + \Delta v_t \quad (45)$$

にしたがっている (ただし (25) における係数行列を $A_1 = A$ とおいたことに注意する)。このとき真のトレンド関数を表現する外生変数は

$$\Delta z_t^{\dagger} = \begin{pmatrix} DU_q(t) \\ \vdots \\ DU_1(t) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_t^{**} \\ z_t^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。実際に推定で使用する外生変数ベクトル $((1+q_1) \times 1)$ は変数順序を並べ変えて $z_t^{*'} = (DU_{q_1}(t), \dots, DU_1(t), 1)$ なので新たに変数ベクトル $z_t^{**}((q-q_1) \times 1)$ を上式の右辺で定義した。ここで $2(q+1) \times 1$ の変数ベクトル

$$a_t = \begin{pmatrix} DT_q(t) \\ \vdots \\ DT_1(t) \\ t \\ DU_q(t) \\ \vdots \\ DT_1(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとり、この変数ベクトルに対応する基準化行列を

$$D_T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T\sqrt{T}} \mathbf{I}_{q+1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \frac{1}{\sqrt{T}} \mathbf{I}_{q+1} \end{pmatrix},$$

とおこう。これは標本数 T が大きいとき変数 t , $DT_i(t) (i=1, \dots, q)$ の収束次数は $T\sqrt{T}$ であることによる¹²。さらに変数ベクトル $\mathbf{a}_i$ の各要素は線形独立変数なので $T \rightarrow \infty$ につれて

$$D_T^{-1} \sum_{i=1}^T \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i' D_T'^{-1} \rightarrow \mathbf{M}^*$$

により得られる極限行列 $\mathbf{M}^*$ は正定符号行列である。

次に階差系列 $\{\Delta \mathbf{y}_t\}$ を (非確率的) トレンド部分と確率的部分とに分解して $\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\psi}(t)$ としよう。ただし2つの変数ベクトルは

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \boldsymbol{\Gamma} \Delta \mathbf{z}_{t-i}^*$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \Delta \mathbf{v}_{t-i},$$

で定める。そこで変数ベクトル $\mathbf{z}_{1t}' = \mathbf{z}_t'^*$ に対する射影行列を

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \Delta \mathbf{Y}' \bar{\mathbf{P}}_Z^* \Delta \mathbf{Y} &= \frac{1}{T} \boldsymbol{\Xi}' \bar{\mathbf{P}}_Z^* \boldsymbol{\Xi} \\ &\quad + \frac{1}{T} \boldsymbol{\Xi}' \bar{\mathbf{P}}_Z^* \boldsymbol{\Psi} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\Psi}' \bar{\mathbf{P}}_Z^* \boldsymbol{\Xi} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\Psi}' \bar{\mathbf{P}}_Z^* \boldsymbol{\Psi} \end{aligned} \quad (46)$$

と分解して挙動を分析する。(46) 式においては $\boldsymbol{\Xi} (T \times K)$ と $\boldsymbol{\Psi} (T \times G)$ はそれぞれベクトル $\boldsymbol{\xi}(t)'$ と $\boldsymbol{\psi}(t)'$ を並べて作った行列である。右辺にあらわれてる4つの項中で第2項と第3項は $o_p(1)$ であることが容易にわかるので漸近的には無視することができる。第4項については漸近的に

$$\begin{aligned} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \boldsymbol{\Psi}' \bar{\mathbf{P}}_Z^* \boldsymbol{\Psi} &= \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \boldsymbol{\Psi}' \boldsymbol{\Psi} \\ &= \sum_{i,i'=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta \mathbf{v}_{t-i} \Delta \mathbf{v}_{t-i'}' \right) \mathbf{A}^{i'} \\ &= 2 \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^{i'} (= 2 \boldsymbol{\Omega}^*) \end{aligned} \quad (47)$$

12 例えば簡単な計算から $\sum_{t=1}^T t^2 = O(T^3)$ となる。これは $O < \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T^3) \sum_{t=1}^T t^2 < +\infty$ という意味である。同様に $\sum_{t=1}^T DT_i(t) DT_j(t) = O(T^3)$, $\sum_{t=1}^T DU_i(t) DU_j(t) = O(T)$ などの関係が得られる。

となる。ここで行列 Ω^* は最後の等式で定義したが、 Ω が正定符号行列なので Ω^* も正定符号行列である。(46) の第 1 項については

$$\begin{aligned} C_1^* &= \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Xi' \bar{P}_Z^* \Xi \\ &= \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \Xi' \Xi - \frac{1}{T} \Xi' Z^* \left(\frac{1}{T} Z^{*'} Z^* \right)^{-1} \frac{1}{T} Z^{*'} \Xi \right) \end{aligned} \quad (48)$$

により行列 C_1^* を定めると、極限行列 M^* が正定符号行列なので行列 C_1^* の階数は $q - q_1$ となることがわかる。

次に定理 3 及び定理 5 においてしばしば利用する射影行列の分解公式を念のために挙げておくことにする¹³。

補題 1: 行列 (B, C) に対して射影行列は次のように分解できる。

$$\bar{P}_{B, C} = \bar{P}_B C - \bar{P}_B C (C' \bar{P}_B C)^{-1} C' \bar{P}_B. \quad (49)$$

ただし D^{-1} は行列 D の一般化逆行列である。

ここで変数ベクトル $z'_t = (z_{1t}', y_{1t}')'$ に対して上の分解公式を適用すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \Delta Y' \bar{P}_Z^* \Delta Y - \frac{1}{T} \Delta Y' \bar{P}_Z \Delta Y \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \Delta Y' \bar{P}_Z^* Y_{-1} D_{2T}^{-1} (D_{2T}^{-1} Y_{-1}' \bar{P}_Z^* Y_{-1} D_{2T}^{-1})^{-1} D_{2T}^{-1} Y_{-1}' \bar{P}_Z^* \Delta Y \frac{1}{\sqrt{T}} \end{aligned} \quad (50)$$

と変形できる。ここで基準化行列 D_{2T}^{-1} として $((q+1)+1+(G-(q+2)) \times G$ の部分行列に分割した行列

$$D_{2T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T\sqrt{T}} E'_1 \\ \frac{1}{\sqrt{T}} E'_2 \\ \frac{1}{\sqrt{T}} E'_3 \end{pmatrix}$$

を $E'_3 F \Gamma = 0$ となるように選ぶことができる。ただし $G \times G$ 行列 F は

$$F = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$$

により定めた。ここで系列 $\{a_t\}$ の積和に関する結果を利用することにより、 $T \rightarrow \infty$ のときに

13 例えば Anderson-Kunitomo [1992b] の数学付録(A.13)を参照されたい。線形代数における射影子の意味から直観的な解釈が可能である。

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} D_{2T}^{-1} Y'_{-1} \bar{P}_Z^* Y_{-1} D_{2T}'^{-1} = M_{22.1} > 0 \quad (51)$$

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \Delta Y' \bar{P}_Z^* Y_{-1} D_{2T}'^{-1} = N_{2.1} \quad (52)$$

となるような正定符号行列 $M_{22.1}$ 及び非負定符号行列 $N_{2.1}$ が存在することを示すことができる。このとき行列 $N_{2.1}$ の階数は $(q - q_1) + (G - q - 1) = G - q_1 - 1$ となるので行列

$$C_2^* = N_{2.1}' M_{22.1}^{-1} N_{2.1}$$

の階数は $G - q_1 - 1$ である¹⁴。

さらに確率極限

$$C_3^* = \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Delta Y' \bar{P}_Z \Delta Y = 2\Omega^* + C_1^* - C_2^* \quad (53)$$

により行列 C_3^* を定める。ここで極限行列 M^* を用いると正定符号行列となることが確かめられる¹⁵。

以上の考察から固有方程式

$$\left| \frac{1}{T} \Delta Y' (\bar{P}_{Z_1} - \bar{P}_Z) \Delta Y - \lambda^* \frac{1}{T} \Delta Y' \bar{P}_Z \Delta Y \right| = 0$$

の確率極限は

$$|C_2^* - \left(\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \lambda^* \right) C_3^*| = 0 \quad (54)$$

で与えられる。(54) 式において $G \times G$ 行列 C_2^* の階数は $G - q_1 - 1$ なので定理の結果を得る。(QED)

●定理4の証明

[i] 仮定の下で定理1の証明より固有方程式

$$|A(\lambda)^*| = 0$$

のすべての根の絶対値は1よりも小さい。したがって、行列 $A(\lambda)^*$ に対応するラグ多項式を

14 確率極限 M^* の形及び補題1とを用いて行列 $N_{2.1}$ の階数を計算することができるが、詳細は省略する。

15 この証明はやや複雑である。要するに補題1と行列 Ω が正定符号行列であることを利用して行列 $\Omega^* + C_1^* - C_2^*$ が非負定符号行列になることを示せばよいが詳細は省略する。

$$\begin{aligned}\Pi(L) &= L^p A(L^{-1})^* \\ &= (\alpha, \alpha_\perp)' [I_m - \sum_{i=2}^p B_i L^{i-1}] ((1-L)\beta, \beta_\perp) - \begin{pmatrix} \alpha' & \alpha\beta' & \beta & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} L \quad (55)\end{aligned}$$

により定めれば、行列多項式 $\Pi(L)$ は L の多項式として反転可能である。ここで行列多項式 $A(\lambda)$ に対するラグ多項式を

$$A(L) = I_G - \sum_{i=1}^p A_i L^i$$

とおこう。このとき (9) と同様に式を変形すると簡単な計算から

$$(\alpha, \alpha_\perp)' A(L) ((1-L)\beta, \beta_\perp) = (1-L)\Pi(L)$$

と書き直すことができる。行列多項式 $\Pi(L)$ は反転可能であるから

$$\Delta y_t^* = ((1-L)\beta, \beta_\perp) \Pi(L)^{-1} (\alpha, \alpha_\perp)' (\Gamma z_t^* + v_t), \quad (56)$$

により時系列 $\{\Delta y_t^*\}$ を定めることができる。このとき

$$(\alpha, \alpha_\perp)' A(L) \Delta y_t^* = (\alpha, \alpha_\perp)' \Delta(\Gamma z_t^* + v_t)$$

となるので $\{\Delta y_t^*\}$ から構成された $\{y_t^*\}$ はもとの確率過程 $\{y_t\}$ に一致する。したがって、行列多項式を

$$C(L) = ((1-L)\beta, \beta_\perp) \Pi(L)^{-1} (\alpha, \alpha_\perp)', \quad (57)$$

により定めることができる。ここで形式的に $L=1$ を代入すれば

$$\begin{aligned}C &= C(1) \\ &= (0, \beta_\perp) \begin{pmatrix} -\alpha' & \alpha\beta' & \beta & \alpha' D(1)\beta_\perp \\ 0 & & & \alpha'_\perp D(1)\beta_\perp \end{pmatrix}^{-1} (\alpha, \alpha_\perp)' \\ &= \beta_\perp (\alpha'_\perp D(1)\beta_\perp)^{-1} \alpha'_\perp\end{aligned}$$

となる。したがって、この表現から $G \times G$ 行列 C の階数は G_0 となることわかる。行列多項式 $\Pi(L)^{-1}$ を展開するとき L^k の係数は正数 q_2 , $0 < \rho < 1$ が存在して $O(k^{\rho_2} \rho^k)$ となるので多項式は収束する¹⁶。仮説 H_2 の下では行列 $(\Gamma_2, B^*) = \alpha(\gamma'_2, \beta')$ となるので

$$C\Gamma_2 = 0$$

である。

16 例えばAnderson-Kunitomo [1992a] の数学付録の補題5を利用すればよいが、線形代数における行列の標準形についての議論を使う必要がある。

[ii]:次に(i)より

$$C(L) - C = (1-L)(\beta, O)\Pi(L)^{-1}(\alpha, \alpha_{\perp})' \\ + (O, \beta_{\perp})[\Pi(L)^{-1} - \Pi(1)^{-1}](\alpha, \alpha_{\perp})'$$

と書けることに注意する。さらに

$$\Pi(L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi^{(k)} L^k$$

と展開すると、 $\Pi^{(k)} = O(k^{q_2} \rho^k)$ であるので

$$\Pi(L)^{-1} - \Pi(1)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi^{(k)} L^k - \sum_{k=0}^{\infty} \Pi^{(k)} \\ = (1-L) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=k+1}^{\infty} -\Pi^{(j)} \right] L^k$$

と変形できる。ここで別の正数 q_3 が存在して

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} -\Pi^{(j)} \right\| = O(k^{q_3} \rho^k)$$

となることがわかる。そこで行列多項式 $C_1(L)$ を

$$C_1(L) = (\beta, O)\Pi(L)^{-1}(\alpha, \alpha_{\perp})' + (O, \beta_{\perp}) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=k+1}^{\infty} -\Pi^{(j)} \right] L^k (\alpha, \alpha_{\perp})' \quad (58)$$

とおけば、 $C_1(L)$ は定理 3 (iii) のように展開できることがわかる。トレンド部分については $C\Gamma_2 = O, z_{1t}^* = \Delta z_{2t}^*$ であることに注意すると、

$$C(L)\Gamma z_t^* = C(1)\Gamma_1 z_{1t}^* + C_1(L)(\Gamma_1 \Delta z_{1t}^* + \Gamma_2 \Delta z_{2t}^*) \\ = (1-L)(C(1)\Gamma_1 z_{2t}^* + C_1(L)(\Gamma_1 z_{1t}^* + \Gamma_2 z_{2t}^*)) \quad (59)$$

と書き直すことができる。そこで右辺のラグ多項式をまとめて $(1-L)C_2(L)z_t^*$ とおくことにより $C_2(L)$ を定義すればよい。以上の議論から行列多項式 $C_2(L)$ も定理 3 (iii) のように展開できることがわかる。

[iii]:最後にラグ多項式 $A(L)$ を変形して

$$A(L) = -\alpha\beta' + (1-L)A^{**}(L)$$

とおこう。ただし

$$A^{**}(L) = I_G + \alpha\beta' - \sum_{i=2}^p B_i L^{i-1}$$

である。この表現を使って $\alpha' A(L) y_t$ を求めると

$$-\alpha' \alpha \beta' y_t + \alpha' A^{**}(L) \Delta y_t = \alpha' \Gamma_1 z_{1t}^* + \alpha' \Gamma_2 z_{2t}^* + \alpha' v_t$$

となる。仮定より $\gamma'_2 = (\alpha' \alpha)^{-1} \alpha' \Gamma_2$ となるので、期待値については

$$E(\beta' y_t + \gamma'_2 z_{2t}^*) = (\alpha' \alpha)^{-1} \alpha' A^*(L) E(\Delta y_t) - (\alpha' \alpha)^{-1} \alpha' \Gamma_1 \Delta z_{2t}^* \quad (60)$$

なる関係を得る。さらに (28) を用いれば定理 4 (iv) が示される。(QED)

●定理 5 の導出の概要

帰無仮説の下での漸近分布の導出は Kunitomo [1996] の定理 4 の証明を少し修正することにより可能となる。簡単のために $p = 2$ としておく。帰無仮説の下で統計量のクラス RT_2 の分布は漸近的に

$$RT_2' = \text{tr}\{U'(\bar{P}_{ZD} - \bar{P}_Z)U\Sigma^{-1}\} \quad (61)$$

と同等になる。ここで変数ベクトルは $z_t' = (z_{1t}', y_{1t}', \Delta y_{1t}')$, $z_{1t}' = (z_{1t}', \Delta y_{1t}')$ とおいた。 $T \times G_0$ 行列 U と $G \times G_0$ 行列 Σ は

$$U = V\alpha_{\perp}, \Sigma_{\perp} = \alpha'_{\perp} \Omega \alpha_{\perp}$$

と与えられる。また (61) の右辺に表れる行列 D は $(G + K_2^*) \times (r + (K_1^* + (p-1)G))$ の行列に分割でき、 $r \times r$ 行列 $|\alpha^*| \neq 0$ 行列を使って

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \alpha^*, \begin{pmatrix} I_{K_1^* + (p-1)G} \\ O \end{pmatrix} \right\}$$

と表すことができる。ここで行列 (Y_{-1}, Z_2^*) の射影行列を 3 つに分割して行列 $F_1 = Y_{-1} \beta + Z_2^* \gamma_2$, $F_2 = Y_{-1} \alpha_{\perp} + Z_2^* \gamma_{2\perp}$, Z_2^* による射影行列に分解できることに注意する。いま $F_3 = \Delta Y_{-1}$ として行列 $F = (F_1, F_2, F_3)$ とおこう。このとき Kunitomo [1996] の定理 2 の証明と同様の議論より

$$\begin{aligned} U' \bar{P}_Z U &= U' (\bar{P}_Z^* - \bar{P}_Z^* F (F' \bar{P}_Z^* F)^{-1} F' \bar{P}_Z^*) U \\ &\equiv U' (\bar{P}_Z^* - \bar{P}_Z^* P_{F_2} \bar{P}_Z^* \\ &\quad - \bar{P}_Z^* (F_1, F_3) (F_1, F_3)' \bar{P}_Z^* (F_1, F_3))^{-1} (F_1, F_3)' \bar{P}_Z^*) U \end{aligned}$$

となる。ここで定理 4 より

$$\bar{P}_Z^* F_2 \equiv \bar{P}_Z^* S_{-1} C(1)' \alpha_{\perp} = \bar{P}_Z^* S_{-1}$$

と表現される。ただし $T \times G$ 行列 S_{-1} の第 t 行は y_{t-1}' であり、 $T \times G_0$ 行列 U の第 t 行は $u_t' = v_t' C(1)' \alpha_{\perp}$ と与えられる。また便宜上のために初期値について $v_0 = v_{-1} = \dots = O$ を仮定しておこう。

全く同様に

$$U' \bar{P}_{ZD} U \\ \equiv U' (\bar{P}_{Z_1^*} - \bar{P}_{Z_1^*} (F_1, F_3) (F_1, F_3)' \bar{P}_{Z_1^*} (F_1, F_3))^{-1} (F_1, F_3)' \bar{P}_{Z_1^*} U$$

で与えられる。ここで仮定の下で $\{\Delta Y_{-1}\}$ は定常確率過程 $\{\Delta y'_{t-1}\}$ の系列を並べて作った $T \times G_0$ 行列なので

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} U' \bar{P}_{Z^*} \Delta Y_{-1} = \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} U' \bar{P}_{Z_1^*} \Delta Y_{-1} \\ = O$$

となることは明らかである。そこで漸近的には

$$RT'_2 \equiv \text{tr}\{U' (\bar{P}_{Z_1^*} - \bar{P}_{Z^*} + \bar{P}_{Z^*} P_{F_2} \bar{P}_{Z^*}) U\} \\ \equiv \text{tr}\{U' \bar{P}_{Z_1^*} U\} - \text{tr}\{U' (\bar{P}_{Z^*} - \bar{P}_{Z^*} F_2 (F_2' \bar{P}_{Z^*} F_2)^{-1} F_2' \bar{P}_{Z^*}) U\} \\ \equiv \text{tr}\{U' \bar{P}_{Z_1^*} U\} - \text{tr}\{U' \bar{P}_{Z^*, S_{-1}^*} U\} \\ = \text{tr}\{U' P_{Z^*, S_{-1}^*} U\} - \text{tr}\{U' \bar{P}_{Z_1^*} U\} \quad (62)$$

で与えられる。ここで上式の第1項が

$$\text{tr}\{U' (Z^*, S_{-1}^*) D_T'^{-1} (D_T^{-1} (Z^*, S_{-1}^*)' (Z^*, S_{-1}^*) D_T'^{-1})^{-1} D_T^{-1} (Z^*, S_{-1}^*)' U\}$$

と書き換えられる点に注意する。さらに基準化行列としては $(K^* + G_0) \times$ 行列 $(K^* + G_0)$ 行列

$$D_T^{-1} = \begin{pmatrix} D_T^{*-1} & O \\ O & \frac{1}{TN} I_{G_0} \end{pmatrix}$$

を使うことにしよう。そこで Kunitomo [1996] の定理1を適用すると (62) の第1項は

$$\text{tr}(\tilde{N}' \tilde{M}^{-1} \tilde{N})$$

に収束することがわかる。第2項も同様の議論を適用すれば定理の結果が得られる。(QED)

参考文献

- 副島 豊、「日本のマクロ変数の単位根検定」、『金融研究』、第13巻第4号、日本銀行金融研究所、1994年
- Anderson, T. W., “Estimating Linear Restrictions on Regression Coefficients for Multivariate Normal Distributions,” *Annals of Mathematical Statistics*, 22, 1951, pp. 327-351.
- , *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, Second Edition, John-Wiley, 1984.
- and Naoto Kunitomo, “Asymptotic Distributions of Regression and Autoregression Coefficients with Martingale Differences,” *Journal of Multivariate Analysis*, 40, 1992a, pp. 221-243.
- and ———, “Tests of Overidentification and Predeterminedness in Simultaneous Equation Models,” *Journal of Econometrics*, 54, 1992b, pp. 49-78.
- and ———, “Asymptotic Robustness of Tests of Overidentification and Predeterminedness,” *Journal of Econometrics*, 62, 1994, pp. 383-414.
- Billingsley, P., *Convergence of Probability Measure*, New York: John Wiley and Sons, 1968.
- Dickey, D. A. and W. A. Fuller, “Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root,” *Journal of the American Statistical Association*, 74, 1979, pp. 427-431.
- and ———, “Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root,” *Econometrica*, 49(4), 1981, pp. 1057-1072.
- Engle, R. and C. W. J. Granger, “Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing,” *Econometrica*, 55(2), 1987, pp. 251-276.
- Fuller, W. A., *Introduction to Statistical Time Series*, John-Wiley, 1976.
- Johansen, S., “Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models,” *Econometrica*, 59(6), 1991, pp. 1551-1580.
- Kunitomo, N., “Tests of Unit Roots and Cointegration Hypotheses in Econometric Models,” *Japanese Economic Review*, 47(1), 1996, pp. 79-109.
- and S. Sato, “Tables of Limiting Distributions Useful for Testing Unit Roots and Cointegration with Multiple Structural Breaks,” unpublished manuscript, 1995.
- Ohara, H., “Unit Roots Test with Unknown Trend Breaks: A Theory and Application to Japan and U.S. Macro Time Series,” unpublished manuscript, Institute of Social Science, University of Tokyo, 1994.
- Perron, P., “The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis,” *Econometrica*, 57(6), 1989, pp. 1361-1401.
- Phillips, P.C.B. and S. Ouliaris, “Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration,” *Econometrica*, 58(1), 1990, pp. 165-193.
- and P. Perron., “Testing for a Unit Root in Time Series Regression,” *Biometrika*, 72(2), 1988, pp. 335-346.