金利リスクの統合管理について

池森俊文

要　旨

銀行の抱える金融リスクの中で、金利リスクは最も影響度の大きいものの一つである。本稿では、この金利リスクを統合的に管理するための理論的な枠組みについて考える。

そのために、ほぼ業界標準が出来上がりつつあると思われる「トレーディング取引」の市場リスク管理の方法、すなわち損益を時価ベースで捉え、市場リスク要因が変動することに対する時価損益の感応度によって市場リスクの程度を計測し、さらにVaR（Value at Risk）手法によって様々な市場リスク要因に起因するリスク量を統合化する方法を出発点とする。

その手法の中で、特に金利リスク計測に独特の問題である「金利の期間構造」の変動を処理する方法として、バケット分解の方法と変動成分分解の方法を取り上げ、それぞれの方法の概略と相互の関係について検証する。さらに、多通貨ポートフォリオの抱える金利リスクと為替リスクを整合的に計測するための工夫についても考える。

次に、この時価評価をベースとする「トレーディング取引」の市場リスク管理の方法を、期間損益ベースでの管理が一般的となっている「バンキング取引」の損益計測や金利リスク計測に関係付ける方法を提案し、感応度分析に関しては両者にある程度整合的な対応関係があることを示す。しかし、VaR分析に関しては、満期までの保有という「バンキング取引」に特有の性質を考慮すると、時価損益をベースとした「トレーディング取引」の金利リスク量の計測方法が、必ずしも単純に「バンキング取引」に延長できないと考え、各年度の期間損益ベースの損益が金利変動の周期性に対していかに変動するか、という設定の下で新しい金利リスク量の定義を試みる。

その他、金利リスクとしての期限前解約の問題や、金利リスクの管理と信用リスクの定量化との関係についても考える。

キーワード： 期間損益、時価評価、感応度分析、VaR分析、主成分分析、金利の期間構造、金利変動の周期性

池森俊文　株式会社日本興業銀行フィナンシャルエンジニアリング部

本稿は、日本銀行金融研究所から委託を受けた池森が、1996年6月に日本銀行で開催された「フィナンシャルリスクに関するワークショップ」へ提出した論文に加筆修正を加えたものである。同ワークショップ参加者の方々から有益なコメントを多数頂戴したことをここに記し感謝したい。

本稿で展開する内容のうち、採用した手法や意見に係わるものについては、あくまでも著作者の私見であり、かならずしも著作者の所属する株式会社日本興業銀行の見解ではないことを、ご了解いただきたい。

1. はじめに

銀行の抱える金融リスクのなかで、金利リスクは最も影響度の大きいものの一つである。実際、銀行のバランスシートを構成する資産負債取引あるいはオフバランス取引のうちのほとんどが、何らかの形で金利変動によって影響を受けるような性質を有していることがわかる。

これらの各種取引が準拠する金利には、随時変化する金利（市場金利）や非定期的に変更される金利、異なる満期の金利、異なる信用度の取引に対する金利など、さまざまなものが存在するが、少なくとも同一通貨の金利相互の間には、かなり強い連動関係が見られる。したがって、金利変動に関するリスクを統合的な方法によって集約することができれば、効率的なリスク管理を行うことができることになる。

ところで“統合管理”という場合には、いろいろな要素を“網羅的に”かつ“整合的に”管理することを意味する。金利リスクの管理において考慮すべき“網羅性”と“整合性”には、次のような要素が考えられる。

①管理対象に関するもの

a．取引種類に関する統合性（オンバランス取引とオフバランス取引、各種満期等）

b．取引目的に関する統合性（トレーディング取引とバンキング取引）

c．金利変動に起因するその他リスクとの統合性（期限前解約リスク等）

②管理内容に関するもの

d．損益計測との統合性

e．現場における管理と経営における管理との統合性（感応度分析とVaR分析）

f．リスク計測とリスク制御との統合性（リスク感応度の調整等）

本稿では、銀行の抱える金利リスクの計測手法について、すでにある程度の業界標準ができあがってきたと思われる「トレーディング取引の管理手法」から出発して、これらの要素をできるだけ広範囲に“統合化”できるような計測手法の枠組み作りを試みたい。

2. トレーディング取引における金利リスク計測

トレーディング取引の市場リスク計測手法については、銀行の中でほぼ業界標準ができあがりつつあるように思われる。それは具体的には次のように構成される。

(1) 金融取引の評価価格

すべての金融取引は、キャッシュフローによって表現することができる。キャッシュフローによって表現することにより、オンバランス・オフバランスなどの各種の金融商品を統一的に扱うことができる。そのうち最も簡単な金融取引は、将来に渡ってキャッシュフローの大きさがすべて固定されているようなものである。固定

利付証券（fixed income securities）と呼ばれるこれらの金融取引のキャッシュフローは、次のように表現される。

商品　A　⇨　キャッシュフロー　（時点）　$t_j\ (j=1,2,\ldots,N)$
（大きさ）　$C_j\ (j=1,2,\ldots,N)$

この商品の評価価格を $V(A)$ とすると、次のように表すことができる。

$$V(A)=\sum_{j=1}^{N} C_j D(t_j) \tag{1}$$

ただし、$D(t_j)$ は時点 t_j で発生するキャッシュフロー「1」の、現時点での価値を表す。

したがって、固定利付証券の価格を評価するには、すべての期間 t にわたって割引値 $D(t)$ が定まっていればよいことがわかる。$D(t)$ を期間 t に関する関数とみて「割引関数」と呼ぶ。

金融商品の評価価格を表す（1）式は、将来の市場水準によって大きさが変動するようなキャッシュフロー$\tilde{C}_j$ に対しては、次のように拡張される。

$$V(A)=\sum_{j=1}^{N} E[\tilde{C}_j]D(t_j) \tag{2}$$

ただし、$E[\tilde{C}_j]$ は $\tilde{C}_j$ を確率変数と見たときの、現時点での情報による期待値を表す。

このようにして得られる金融商品の価格 $V(A)$ が、要因 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ によって決定されているとすると、そのことを明示するために、時間の経過 t も含めて次のように表現することにする。

$$V(A)=V(A:t, X_1, X_2, \cdots, X_m)$$

(2) 金融取引の期間損益

トレーディング取引では、期間損益を計測するのに「時価法」を用いるのが適当とされている。時価法による期間損益は次のように計算される。

$$\text{期間損益}=V(A:t)-V(A:t_0)+\sum_{t_j\in(t_0,\,t]} C_j \tag{3}$$

すなわち、期中に実現したキャッシュフローに、期末 t と期初 t_0 の評価価格の差額を加えて計算する。

したがって、各時点 t までの期間損益の変動は、$V(A:t)$ の変動によってもたらさ

れることがわかる。(3) 式において、リスクを認識する時点 t では、期初の評価価格 $V(A{:}t_0)$ も期中のキャッシュフロー$\sum C_j$ も固定されるからである。そこで、損益変動を見る上では、現時点 t での金融取引の評価価格 $V(A{:}t)$ の変動に注目することが重要になる。このようにして、損益計測とリスク計測を関係付けることができる。

(3) 金融取引の価格変動

そこで、金融商品の価格 V が変化する様子を見るために、価格を決定する要因 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ が微小に変動した時に、評価価格 V がどのように感応するかを見る。以下では混乱のない限り金融取引を示す A は省略することにする。

$$dV=\frac{\partial V}{\partial t}dt+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial X_k}dX_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 V}{\partial X_k\partial X_l}dX_k\,dX_l+(\text{3次以上の高次の項})$$

$$=\theta\cdot dt+\sum_{k=1}^{m}\Delta_k\cdot dX_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\Gamma_{kl}\cdot dX_k dX_l+(\text{3次以上の高次の項}) \quad (4)$$

このように、金融商品の価格決定要因の微小変動に対する感応度によって、リスクの程度を計測する方法を「感応度分析 (sensitivity analysis)」と呼ぶ。

固定利付証券の価格が(1)式で表されている時、割引関数 $D(t)$ が金利 r によって、

$$D(t)=e^{-rt} \quad (5)$$

のように表されているとすると、これを代入すると金融商品の評価価格は次のようになる。

$$V=\sum_{j=1}^{N}C_j e^{-rtj} \quad (6)$$

時間の経過 dt を考えないで、金利変動 dr に対する感応度を計算すると、

$$V+dV=\sum_{j=1}^{N}C_j e^{-(r+dr)tj}$$

$$=\sum_{j=1}^{N}C_j e^{-rtj}e^{-drtj}$$

$$=\sum_{j=1}^{N}C_j e^{-rtj}\left(1-t_j dr+\frac{1}{2}t_j^2 dr^2-\cdots\right)$$

$$=V+\Delta_r dr+\frac{1}{2}\Gamma_r dr^2+\cdots \quad (7)$$

したがって、dV は次のように計算される。(デルタ分析)

$$dV=\Delta_r\cdot dr+\frac{1}{2}\Gamma_r\cdot dr^2+\cdots \quad (8)$$

ただし、

$$\Delta_r = -\sum_{j=1}^{N} C_j t_j D(t_j) \tag{9}$$

$$\Gamma_r = \sum_{j=1}^{N} C_j t_j^2 D(t_j) \tag{10}$$

また、(8) 式の両辺を V で割ると次のようになる。(デュレーション分析)

$$\frac{dV}{V} = -\text{Duration} \cdot dr + \frac{1}{2}\text{Convexity} \cdot dr^2 + \cdots \tag{11}$$

ただし、

$$\text{Duration} = \sum_{j=1}^{N} C_j t_j D(t_j) \Big/ \sum_{j=1}^{N} C_j D(t_j) \tag{12}$$

$$\text{Convexity} = \sum_{j=1}^{N} C_j t_j^2 D(t_j) \Big/ \sum_{j=1}^{N} C_j D(t_j) \tag{13}$$

このようにして、感応度を用いた代表的な金利リスクの計測手法である「デルタ分析」や「デュレーション分析」が得られる。

3. 金利の期間構造の変動への対応

さて、前節2.では金利を一律に r で表して、期間の構造を考えなかったが、実際にはその他の市場要素と違って、金利には「期間構造(term structure)」が存在する。ここでは、金利の期間構造やその変動を扱う方法について考える。

(1) 金利の期間構造の表現

通常、金利の期間構造は次のような形で表現することができる。

a. ゼロイールド(zero yield)　$z(t)$

$$D(t) = \exp[-z(t)t] \tag{14}$$

b. フォワードイールド(forward yield)　$f(t)$

$$D(t) = \exp\left[-\int_0^t f(u)du\right] \tag{15}$$

c．パーイールド（par yield）　$p(t)$

$$p(t)\int_0^t D(u)du + D(t) = 1 \tag{16}$$

なお、パーイールドは、間隔 w 毎の離散的な利払いを考えると次のようになる。

$$wp(t)\sum_{j=1}^{t/w} D(wj) + D(t) = 1 \tag{17}$$

金利の期間構造を、上記のいずれの方法によって表現した場合にも、相互に変換することが可能であるが、以下ではゼロイールド $z(t)$ によって金利の期間構造を考えることにしたい。

(2) 金利の期間構造の変動の表現

金利リスクの計測手法を構成する上では、期間 t の関数としての金利の期間構造 $z(t)$ の変動を表現することと、それに対する金融商品の価格変動の感応状況を表現することが課題となる。まず、金利の期間構造の変動の表現方法について、以下では2つの方法を考えてみたい。

ひとつは期間をいくつかの区分期間帯（time bucket）に分け、各区分期間帯が単独でパラレルにシフトするような変動を仮定する方法である。そして、それぞれの変動に対して、金融商品の価格の変動度を計測するものである。

まず、期間を次のように分割する。

$$t_0(=0) < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots\cdots < t_N(=\infty)$$

これらの分割点によって区分される期間帯（time bucket）

$$I_n = [t_{n-1}, t_n] \qquad (n = 1, 2, \cdots, N)$$

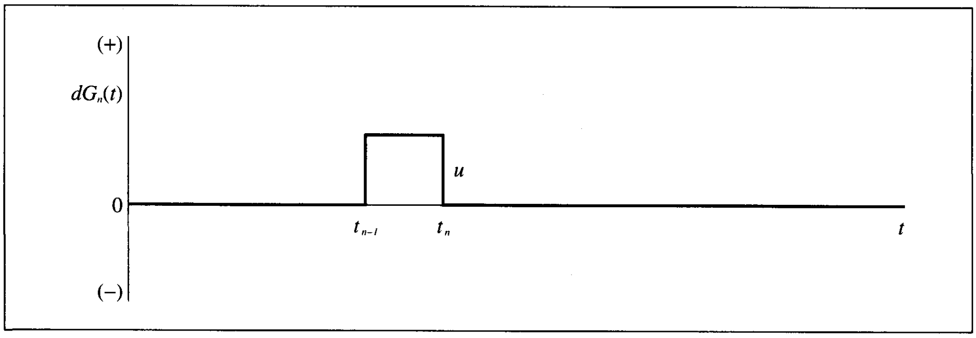
に対して、次のようにして金利の期間構造の変動を記述する。

各期間帯（time bucket）I_n に対して、I_n に属する t についてのみ単位変動幅 u だけパラレルシフトするような期間構造の変動を $dG_n(t)$ とする。

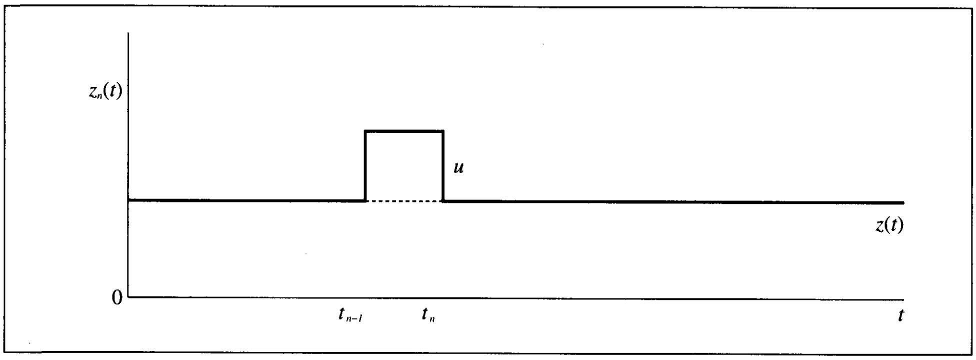
この変動によって得られる新しい金利の期間構造を $z_n(t)$ で表すことにする。

$$z_n(t) = z(t) + dG_n(t) \tag{18}$$

図表1 $dG_n(t)$ の変動



図表2 $z_n(t)$ の形状



そして、このゼロイールドによって評価された金融商品 A の価格を $V(A;\, z_n(t))$ とし、もとのゼロイールドで評価された金融商品の価格を、対比するために $V(A;\, z(t))$ で表現した時に、このような金利の期間構造の変動 $dG_n(t)$ に対する感応度 Δ_n を次のように定義する。

$$V(A;z_n(t))-V(A;z(t)) = \Delta_n \qquad (19)$$

このような枠組みを使用することで、より一般的な金利の期間構造の変動は、各期間帯 I_n での変動幅 $\tilde{x}_n$（確率変数）によって、

$$dz(t) = \tilde{x}_1 dG_1(t)+\tilde{x}_2 dG_2(t)+\cdots\cdots+\tilde{x}_N dG_N(t) \qquad (20)$$

の形で近似することができ、それに対する金融商品の価格変動は、

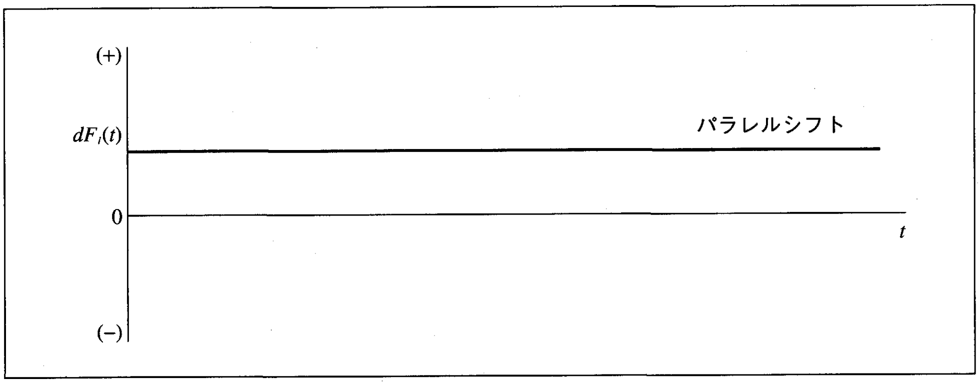
$$dV = \Delta_1\tilde{x}_1+\Delta_2\tilde{x}_2+\cdots\cdots+\Delta_N\tilde{x}_N \qquad (21)$$

で表わすことができる。

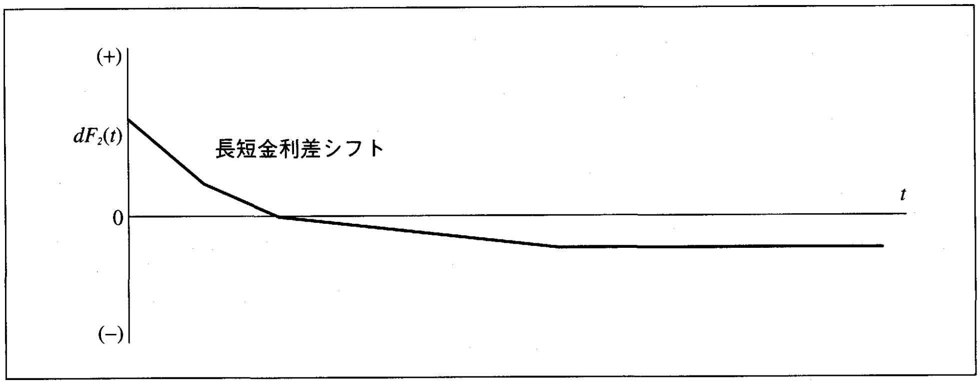
金利の期間構造の変動を表現するための2つめの方法は、金利の期間構造の変動の成分分析によって基本変動を求め、その基本変動に対する感応度を計算する方法である。

成分分析によって得られるイールドカーブの基本変動 $dF_k(t)$ は、例えば次のような形状をしている。

図表3 金利の期間構造の変動の第１因子（パラレルシフト）



図表4 金利の期間構造の変動の第2因子（長短金利差シフト）



このような基本変動によって得られるイールドカーブを、

$$z_k(t) = z(t)+dF_k(t) \quad (k = 1,2,\cdot\cdot N) \tag{22}$$

とすると、このような基本変動に対する金融商品価格の感応度を次のように定義する。

$$V(A;z_k(t))-V(A;z(t)) = \Pi_k \tag{23}$$

第一の方法と同様に、金利の期間構造の変動は $\{dF_k(t)\}$ によって次のように近似される。

$$dz(t) = \tilde{y}_1 dF_1(t)+\tilde{y}_2 dF_2(t)+\cdot\cdot\cdot\cdot+\tilde{y}_N dF_N(t) \tag{24}$$

ただし、$\tilde{y}_k$ は各基本変動の大きさを表す確率変数。

また、それに対する金融商品の価格変動は、次のように線形近似される。

$$dV = \Pi_1 \tilde{y}_1 + \Pi_2 \tilde{y}_2 + \cdots\cdots + \Pi_N \tilde{y}_N \tag{25}$$

(3) 2つの方法の関係

2つの「金利の期間構造の変動を表現する方法」は、いずれも複雑な変動を有限個の変動の合成として表すものである。基本的な変動としての $\{dG_n(t)\}$ や $\{dF_k(t)\}$ は、いわば金利の期間構造の変動全体が、変動の合成という演算によって形成する線形空間を、近似的に生成する「基底」としての役割を持っている。

さて、これらの2つの方法の関係をみるために、金利の期間構造の変動を有限個の期間 $\{t_j\}$ ($j = 0, 1, 2, \ldots\ldots, N-1$：期間帯への分割点と同じ) における変動に限定して考えてみる。

$$(\{dz(t_j)\}) \quad (j = 0,1,2, \cdots, N-1)$$

このとき、ベクトル $(dz(t_j))^T$ 全体が作る空間は、変動の合成に関して「N 次元の線形空間」になり、変動成分分析による基本変動 $\{dF_k(t_j)\}$ や、期間帯の単位変動 $\{dG_n(t_j)\}$ がこの空間を生成する N 個の基底となっている。

さらに主成分分析の方法から、基本変動 $\{dF_k(t_j)\}$ は、期間帯の単位変動 $\{dG_n(t_j)\}$ を、確率変数群 $\{\tilde{x}_n\}$ が定義する相関行列を対角化するような直交行列（固有ベクトルから構成される）R で、一次変換することによって構成したものである。

$$dF_k(t) = R_{k1} dG_1(t) + R_{k2} dG_2(t) + \cdots\cdots + R_{kN} dG_N(t) \tag{26}$$

期間構造の変動をこのような有限の世界に限定すれば、金利の期間構造の変動をそれぞれの基底で記述する際の係数である $\{\tilde{x}_n\}$ と $\{\tilde{y}_k\}$ の間には次の関係がある。

$$\tilde{y} = R^T \cdot \tilde{x} \tag{27}$$

ただし、$R = \begin{pmatrix} & R_{kn} & \end{pmatrix}$

また、両方の基本的な変動から得られる感応度 $\{\Delta_n\}$ と $\{\Pi_k\}$ の間には、（近似的に）次のような関係がある。

$$\Pi = R^T \cdot \Delta \tag{28}$$

したがって、金利の期間構造の変動 $dz(t)$ に対する金融商品価格の変動 dV は、2種類の基底によって、それぞれ次のように表されることがわかる。

$$dV = \Pi^T \cdot \tilde{y} = \Delta^T \cdot R \cdot R^T \cdot \tilde{x} = \Delta^T \cdot \tilde{x} \tag{29}$$

4. 金利リスクに関するVaRの計測

前節2.、3.では、金利変動に対する金融商品の価格変動を、感応度によって計測するような２種類の方法を示した。感応度分析が、価格決定要因の単位当たりの変化に対する、金融商品の価格変動を個別に計測するのに対して、VaR（value at risk）分析は、各価格決定要素の一定期間における変動性に関する情報と、各価格変動要素の連動性に関する情報を考慮して、金融商品の価格変動性を総合的に表示しようとするものである。

(1) VaRの計算

代表的なVaRの計測手法である「分散共分散法」によれば、(4) 式で表現された金融商品のVaRは、一般的に次のように計算される。(分散共分散法では、1次感応度のみが対象となる。)

$$\mathrm{VaR} = k(\phi)\sqrt{\tau}\sqrt{\Delta^T \Sigma^T \Omega \cdot \Sigma \cdot \Delta} \tag{30}$$

ただし、$\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots, \Delta_m)^T$：１次感応度ベクトル

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \sigma_3 & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & \sigma_m \end{pmatrix}$$：ボラティリティ行列（対角行列）

σ_k は、dX_k のボラティリティ（１年換算）

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & & \rho_{ij} & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cdots & \\ & \rho_{ji} & & & 1 \end{pmatrix}$$：相関行列（対称行列）

ρ_{ij} は、dX_i と dX_j との相関係数

τ　：　変動期間（年表示）
$k(\phi)$：　信頼度 ϕ に対応する標準偏差の倍数（片側）

さて、視点を金利変動に関するリスク計測に限定すれば、金利の期間構造の変動をいくつかに分割した期間帯毎の変動によって表現した場合の、各期間帯毎の金利水準が、一般的な表現における価格決定要因 X_k に対応する。また、それらの変動 dX_k に対する感応度がそのまま上記の（30）式の Δ_k となる。このような読替えを行うことによって金利変動に対するVaRが計算される。具体的には以下のように計算される。

まず、前節3.のように金利の期間構造の変動 $dz(t)$ を、基底 $\{dG_n(t)\}$ によって表現すると（(31) 式)、金融商品の価格変動 dV は（32）式のように表された。

$$dz(t)=\tilde{x}_1 dG_1(t)+\tilde{x}_2 dG_2(t)+\cdots+\tilde{x}_N dG_N(t) \tag{31}$$

$$\begin{aligned} dV &= \tilde{x}_1\Delta_1+\tilde{x}_2\Delta_2+\cdots+\tilde{x}_N\Delta_N \\ &= \Delta^T\cdot\tilde{x} \end{aligned} \tag{32}$$

この表現のもとで、VaR_G は次のようにして計算される。

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[dV] &= E[dV^2] \\ &= E[(\Delta^T\cdot\tilde{x})(\Delta^T\cdot\tilde{x})^T] \\ &= \Delta^T E[\tilde{x}\cdot\tilde{x}^T]\Delta \\ &= \Delta^T\Sigma^T\Omega\cdot\Sigma\cdot\Delta \end{aligned} \tag{33}$$

ただし、var [*]は、＊の分散を表す

E[*]は、＊の期待値を表す

確率変数 x の期待値は 0 と仮定している（以下で y も同様とする）

$$\mathrm{VaR}_G = k(\phi)\sqrt{\tau}\sqrt{\mathrm{var}[dV]} \tag{34}$$

(2) もう一つのVaR

さて、ここで金利の期間構造の変動を記述する基底を、$\{dG_n(t)\}$ から $\{dF_k(t)\}$ に変換することを考える。$\{dF_k(t)\}$ によって $dz(t)$ は(35)式のように表され、金融商品の価格変動 dV は(36)式のように表された。

$$dz(t)=\tilde{y}_1 dF_1(t)+\tilde{y}_2 dF_2(t)+\cdots+\tilde{y}_N dF_N(t) \tag{35}$$

$$\begin{aligned} dV &= \tilde{y}_1\Pi_1+\tilde{y}_2\Pi_2+\cdots+\tilde{y}_N\Pi_N \\ &= \Pi^T\cdot\tilde{y} \end{aligned} \tag{36}$$

この表現のもとでは、金融商品の価格変動の分散およびVaR_F は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[dV] &= E[dV^2] \\ &= E[(\Pi^T\cdot\tilde{y})(\Pi^T\cdot\tilde{y})^T] \\ &= \Pi^T E[\tilde{y}\cdot\tilde{y}^T]\Pi \end{aligned} \tag{37}$$

$$\mathrm{VaR}_F = k(\phi)\sqrt{\tau}\sqrt{\mathrm{var}[dV]} \tag{38}$$

(3) 2種類のVaRの関係

このようにして得られる2種類のVaR（VaR_G とVaR_F）の関係を見てみよう。

前節3.でみたとおり、金利の期間構造の変動を有限次元の空間に限定して考えれば、基底 $\{dG_n(t)\}$ から基底 $\{dF_k(t)\}$ に変換するのに用いられる行列 R は、VaRの計算(33)式のなかに出てくる相関行列 Ω を、対角化する直交行列 R であった。

a．相関行列 Ω は、直交行列 R で対角化できる[1,2]。

$$\Lambda = R^T\Omega \cdot R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \cdots \\ & & & & \lambda_N \end{pmatrix}, \quad \lambda_k > 0 \ (k=1,2,\cdot\cdot,N) \tag{39}$$

b．この直交行列 R によって基底を変換する。

$$\left(dF_1(t), \cdot\cdot, dF_N(t) \right) = \left(dG_1(t), \cdot\cdot, dG_N(t) \right) \cdot R \tag{40}$$

$$R = \begin{pmatrix} R_{11}, R_{12}, & \cdot\cdot & .R_{1N} \\ R_{21}, R_{22}, & \cdot\cdot & .R_{2N} \\ & \cdots\cdots & \\ R_{N1}, R_{22}, & \cdot\cdot & .R_{NN} \end{pmatrix} \tag{41}$$

ここで、$\tilde{y} = R^T\tilde{x}$ であることに注意すると、次の関係を示すことができる。

$$E[\tilde{y} \cdot \tilde{y}^T] = R^T E[\tilde{x} \cdot \tilde{x}^T] \cdot R = R^T \Sigma^T \Omega \cdot \Sigma \cdot R = \Sigma^T \Lambda \cdot \Sigma \tag{42}$$

したがって、

$$\mathrm{VaR}_G = k(\phi)\sqrt{\tau}\sqrt{\Delta^T \Sigma^T \Omega \cdot \Sigma \cdot \Delta} \tag{43}$$

$$\mathrm{VaR}_F = k(\phi)\sqrt{\tau}\sqrt{\Pi^T \Sigma^T \Lambda \cdot \Sigma \cdot \Pi} \tag{44}$$

$$\mathrm{VaR}_G = \mathrm{VaR}_F \tag{45}$$

なお、金利リスクの計測に成分分析に基づく基本変動 $\{dF_k(t)\}$ を利用する場合には、通常は N 個の成分を全部使用するのではなく、その内の主要なもののみを使用する。これは、(39) 式の対角成分のうちの一部分を使用し、その他については切り捨てていることを意味し、リスク量の認識の観点からは注意が必要である。

5. 多通貨ポートフォリオの金利リスクの計測

ここまでの展開では、金融商品あるいはそのポートフォリオから発生するキャッシュフローは、すべて単一通貨（例えば円貨）の中で発生するものと仮定してきた。しかし、金融商品の種類によっては、複数の通貨のキャッシュフローを発生させるようなものがある。例えば、為替先渡取引や通貨スワップ、通貨オプションなどがそれに当たる。ここでは、そのようなポートフォリオの金利リスクを計測するための枠組みについて考える。単一通貨の場合がその特殊な場合であるような枠組みができれば、手法をより一般化したことになる。

1 相関行列 Ω は、正値対称行列であるから実数成分の直交行列によって対角化することができ、その対角行列 Λ の対角成分は正値となる。

2 混乱の無い限り、有限個の空間に限定した場合の $\{t_j\}$ を省略して表現する。

(1) 多通貨ポートフォリオのキャッシュフロー表現

金融商品 A から発生するキャッシュフローを、通貨毎に次のように表示する。

商品A ⇨ キャッシュフロー	(時点)		t_j $(j=1,\cdot\cdot,N)$
	(大きさ)	第0通貨	$C_j(0)$
		第1通貨	$C_j(1)$
		第2通貨	$C_j(2)$
		...	..
		第 I 通貨	$C_j(I)$

この商品の価格を、基準通貨 $(i=0)$ に換算して計測すると次のようになる。

$$V_0(A)=\sum_{i=1}^{I}M_i\sum_{j=1}^{N}E[C_j(i)]D_i(t_j) \tag{46}$$

ただし、Mi は第 i 通貨を基準通貨 0 に換算する為替レート

$D_i(t)$ は第 i 通貨の金利 $z_i(t)$ による割引関数

したがって、価格変動 $dV_0(A)$ は次のように表すことができる。

$$dV_0(A)=\sum_{i=1}^{I}dM_i\,(\sum_{j=1}^{N}E[C_j(i)]D_i(t_j))$$
$$+\sum_{i=1}^{I}M_i\sum_{j=1}^{N}(dE[C_j(i)]D_i(t_j)+E[C_j(i)]dD_i(t_j)) \tag{47}$$

(2) 多通貨ポートフォリオの金融リスク

この中には、次のような要因に係わるリスクの感応度が含まれている。

a．各i に対して、為替リスク $(=dM_j)$ の係数

$$\sum_{j=1}^{N}E[C_j(i)]D_i(t_j)\cdot\underline{dM_i} \tag{48}$$

b．各i に対して、金利リスク $(=dD_i(t_j))$ の係数

$$M_i\cdot\sum_{j=1}^{N}E[C_j(i)]\underline{dD_i(t_j)} \tag{49}$$

c．各 i に対して、キャッシュフロー決定要因のリスク $(=dE[C_j(i)])$ の係数

$$M_i\cdot\sum_{j=1}^{N}D_i(t_j)\underline{dE[C_j(i)]} \tag{50}$$

ただし、固定利付証券ならば、$dE[C_j(i)]=0$ なので、この項は出てこない。

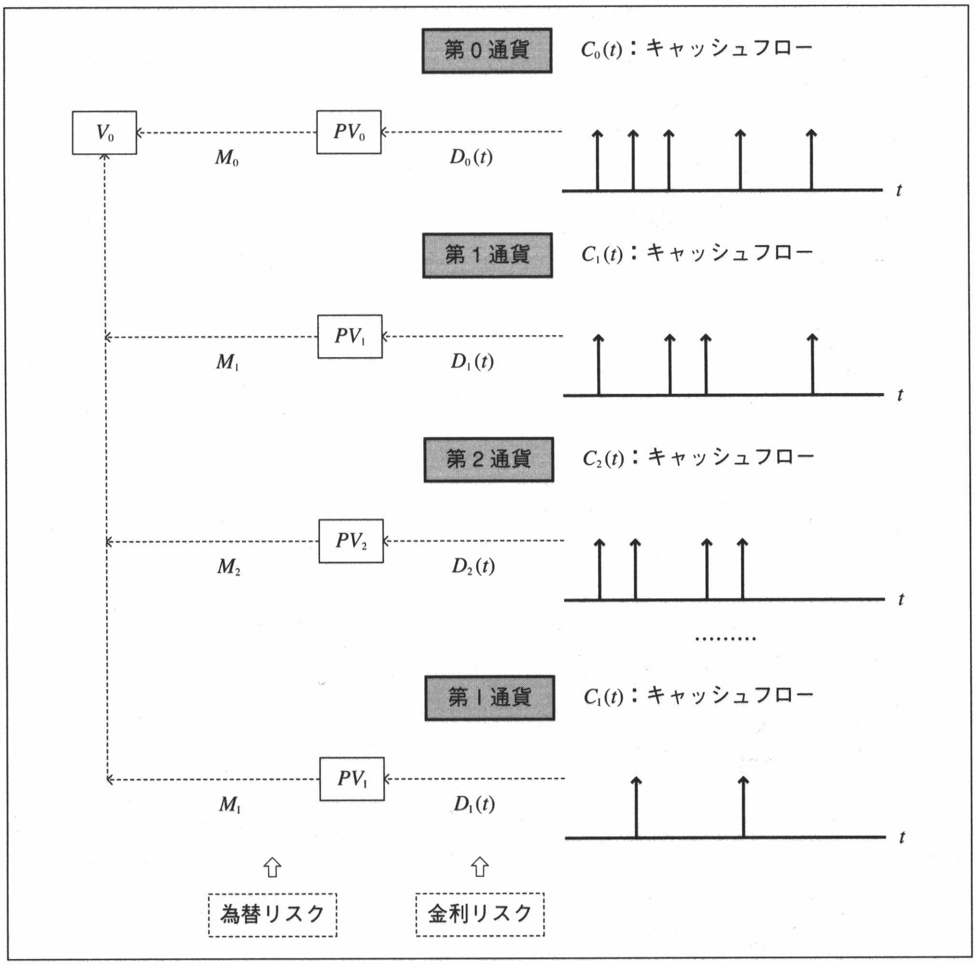
またこの中には、金利や為替、株価等の要因が入ってくる可能性がある。

特に金利リスクに関しては、キャッシュフローが発生する各通貨 i 毎に、その通貨の金利の期間構造の変動に係わるリスク「$dD_i(t_j)$」が存在することになる。したがって、各通貨毎に金利の期間構造の計測やその変動性の計測が必要になる。

このような多通貨ポートフォリオの金融リスクを統合的に管理するには、まず、これらの各要因の変動に対する感応度を計測することが第一であろう。次に、その感応度ベクトルと各国通貨毎の金利や為替レート等に関するボラティリティ行列や相関行列を使ってVaRを計算する。

その際に使用する相関行列では、各通貨内の金利同士で高い連動性が見られるほか、為替レートの中でも、いくつかのグループに分かれてかなりの連動関係が安定的に見られるものがある。効率的なリスク管理を行う上で注目に値するものである。

図表5 多通貨ポートフォリオの評価価格計算のイメージ



6. バンキング取引における金利リスクの計測（1）—感応度分析

銀行の保有する資産負債あるいは派生資産は、大きく分けて「バンキング取引」と「トレーディング取引」に分類される。それぞれの取引の特徴は次の表のとおりである。

図表6 バンキング取引とトレーディング取引の比較

	バンキング取引	トレーディング取引
保有期間	原則として満期まで保有	短期間で売買
2次市場の存在	必ずしも必要なし	存在することが前提
損益の源泉	利息収支（十償還差損益）	売買価格差
金利リスク	利息収支の増減	評価価格の増減
適した会計方法	原価会計	時価会計

ここまでは、すでに業界の標準的な手法として認識されつつある「トレーディング取引における金利リスクの計測手法」について、特に感応度分析やVaR手法の手法を概観したが、それを整合的に「バンキング取引における金利リスクの計測手法」に拡張することを試みるのが本節の課題である。

(1) バンキング取引の展開

金融商品 A から発生するキャッシュフローを次のように仮定する。

商品A ⇨ キャッシュフロー （時点） t_j
（大きさ） wC_A $(t_j < t_N)$
wC_A+1 $(t_j = t_N)$

ただし、w ：利払い間隔 $(w = t_j - t_{j-1})$
C_A ：金利（年利表示）
1 ：元本償還のキャッシュフロー

この金融商品の評価価格 $V(A)$ は次のように表現される。

$$V(A) = wC_A \sum_{j=1}^{N} D(t_j) + D(t_N) \tag{51}$$

一方この金融商品の簿価を B_A とすると、パーイールドの定義（(17)式）から次式が成り立つ。

$$B_A = wp_A B_A \sum_{j=1}^{N} D(t_j) + B_A D(t_N) \tag{52}$$

ただし、p_A：この金融商品と同じ期間 t_N、利払い間隔 w の場合のパーイールド
(52) 式と (51) 式とを各辺で引算をすると次式が得られる。

$$V(A)-B_A = w(C_A - p_A B_A)\sum_{j=1}^{N} D(t_j) + (1-B_A)D(t_N)$$

$$= \sum_k R_A(k) \tag{53}$$

ただし、k は会計期間 I_k に対応し、$t_j \in I_k$ となる損益の現在価値、
$w\,(C_A - p_A B_A)\,D\,(t_j)$ または $(1-B_A)\,D(t_N)$ を合算して $R_A(k)$ とした。

(2) バンキング取引の損益の表現

この式の左辺は、原価法によって管理されているこの取引の評価損益を表す。一方右辺は、この金融取引から得られる受取利息 ($= wC_A$) と、この取引の開始に必要であった当初資金 (= 簿価) を、現在の市場であらためて調達したと仮定した場合に必要となる支払利息 ($= wp_A B_A$) との間の利息収支、および償還差損益 ($= 1-B_A$) の現在価値を表す。

この式の意味するところは、両者が一致するということである。左辺に登場するのは、トレーディング取引における損益管理手法である「時価評価」の考え方である。一方、右辺に登場するのが利息収支や償還差損益など、バンキング取引における損益管理手法である「原価法による期間損益」の考え方である。後者の現在価値を求めることによって、前者に等しくなるというのが (53) 式である。

このような計算を、貸借対照表の資産側の取引全体にわたっておこない、各辺を足し合わせると次のようになる。

$$\sum_A V(A) - \sum_A B_A = \sum_A \left(\sum_k R_A(k)\right)$$

$$= \sum_k \left(\sum_A R_A(k)\right) \tag{54}$$

負債側の取引 L についても同様の計算を行う。ただし、負債側ではその取引によって調達された資金（＝簿価）を、現在の市場であらためて運用したと仮定した場合の利息収支を計算する。

$$\sum_L B_L - \sum_L V(L) = \sum_L \left(\sum_k R_L(k)\right)$$

$$= \sum_k \left(\sum_L R_L(k)\right) \tag{55}$$

次に、このようにして得られた資産側取引の計算 (54) と負債側取引の計算 (55) を合計する。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_A V(A) - \sum_A B_A + \sum_L B_L - \sum_L V(L) \\
&= [\sum_A V(A) - \sum_L V(L)] - [\sum_A B_A - \sum_L B_L] \\
&= [\sum_A V(A) - \sum_L V(L)] - E \qquad (56)
\end{aligned}
$$

ただし、Eは自己資本の大きさを表す。

$$
(\text{右辺}) = \sum_K (\sum_A R_A(k) + \sum_L R_L(k)) \qquad (57)
$$

左辺は純資産価値の評価額から自己資本額 (E) を引いたものであり、右辺は上記のような想定計算によって、各会計期間 I_k に実現する期間損益の現在価値を、各会計年度毎に資産側取引と負債側取引について合算したものである。既往取引の資産負債は現時点ではバランスしているが、将来においては償還予定の違いによって資金過不足が生じる。それを、現時点での金利によって固定したと仮定した場合の利息収支の現在価値が右辺であると考えることができる。

このようにして得られる右辺の各会計年度の期間損益の合計値は、さらに次のように書き直すことができる。なお、簡単のため償還差損益の項は無視している。

$$
\begin{aligned}
\sum_A R_A(k) + \sum_L R_L(k) &= \sum_A \sum_{t_j \in I_k} w(C_A - p_A B_A) D(t_j) + \sum_L \sum_{t_j \in I_k} w(p_L B_L - C_L) D(t_j) \\
&= [\sum_A \sum_{t_j \in I_k} w C_A D(t_j) - \sum_L \sum_{t_j \in I_k} w C_L D(t_j)] \\
&\quad - [\sum_A \sum_{t_j \in I_k} w p_A B_A D(t_j) - \sum_L \sum_{t_j \in I_k} w p_L B_L D(t_j)] \qquad (58)
\end{aligned}
$$

(58)式の第1項は、約定によって決まっている金利の受払差額の現在価値である。また、第2項はイールドカーブが傾いている場合に、長期の運用を短期資金で調達することによって得られる、いわゆるショートファンディング効果を現在の金利の期間構造から測定して、第1項から控除する役割を果たしている。将来における資金過不足から生じる金利リスクを、現時点の金利で押さえることによって、ショートファンディング効果を放棄したと考えられる。

(3) バンキング取引の金利リスクの表現

次に、トレーディング取引と同様に、このような構成によって得られる損益評価額が、金利の期間構造の変動に対してどのように感応するかを計測してリスク指標とする。

金利の期間構造の変動を表現する方法は、トレーディング取引における金利リス

クの計測の場合と同じく、次のような方法を適用する。

a．イールドカーブを期間帯（time bucket）に区分して、それらを独立にシフトさせる方法

$\{dG_n(t)\}$

b．変動成分分析を反映させた幾つかの基本変動によって、イールドカーブ全体を動かす方法

$\{dF_k(t)\}$

これらのいずれかの方法によってイールドカーブを変動させ、それに対してバンキング取引の損益評価額（およびその年度展開）がどのように感応するかを計測することによって、金利リスク指標とする。

バンキング取引の金利リスク計測では、感応度を年度毎に展開して見ることが、この枠組みでの特徴である。

図表7 バンキング取引とトレーディング取引の損益評価と金利リスク指標

	バンキング取引	トレーディング取引
損益評価	評価損益（＝損益評価額）	評価損益
	およびその年度展開	—
金利の期間構造の変動の表現	a．期間帯（bucket）毎の単位変動　　または、 b．変動成分による基本変動	
金利リスクの指標化	上記a．b．に対する、評価損益の感応度	上記a．b．に対する、評価損益の感応度
	および年度展開の感応度	—

7. バンキング取引における金利リスクの計測（2）—VaR分析にかえて

トレーディング取引は、金融商品を短期間で売買し、その間の市場価格の増減によって収益を獲得するような取引である。それに対してバンキング取引は、安定的な資金調達の下に原則として満期まで保有し、その間の利息収支によって収益を獲得するような取引である。そのため、金利変動による収益への影響は、トレーディング取引が金融取引の評価価格の増減の形で直ちに表れるのに対して、バンキング取引では満期までの長期にわたって利息収支の増減の形でゆっくりと表れるという特徴がある。その結果、トレーディング取引では短期間の金利変動についてのみ、損益への影響を考えればよかったのに対して、バンキング取引では長期間の継続的な金利変動が、累積的に期間損益に及ぼす影響を考えなければならない。そして、長期間の内には金利変動の循環性のようなものについても考慮することが必要とな

る。

前節6.において示した方法によって、金利変動に対する**感応度の測定**については、トレーディング取引とバンキング取引のもつそれぞれの特徴を捉えつつ、ある程度相互に整合的な形で拡張することができると思われる。

しかし、経営レベルのリスク計測手法である**VaR分析**については、その基本的な考え方が、一定期間 τ における価格変動の大きさを、一定の信頼度の下に評価しようとするものであり、短期間の市場変動を対象にしたトレーディング取引のリスク計測には適するが、上記のようなバンキング取引のリスク計測に対しては、そのままの形で使うのは難しいように思われる。

そこでここでは、バンキング取引に対する「VaR分析に類似の分析手法」について、ひとつの切り口を検討することとしたい。

(1) バンキング取引の構造的なGAP

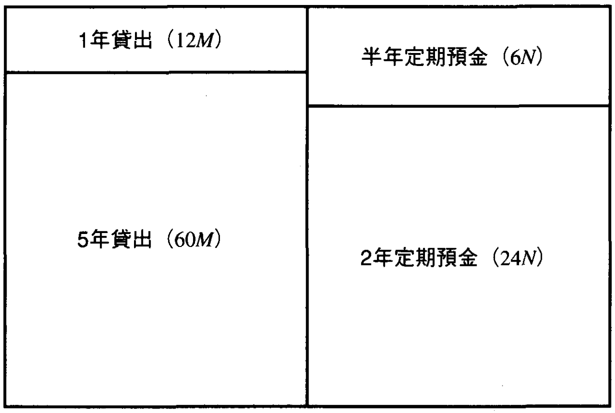
ある程度自らの意思に基づいてポジションを作ることのできるトレーディング取引と違い、バンキング取引は各金融機関が金融システムの中で果たしている仲介機能の特徴に従って、構造的なGAPを持っていることが多い。

たとえば、資産側の金融取引は期間5年の固定金利貸出と期間１年の貸出が毎月同額 (M) ずつ新規に実行され、かつ回収になっているとする。一方、負債側は期間2年の定期預金と期間6ヶ月の定期預金が、これも毎月同額 (N) ずつ新規に実行され、かつ満期を迎えているとする。

このとき、資産負債のバランスを考えると、次のような関係が成立する。

$$60M+12M=24N+6N \quad (N=2.4M) \tag{59}$$

図表8 バンキング取引のバランス例



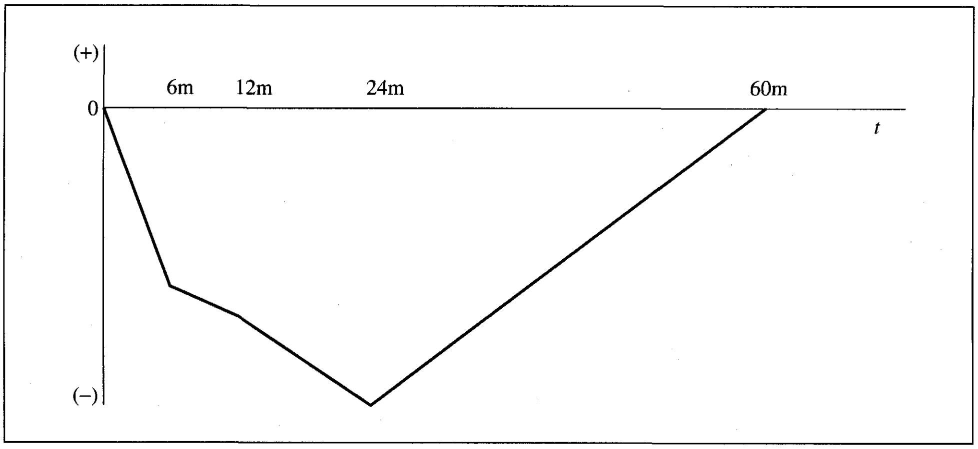
（注）簡単のため、資本金は考えないものとする。

また、これらの資産負債のもつ金利更改GAPは次のようになる。

図表9 GAPの例

t月	月間金利更改金額差	換　算	GAP(t)
1m〜6m	$2M-2N$	$-2.8M$	$-2.8Mt$
7m〜12m	$2M-N$	$-0.4M$	$-16.8M-0.4M(t-6)$
13m〜24m	$M-N$	$-1.4M$	$-19.2M-1.4M(t-12)$
25m〜60m	M	M	$-36.0M+1.0M(t-24)$
60m〜	0	0	0

図表10 GAPの例



毎月一定額の資産負債が入れ代わるような、いわゆる「定常状態」になると、このGAP構造が不変となる。このようなGAP(t)を、あらためて$g(t)$と置くことにする。

$$g(t)=\mathrm{GAP}(t) \tag{60}$$

(2) 継続的な金利変動の期間損益への影響

このような設定の下で、過去からの金利変動が当期の期間損益に与える影響を考える。ただし、各資産負債に適用される金利は、同じ幅で上下するものと仮定する。

当月をtとし、過去の第s月($s<t$)に発生した金利変動を$dr(s)$とすると、これらの金利変動が当月の期間損益に与える影響$dR(t)$は、次のように計算される。

$$dR(t)=\sum_{s<t}\frac{1}{12}g(t-s)dr(s) \tag{61}$$

たとえば、金利変動が中心的な金利r_0を中心にして、振幅A、周期T年の次のような変動をするとすれば、

$$r(s) = r_0 + A \sin\left(\frac{2\pi}{T}s\right) \tag{62}$$

各月の変動幅 $dr(s)$ は、次のように表される。

$$\begin{aligned} dr(s) &= r(s) - r(s-1) \\ &= 2A \sin\left(\frac{\pi}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi s}{T} - \frac{\pi}{T}\right) \end{aligned} \tag{63}$$

したがって、第 t 月の期間損益変動は次式で表される。

$$dR(t) = \sum_{s<t} \frac{A}{6} g(t-s) \sin\left(\frac{\pi}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi s}{T} - \frac{\pi}{T}\right) \tag{64}$$

ここで、振幅 A が確率変数でありその分布状況がわかっているとすると、$dR(t)$ も確率変数となり、「ϕ の信頼度の下で、各期 t の $dR(t)$ がとりうる負の最小値」を求めることができる。
その値を $-W(t{:}\phi)$ とすると、

$$W(t{:}\phi); \mathrm{Prob}[dR(t) \leq -W(t{:}\phi)] = \phi \tag{65}$$

金利水準 r_0 で実現される標準的な期間損益 R_0 に対して、実現する期間損益 $R(t)$ は、次のように表されるが、

$$R(t) = R_0 + dR(t) \tag{66}$$

これが一定額K（必要最小利益）を下回るとき、フローの損益として不足の状態となり、蓄積された自己資本に食い込むことになる。したがって、その食い込む可能性のある部分を、一定の信頼度 ϕ の下に想定し、あらかじめ自己資本として積んで置く必要がある。すなわち、

$$R(t) = R_0 + dR(t) \leq K \tag{67}$$

したがって、$dR(t) \leq K - R_0$ となる部分が自己資本に食い込む部分である。信頼度 ϕ の下では、

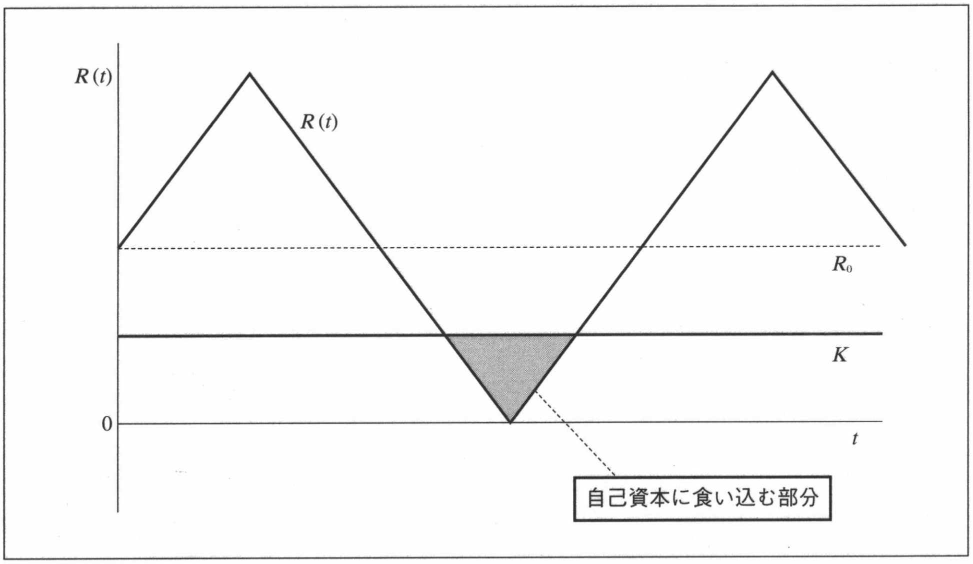
$$dR(t) \leq -W(t{:}\phi) \tag{68}$$

であるから、

$$W(t{:}\phi) - (R_0 - K) \geq 0 \tag{69}$$

となる部分がそれに当たることになる。

図表11　自己資本に食い込む損益水準



なお、上記では金利変動を一つの周期 T によって考えたが、一般的には複数の周期 T_j の合成の形で考えることが必要であろう。

$$r(s) = r_0 + \sum_j A_j \sin\left(\frac{2\pi}{T_j} s\right) \tag{70}$$

そのときには、各月の金利の変動幅と期間損益への影響は次のようになる。

$$\begin{aligned} dr(s) &= r(s) - r(s-1) \\ &= \sum_j 2A_j \sin\left(\frac{\pi}{T_j}\right) \cos\left(\frac{2\pi s}{T_j} - \frac{\pi}{T_j}\right) \end{aligned} \tag{71}$$

$$dR(t) = \sum_j \frac{A_j}{6} \sum_{s<t} g(t-s) \sin\left(\frac{\pi}{T_j}\right) \cos\left(\frac{2\pi s}{T_j} - \frac{\pi}{T_j}\right) \tag{72}$$

(3) 具体例による実験

さきほどのバランスシートのGAPに対して、たとえば振幅 $A = 3\%$、周期 $T = 5$ 年の金利循環を引き起こすと、金利変動 $dr(s)$ や期間損益変動 $dR(t)$ は補論1のようになる。

その他、いろいろな周期の金利変動による期間損益への影響を補論1に示す。

(4) 今後の課題

この作業に関連しては、これからの課題として次のようなものが上げられる。

a．過去の金利変動からその振幅 A_j（確率変数）と周期 T_j を抽出すること[3]
b．平均的な金利水準 r_0 に対する、平均的な期間損益水準 R_0 を算定すること
c．必要最小収益 K を設定すること
d．上記の想定のもとに、信頼度 ϕ の損益変動水準を求めること

なお、前節6.における$\Delta(t)$（年度展開）と、この分析における GAP(t) の間には、（付）に示したような関係がある。

いずれにしても、「トレーディング取引」に適用されるVaR分析はそのままの形では「バンキング取引」のリスク量の計測に延長できないと思われる。VaRが短期間の市場変動の期間損益への影響を考えるのに対して、バンキング取引は長期的な金利変動の累積効果を考える必要があること、トレーディング取引が ±0 の損益から開始して、金融取引価格の増減がそのまま当期損益に影響するのに対して、バンキング取引の損益はもともとフローの損益として一定のバッファーをもっているのが普通で、期間損益の減少が必ずしも直ちに自己資本に食い込むことにならないこと、などがその理由である。

今後の更なる研究が待たれる分野である。

8. その他の金利関連リスク（期限前解約への対応）

ここまでの議論では、金融商品から発生するキャッシュフローは、契約どおりに発生するものとして扱ってきた。しかし、銀行の資産負債管理において、金利動向によっては契約に基づくキャッシュフローがシフトするような事象が存在する。住宅ローンなどの固定金利貸出の期限前解約や、定期性預金の高利シフトなどがそれに当たる。このような事象は、顧客が暗黙の内に保有する金融商品についての「選択権」を行使すること、として説明することができる。銀行にとってみれば資産負債の収益構造の悪化をもたらすことになる。

このような現象は、金利の変動によって起こってくることから、広い意味での「金利リスク」として捉えることができる。

そこでここでは、金利リスクとしての「期限前解約の管理」について考える。

(1) 期限前解約権の定式化

金利動向による期限前解約の対象となる金融商品は固定利付証券である。固定利付証券は、市場金利の上下によって、その価格 V が変動するのが特徴である。前述2.節と同じ記号を使うと、価格は次のように表される。

3 最近20年間の新発国債応募者利回りから、金利変動の周期性を求める試みを行った。方法と結果を補論2に示す。

$$V(z) = \sum_j C_j e^{-2(tj)tj} \tag{73}$$

ところが銀行商品の中には、貸出の金銭消費貸借契約や預金の消費寄託契約のように、その価格が常に額面金額であるかのように商品設計をしなければならないようなものが存在する。その結果、取引継続の価値（市場価値）と期限前解約の価値（額面金額±解約手数料）との間に乖離が生じ、顧客は両者を天秤にかけて有利な方を選択することによって発生するのが「期限前解約」である。

顧客の選択権は次のように表現される。

$$\text{（資産側取引）} \mathrm{Max}[-V(z),-(K+G)] \tag{74}$$
$$\text{（負債側取引）} \mathrm{Max}[V(z),(K-G)] \tag{75}$$

ただし、K は取引の額面金額、G は解約手数料である。

すなわち、銀行にとっての資産取引の中では、原資産 $V(z)$、行使価格 $(K+G)$ のコールオプションを顧客に付与していることになる。

$$\mathrm{Max}[-V(z),-(K+G)] = -V(z)+\mathrm{Max}[V(z)-(K+G),0] \tag{76}$$

また負債取引では、原資産 $V(z)$、行使価格 $(K-G)$ のプットオプションを顧客に付与していることになる。

$$\mathrm{Max}[V(z),(K-G)] = V(z)+\mathrm{Max}[(K-G)-V(z),0] \tag{77}$$

ただし、いずれもアメリカンオプションである。

したがって、顧客に付与しているこれらの選択権をオプション評価モデルによって評価し、金利変動に対する感応度を測定して、金利リスクとしての期限前解約を管理することが考えられる。

(2) 大衆行動としての期限前解約

ところが、期限前解約を考える上でのもう一つの要素は、「大衆行動」としての要素である。すなわち、顧客のすべてが上記で考えたような経済合理的な行動を取るわけではないということである。期限前解約を実行した方が有利な局面でも、かなりの顧客は行動を起こすことなく取引を継続するし、逆に期限前解約が不利な局面でも、資金繰り等の理由で期限前解約が発生する。

それに対しては、大衆行動としての期限前契約の発生をモデル化する必要がある。例えば、期限前解約の対象となる金融取引残高 $H(t)$ に対して、期限前解約発生率関数 $\phi = \phi(t, X_1, X_2, X_3)$ を推定して、時点 t での期限前解約の金額 $N(t)$ を次のように計測する。

$$N(t) = H(t) \cdot \phi(t, X_1, X_2, X_3, \cdots) \tag{78}$$

ただし、$\phi(t, X_1, X_2, X_3 \cdots)$ の説明変数 X_j の有力候補としては、

a．期限前解約権の評価価値

b．対象取引の残存期間

c．金利の水準感を表す変数

d．翌月の金利予想

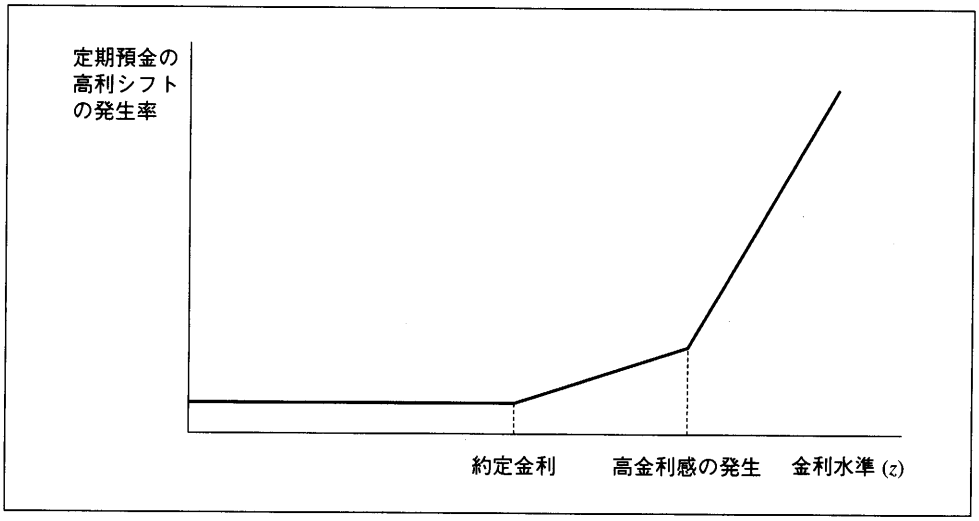
e．その他季節要因等

などが考えられる。

このようにして得られる期限前解約の予測額を考慮して、資産負債の評価額を求め、さらに金利変動に対する感応度を計算することによって金利リスクの管理を行う[4]。

期限前解約発生率関数 ϕ の形状にもよるが、金利の上昇下降によって、期限前解約が増加しそうな局面になると、金利に対する感応度の絶対値が急増しはじめる。それに従って、金利リスクのヘッジのための取引を実施する等の対応を行うことになる。

図表12 期限前解約発生率関数のイメージ



4 関数 ϕ によって金融商品のキャッシュフローが変化する。価格評価と整合的な金利変動の経路を発生させるシミュレーション法によって評価する等の方法がある。

9. 金利リスクの管理と信用リスクの定量化との関係

これまでは、各種の金融商品に対してすべて同一の金利の期間構造 $z(t)$ によって評価を行うような形で議論してきた。しかし、実際の金融市場や資本市場では、キャッシュフローを発生させる側の信用レベルやその金融商品が取引される市場の流動性の有無、あるいはその金融商品自体に対する選好等の要素によって様々な金利の水準が存在する。

信用リスク上の問題が少なく、流動性も高い「国債市場」の金利の期間構造を $z(t)$（ゼロイールドで表示）で表すとすると、一般の金融商品 A に適用される金利の期間構造 $y_A(t)$ は、次のように表すことができる。

$$y_A(t) = z(t) + s_A(t) + \beta_A \tag{79}$$

ただし、$s_A(t)$ ：金融商品 A が属するカテゴリーに共通のスプレッド構造
β_A ：金融商品 A 自体に対する選好等による要因

このような表示の中で、$s_A(t)$ の部分に金融取引の相手先の信用評価が反映されることになる。以下では、金融商品に適用される金利水準と信用リスクの評価の関係、およびそれらの管理の方法について考える。

(1) 信用リスクの表現

2.節の例では、金融商品 A から発生するキャッシュフロー C_j は、時点 t_j には確実に発生するものとして議論を展開した。しかし、現実には金融商品Aの発行体の信用状況によっては、キャッシュフローが支払われない可能性があり得る。

そのような状況を表現するために、この金融商品から発生するキャッシュフロー C_j には確率変数 $w(t_j)$ が掛かっているとする。確率変数 $w(t)$ は次のように定義する。

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{（時点 } t \text{ までに発行体が存続する場合）} \quad \text{（確率 } Q(t)\text{）} \\ 0 & \text{（時点 } t \text{ までに発行体が倒産した場合）} \quad \text{（確率 } 1-Q(t)\text{）} \end{cases}$$

ただし、実際には、倒産時にも一定の範囲で回収が可能な場合がある。

簡単のために、期間 $[t, t+dt]$ における倒産率が常に qdt であるとすると、

$$dQ(t) = -Q(t)\ qdt \tag{80}$$

したがって、初期条件 $Q(0) = 1$ を考慮すると、$Q(t) = e^{-qt}$ となる。

信用リスクを考慮しない場合の評価額 V は、次のように計算された。

$$V = \sum_j C_j D(t_j) = \sum_j C_j e^{-z(tj)tj} \tag{81}$$

それに対して、信用リスクを考慮した場合の評価額 W は、期待値で評価すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
W &= \sum_j E[w(t_j)]C_j D(t_j) \\
&= \sum_j Q(t_j)C_j e^{-z(tj)tj} \\
&= \sum_j C_j \mathrm{e}^{-z(tj)tj}\,\mathrm{e}^{-qtj} \\
&= \sum_j C_j \mathrm{e}^{-(z(tj)+q)tj} \qquad (82)
\end{aligned}
$$

すなわち、形の上ではキャッシュフロー C_j を、ゼロイールド「$z(t)+q$」で割り引いたのと同じ結果となる。実際には期待値計算の他にプレミアムが要求されたり、倒産時の回収率の考慮がされたりするはずであるが、この商品に適用される金利 $y_A(t)$ のイールドスプレッド $s_A(t)$ に、倒産確率 q が関わってくることがわかる[5,6]。

$$y_A(t) = z(t)+s_A(q;t)+\beta_A$$

(2) 金利リスクの管理と信用リスクの計測

金融商品の市場価格 U を、信用リスクを考慮しない評価額 V、信用リスクを考慮した評価額 W を用いて、次のような分解を行ってみる。

$$U = V+(W-V)+(U-W) \qquad (83)$$

ここで、$(W-V)$ は取引先の倒産によって被る損失の期待値を表すことがわかる[7]。また、$(U-W)$ はプレミアム等に係わるもので収益の源泉部分である。

$$
\begin{aligned}
W-V &= \sum_j Q(t_j)C_j e^{-z(tj)tj} - \sum_j C_j e^{-z(tj)tj} \\
&= -\sum_j (1-Q(t_j))C_j e^{-z(tj)tj} \qquad (84)
\end{aligned}
$$

V は金利の変動によって変化するが、その様子を感応度分析やVaR分析によって計測し、適切に制御しようとするのが**金利リスクの管理**であった[8]。

それに対して、取引先の倒産による「損失の期待値」としての $(W-V)$ も別の要

5 債券の信用リスクの計測手法として、感応度分析の枠組みの中で、$ds_A(t)$ の変動に関する価格の感応度を計測するものがある。

6 VaR分析のリスク要因として $ds_A(t)$ を選定した場合、$dz(t)$ と $ds_A(t)$ との間に逆相関があることが観測される。

7 $(W-V)$ 部分が、いわゆる信用リスク調整値（credit risk adjustment）である。

8 円貨の各種金利の変動を因子分析にかけると、長期金利変動、短期金利変動、短期制度スプレッド変動、長期スプレッド変動などの因子が特定される（補論3）。

因で変動する。その要因のひとつは、倒産確率は個別事象が発生する可能性を表すものであり、大数の法則が成立するような状況でなければ期待値 $(W-V)$ が実現しないことに起因するものである。実際に、損失の実現値は「期待値」の周囲に分散する。

そのほか、倒産確率 $Q(t)$ のシフトや評価額の変動も $(W-V)$ を変動させる要因となる。このように**信用リスクの管理**は、$(W-V)$ の変動性を計測し、制御することを目的とするものとして位置付けることができる。

10. おわりに

以上で、銀行の資産負債取引（あるいは派生取引）の抱えるリスクのうち、金利リスクをできるだけ統合的に計測するための枠組み作りを試みた。

BIS 市場リスク規制等によってほぼ業界標準が固まりつつある「トレーディング取引」の損益認識の方法と、それに整合的に構成されている感応度分析やVaR分析についてまず概観した。そのなかで、金利の期間構造の変動リスクを表現する方法を整理し、さらにその手法を多通貨ポートフォリオに拡張する方法や、期限前解約等のより一般的な金利リスクへ対応する方法について検討した。

次に、それらの手法を「バンキング取引」に拡張することを考えた。損益概念の定義と感応度分析については、ある程度整合的な拡張ができたように思われるが、VaR分析に類似のリスク計測手法については、これからの課題が多い。引続き検討を続ける必要がある。

さらに、金融リスクの統合的管理を指向するとすれば、信用リスク等のその他の金融リスクとの整合性の検討も必要である。$U = V + (W-V) + (U-W)$ の分解が両者をつなぐ糸口になると思われる。こちらも引続き検討が必要な分野である。

図表13 金利リスクの統合管理への展開

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">リスク計測対象</th><th rowspan="2">損益認識</th><th colspan="2">金利リスク計測</th><th rowspan="2">信用リスク計測</th></tr>
<tr><th>フロント管理</th><th>経営管理</th></tr>
<tr><td rowspan="3">トレーディング取引</td><td rowspan="2">価格変動</td><td>単通貨PF</td><td>時価損益</td><td>感応度分析</td><td>VaR分析</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>多通貨PF</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">期限前解約等</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">バンキング取引</td><td>評価損益
（年度展開）</td><td>感応度分析
（年度展開）</td><td>?</td></tr>
</table>

補論1 金利の周期的な変動が期間損益に及ぼす影響

本文の図表9 のようなGAPを有する銀行のバランスに対して、周期的な金利変動が発生した場合に、期間損益がどのような変動するかをシミュレーションした。

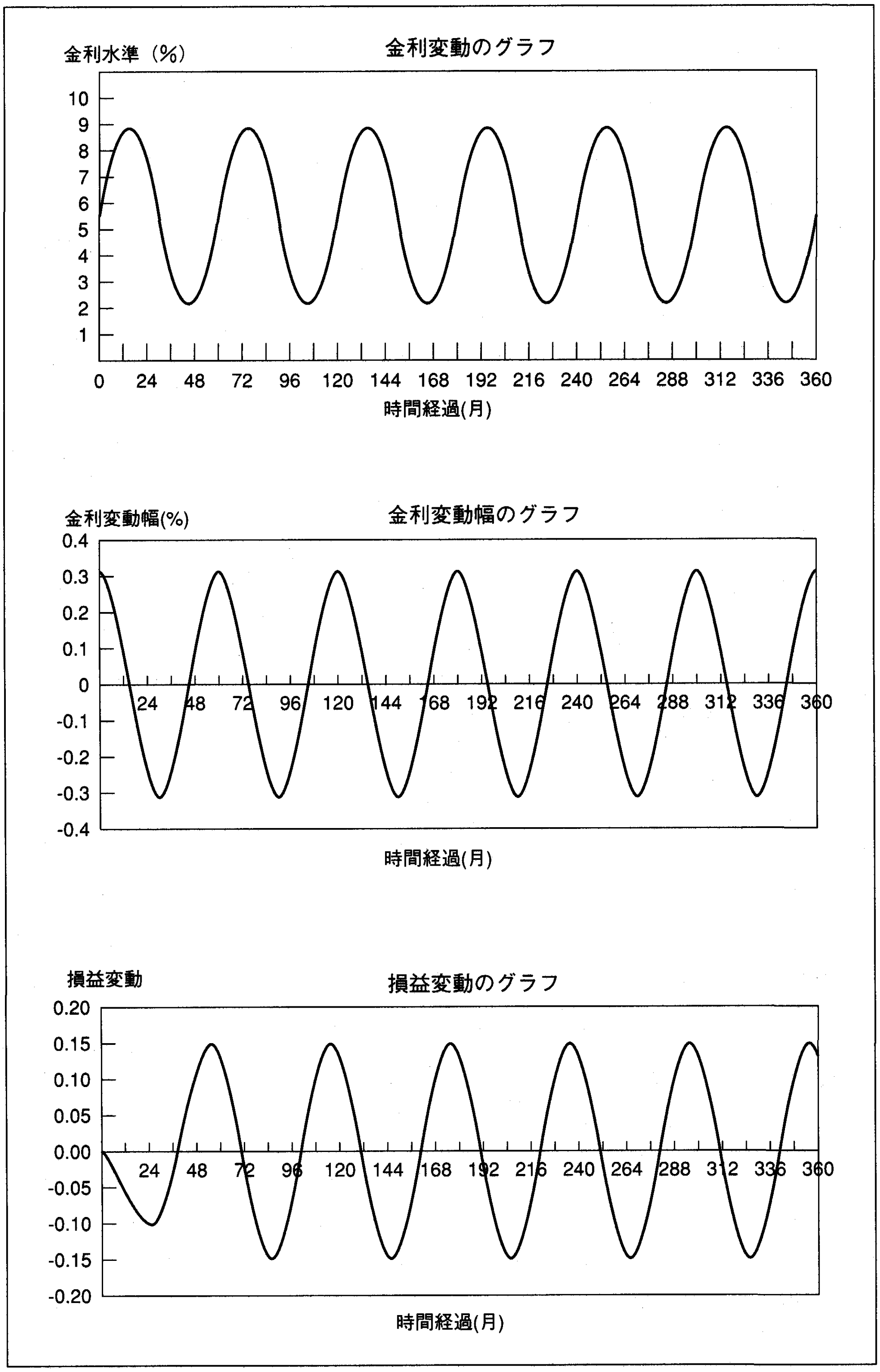
与えた金利変動は次のような正弦曲線である。

$$r(t) = 5.0\% + 3.0\% \sin\frac{2\pi t}{T} \qquad (t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \cdots)$$

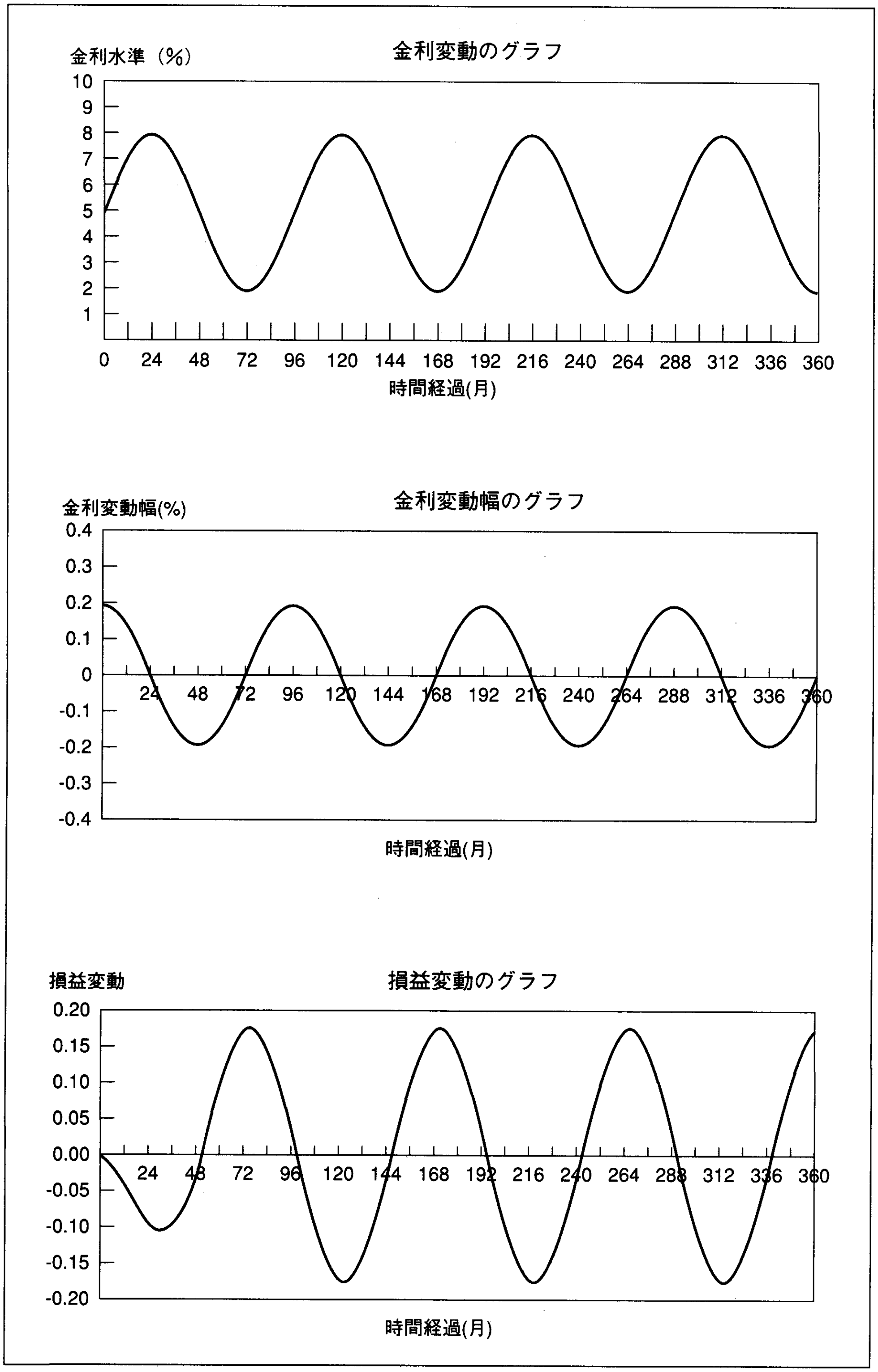
それに対して、月次の期間損益変動幅を、総資産額に対する比率 (%) で表示した。

		図表A-1	図表A-2	図表A-3
金	周 期	5.0年	8.0年	15.0 年
利	振 幅	3.0%	3.0%	3.0%
損	周 期	5.0年	8.0年	15.0年
益	振 幅	0.15%	0.18%	0.13%

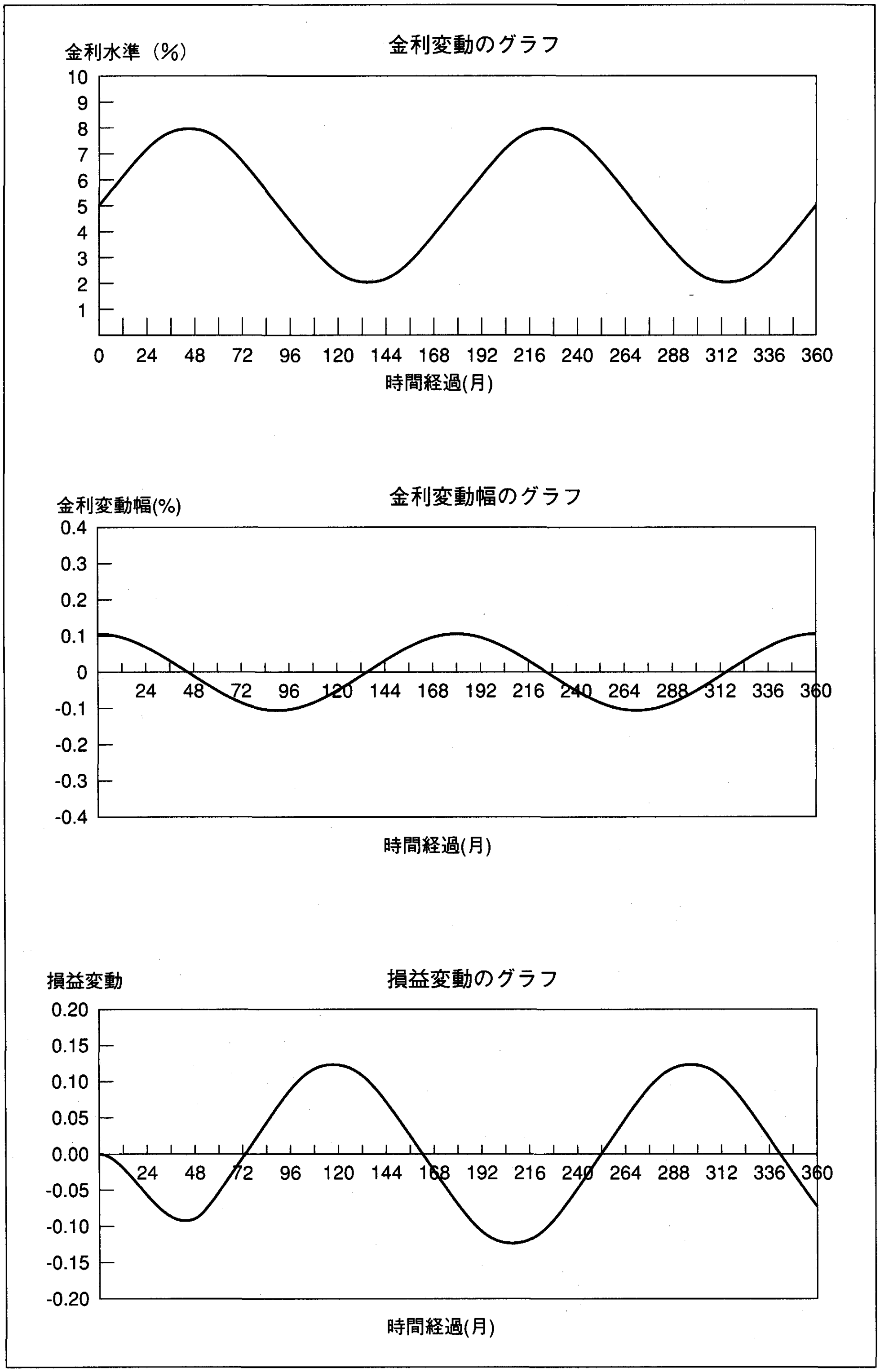
図表A-1 振幅3%、周期5年の金利変動



図表A-2 振幅3%、周期8年の金利変動



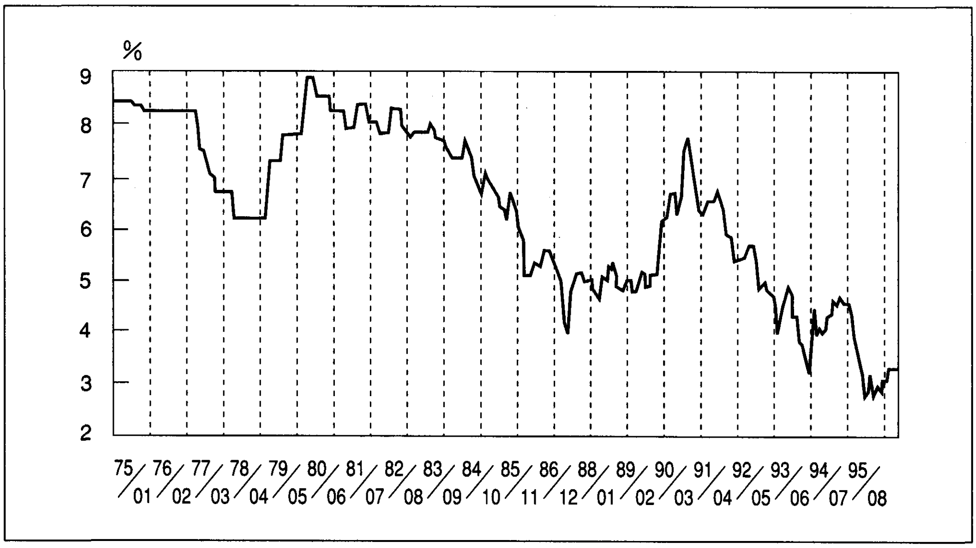
図表A-3 振幅3%、周期15年の金利変動



補論2　金利変動の周期性の分析

金利変動には周期が観測される。ここでは10年国債の新発債の応募者利回りのデータ（図表A-4）から、金利変動の周期を分析した。データを国債の発行規模が大きくなった昭和50年（1975）以降のものを用いた。

図表A-4 国債応募者利回りの推移



(1) 金利のピークとボトムの計測による分析

図表A-4 から、金利変化のピークとボトムを読み取り周期を推定すると、結果は図表A-5 のようになった。特に、発行条件が流通市場の実勢によって決められるようになった1979年以降を採ると、8年～11年内外の周期が存在することが分かる。

図表A-5 金利変化のピーク／ボトム計測による周期の推定

ピーク	75/7		80/6		91/7	
ボトム		79/2		87/6		95/10
周　期	⇦ 4年10ヶ月 ⇨ ⇦ 8年4ヶ月 ⇨ ⇦ 11年1ヶ月 ⇨ ⇦ 8年4ヶ月 ⇨					

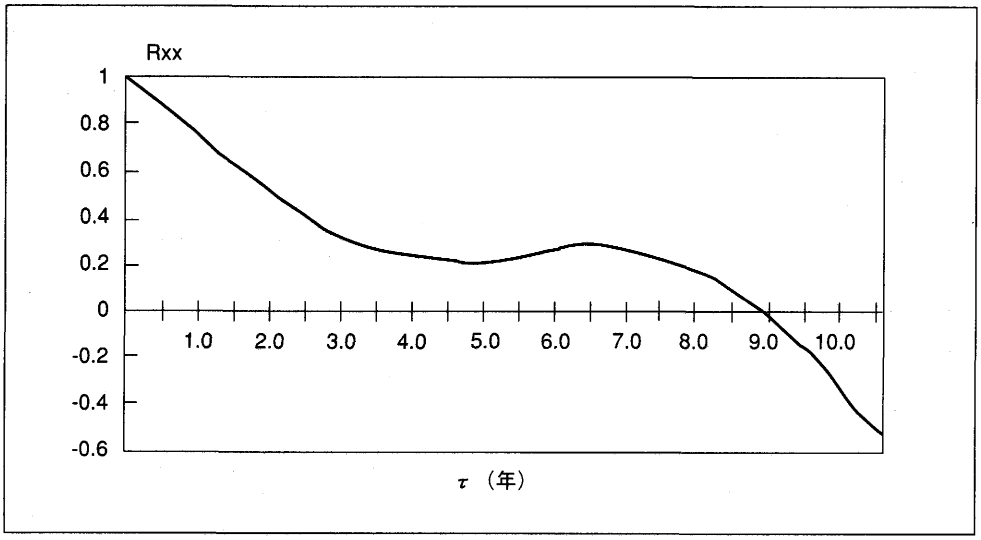
(2) 自己相関の計測による分析

時系列データがトレンドを持つ場合には、その時系列データから計測される自己相関関数は単調減少し、周期性を持つ場合には、自己相関関数は波形となることが知られている。

図表A-4 の応募者利回りのデータから計算された自己相関関数は、図表A-6 のよ

うになった。応募者利回りの変動は、計測期間中では長期的な下降トレンドを持つが、周期成分も見られる。

図表A-6 自己相関関数

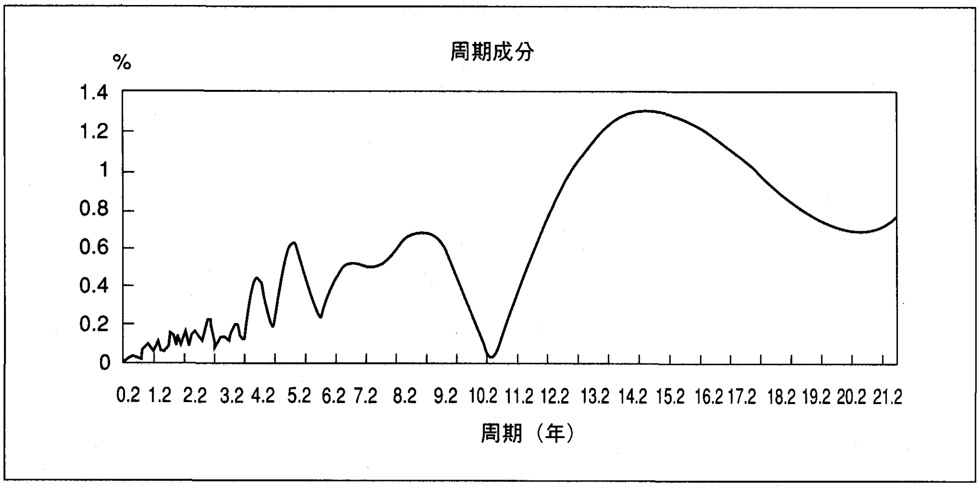


(3) 正弦曲線での近似による分析

図表A-4 の応募者利回りのデータを正弦で近似した場合の、各周期を前提にした場合の振幅の推定値を比較することにより、周期性を分析した。

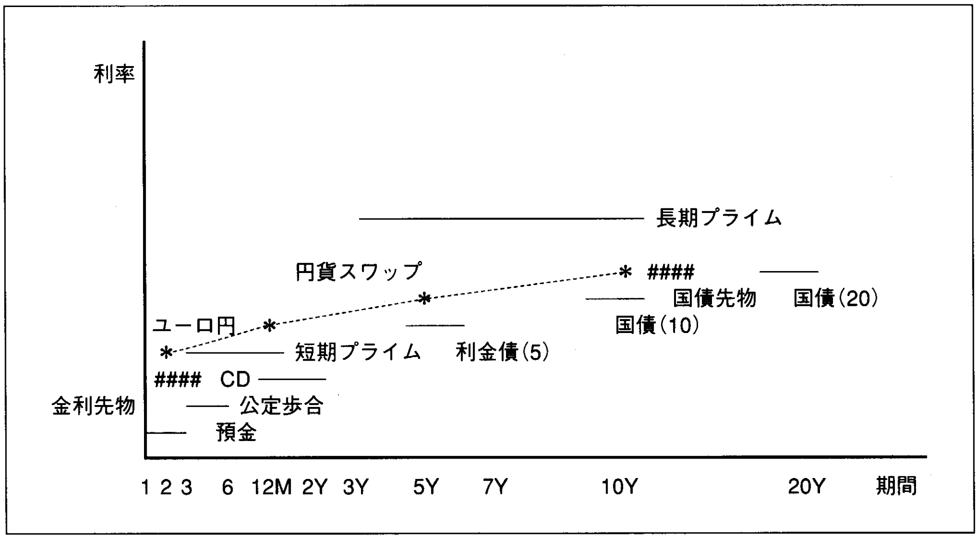
周期が時系列データの周期と一致した場合には、大きな振幅が得られると考えられる。図表A-7 に結果を示す。5年、8年、15年前後の振幅が大きくなった。

図表A-7 一定周期の正弦曲線で近似した場合の振幅



補論3 円金利の変動の因子分析

● 円貨の金利にはさまざまなものがある。



● これらの金利データを、日次・週次・月次に分けて時系列にデータファイル化。

—最短2年（日次）

—最長8年（月次）

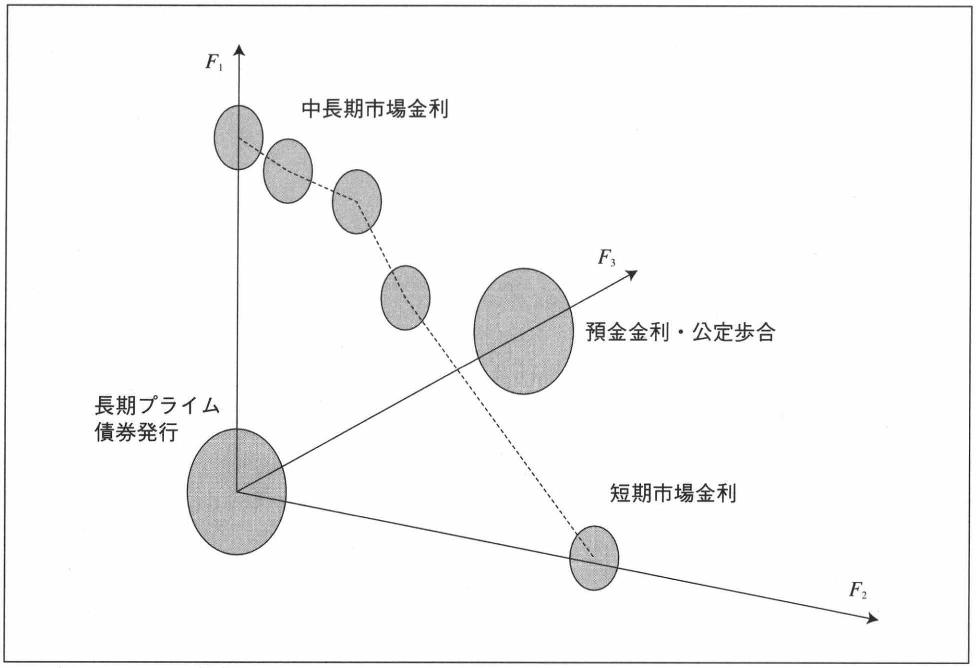
● これらの**金利の変動**を引き起こす「要因」を形式的に仮定して分析 ⇨ 因子分析

A 金利の変動 $= a_1$（第1要因）$+ a_2$（第2要因）$+ a_3$（第3要因）$+$ 誤差$_a$

B 金利の変動 $= b_1$（第1要因）$+ b_2$（第2要因）$+ b_3$（第3要因）$+$ 誤差$_b$

C 金利の変動 $= c_1$（第1要因）$+ c_2$（第2要因）$+ c_3$（第3要因）$+$ 誤差$_c$

● 各金利の係数 (a_1, a_2, a_3) 等を空間にプロットして、因子の性質を推察する。

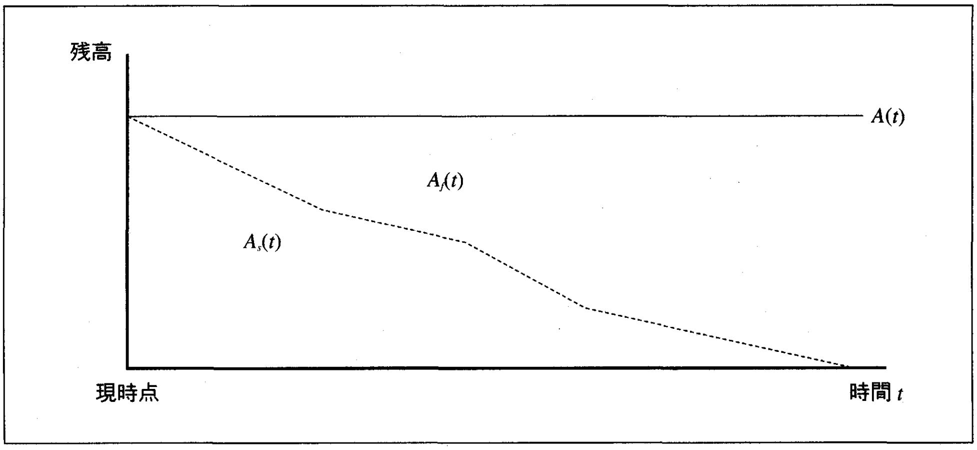


〔付〕デルタの年度展開$\Delta(t)$とGAP(t)との関係

●現時点 $t=0$ に対して、将来時点 t の資産負債が次のようにバランスしているとする。

$$A(t)=A_s(t)+A_f(t)$$
$$L(t)=L_s(t)+L_f(t)$$

ただし、$A_s(t)$、$L_s(t)$ は現時点で既に実行されている取引の残高を表し、$A_f(t)$、$L_f(t)$ は将来時点で実行されて加わった残高を表すものとする。



GAP 分析の定義により、

$$\mathrm{GAP}(t)=L_s(t)-A_s(t)$$

●感応度分析を拡張する際のバンキング取引の取引評価は次のように行う。

$$（資産側評価額）=\sum_t A_s(t-w) \qquad (R_s(t)-p^A(t))w\cdot D(t)$$

$$（負債側評価額）=\sum_t L_s(t-w) \qquad (p^L(t)-Q_s(t))w\cdot D(t)$$

ただし、
$R_s(t)$ ：$A_s(t-w)$ に対応する約定金利
$Q_s(t)$ ：$L_s(t-w)$ に対応する約定金利
$p^A(t)$ ：$A_s(t-w)$ に対応する平均パーイールド
$p^L(t)$ ：$L_s(t-w)$ に対応する平均パーイールド
w ：t を測る間隔
$D(t)$ ：割引関数

（総合評価額）＝　（資産側評価額）＋　（負債側評価額）

ただし、上式では、償還差損益の項は省略している

- 金利の期間構造 $z(t)$ のパラレル変動 dz に対して、パーイールドは $\theta(t)dz$ だけ変動すると仮定すると、各評価額は次のようになる。

$$(\text{資産側評価額}) = \sum_t A_s(t-w)\quad (R_s(t) - p^A(t) - \theta^A(t)dz)w \cdot D(t)\quad (1-tdz)$$

$$(\text{負債側評価額}) = \sum_t L_s(t-w)\quad (p^L(t) + \theta^L(t)dz - Q_s(t))w \cdot D(t)\quad (1-tdz)$$

ただし、$\theta^A(t)$ ：dz と時点 t での資産側のパーイールドの連動比率
$\theta^L(t)$ ：dz と時点 t での負債側のパーイールドの連動比率

- （総合評価額）の変動は、次のように表現される。

$$d\ (\text{総合評価額}) = -\sum_t (\text{総合評価額の年度展開 } t)\, t \cdot dz$$
$$+\sum_t (L_s(t-w)\theta^L(t) - A_s(t-w)\theta^A(t))w \cdot D(t) \cdot dz$$

各種の金利は同一の幅でパラレルに変動するという GAP 分析の精度においては、

$$\theta^A(t) \approx \theta^L(t) \approx 1$$

と近似することが許容できる。このとき、

$$d\ (\text{総合評価額}) \approx -\sum_t [-(R_A(t) + R_L(t))t + \mathrm{GAP}(t-w)\ w \cdot D(t)]dz$$

したがって、デルタ分析の金利感応度 $\Delta(t)$ と $\mathrm{GAP}(t)$ の間の、次のような関係が得られる。

$$\Delta(t) \approx \mathrm{GAP}(t-w)w \cdot D(t) - (R_A(t) + R_L(t))t$$

参考文献

池森俊文、「信用リスクの計量化について（私案）」、『MPTフォーラム機関誌』No.3、1995年12月

——— 他、「ALM新手法の考え方」、日本興業銀行資料、1992年3月

西田真二、『ALM手法の新展開』、日本経済新聞社、1995年

日本数学会編、『数学辞典』、岩波書店

ハーベイ A.C. 著、国友直人・山本　拓 訳、『時系列モデル入門』、東京大学出版会

Basle Committee on Banking Supervision, "Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks," January 1996.

Box, G.E.P. and G.M. Jenkins, *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Holden-Day, 1976.

Bierwag, G.O., *Duration Analysis Managing Interest Rate Risk*, Harper & Rows, 1987.

Cox, J.C. and M. Rubinstein, *Options Markets*, Prentice Hall, 1985.

Duffie, D., *Securities Market -- Stochastic Models*, Academic Press, 1988.

Group of Thirty, *Derivatives, Practices and Principles*, July 1993.

Hull, J.C., *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, Prentice Hall, 1993.

Uyemura, D.G. and D.V. Deventer, *Financial Risk Management in Banking Theory and Application of ALM*, Bankers Publishing Company, Probus Publishing Company, 1993.