

リスク・リバーサル取引の理論的含意について

吉 羽 要 直

1. はじめに
2. リスク・リバーサル取引の概要
3. ブラック・ショールズ・モデルとリスク・リバーサルの関係
4. 市場参加者の抱く確率分布とリスク・リバーサルの関係
5. データの簡単なチェック
6. 結論と今後の課題

補論

キーワード：リスク・リバーサル、為替、オプション、ボラティリティ、確率分布、スマイル・カーブ

ジャンル別分類：D

1. はじめに

近年外国為替市場で、通貨オプションを利用した「リスク・リバーサル」と呼ばれる取引が活発になりつつある。リスク・リバーサル取引とは、通貨、満期、想定元本、デルタの絶対値が同一の、「アウト・オブ・ザ・マネー（以下、OTM）コール・オプションの買いとOTMプット・オプションの売り」（あるいは「OTMコールの売りとOTMプットの買い」）を同時に行うものである。本論文では、リスク・リバーサル取引に関する理論的な含意を、オプション価格評価理論の基本に立ち返って整理する。

予め結論を先取りすれば、リスク・リバーサル取引の価格であるボラティリティ・スプレッドは、将来の為替相場の期待値、すなわちごく常識的な意味での「ドル高期待」とか「ドル安期待」といった相場観を反映しているのではなく、将来の為替相場に関して市場参加者の抱く主観的確率分布が非対称な形状であることを主として反映している。もし市場参加者が「この先ドル相場が小幅上昇する可能性は高いが大幅上昇の可能性は低い。他方、ドル相場が下落する可能性は低いが一旦下へ抜けると暴落の可能性

本論文は、筆者が日本銀行調査統計局企画調査課在籍中に作成したものである。本論文の改訂にあたり、刈屋武昭教授（一橋大学）から有益なコメントを頂いた。ただし、本論文中のありうべき誤りはすべて筆者個人に帰するものである。

がある」という予想を持っているとすると、この場合期待値としては必ずしも「ドル安期待」ではないが、ドルの大幅下落に対して何らかのヘッジをしようと考え、そのために何らかの対価を支払おうと考えることは十分に合理的である。このような先行きの相場に関する非対称な予想に基づく取引の場として、リスク・リバーサル市場が存在すると考えられる。本論文ではこの点を数値例等を用いつつ理論的に説明し、リスク・リバーサルの価格であるボラティリティ・スプレッドが持つ情報について考察する。¹⁾

なお、債券先物オプション等の市場において、オプションの市場価格から逆算したインプライド・ボラティリティがそのオプションの権利行使価格によってかなり異なるという現象が観察され、権利行使価格とインプライド・ボラティリティとの関係をプロットしたグラフは、その形状から通常「スマイル・カーブ」と呼ばれている。このスマイル・カーブが生じる基本的な原因は、オプション満期日の債券価格に関して市場参加者の抱く主観的確率分布がブラック・ショールズ・モデルが前提としている分布よりも裾が重いことにある。スマイル・カーブも、リスク・リバーサルも満期日の原資産価格についての市場参加者の主観的確率分布がそれらを理解する上での鍵である点で共通している。そこで本論文では、スマイル・カーブについても数値例を用いて若干の分析を行う。

2. リスク・リバーサル取引の概要

(1) リスク・リバーサル取引とは

リスク・リバーサル取引とは、通貨オプションを組み合わせた取引の一形態であり、具体的には、通貨、満期、想定元本、デルタの絶対値が同一の、「コールの買いとプットの売り」（あるいは「コールの売りとプットの買い」）を同時に行うものである。この際、コール、プットともOTMのものが用いられる。²⁾ また、デルタについては後に詳しく述べるが、「デルタの絶対値が同一」であるとは、コールの権利行使価格とプットの権利行使価格が、原資産の理論フォワード・レートからほぼ同比率で逆方向に離れていることを意味している。仮に、現在のドル相場が100円、とりあえず円ドル金利差を無視でき、現在の原資産価格と原資産の理論フォワード・レートが一致していると仮

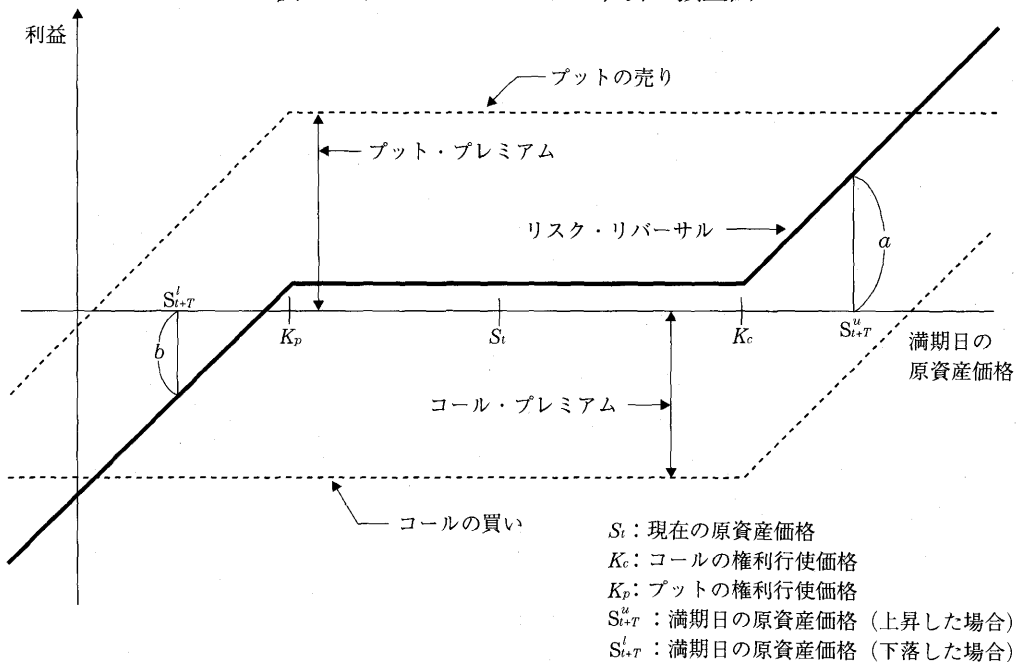
1) リスク・リバーサル取引のデータに内包されている確率分布を導出する同様の実証研究としては、他にMalz[1995]等がある。

2) アウト・オブ・ザ・マネー (OTM) とは、コールの場合は権利行使価格が原資産価格を上回っている状態、プットの場合は権利行使価格が原資産価格を下回っている状態を指す。逆に、イン・ザ・マネー (ITM) とは、コールの場合は権利行使価格が原資産価格を下回っている状態、プットの場合は権利行使価格が原資産価格を上回っている状態を指す。アット・ザ・マネー (ATM) とは、コール、プットいずれの場合も権利行使価格が原資産価格と一致している状態を指す。

定すると、リスク・リバーサル取引とはイメージとして、権利行使価格が105円のコール（通常為替市場ではドルを中心にみているので、本論文では「コール」はドルを買う権利、「プット」はドルを売る権利とする）と95円のプットを組み合わせることで売買するというものである。

リスク・リバーサル取引の損益図は、例えば図1のように描ける。この図では、プット・プレミアムがコール・プレミアムを上回っているケースを例示している。こうした状況の下で「コール買い・プット売り」を行うと、満期日の相場がドル高になった場合の利得（図の a に相当）は、同率でドル安になった場合の損失（図の b に相当）に比べて大きくなる。言い換えれば、図で S_{i+T}^u までドルが高くなる確率が、 S_{i+T}^l までドルが低くなる確率より多少小さくても、「コール買い・プット売り」を行うことは平均的には採算が合うと考えられる。すなわち、リスク・リバーサル取引は、相場の上昇、下落に関して市場参加者が何らかの意味での非対称な「相場観」を抱いていることを反映していると推察することができる。

図1 リスク・リバーサル取引の損益図



(注1) 「コールの買いとプットの売り」（それぞれ損益は破線）を組み合わせたリスク・リバーサル取引（損益は太実線）における損益図。プレミアムは現在支払う（ないし、受け取る）のに対して、オプション買いによる利益（ないし、オプション売りによる損失）は満期日に発生する。したがって、本来は円、ドル金利も考慮して調整すべきであるが、簡単化のためここでは金利を無視している。

(注2) S_{i+T}^u 、 S_{i+T}^l は、原資産価格が現在値 S_i から同じ率で上昇ないし下落した場合の満期日の原資産価格であるが、上昇した場合の利得 a は、同率下落した場合の損失 b よりも大きい。

(2) オプション価格評価モデルとデルタ

次に、「デルタの絶対値が同一」という点についてやや説明を加えるが、そのためには、リスク・リバーサル取引で用いられるオプションの価格評価モデルを簡単にみておく必要がある。リスク・リバーサル取引の基本となる通貨店頭オプションは、権利行使日が満期日に限られるヨーロピアン・タイプのオプションであり、そのオプション価格（プレミアム）を導く標準的なモデルとして広く知られているのがブラック・ショールズ・モデルである。³⁾ ブラック・ショールズ公式とその導出方法については補論1.(1)に譲ることとし、ここでは、ブラック・ショールズ公式で計算されたオプション・プレミアムのグラフの形状を確認しておこう。図2は、横軸に原資産価格（ドルの対円レート）を採ったものであるが、主な特徴点として次の3点を挙げることができる。

① コール・プレミアムは原資産価格の単調増加関数になっている。

② ただしその増加率は原資産価格の水準が低いところでは0に限りなく近く（グラフが水平に近い）、逆に高いところでは1に近い（グラフが45度線に近い）。この増加率（＝オプション・プレミアムの原資産価格に関する1次微分）が「デルタ」と呼ばれているものである。⁴⁾

③ プット・プレミアムはコールとほぼ左右対称である。したがって、原資産価格の単調減少関数であり、そのデルタは常に負である。

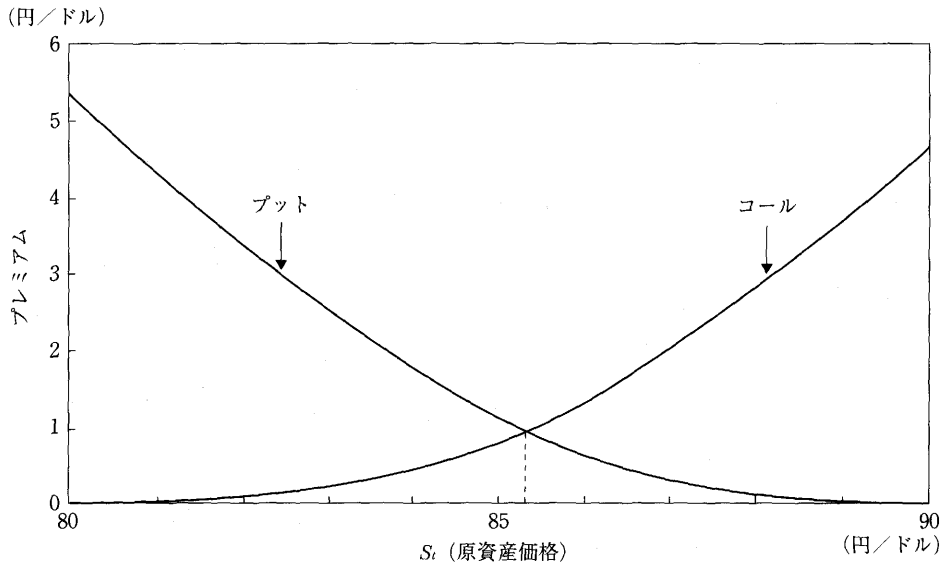
なお、この図は、オプション満期までの期間や原資産価格のボラティリティを固定して描いているが、これらの数値が上昇すると、コール・プレミアム、プット・プレミアムともにグラフは上方にシフトする。コールにせよプットにせよ、オプションは将来の不確実性に対するヘッジ機能を持っているので、保険における保険料と同様、不確実性が増大すればプレミアムは上昇するわけである。

図3は、同じようなプレミアムのグラフを、今度は現在の原資産価格（85円）を一律

3) ブラック・ショールズ・モデルについては Black and Scholes[1973]を参照。通貨オプションに対するブラック・ショールズ・モデルは、ガーマン・コールハーゲン・モデルと呼ばれることもある (Garman and Kohlhagen[1983]参照)。

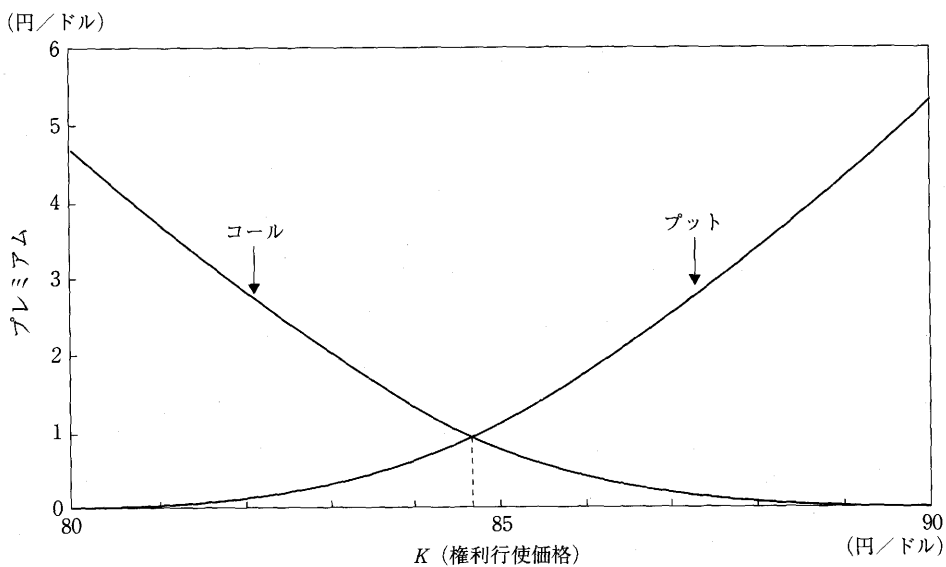
4) 図2でコール・プレミアムとプット・プレミアムの曲線が交わっている点に対応する原資産価格が原資産の理論フォワード・レートであり、図2の場合ドル金利が円金利よりも高いと仮定しているため、権利行使価格（85円）よりも若干右方に位置している。ほぼこの理論フォワード・レートのところでコール（プット）・プレミアムの増加率（デルタ）は0.5（-0.5）、かつ増加率の変化率（＝プレミアムの原資産価格に関する2次微分であり、「ガンマ」と呼ばれる）が最大になることが知られている。

図2 ブラック・ショールズ・モデルによるプレミアム評価（対原資産価格）



(注) 現在の原資産価格 S_t (横軸) を可変にして、ブラック・ショールズ・モデルを用いて、コール、プット・プレミアム (縦軸) を求めてグラフ化した結果。ただし、権利行使価格 $K = 85$ 円/ドル、円金利1.5%、ドル金利6.0%、満期までの期間30日、ボラティリティ10%として計算を行った。

図3 ブラック・ショールズ・モデルによるプレミアム評価（対権利行使価格）

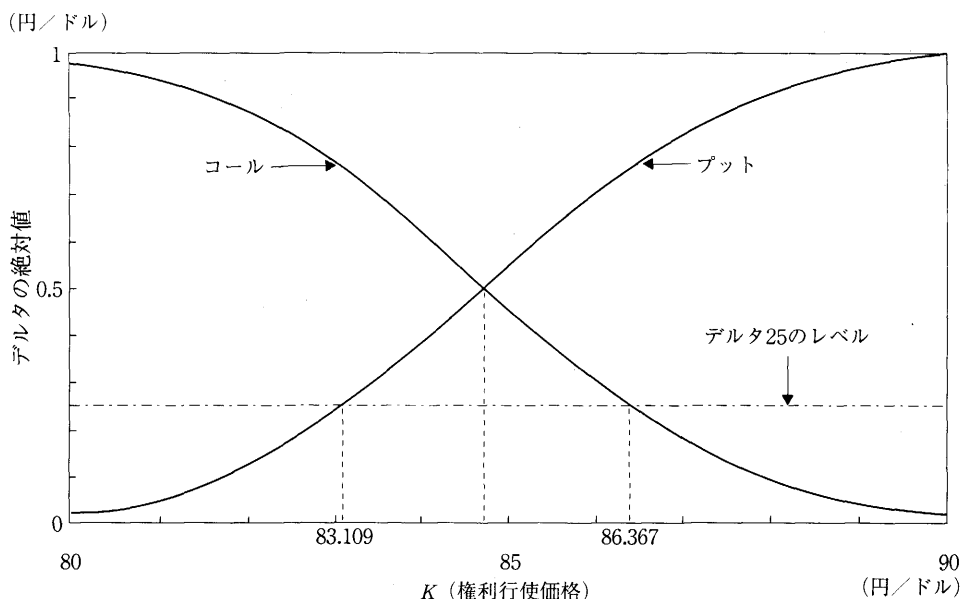


(注) 権利行使価格 K (横軸) を可変にして、ブラック・ショールズ・モデルを用いて、コール、プット・プレミアム (縦軸) を求めてグラフ化した結果。ただし、原資産価格 $S_t = 85$ 円/ドル、円金利1.5%、ドル金利6.0%、満期までの期間30日、ボラティリティ10%として計算を行った。

に固定したうえで、様々な権利行使価格のオプションについてみたものである。図2とは、原資産価格と権利行使価格の相対的位置関係が逆転しているだけなので、グラフも図2を丁度裏返した形になっている。

図2で説明したように、デルタとは原資産価格が微小量変化したときにプレミアムがどれだけ変化するかという指標であり、それをブラック・ショールズ公式を用いて計算したものは、図2のグラフの接線の傾きで表される。図4は、このデルタの絶対値を、現在の原資産価格を固定しておいたうえで、異なる権利行使価格ごとにみたものである。

図4 ブラック・ショールズ・モデルによるデルタの評価（対権利行使価格）



(注) ブラック・ショールズ・モデルから導かれるデルタの算出式を用いて、権利行使価格 K (横軸) を可変にして、コール、プットのデルタの絶対値 (縦軸) を求めてグラフ化した結果。前提条件は図3と同様。デルタ25のレベルを一点鎖線で表示してある。この一点鎖線とコールの曲線との交点の権利行使価格がデルタ25のコールの権利行使価格 (86.367円/ドル)。一点鎖線とプットの曲線との交点の権利行使価格がデルタ25のプットの権利行使価格 (83.109円/ドル)。

一般に、ブラック・ショールズ公式を用いて計算されたデルタの絶対値が $X/100$ であるようなオプションは「デルタ X 」のオプションと呼ばれている。例えば、ブラック・ショールズ公式で計算されたデルタが0.5のコールや-0.5のプットは「デルタ50」であり、それが0.25のコールや-0.25のプットは「デルタ25」である。リスク・リバーサル取引には、デルタ25のオプションが用いられることが多い（「デルタ25」は

通常OTMである)⁵⁾ 具体的にはその時の原資産価格、オプション満期までの期間、⁶⁾ 円・ドル金利、ボラティリティを所与としたうえで、デルタ25に対応する権利行使価格をブラック・ショールズ公式から求め、そのような権利行使価格を有するオプションを取引に利用することになる。図4の例で言えば、権利行使価格が86.367円のコールと、権利行使価格が83.109円のプット⁷⁾を組み合わせで売買することにより、リスク・リバーサル取引が成立する。

(3) ボラティリティ・スプレッドについて

次に、以下で主要な分析対象となる「ボラティリティ・スプレッド」について説明する。リスク・リバーサル取引はコールとプットの同時反対売買であるので、その価格はコールとプットの各々の価格の相違を反映した何らかの指標によって表される。そのような指標として実際に用いられているのが「ボラティリティ・スプレッド」である。ボラティリティ・スプレッドはコールのインプライド・ボラティリティとプットのインプライド・ボラティリティの差として定義され、各々のインプライド・ボラティリティは各々のプレミアムからブラック・ショールズ公式により逆算される。ブラック・ショールズ公式においては、他の条件が等しければ、ボラティリティが高ければ高いほどオプション・プレミアムが高くなるというボラティリティとプレミアムの1対1の対応関係があるため、ボラティリティ・スプレッドはコールとプットのプレミアムの相違を反映しているとみなすことができるわけである。実際のリスク・リバーサル取引においては、ボラティリティ・スプレッドのビッドとオファーがクォートされるが、本論文5.ではビッドとオファーの平均値をボラティリティ・スプレッドのデータとして用いる。

なお、取引の価格表示にボラティリティ・スプレッドを用いるのは、あくまでもリスク・リバーサル取引上の慣行であり、一般にコールとプットのプレミアムの相違を表現するのに、ボラティリティ・スプレッドを用いなければならないという必然性はない。むしろ、リスク・リバーサル取引以外では、コールとプットのプレミアムの相違に関連する現象の分析を行う際などには、両者のプレミアムの比率(＝プレミアム比)を用いることが多いようである。⁸⁾ プレミアム比については、それとボラティリティ・スプレッドとの関係を含めて補論3.に詳述する。

5) 補論1.(3)の(A-14)式、(A-15)式より、例えばドル金利が極端に大きい特異なケースにおいては、理論上「デルタ25」がOTMではなくなることもある。

6) 実際に取引されている通貨店頭オプションは満期が1ヵ月か3ヵ月のものが多いが、リスク・リバーサル取引にはこのうち「1ヵ月もののデルタ25」が多く用いられている。

7) 実際にはドル・円オプションの権利行使価格は1銭刻みであるため、権利行使価格の実際値が理論値に最も近いオプションが用いられる(本例の場合、86.37円のコールと83.11円のプット)。こうした権利行使価格の実際値と理論値のわずかなズレは、リスク・リバーサルの価格で調整される。

8) 例えば、株式オプションに関するBates[1990]の分析を参照。

3. ブラック・ショールズ・モデルとリスク・リバーサルの関係

ブラック・ショールズ・モデルは、現在の原資産価格 S_t (円/ドル)、権利行使価格 K (円/ドル)、円金利 r 、ドル金利 r^* 、満期までの期間 T (年)、ボラティリティ σ の6要素から、⁹⁾ 満期日の原資産価格 S_{t+T} が対数正規分布に従うとの前提の下で、コール、プットのプレミアムを評価するモデルである。この6要素のうち最初の5要素は観察可能であるが、ボラティリティ σ (より正確にはオプションの満期までの期間における原資産価格の対数値の変化の予想年率標準偏差) はあくまでも予想であるので、市場参加者が適当に仮定せざるを得ない。この時、ブラック・ショールズ・モデルでは、コールとプットに共通のボラティリティ σ を仮定する。したがって、仮に実際のプレミアムがブラック・ショールズ・モデルに基づいて形成されているとすると、実際のプレミアムから逆算されるインプライド・ボラティリティは、コールについてもプットについてもプレミアム算出の際に仮定したボラティリティ σ と論理的に必ず一致する (最初に仮定した σ に基づいて実際のプレミアムを形成し、そのプレミアムから σ を求める逆演算を行うに過ぎないため)。このため、インプライド・ボラティリティの差として定義されるボラティリティ・スプレッドは必ず0になる。¹⁰⁾

以上の点から、リスク・リバーサル取引で想定されている状況、すなわちボラティリティ・スプレッドが0以外の値をとりしかも変動するという現象が生じ得るのは、「市場におけるオプション・プレミアムの形成が実際にはブラック・ショールズ・モデルに基づいておらず、かつブラック・ショールズ・モデルからの離れ具合が一定でない」ことによるものと考えざるを得ない。

そこで次に、ブラック・ショールズ・モデルの基本的な前提に立ち返ってみる。ブラック・ショールズ公式は諸々の前提を置いて導出されているが、とりわけ「満期日 $t+T$ における原資産価格の対数値 $\ln S_{t+T}$ に関して現時点 t で抱く主観的な確率分布は正規分布」という前提はかなり強い前提であり、現実の為替相場について常に成立し

9) 金利については、大文字で表記した場合には単利 (年率)、小文字で表記した場合には連続複利金利 (年率) とする。連続複利金利 r (年率) は、その金利で $1/m$ 年間連続的に運用した場合の収益と、単利 $R\%$ で同じ期間運用した場合の収益が等しくなるように定められる。すなわち、

$$r = m \ln \left(1 + \frac{R}{m * 100} \right),$$

として定義される。詳細は、Hull [1993] pp. 46-48などを参照。

10) リスク・リバーサルで用いられるコールとプットについてだけでなく、同じ σ に基づいて実際のプレミアムが形成されているいかなるコールとプットをとっても、そのボラティリティ・スプレッドは0となる。

ているとは考え難い。¹¹⁾ 確かに、将来の原資産価格の確率分布に関して何らかの仮定を置かなければならないとすれば、無限に存在し得る様々な確率分布の中から対数正規分布（＝変化率が正規分布に従う）を選択することには一定の合理性があるが、現実の相場形成においては、相場展開がある時は小動きであったり、ある時は一方向のみに大きく変動したりする中で、相場の先行きについて市場参加者の抱く主観的確率分布の形状は常に変化していると考えの方が、現実的であろう。

そこで以下では、対数正規性の前提を緩めた場合にオプション・プレミアムがブラック・ショールズ公式の理論値からどのように乖離し、その結果どのようなボラティリティ・スプレッドが生じるのかという切り口で、分析を進めていくこととする。

4. 市場参加者の抱く確率分布とリスク・リバーサルの関係

(1) モーメントとキュムラント

本章では、満期日の原資産価格についての確率分布がどのような意味で正規分布でない場合に、どのようなボラティリティ・スプレッドが発生するかを分析する。一口に「正規分布でない」と言っても、確率分布の種類は無限に存在するが、分布の形状の特徴を表現するうえでの基本的な概念である「歪み」（＝左右の非対称性）や「尖り」（＝分布の幅と高さの関係）に注目することが有益であろう。そこで、こうした「歪み」や「尖り」に関する議論を展開するうえで必要となる「モーメント (moment)」及び「キュムラント (cumulant)」の概念について簡単に説明しておく。

変数 X がある確率分布に従うとき、その期待値 $E[X]$ を 1 次のモーメントといい、通常 μ_1 表記する。また、 X の分散、すなわち変数 X とその期待値との乖離の 2 乗について期待値をとったもの ($E[(X - E[X])^2]$) は「2 次のモーメント」¹²⁾ と呼

11) この前提は現実のドル相場がリスク中立であること（ドル・円相場の変化率の期待値が円ドル金利差であること）までは意味しない。ポートフォリオ・バランス・アプローチでは、累積経常収支がリスク・プレミアム要因としてドル・円相場の変化率に影響を及ぼすと考えられており、この点は考慮されている (Garman and Kohlhagen[1983]参照)。

ブラック・ショールズ・モデルの他の前提としては、「市場に裁定機会は存在しない」、「取引費用、税金、オプションの証拠金などは存在しない」、「為替の売買、キャッシュの貸借は無制限かつ任意の単位（どれだけ細かくても構わない）で行える」といったことが挙げられる。これらの前提は個々の取引主体からみると必ずしも成立していないが、市場全体としてみると通貨オプション市場は効率的、活動的であり、これらの前提が一応成立していると考えて問題はなかろう。また、「円、ドル非危険資産の利子率（それぞれ r 、 r^* ）は、確率変動を伴わず、正で一定である」という前提もあり、この前提は債券オプションなど金利派生商品を扱う場合には大きな問題となり得るが、本論文で対象としている通貨オプションについてはその価格が金利にほとんど影響を受けないため、さほど問題とならない。

12) より厳密には「期待値まわりのモーメント」であるが、本論文では簡単化のため、これを単に

ばれ、 μ_2 で表記される。より一般に $i=2, 3, 4, \dots$ に対して、「 i 次のモーメント」は $\mu_i \equiv E[(X - E[X])^i]$ と定義される。例えば、正規分布は期待値(μ)と分散(σ^2)という2つのパラメータを決めれば分布が完全に決まるが、これらパラメータとモーメントの関係をみると、 $\mu_1 = \mu$ 、 $\mu_2 = \sigma^2$ 、 $\mu_3 = 0$ 、 $\mu_4 = 3\mu_2^2 (= 3\sigma^4)$ となる。また、正規分布の5次以上のモーメントについても、奇数次のモーメントはすべて0、偶数次のモーメントは σ^2 の関数として表されることがわかっている。

このように何次のモーメントがどのような値をとるかということが確率分布の形状に対応しているため、正規分布からのズレを捉えるためには、モーメントが正規分布と異なる分布を考えればよい。ただし、このように正規分布からのズレを考える場合には、モーメントの簡単な変換で表される「キュミュラント」の概念を用いる方が便利である(通常 i 次のキュミュラントは κ_i で表記される)。これは、例えば4次までのキュミュラントとモーメントの関係は次のとおりとなっており、正規分布の場合、3次以上のキュミュラントはすべて0になるからである。¹³⁾

$$\kappa_1 = \mu_1, \quad \kappa_2 = \mu_2, \quad \kappa_3 = \mu_3, \quad \kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 \quad (1)$$

3次のキュミュラント(モーメント)、4次のキュミュラント(モーメント)は、各々分布の「歪み」および「尖り」に対応している。図5は、3次のキュミュラントによって確率分布の形状がどのように変わるかを見たものである。太い実線のグラフが正規分布であり、この場合3次のキュミュラント κ_3 は0である。他の2つのグラフは κ_3 が正および負の値をとる場合を示しているが、正規分布のグラフと比較可能なように、期待値および分散(すなわち1次および2次のキュミュラント)は全て固定してある。¹⁴⁾この図を将来の為替相場の確率分布とみなすと(ただし $x=0$ のところが現在値で、ここから右に行けばドル高)、 κ_3 が正の場合は正規分布($\kappa_3=0$)の場合に比べて、ドル安方向については小幅ドル安になる確率が高まっているのに対し(点線グラフの山が左にずれている)、ドル高方向を見ると大幅なドル高になる確率が高まっていることがわかる(図の右端では点線グラフが一番高い位置にある)。 κ_3 が負の場合は今の場合と逆で、小幅ドル高になる確率と大幅ドル安になる確率が高まっている。繰り返しになるが、これら3つのケースにおいては期待値は同一でゼロであるので、「ドル高期待」とか「ドル安期待」といった相場観を期待値でみる限りは、これら3つのケースで相場観には全く差異は無い。また分散も一定であるので、ボラティリティにも全く差異がな

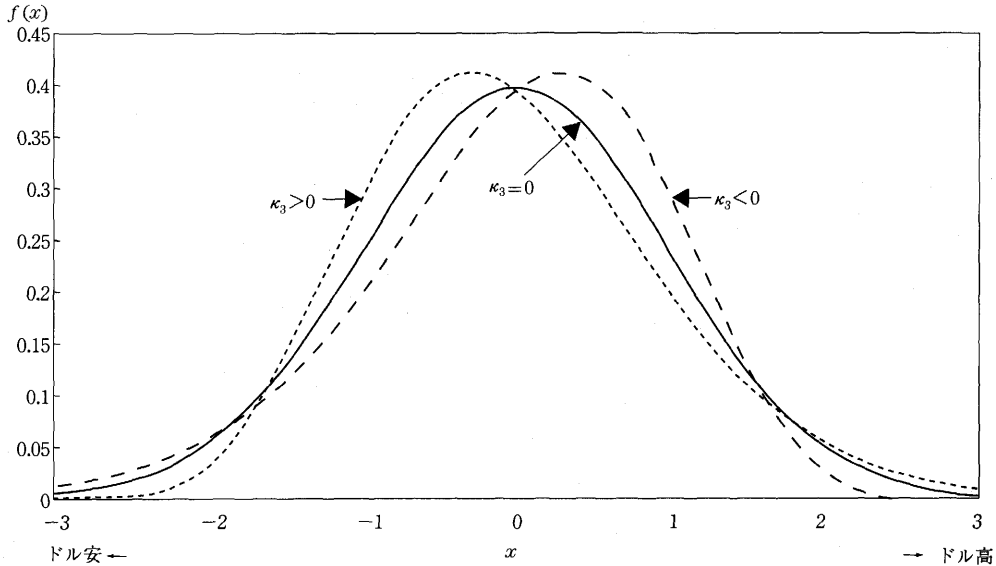
「モーメント」と称することにする。

13) キュミュラントの正確な定義はやや技術的になるので、補論4.(1)を参照。

14) 例えば図5において $x=0$ のところで垂線を引いて左右の面積を比べると、3つのどのグラフについても等しくなっている。すなわち、3つのケースのいずれについても X の期待値は0である。

い。しかし、図でみれば明らかなおとおり、確率分布の形状として捉えれば、為替相場の先行きについて市場参加者が思い描いている姿は、これら3つのケースでかなり異なっているといえる。

図5 3次のキュミュラントと確率密度関数の関係



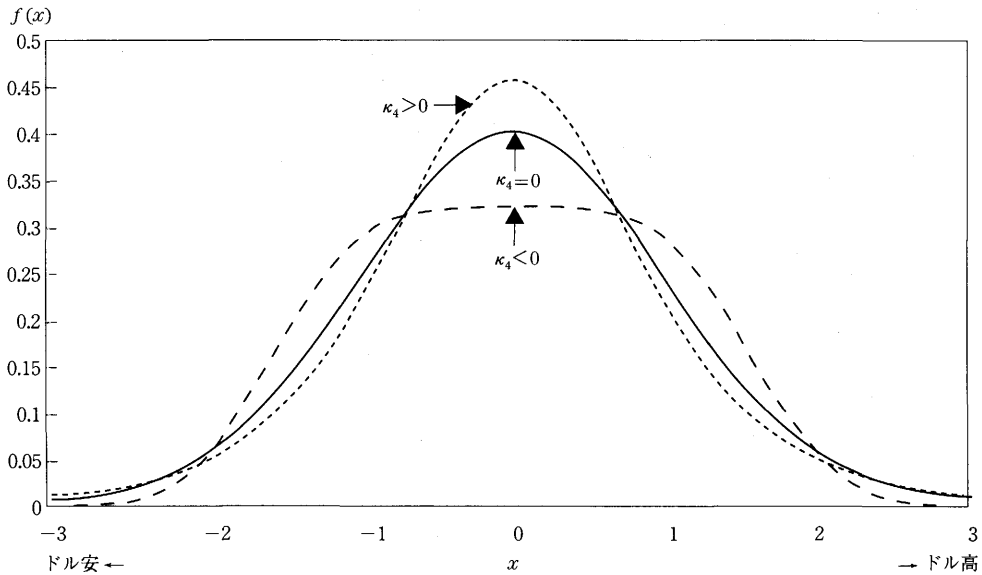
(注) 3次のキュミュラント κ_3 が0である正規分布（ここでは期待値0、分散1の標準正規分布を採用）の確率密度関数 $f(x)$ を $\kappa_3 > 0$ 、 $\kappa_3 < 0$ となる分布（ただし、この分布でも期待値は0、分散は1となるように調整）と比較する。 $\kappa_3 > 0$ に対して考えた分布はガンマ分布の1つであり、具体的には次の式で与えられる確率密度関数 $f(x)$ を採用。

$$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{11!} \{2\sqrt{3}(x+2\sqrt{3})\}^{11} \exp\{-2\sqrt{3}(x+2\sqrt{3})\} \quad \text{for } -2\sqrt{3} \leq x.$$

このとき、 $\kappa_3 = 1/\sqrt{3}$ となる。ここで考えた確率変数 X に対して、 $\kappa_3 < 0$ に関して考えた分布は $-X$ の分布である。

次に図6で4次のキュミュラント (κ_4) についてみておこう。図5の場合と同じように、 κ_4 が正および負の場合の確率分布の形状を、正規分布の場合 ($\kappa_4 = 0$) と比較してみる。また、1次から3次までのキュミュラントについては、3つのグラフとも全く同じである。 κ_4 が正の場合は、為替相場が現在値からほとんど変化しないところ（グラフの中央）と、大幅に変動するところ（グラフの両端）において確率が高くなっており、その中間では低くなっている。このような分布は、山の裾が厚い形状から、「裾が重い (fat-tail)」分布と呼ばれる。逆に κ_4 が負の場合は、山の裾の部分では確率は低くなっている。ただし、いずれの場合についても、3次のキュミュラントの場合にみられたようなドル高方向とドル安方向での分布の非対称性はみられない。

図6 4次のキュミュラントと確率密度関数の関係



(注) 4次のキュミュラント κ_4 が0である正規分布（ここでは期待値0、分散1、 $\kappa_3=0$ の標準正規分布を採用）の確率密度関数 $f(x)$ を $\kappa_4 > 0$ 、 $\kappa_4 < 0$ となる分布（ただし、この分布でも期待値0、分散1、 $\kappa_3=0$ となるように調整）と比較する。 $\kappa_4 > 0$ としてはロジスティック分布をもとに以下の確率密度関数 $f(x)$ で示されるものを採用。

$$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}{\left(1 + \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}} x\right)\right)^2},$$

このとき、 $\kappa_4 = 1.2$ 。 $\kappa_4 < 0$ としては $\exp(-x^4)$ をもとに以下の確率密度関数 $f(x)$ で示されるものを採用。

$$f(x) = \frac{2}{\Gamma(1/4)} \sqrt{\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}} \exp\left\{-\left(\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\right)^2 x^4\right\},$$

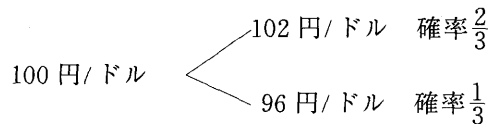
このとき、 $\kappa_4 = \kappa_4 = 1/4 \left\{ \Gamma(1/4) / \Gamma(3/4) \right\}^2 - 3 \approx -0.812$ 。

(2) 3次、4次のキュミュラントがボラティリティ・スプレッドに与える影響（その1）

—離散型モデルによる簡単な分析

前述したように、3次のキュミュラントが負である分布を想定するということは、例えばドル・円相場でみる場合、ドルが上昇する場合には小幅な上昇に止まる公算が大きく、ドルが下落する場合にはその下落幅が大幅なものになる可能性が小さくないということである。本節では、このような状況がボラティリティ・スプレッドにどのような影響を与えるのかを、離散型のごく簡単な数値例でまず確認しておくこととする（連続分布を想定したより厳密な議論は次節で展開する）。

例えば、現在、為替相場が100円/ドルであるとし、来期の為替相場は確率 $\frac{2}{3}$ で102円/ドルとなり、確率 $\frac{1}{3}$ で96円/ドルとなると考える。なお、この時、来期の為替相場の期待値は現在の水準と同じ100円/ドルであるとする（円ドル金利差0を暗黙に仮定）。



ここで、来期に満期となるオプションのうち、権利行使価格がともに1円分だけOTMのコールとプット、すなわち権利行使価格が101円のコールと、権利行使価格が99円のプットに注目する。このようなコールとプットに注目するのは、リスク・リバーサル取引に用いられるのはデルタの絶対値が等しい（典型的にはデルタ25の）コールとプットであり（脚注6など参照）、それは権利行使価格が理論フォワード・レート（本例の場合100円）から同率逆方向に乖離したコールとプットに概ね対応するからである。

さて、このコールとプットのプレミアムの大小関係の評価してみよう。オプションのプレミアムは、大枠としては期待収益の割引現在価値を算出するとの考え方に基づいているが、ここでは簡単化のため単に期待収益で評価する。権利行使価格101円のコールの期待収益は

$$\frac{2}{3}(102-101) = \frac{2}{3} \text{ 円/ドル,}$$

となるのに対し、権利行使価格99円のプットの期待収益は

$$\frac{1}{3}(99-96) = 1 \text{ 円/ドル,}$$

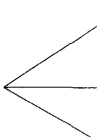
となり、後者が前者を上回る。この結果、プットのプレミアムがコールのそれに比べて高くなり、これらのプレミアムからブラック・ショールズ公式を用いて逆算したインプライド・ボラティリティはプットの方が大きくなる。すなわち、「コール」－「プット」でみたボラティリティ・スプレッドは負の値をとることとなる。以上をまとめると、来

期におけるドル相場の期待値が現在のドル相場と変わらなくても、分布の形状がドル安方向に歪んでいる場合、ボラティリティ・スプレッドは負となり、いわゆる“ドル・プット・オーバー”の状況となる。逆に、全く同様の議論を行えば、来期のドル相場の分布がドル高方向に歪んでいる場合は、期待値という意味でのドル高期待がなくても、ボラティリティ・スプレッドが正、すなわち“ドル・コール・オーバー”の状況になることが簡単に確かめられる。

ところで、以上のような現象が生じる本質的な理由は何であろうか。トリックは、用いられるオプションの権利行使価格にある。例えば、上記の例において、現在のドル相場（100円）と来期実現するかも知れないドル相場（102円、96円）までのちょうど中間地点を各々の権利行使価格とするコールとプットを選択すれば（すなわち権利行使価格101円のコールと権利行使価格98円のプット）、期待収益はコール、プットともに2/3円となり、ボラティリティ・スプレッドは0となる。要するに、真の分布が非対称（上に2円、下に4円）であるのに対し、リスク・リバーサル取引ではあくまでも対称に（上下1円）OTMであるようなコールとプット¹⁵⁾が用いられるため、真の分布を反映させてこれらのコールとプットの価値を評価すると、異なるプレミアムになるということである。

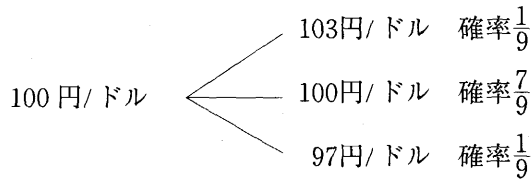
次に4次のキュミュラントがボラティリティ・スプレッドに与える影響について、やはり同様な離散型の数値例で考えてみよう。4次のキュミュラントが正であるということは、正規分布と比較して分布の裾が重いということである。分布の裾が重い場合、正規分布の場合に比べて、ドル相場はほとんど変動しない可能性が高いが、同時に、大幅にドル安あるいはドル高に振れる可能性も高い（その中間の通常の振れ方をする可能性は小さい）。正規分布そのものを簡単な離散型のモデルで表すことは難しいので、以下では「標準のモデル」と「裾の重いモデル」を作り、比較してみることにする。

標準のモデルとして次のモデルを考える。

100 円/ドル		102円/ドル	確率 $\frac{1}{4}$
		100円/ドル	確率 $\frac{1}{2}$
		98円/ドル	確率 $\frac{1}{4}$

一方、裾の重いモデルを作ってみる。ただし、期待値と分散は上の標準のモデルと一致させる。

15) 厳密に言えば技術的な理由により微妙に非対称であるが、事柄の本質を理解するためにここでは対称としておく。



前の例と同じように、1円だけOTMのコールとプット（権利行使価格101円のコールと権利行使価格99円のプット）に注目する。まず標準のモデルでは、各々の期待収益は、

$$\text{コール： } \frac{1}{4}(102-101) = \frac{1}{4} \text{ 円/ドル,}$$

$$\text{プット： } \frac{1}{4}(99-98) = \frac{1}{4} \text{ 円/ドル,}$$

となり、両者のプレミアムには差が生じない。裾の重いモデルでも、

$$\text{コール： } \frac{1}{9}(103-101) = \frac{2}{9} \text{ 円/ドル,}$$

$$\text{プット： } \frac{1}{9}(99-97) = \frac{2}{9} \text{ 円/ドル,}$$

となって、やはり、両者のプレミアムには差が生じない。すなわち、分布の裾の形状がどのように変化しても分布の対称性は崩れないため、4次のキュミュラントは、前述の3次のキュミュラントの場合と異なり、ボラティリティ・スプレッドには影響を与えない。¹⁶⁾

リスク・リバーサル取引との直接の関係は無いが、4次のキュミュラントに関する議論としては、当該オプションのOTMの程度（＝権利行使価格と理論フォワード・レートとの乖離）によってオプション・プレミアムがどのように変化するかをみると興味深い。そこで、上記の例において、1.5円分OTMのオプション、すなわち権利行使価格101.5円のコールと権利行使価格98.5円のプットについて、同じように期待収益を見てみよう。まず、標準のモデルでは、

$$\text{コール： } \frac{1}{4}(102-101.5) = \frac{1}{8} \text{ 円/ドル,}$$

$$\text{プット： } \frac{1}{4}(98.5-98) = \frac{1}{8} \text{ 円/ドル,}$$

裾の重いモデルでは、

16) 前脚注のとおり、リスク・リバーサルに用いられるコールとプット（＝デルタ25）は、理論フォワード・レートに対して厳密には微妙に非対称であるため、実際には4次のキュミュラントも微妙にボラティリティ・スプレッドを変化させる。この点についての詳細は(3)で述べる。

$$\text{コール： } \frac{1}{9}(103-101.5) = \frac{1}{6} \text{ 円/ドル,}$$

$$\text{プット： } \frac{1}{9}(98.5-97) = \frac{1}{6} \text{ 円/ドル,}$$

となる。結果を併せてまとめると、コール、プットともプレミアムは次表のとおりである。

	標準のモデル		裾の重いモデル
1円OTM	1/4円	>	2/9円
1.5円OTM	1/8円	<	1/6円

すなわち、1円OTMのオプションの場合は、裾の重いモデルにおけるプレミアムが標準のモデルにおけるそれよりも低くなるのに対し、1.5円OTMのオプションの場合は、裾の重いモデルにおけるプレミアムの方がむしろ高くなっている。同じ計算をいろいろな権利行使価格の場合について行ってみると、コール、プット双方のオプションとも、OTMであればあるほど、裾の重いモデルにおける価値が標準のモデルにおける価値に比べて相対的に高くなることがわかる。

このような現象は直観的には次のように理解できる。そもそもOTMのオプションは、その定義により、現在の原資産価格の下で権利行使をすると損をするオプションである。ここで、現時点でかなりの程度OTMになっているオプション（コールであれば権利行使価格が原資産価格をかなりの程度上回っているもの）を考えると、先行きの原資産価格が正規分布のような標準的な確率分布に従っている場合は、満期日においても引き続きOTMである確率が極めて高いので、オプションとしての価値をほとんど持たない。これに対し、先行きの原資産価格が裾の重い確率分布に従っている場合は、たとえ現時点でかなりの程度OTMであっても、満期日までには原資産価格が大きく変動して権利行使が有利になっている確率も少なからず残されているので、オプションとしてそれなりの価値を有する。上の数値例に即して言えば、1.5円OTMのコールに関して、標準のモデルの場合は来期のドル相場が高々102円までしか上昇しないので、その期待収益率は低い（もし2円OTM、すなわち権利行使価格102円のコールを考えるとその期待収益は0である）、裾の重いモデルの場合には来期のドル相場が103円まで上昇する可能性があるため、同じオプションの価値は相対的に高まることになる（仮に2円OTMであっても引き続き正の期待収益を有する）。この現象はコールについてもプットについても全く同様に説明でき、コールとプットの間での非対称性はない。

以上本節で示したことをまとめると、次の3点に要約できる。

① 先行きの原資産価格が3次のキュミュラントが0ではない非対称な確率分布に従っているときは、リスク・リバーサル取引で用いられるようなコールとプットは各々異なるプレミアムを有し、ボラティリティ・スプレッドが発生する。

② これに対し、先行きの原資産価格の確率分布がどのような4次のキュミュラントを持っていたとしても、3次のキュミュラントが0であれば、リスク・リバーサル取引で用いられるようなコールとプットについてはプレミアムが等しくなり、ボラティリティ・スプレッドは発生しない。

③ コールについてもプットについても、OTMであればあるほど、先行きの原資産価格の確率分布における4次のキュミュラントが大きい場合のプレミアムは、それが小さい場合のプレミアムに対して、相対的に高くなる。

以上の議論は、極めて簡単な数値例によるものであり、「デルタ25」やブラック・ショールズ公式の技術的な留意点を全て無視している。このため、リスク・リバーサル市場で観察されるボラティリティ・スプレッドについて、完全な説明を与えるものではない（例えば現実には、4次のキュミュラントもボラティリティ・スプレッドに微妙な影響を与える）。(3)では、これらの技術的な留意点をも勘案し、連続分布モデルでより厳密な分析を行うが、事柄の本質は上記の簡単な数値例でほぼ言い尽くされていることも、あえて強調しておきたい。

(3) 3次、4次のキュミュラントがボラティリティ・スプレッドに与える影響(その2) —連続型モデルによるより厳密な分析

ここでは、実際のリスク・リバーサル取引に即して、より厳密な数値例を用いた分析を行う。すなわち、先行きの原資産価格の確率分布が対数正規分布と異なる3次や4次のキュミュラントを有する場合に、ブラック・ショールズ・モデルから算出される「デルタ25」のボラティリティ・スプレッドがどのような値をとるのかを、定量的に確認してみる。

Jarrow and Rudd[1982]は、先行きの原資産価格にブラック・ショールズ・モデルで想定する分布と異なったキュミュラントを与えた場合のプレミアム評価公式を与えた。4次までのキュミュラントの違い（ただし、1次及び2次のキュミュラントは一致させる）を反映させた近似式は次のとおりである。¹⁷⁾

17) これらの近似式の導出方法については補論4.(2)を参照。なお、ジャロー・ラッドの方法では、対数正規分布を中心に展開を行っているが、正規分布を中心に展開すべきとの考え方もある（Kariya [1993] pp. 245-249参照）。

$$c(F) = c(A) - e^{-rT} \frac{\kappa_3(F) - \kappa_3(A)}{3!} \frac{d\alpha(S_{t+T})}{dS_{t+T}} \Big|_{S_{t+T}=K_c} + e^{-rT} \frac{\kappa_4(F) - \kappa_4(A)}{4!} \frac{d^2\alpha(S_{t+T})}{dS_{t+T}^2} \Big|_{S_{t+T}=K_c}, \quad (2)$$

$$p(F) = p(A) - e^{-rT} \frac{\kappa_3(F) - \kappa_3(A)}{3!} \frac{d\alpha(S_{t+T})}{dS_{t+T}} \Big|_{S_{t+T}=K_p} + e^{-rT} \frac{\kappa_4(F) - \kappa_4(A)}{4!} \frac{d^2\alpha(S_{t+T})}{dS_{t+T}^2} \Big|_{S_{t+T}=K_p}. \quad (3)$$

ただし、 $c(F)$ 、 $p(F)$ はそれぞれ4次のキュミュラントまで考慮した場合のコール、プットのプレミアム、 $c(A)$ 、 $p(A)$ はそれぞれブラック・ショールズ・モデルによるコール、プットのプレミアム、 $\kappa_3(F)$ 、 $\kappa_4(F)$ は現時点 t に予想する満期日 $t+T$ の原資産価格 S_{t+T} が従う分布のそれぞれ3次、4次のキュミュラント、 $\kappa_3(A)$ 、 $\kappa_4(A)$ はブラック・ショールズ・モデルにおいて S_{t+T} が従うと仮定されている分布（＝対数正規分布）の3次、4次のキュミュラント、 K_c 、 K_p はそれぞれコール、プットの権利行使価格、 $\alpha(S_{t+T})$ は対数正規分布の確率密度関数である。

上記のジャロー・ラッドの方法によって、デルタ25のボラティリティ・スプレッドを計算する。具体的には、次のような手順で行う。¹⁸⁾

- ① 原資産価格 (S_t)、円金利 (r)、ドル金利 (r^*)、ボラティリティ (σ)、残存期間 (T) を外生的に与え、それらの下でデルタ25（＝対数正規分布を仮定したブラック・ショールズ・モデルで計算したデルタの絶対値が0.25）となるようなコール、プットの権利行使価格 K_c 、 K_p を各々求める。
- ② 上記①から、ブラック・ショールズ公式によるコール、プットのプレミアム $c(A)$ 、 $p(A)$ を求めることができるので、さらに S_{t+T} がある確率分布に従うとし、その3次、4次のキュミュラント ($\kappa_3(F)$ 、 $\kappa_4(F)$) を与え、その想定の下でコール、プットのプレミアムを(2)式、(3)式より算出する。
- ③ ②で求めたコール、プットのプレミアム ($c(F)$ 、 $p(F)$) が市場で実際に成立しているプレミアムに相当すると考え、ここからブラック・ショールズ公式を用いた逆算により、コール、プットそれぞれのインプライド・ボラティリティを求める。¹⁹⁾

18) 具体的な計測は、C言語でプログラムし、IBM DOS/V機でGNU Cコンパイラを用いて行った。

19) プレミアムからインプライド・ボラティリティへの逆算はここではニュートン・ラプソン法を用いた。

- ④ ③で求めたコール、プットそれぞれのインプライド・ボラティリティの差（「コール」－「プット」）を、ボラティリティ・スプレッドとする。

図7は、 S_{t+T} が従うと想定される確率分布の3次、4次のキュミュラント（ $\kappa_3(F)$ 、 $\kappa_4(F)$ ）と対数正規分布のそれら（ $\kappa_3(A)$ 、 $\kappa_4(A)$ ）との乖離が様々な値をとった場合、ボラティリティ・スプレッドがどのように変化するかをプロットしたものである。図7より以下のことがわかる。

まず第1に、想定する分布の3次のキュミュラントが対数正規分布のそれから乖離すればするほど、ボラティリティ・スプレッドも0から大きく乖離する。具体的には、想定する分布の3次のキュミュラントが対数正規分布のそれに比べて大きくなればなるほど、ボラティリティ・スプレッドは大きくなり、“ドル・コール・オーバー”の度合いを強める。逆に、想定する分布の3次のキュミュラントが対数正規分布のそれに比べて小さくなればなるほど、ボラティリティ・スプレッドの負の値も大きくなり、“ドル・プット・オーバー”の度合いを強める。

第2に、想定する分布の4次のキュミュラントが対数正規分布のそれから乖離しても、ボラティリティ・スプレッドはほとんど影響を受けない。

これらは、前述の簡単な離散型モデルでの結論と、ほぼ同じである。ただし、ボラティリティ・スプレッドは想定する分布の4次のキュミュラントからわずかではあるが影響を受けており（ごく緩やかな増加関数）、この点については離散型モデルで単純化して考えた場合の結論とは異なっている（離散型モデルでは全く影響を受けない）。このように、想定する分布の4次のキュミュラントがボラティリティ・スプレッドに微妙な影響を及ぼすのは、「デルタ25」およびブラック・ショールズ公式に関する次のような技術的な原因による。

- ① デルタ25のコールとプット（より一般的にはデルタの絶対値が同一であるようなコールとプット）は、厳密には原資産の理論フォワード・レートに関して対称な権利行使価格を持つオプションではない。²⁰⁾

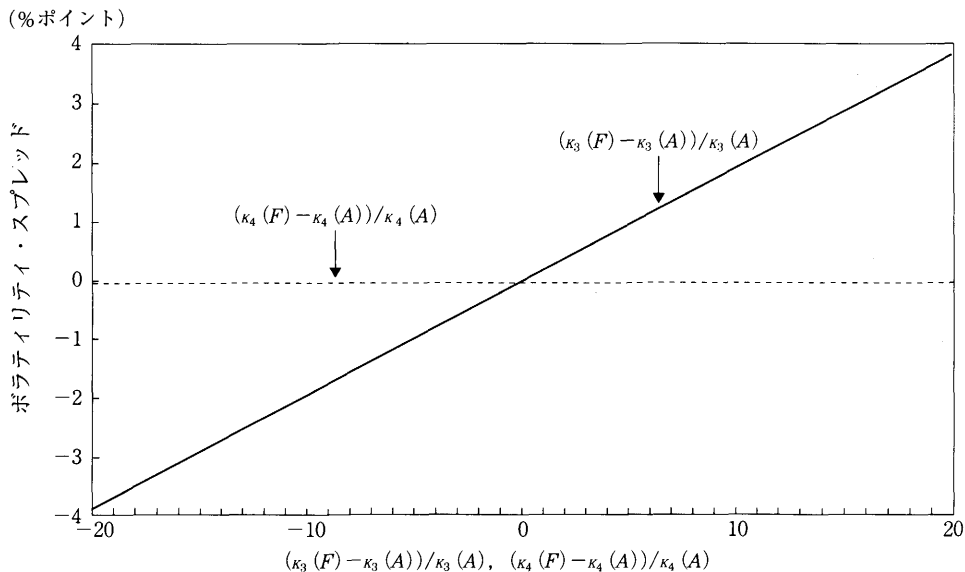
20) この点の証明は補論1.(3)を参照。なお、リスク・リバーサル取引の目的が3次のキュミュラントに反映されるような「相場観」に基づく取引にあるとすると、そもそもデルタ25のコールとプットを用いるのではなく、理論フォワード・レートに関して対称な権利行使価格を持つコールとプットを用いる方が理論的にははっきりしている。それにもかかわらず、実際の取引ではデルタ25が用いられているのは、市場ではデルタやさらにその変化率であるガンマ等がポジション把握上の重要な指標になっていることや、こうした「ズレ」が実用上は無視し得る程度のものであることによるのであろう。

② オプションの価格評価公式は、リスク中立下で満期日の（対数値ではない真数値の）キャッシュ・フローの期待割引現在価値を算出することによって得られる。ここで、満期日の原資産価格の対数値について正規分布からのズレを仮定していることとの整合性を考えれば、満期日のキャッシュ・フローの「対数」について期待値をとる方が自然であるが、実際には真数のままキャッシュ・フローの期待値を求めている。²¹⁾

この2点を考慮し調整した場合、想定する分布の4次のキュミュラントはボラティリティ・スプレッドに影響を及ぼさないことが確認できる。²²⁾

以上より、連続分布を想定して数値例でボラティリティ・スプレッドを算出してみると、「デルタ25」やブラック・ショールズ公式の極めて技術的な要因を除去した場合、リスク・リバーサル取引に反映されている「相場観」とは、前述の離散型モデルで示したのと全く同様に、先行きの原資産価格の確率分布に関して市場参加者が抱く3次の

図7 デルタ25での3次、4次のキュミュラントと
ボラティリティ・スプレッド（ジャロー・ラッドの方法）



(注) ジャロー・ラッドの方法により、想定した分布における3次、4次のキュミュラントの対数正規分布のそれらからのずれ $(\kappa_3(F) - \kappa_3(A)) / \kappa_3(A)$ 、 $(\kappa_4(F) - \kappa_4(A)) / \kappa_4(A)$ （横軸）を-20から20まで変化させた際のデルタ25でのボラティリティ・スプレッド（縦軸）。ただし、3次、4次のいずれかのキュミュラントだけを変化させ、他方は対数正規分布と同じ値で固定する。計算における前提条件は、図3と同様。

21) この点については、仮にキャッシュ・フローの対数値に関して期待値をとってよいものであるとすると、調整することができると考えられる。補論2. 参照。

22) この点についての数学的な証明は補論4. (4)を参照

キュミュラント（より一般には3次以上の奇数次のキュミュラント）であり、偶数次のキュミュラントではないと結論づけることができる。

なお、満期日の原資産価格の期待値の変化については、為替リスクについてのリスク・プレミアムの大きさが変化しない限りにおいて、ボラティリティ・スプレッドに影響を与えないと言うことができる。例えば、ポートフォリオ・バランス・アプローチに基づく為替相場決定理論に従えば、為替リスクに関するリスク・プレミアムは累積経常収支の大きさを反映しているので、リスク・リバーサル取引の代表的な満期である1カ月という短期間では、リスク・プレミアムは変化しないと考えることは一応妥当である。このようにリスク・プレミアムが変化しない場合、先行きの相場に関する期待値の変化は、すべて先物価格の変化に反映され、それはカバーつき金利裁定を通じて直物相場を変化させる。そこで、上記ジャロー・ラッドの方法に基づく数値例において、直物相場（＝現在の原資産価格）を変化させてみると、²³⁾ ボラティリティ・スプレッドは全く変化しないことが確かめられる。このことから、満期日の原資産価格の期待値の変化は、ボラティリティ・スプレッドに影響を及ぼさないとと言える。

なお、前節の離散型モデルによる説明の最後で、4次のキュミュラントとインプライド・ボラティリティとの関係について述べた。同様の分析を、上記の連続分布の枠組みで行ってみよう。図8は、横軸に権利行使価格をとった時のコールのインプライド・ボラティリティをプロットしたものである。²⁴⁾ ここで、想定する分布の4次のキュミュラントと対数正規分布のそれとの乖離が0の場合、すなわち満期における原資産価格が対数正規分布に従う場合は、インプライド・ボラティリティは権利行使価格に関わらず一定である。しかし、想定する分布の4次のキュミュラントを対数正規分布のそれに比べて大きくしていくと、権利行使価格が原資産価格（本例の場合85円/ドル）に近い（＝ATMに近い）オプションのインプライド・ボラティリティは低下し、権利行使価格と原資産価格の乖離が大きい（＝かなりの程度OTMの）オプションのインプライド・ボラティリティは上昇していくことがわかる。逆に想定する分布の4次のキュミュラントが対数正規分布のそれに比べて小さい場合は、グラフの形状は中央が上がり両端が下がる。

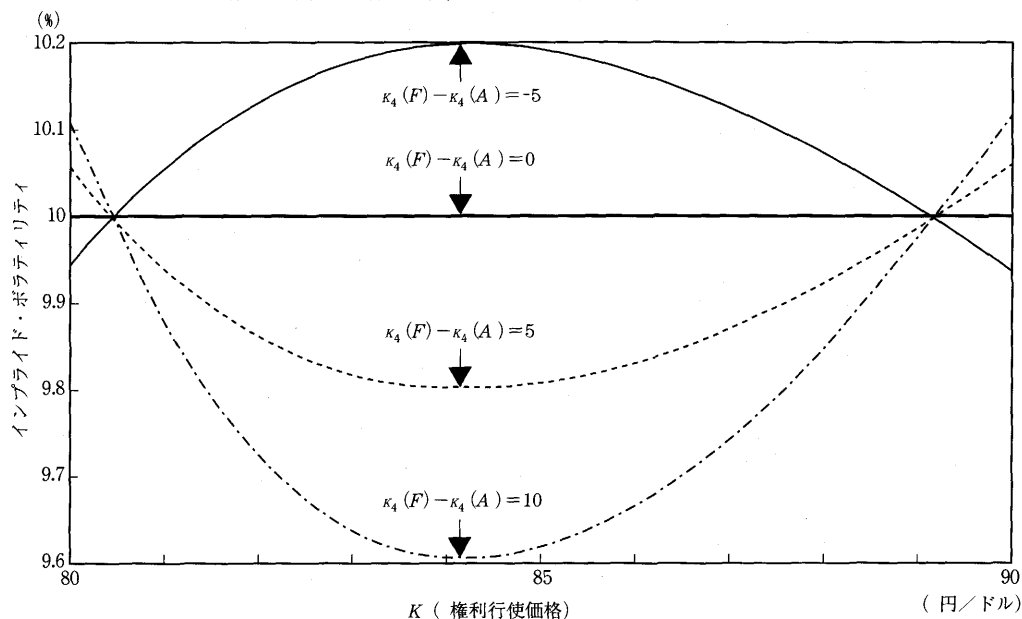
債券先物オプション市場等においては、このようなインプライド・ボラティリティのプロットを行うと、一般に両端上がりのグラフが描けることがわかっており、その形状が笑顔の口元に似ていることから「スマイル・カーブ」と呼ばれている。²⁵⁾ 上記の分析

23) 具体的には、例えば原資産価格 $S_t = 85$ 円/ドルを $S_t = 90$ 円/ドルに変えてみればよい。このとき、金利や2次以上のキュミュラントは固定しておく。

24) プットのインプライド・ボラティリティをプロットした場合もほぼ同じ図になる。

25) スマイル・カーブについては例えば日本銀行金融市場研究会[1995]pp. 94-97参照。

図8 権利行使価格に対するインプライド・ボラティリティの変化



(注) ジャロー・ラッドの方法により、想定した分布の4次のキュミュラント $\kappa_4(F)$ を対数正規分布における4次のキュミュラント $\kappa_4(A)$ からずらした際の、権利行使価格(横軸)とコールのインプライド・ボラティリティ(縦軸)との関係。ただし、3次のキュミュラントは対数正規分布と同じ値で固定する。計算における前提条件は、図3と同様。

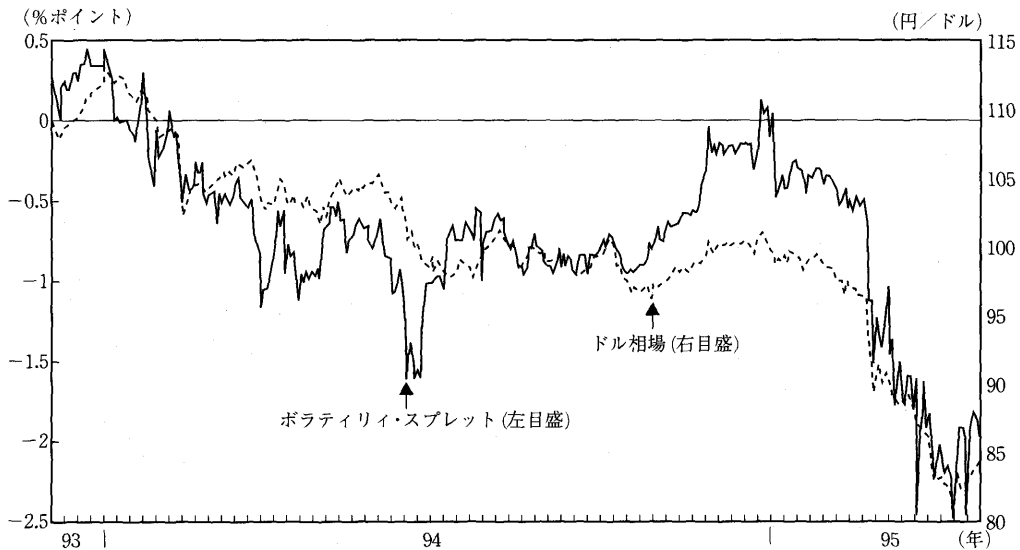
から明らかとなおり、こうしたスマイル・カーブが描けるということは、将来の債券価格に関して市場参加者が抱えている確率分布が、対数正規分布よりも4次のキュミュラントが大きい分布であること、言い換えれば対数正規分布よりも裾の重い分布であることを意味している。²⁶⁾

5. データの簡単なチェック

以上の分析を念頭において実際のドル・円相場とボラティリティ・スプレッドの動きをみてみよう(図9)。

26) 日本の国債先物オプションは、満期までの期間いつでも権利行使できるアメリカン・タイプのオプションであるため、満期日の原資産価格のみに注目したこうした分析では厳密には不十分で、満期日までの原資産価格の動きを考慮する必要がある。しかしながら、こうした満期日の原資産価格のみに注目した議論でも定性的には十分である。また、日経平均オプションはヨーロッパ・タイプであるため、こうした議論を直接利用することができる。

図9 デルタ25のボラティリティ・スプレッドとドル相場の推移



(注) 1993年12月3日から1995年5月2日までのデルタ25のボラティリティ・スプレッド（リスク・リバーサル）と東京外国為替市場のドル・円相場日々終値（5時現在）との推移。

図9から、まず第1にドル安が進行している局面（94年初、同5～6月頃、95年3月以降）では、ドル・プット・オーバー幅が拡大し（ボラティリティ・スプレッドが負であり、その絶対値が大きくなる）、ドル相場が総じて安定している局面（94年後半から95年初にかけて）では、ドル・プット・オーバー幅が縮小している（特に94年末は若干ドル・コール・オーバーになっている）ことがわかる。本論文におけるこれまでの分析から明らかなように、この現象は「実際にドル安が生じている時には、『先行きさらにドル安が進行する場合には、ドル高に戻る場合に比べて相場の動きにはずみがつきやすい』という方向での非対称な相場展開を市場が予想している傾向がある」と解釈することができる。

第2に、平均的にみて、ドル・プット・オーバーの方向にバイアスがかかっている。これは、偶々この期間においてドル安に振れる局面が多かったことにもよると思われるが、もう少し長い目でみてもドル・円市場においては、「一般にドル安方向に振れる場合の方が、ドル高方向に振れる場合よりも、相場の動きが大幅になりがちである」という認識が半ば慢性的に市場参加者の「相場観」に組み込まれている可能性があることを示唆している。ちなみに、図10は、95年春までの過去10年間のドル相場の日次変動率（厳密には対数値の前日差）の事後的な分布をヒストグラムで表したものであるが（右方が

ドル高)、この事後的な分布²⁷⁾について3次のキュミュラントが0であるかどうかの統計的検定を行ってみると、1%有意水準で「負」であると言える。すなわち、歴史的にみるとドル相場の日次変動率は、正規分布に比べてドル安方向に歪んだ分布になっており、これがドル・円市場における慢性的な「ドル・プット・オーバー」の背景となっている可能性がある。ちなみに、上記の過去10年間に於けるドル・円相場の日次変動率の分布を、日々の相場変動が独立であると仮定してリスク・リバーサル取引の通常満期に対応する月次変動率の分布に換算してみると、その3次のキュミュラントから、ボラティリティ・スプレッドは-0.63と推計できる。²⁸⁾すなわち、仮に市場参加者がドル・円相場の先々の変動率について、過去10年間の平均的な姿と同じ確率分布を常に思い描いているとすると、0.6%ポイント程度の“ドル・プット・オーバー”幅が恒常的に発生することになる。

また、過去10年の日次変動率ではなく図9のデータである過去1年半の日次変動率から上記と同様の方法によりボラティリティ・スプレッドの理論値を計算してみると-0.79となり、これも実際のボラティリティ・スプレッドのこの期間の平均値-0.68に近いことがわかる。

6. 結論と今後の課題

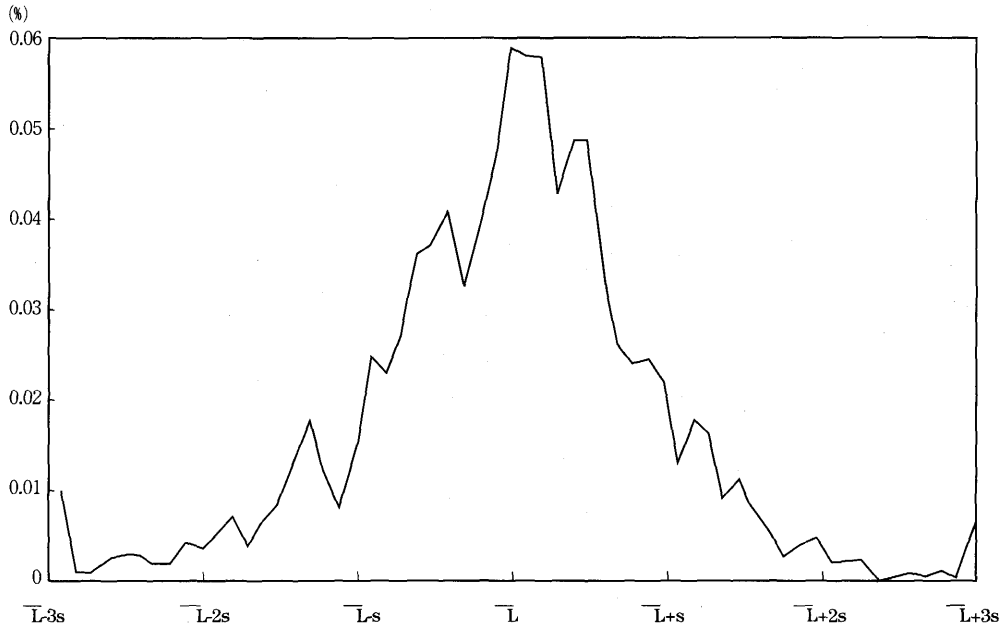
本論文ではリスク・リバーサル取引が基本的には満期日の為替相場に関して、市場参加者がドル高ないしはドル安のいずれか一方のみに歪んだ非対称な(すなわち3次のキュミュラントが対数正規分布と異なる)予想確率分布を抱くことに基づいて行われる取引であることを、理論的、数値的に示した。

実際のリスク・リバーサル取引の「価格」であるボラティリティ・スプレッドは、満期日の為替相場に関する確率分布の両方向での裾の重さ(4次のキュミュラント)によっても若干の影響を受けるが、これは同取引で用いられるデルタ25のコールとプットの有する性格の細かな点や、オプション価格評価公式における期待値の取り方といった技術的な要因によるものであり、本質的には4次のキュミュラントからは影響を受けない。もっとも、4次のキュミュラントは、いわゆる「スマイル・カーブ」、すなわち権

27) 本論文でここまで「満期日の原資産価格が従う確率分布」と呼んでいたものは、厳密には「現在の原資産価格を与えた場合に満期日の原資産価格が従う条件付確率分布」である。したがって、ヒストリカル・データを用いて実証分析を行う場合には、その値が現在の原資産価格に依存しない変数、すなわち現在から満期日までの原資産価格の変化率(ないしは原資産価格対数値の変化幅)の分布でみなければならない。

28) 具体的な推計方法については、補論4.(3)参照。

図10 ドル相場対数前日差ヒストグラム



(注) 1985年5月8日から1995年5月2日まで10年間の東京外国為替市場におけるドル相場の終値（5時現在）対数値の前日差 L_t のヒストグラム。平均 $\bar{L} = 4.48 \times 10^{-4}$ を中心にして1標準偏差 $s = 6.75 \times 10^{-3}$ ごとに絶対値で3標準偏差まで目盛りをつけてある。ヒストグラムは横軸（対数前日差）を60グループ（1標準偏差あたり10グループ）にわけ、そのグループに相当した回数を縦軸に表示してある。ただし、両端のグループでは3標準偏差以上離れた値をつけたものも含んでいる。

3次のキュミュラントを用いて上記で示したヒストグラムが正規分布に従っているか検定を行う。ここでは、D'Agostino and Tietjen[1973]の検定方法を採用する。手順は以下のとおり。

2次、3次のキュミュラントの推定値 $\hat{\kappa}_2$ 、 $\hat{\kappa}_3$ を

$$\hat{\kappa}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L})^2, \quad \hat{\kappa}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L})^3$$

として算出し、統計量を以下のように定義する。

$$\hat{T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{\kappa}_3}{\hat{\kappa}_2^{3/2} \hat{\sigma}} \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}}, \quad \hat{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}, \quad \nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4\beta-6}{\beta-3}, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3(n^2+27n-70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)}$$

ここで $\hat{T}$ の値を自由度 ν の t 分布で検定する。

計算により、

$$n = 2478, \quad \nu = 421.0, \quad \hat{T} = -10.04,$$

となるため、（両側）1%有意水準（2.58）で上記のヒストグラムが正規分布に従っているという仮説は棄却され、正規分布よりは負に歪んでいるという結果になる。

利行使価格の異なるオプションのインプライド・ボラティリティは異なるという、ブラック・ショールズ・モデルでは説明できない現象を理解するうえでは、鍵となる重要な概念である。

また、満期日におけるドル相場に関して市場参加者が抱く確率分布の期待値は、1カ月程度の期間ではリスク・プレミアムの変化は無視できるという仮定の下で、ボラティリティ・スプレッドに影響を与えない。

実際に94年初から95年春までのドル相場と、リスク・リバーサル取引におけるボラティリティ・スプレッドとの関係を見ると、ドル安が進行する局面ではボラティリティ・スプレッドの負値が大きくなる傾向、すなわちドル・プット・オーバーの度合いが強まる傾向が看取される。これは、上記の理論的な枠組みに即して考えると、ドル安局面においては、「今後さらにドル安が進行する場合は、ドル高に戻る場合比べて、その変動幅が大きくなる可能性が高い」という非対称な相場観を市場参加者が抱く傾向があることを示唆している。また、この1年半程度の期間におけるドル・円相場の日次変動率の事後的な分布を求めると、ドル安方向に歪んだ分布になっている。この分布が市場参加者が抱いている主観的確率分布に等しいと仮定してボラティリティ・スプレッドを計算してみると、同じ期間における実際のボラティリティ・スプレッドの平均値と近い値が得られ、ドル安方向に大幅な相場変動があり得るという非対称な「相場観」が、リスク・リバーサル市場における半ば慢性的な“ドル・プット・オーバー”の状況を産み出していることを、データからも裏付けることができる。

本論文では、これまでに蓄積されているデータ量に限界があることもあって、リスク・リバーサル取引に関する詳細で精緻な実証分析は行っていない。ボラティリティ・スプレッドと為替相場、あるいはより意味のある比較としてはボラティリティ・スプレッドと為替相場の事後的な分布について、時間的な先行・遅行関係、定量的な相関の強さ等を実証的に確認することは、今後の課題である。

補論1. ブラック・ショールズ・モデル

(1) ブラック・ショールズ公式の導出

「1ドルを K 円で買う権利」(ドル・コール)のプレミアムを c (円/ドル)、「1ドルを K 円で売る権利」(ドル・プット)のプレミアムを p (円/ドル)とする。この時、現在および満期日におけるキャッシュ・フローは次の表のようになる。

表 A-1 コール、プットと割引債の組み合わせのキャッシュ・フロー

投資行動		現在のキャッシュ・フロー	満期のキャッシュ・フロー	
			$S_{t+T} \geq K$	$S_{t+T} < K$
ケース 1	ドル・コール購入	$-c$	$S_{t+T} - K$	0
	額面 K の円割引債購入	$-Ke^{-rT}$	K	K
	合計	X	S_{t+T}	K
ケース 2	ドル・プット購入	$-p$	0	$K - S_{t+T}$
	額面 S_t のドル割引債購入	$-S_t e^{-r^*T}$	S_{t+T}	S_{t+T}
	合計	Y	S_{t+T}	K

ヨーロピアン・タイプの通貨オプションに対するブラック・ショールズ公式は、上記において「現在のキャッシュ・フロー」は「満期のキャッシュ・フロー」の期待値の割引現在価値に等しくなくてはならない（ただし逆符号）、という考え方で導出することができる。²⁹⁾ ここで、「満期のキャッシュ・フロー」の期待値を求めるためには、現在においては不確実な S_{t+T} に関して確率分布を仮定する必要がある。そのために、ブラック・ショールズ・モデルでは、ドル・円為替相場 S (円/ドル) は、

$$\frac{dS}{S} = (r - r^*)dt + \sigma dW, \quad (A-1)$$

で表される確率過程に従うと仮定する。ただし、 r 、 r^* はそれぞれ円、ドルの金利（連続複利表示）、 t は時間、 σ はボラティリティ、 W は標準ウィーナー過程とする。差分形で (A-1) 式の意味を解釈すると、ドル相場の変化率（左辺、 $\frac{dS}{S}$ ）が、円ドル金利差による調整項（右辺第 1 項、 $(r - r^*)\Delta t$ ）を期待値とし、 $\sigma^2 \Delta t$ を分散とする正規分布に従うということである。ここで、伊藤のレンマ、³⁰⁾ を用いると (A-1) 式は次のように変形することができる。

29) 以下、現実のドル・円相場のリスク中立性（原資産価格の変化率の期待値が円ドル金利差に一致すること）を仮定するが、この仮定はあくまでも便宜上の仮定であり、オプション・プレミアムの評価値はこの仮定には依存しない。すなわち、為替相場にリスク・プレミアムが存在すること（＝リスク中立性が成立しない）を明示的に取り込む場合は、割引現在価値を求める際の割引率をリスク・プレミアムを勘案したものにすると同時に、(A-1) 式の確率過程の $r - r^*$ にリスク・プレミアム分の調整値を加える。このような調整を行っても、オプション・プレミアム値は結果的に変化しない（三浦[1989]pp. 100-123も参照）。また、ブラック・ショールズ・モデルの原論文である Black and Scholes[1973]でも、リスク中立性を仮定することなく、ブラック・ショールズ公式を導いている。

30) 伊藤のレンマについては、Hull[1993]p. 208, pp. 243-244を参照。

$$d\ln S = (r - r^* - \frac{\sigma^2}{2}) dt + \sigma dW. \quad (A-2)$$

確率変数 X が期待値 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従うことを

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

と表すこととすると、(A-2)式は、

$$\ln S_{t+T} \sim N(\ln S_t + (r - r^* - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T), \quad (A-3)$$

ということを示している。ただし、 T は現在から満期までの時間である。プレミアムを「現在のキャッシュ・フローは満期における逆向きのキャッシュ・フローの期待値の割引現在価値に等しい」という関係から求めることとし、表 A-1 のケース 1、ケース 2 の各々の上段のキャッシュ・フローに注目すると、コール・プレミアム c 、プット・プレミアム p はそれぞれ、

$$c = e^{-rT} E[\max(S_{t+T} - K, 0)], \quad p = e^{-rT} E[\max(0, K - S_{t+T})], \quad (A-4)$$

となる。ただし、 K は権利行使価格で、ここではコール、プットとも同じであるとする。ここで (A-4) 式中の期待値 $E[\cdot]$ は (A-3) 式の確率分布を表す確率密度関数から求めることができ、(A-4)式は、

$$\text{コール} \quad c = S_t e^{-rT} \Phi(x_1) - K e^{-rT} \Phi(x_2), \quad (A-5)$$

$$\text{プット} \quad p = -S_t e^{-rT} \Phi(-x_1) + K e^{-rT} \Phi(-x_2), \quad (A-6)$$

となる。ただし、

$$x_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - r^* + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad x_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - r^* - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad (A-7)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(u) du, \quad \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad (A-8)$$

である。³¹⁾

なお、表 A-1 において、ケース 1 とケース 2 で満期日の「合計」欄のキャッシュ・フローは S_{t+T} の値にかかわらず必ず等しくなることから、現在の「合計」欄のキャッシュ・フローも等しくならなければならない ($X = Y$)。したがって、

31) $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積密度関数である。

$$c + Ke^{-rT} = p + S_t e^{-r^*T}, \quad (A-9)$$

という関係式が成立する。これは、プット・コール・パリティ関係式と呼ばれており、この式で表されるコール・プレミアムとプット・プレミアムとの相対的な関係は、 S が従う確率分布に依存しないので、ブラック・ショールズ・モデルが現実妥当かどうかとは無関係に成立する。³²⁾

ブラック・ショールズ公式は、様々な原資産に対するオプションについて導出可能であるが、原資産の性格等により細かな点では違いがある。例えば、株式オプションでは運用コスト (cost of carry) が r であるのに対し、通貨オプションでは $r - r^*$ という違いがあり、こうした違いがブラック・ショールズ公式にも反映される。³³⁾

(2) デルタの算出方法

コール、プットのデルタ δ_c 、 δ_p は、

$$\delta_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial c}{\partial S}, \quad \delta_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial p}{\partial S}, \quad (A-10)$$

と定義される。すなわち、原資産価格の微小な変化に対するコール (プット) のプレミアムの変化の割合である。したがって、具体的にデルタを計算するためには、(A-5) 式、(A-6) 式を各々 S で偏微分すればよい。その際、 $x_2 = x_1 - \sigma\sqrt{T}$ に注意して、

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x_1)}{\phi(x_2)} &= \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - r^*)T}{\sigma\sqrt{T}}(\sigma\sqrt{T})\right\} = \frac{K}{S_t} e^{(r^* - r)T}, \end{aligned} \quad (A-11)$$

となることを用いると、デルタは次のように書き表せる。

$$\delta_c = e^{-r^*T} \Phi(x_1), \quad \delta_p = -e^{-r^*T} \Phi(-x_1). \quad (A-12)$$

(3) デルタ25について

「デルタ25」とは、デルタが0.25 (-0.25) であるようなコール (プット) を指す。一般に「デルタ X 」とは、デルタが $X/100$ ($X/100$) であるようなコール (プット) を指

32) プット・コール・パリティ関係式はプレミアムの裁定関係式の1つである。プレミアムの裁定関係については、Cox and Rubinstein[1985]が詳しい。

33) 本文でも述べたように、通貨オプションにおけるブラック・ショールズ公式については Garman and Kohlhagen[1983] も参照。オプション価格評価理論に関する数学的に精緻な議論については Duffie[1992]を参照。

す。リスク・リバーサル取引においては、 S_t 、 r 、 r^* 、 T 、 σ が所与の下でデルタ25のコール（プット）を探すので、結局デルタが0.25 (-0.25) になるような権利行使価格（ K ）を求めることになる。具体的には、(A-12)式の左辺のデルタにそれぞれ0.25、-0.25を与え、右辺における権利行使価格以外の変数もすべて外生的に与えると、(A-12)式を満たす K_c 、 K_p が一意的に求められる。ただし、 K_c 、 K_p はそれぞれコール、プットの権利行使価格である。

次に、このようにして求められるデルタ25のコールとプットの性格を確認しておこう。まず、「対象原資産（ここではドル相場）、残存期間、金利が同一で、権利行使価格の対数値が理論フォワード・レート（ $S_t e^{(r-r^*)T}$ ）の対数値から逆方向に同幅離れたコールとプット」のことを、以下「対称なコールとプット」と呼ぶことにする。³⁴⁾ すなわち、対称なコールとプットについては、

$$\ln K_c - \ln S_t e^{(r-r^*)T} = \ln S_t e^{(r-r^*)T} - \ln K_p, \quad (\text{A-13})$$

が満たされている。なお、このように「対称なコールとプット」を考える理由は、対称なコールとプットを用いてリスク・リバーサル取引を行い、同時にオプション価格評価モデルに若干の修正を施すと、ボラティリティ・スプレッドは原資産価格の対数値が従う確率分布の4次（より一般的には偶数次）のキュミュラントから全く影響を受けない（補論4. (4) 参照）という特徴的な性格を持っているからである。ところが、実際にリスク・リバーサル取引で用いられるデルタ25（より一般的にデルタ X ）は、対称なコールとプットに近いが、厳密には異なる。このことを示す。

一般に、デルタ X のオプションを考える。 $\delta_c = X/100$ となるコールの権利行使価格を K_c 、 $\delta_p = -X/100$ となるプット・オプションの権利行使価格を K_p とすると、(A-12)式を変形することにより、

$$\ln K_c = \ln S_t e^{(r-r^*)T} + \frac{\sigma^2}{2} T - \sigma \sqrt{T} \Phi^{-1}\left(\frac{x}{100} e^{r^*T}\right), \quad (\text{A-14})$$

$$\ln K_p = \ln S_t e^{(r-r^*)T} + \frac{\sigma^2}{2} T + \sigma \sqrt{T} \Phi^{-1}\left(\frac{x}{100} e^{r^*T}\right), \quad (\text{A-15})$$

を得る。これは、デルタ X のコール、プットの権利行使価格の対数値が $\ln S_t e^{(r-r^*)T} + \frac{\sigma^2}{2} T$ から同幅離れており、理論フォワード・レートの対数値 $\ln S_t e^{(r-r^*)T}$ から同幅離れているわけではないことを示している。

34) 本論文における便宜上の定義であり、一般に認められているものではない。

補論 2. 対数評価モデル

補論1. (1)で示したとおり、ブラック・ショールズ公式によるオプション・プレミアムは、「現在のキャッシュ・フロー」を「満期のキャッシュ・フロー」の期待値の割引現在価値に等しくすることを通じて導出することができる。ここで、満期日のキャッシュ・フローの期待値を計算する際に用いる満期日の為替相場の確率分布は、(A-3)式のとおり満期日の為替相場の対数値 $\ln S_{t+T}$ に関する正規分布であるので、本論文のように正規分布からのズレを把握する場合には、関連するすべてのキャッシュ・フローを対数値に変換して取扱い、対数値で導出されたプレミアムを最後に真数に戻すというアプローチをとった方が見通しがよくなると考えられる。ブラック・ショールズ・モデルでは、表 A-1 の例えばケース 1 において、

$$c + Ke^{-rT} \Leftrightarrow e^{-rT} \max(S_{t+T}, K), \quad (\text{A-16})$$

という対応関係に注目しているが、この両辺の対数をとって、

$$\ln(c + Ke^{-rT}) \Leftrightarrow -rT + \max(\ln S_{t+T}, \ln K), \quad (\text{A-17})$$

の対応関係を考えてみる。(A-17)式の右辺の期待値を評価し、左辺と一致させることにする。すなわち、

$$\begin{aligned} \ln(c + Ke^{-rT}) &= -rT + E[\max(\ln S_{t+T}, \ln K)] \\ &= -rT + \ln K + E[\max(\ln S_{t+T} - \ln K, 0)], \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

とする。同様に、ケース 2 について考えれば、

$$\ln(p + S_t e^{-r^*T}) = -rT + \ln K + E[\max(\ln S_{t+T} - \ln K, 0)]. \quad (\text{A-19})$$

次に、(A-18)式、(A-19)式に含まれる $E[\max(\ln S_{t+T} - \ln K, 0)]$ を評価することを考える。その際、ブラック・ショールズ・モデルで想定した (A-1) 式の確率過程の代わりに、最初から対数変換された $\ln S$ について

$$d \ln S = (r - r^*) dt + \sigma dW, \quad (\text{A-20})$$

という確率過程を考えると、満期日におけるドル相場 S_{t+T} の従う分布は (A-3) 式ではなく、

$$\ln S_{t+T} \sim N(\ln S_t + (r - r^*)T, \sigma^2 T), \quad (\text{A-21})$$

となる。(A-18)式、(A-19)式によってプレミアムを求めるモデルを、本論文では「対数

評価モデル」と呼ぶことにし、特に (A-18) 式、(A-19) 式の期待値部分を (A-21) 式で評価するモデルを「対数評価正規モデル」と呼ぶことにする。「対数評価正規モデル」は、ブラック・ショールズ・モデルの導出過程における現在と満期日のキャッシュ・フローの対応関係を最初から対数の世界で考えたモデルである。

対数評価正規モデルでの $E[\max(\ln S_{t+T} - \ln K, 0)]$ は、具体的には次のような計算になる。

$$\begin{aligned} & E[\max(\ln S_{t+T} - \ln K, 0)] \\ &= \int_{\ln K}^{\infty} (x - \ln K) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \ln S_t - (r - r^*)T)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx \\ &= \sigma\sqrt{T} \int_d^{\infty} (y - d) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= \sigma\sqrt{T} \int_{\frac{d^2}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z} dz - \sigma\sqrt{T} d (1 - \Phi(d)) \\ &= \sigma\sqrt{T} (\phi(d) - d\Phi(-d)), \end{aligned} \quad (A-22)$$

ただし、計算の途中で用いた変数は

$$y = \frac{x - \ln S_t - (r - r^*)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad z = \frac{y^2}{2}, \quad d = \frac{\ln \frac{K}{S_t} + (r^* - r)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (A-23)$$

である。(A-22) 式を (A-18) 式、(A-19) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \ln(c + Ke^{-rT}) &= \ln(p + S_t e^{-r^*T}) \\ &= -rT + \ln K + \sigma\sqrt{T}(\phi(d) - d\Phi(-d)), \end{aligned} \quad (A-24)$$

となるので、

$$c = Ke^{-rT} \{e^{\sigma\sqrt{T}(\phi(d) - d\Phi(-d))} - 1\}, \quad (A-25)$$

$$p = S_t e^{-r^*T} \{e^{\sigma\sqrt{T}(\phi(d) + d\Phi(d))} - 1\}. \quad (A-26)$$

となる。対数評価正規モデルによるプレミアム評価公式 (A-25)、(A-26) は、ブラック・ショールズ・モデルに比べて式の形は複雑であるが、実際のプレミアムはほとんど変わらない。また、デルタ等の指標もほぼ同じ値をとる。

補論 3. プレミアム比について

この章では一般にコールとプットの相違を表す指標としてよく用いられる「プレミアム比」について説明する。プレミアム比とはその名のとおり、コールとプットのプレミアムの比 c/p のことである。以下では、このプレミアム比の性格や、それとボラティリティ・スプレッドとの関係等についてみておく。

(1) 「対称なコールとプット」のプレミアム比

「対称なコールとプット」について考える（定義は補論1. (3) 参照）。すなわち、

$$\text{真数表示: } K_c = \alpha S_t e^{(r-r^*)T}, \quad K_p = \frac{1}{\alpha} S_t e^{(r-r^*)T}, \quad (\text{A-27})$$

$$\text{対数表示: } \ln K_c = \ln S_t e^{(r-r^*)T} + \ln \alpha, \quad \ln K_p = \ln S_t e^{(r-r^*)T} - \ln \alpha, \quad (\text{A-28})$$

ただし、 K_c 、 K_p はそれぞれコール、プットの権利行使価格、 α は任意の定数 ($\alpha > 1$) とする。(A-13) 式は上記 (A-28) 式から導かれる。

ここで、対称なコールとプットについて、ブラック・ショールズ公式でそれぞれプレミアムを求める。権利行使価格 K_c 、 K_p でのコール、プットのプレミアムをそれぞれ、 $c(K_c)$ 、 $p(K_p)$ とすると、(A-27) 式を (A-5) 式、(A-6) 式に示したブラック・ショールズ公式に代入することによって次の式を得る。

$$c(K_c) = S_t e^{-r^*T} \Phi\left(\frac{\sigma}{2} \sqrt{T} - \frac{\ln \alpha}{\sigma \sqrt{T}}\right) - \alpha S_t e^{-r^*T} \Phi\left(-\frac{\sigma}{2} \sqrt{T} - \frac{\ln \alpha}{\sigma \sqrt{T}}\right), \quad (\text{A-29})$$

$$p(K_p) = \frac{1}{\alpha} S_t e^{-r^*T} \Phi\left(\frac{\sigma}{2} \sqrt{T} - \frac{\ln \alpha}{\sigma \sqrt{T}}\right) - S_t e^{-r^*T} \Phi\left(-\frac{\sigma}{2} \sqrt{T} - \frac{\ln \alpha}{\sigma \sqrt{T}}\right), \quad (\text{A-30})$$

両者の比、すなわちプレミアム比を求めると

$$\frac{c(K_c)}{p(K_p)} = \alpha, \quad (\text{A-31})$$

となる。

このことから、ブラック・ショールズ・モデルでは、「対称なコールとプットのプレミアム比は権利行使価格の理論フォワード・レートからの乖離率 α に等しくなる」ことがわかる。ここで注意すべき点は次の2点である。

① 上記の論理的帰結として、「対称なコールとプットのプレミアム比が α 以外の値を示すとき、これらのプレミアムはブラック・ショールズ・モデルに従って形成されていない」といえる（逆は必ずしもいえない）。

② 満期日の原資産価格の対数値が従う確率分布において4次以上の偶数次のキュミュラントが0でない場合（ただし3次以上の奇数次のキュミュラントは0であり、分布は対称）、対称なコールとプットのプレミアム比は α から微妙にずれる（証明は割愛）。

上記②については、ブラック・ショールズ・モデルの代わりに対数評価モデル（補論2. 参照）を用いると、偶数次のキュミュラントの影響は無くなり、「満期日の原資産価

格の対数値が対称な分布に従う場合は対称なコールとプットのプレミアム比は α である」ことが一般に言える。この点の証明は(3)に参考として記述することとし、より重要な意味を持つプレミアム比とボラティリティ・スプレッドとの関係について次にみておこう。

(2) プレミアム比とボラティリティ・スプレッドとの関係

デルタ25（一般にデルタ X ）のコールとプットについては、プレミアム比とボラティリティ・スプレッドの厳密な対応関係は無い。しかし、対称なコールとプットについてみると、プレミアム比が α （＝理論フォワード・レートと権利行使価格との乖離率）であるとき、ボラティリティ・スプレッドは0になる。以下、このことを示す。

ボラティリティ・スプレッドの定義を今一度確認しておくと、「コールとプット各々のプレミアムからブラック・ショールズ公式で逆算したインプライド・ボラティリティの差」である。したがって、プレミアム比とボラティリティ・スプレッドの関係をみるためには、コール、プット各々についてプレミアムとインプライド・ボラティリティとの関係をみればよい。コール、プットのプレミアムを c 、 p とする。 c 、 p は各々市場で形成されたプレミアムであり、どのようなモデルに従って形成されているかは不明であるとする（ブラック・ショールズ・モデルとは限らない）。市場で形成されたプレミアムから、ブラック・ショールズ公式を用いて逆算したインプライド・ボラティリティを各々 σ_c 、 σ_p とする。ここでは、ブラック・ショールズ公式における他のすべての変数を固定し、プレミアムをボラティリティの1変数関数と考える。すなわち、

$$c = B_c(\sigma_c), \quad p = B_p(\sigma_p). \quad (\text{A-32})$$

ただし、 $B_c(\cdot)$ 、 $B_p(\cdot)$ は各々コール・プレミアム、プット・プレミアムを求めるブラック・ショールズ公式である。市場で $c = \alpha p$ が成立しているとする、

$$B_c(\sigma_c) = \alpha B_p(\sigma_p). \quad (\text{A-33})$$

他方、(1)の結論は、コール、プット共通のボラティリティ σ に対して

$$B_c(\sigma) = \alpha B_p(\sigma), \quad (\text{A-34})$$

が成立することを意味している。ここで、ブラック・ショールズ公式によるプレミアムをボラティリティで微分したベガ v は、コール、プットの双方に対して等しく、

$$v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial B_c(\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\partial B_p(\sigma)}{\partial \sigma} = S_t \sqrt{T} e^{-rT} \phi(x), \quad (\text{A-35})$$

と必ず正の値をとる。すなわち $B_c(\cdot)$ 、 $B_p(\cdot)$ は各々 σ_c 、 σ_p に関して狭義単調増加関数であるので、 $B_c(\sigma_c)$ から σ_c への、また $B_p(\sigma_p)$ から σ_p への逆関数が存在する。した

がって、一般性を失わずに $\sigma_c = \sigma$ と仮定すると、(A-33)式、(A-34)式を比べることにより、 $\sigma_c = \sigma_p = \sigma$ でなければならないことがわかる。

すなわち、対称なコールとプットについて、市場で形成されたプレミアム比が α のとき、ボラティリティ・スプレッド $\sigma_c - \sigma_p$ は必ず 0 になる。この結論は満期日の原資産価格が従う確率分布に依存しない（プレミアム評価におけるブラック・ショールズ公式の妥当性に依存しない）。

(3) 対数評価モデルにおけるプレミアム比（参考）

対数評価モデルにおいて、 $\ln S_{t+T}$ について想定する分布が対称な分布³⁵⁾である場合、対称なコールとプットのプレミアム比は、権利行使価格の理論フォワード・レートからの乖離率 α に等しくなる。このことは、次のようにして示すことができる。³⁶⁾

期待値の評価は複雑なため、まず簡単なモデルで考えることにする。ある確率変数 X はその確率密度関数を $f(x)$ で表せるとする。さらに、 X の期待値は 0 とする（すなわち、 $E[X] = 0$ ）。このとき、ある定数 a に対して、

$$\begin{aligned}
 E[\max(X, -a)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(x, -a) f(x) dx \\
 &= \int_{-a}^{\infty} xf(x) dx - a \int_{-\infty}^{-a} f(x) dx \\
 &= \int_a^{\infty} xf(x) dx + a \int_{-\infty}^a f(x) dx \\
 &\quad + \int_{-a}^a xf(x) dx - a \left\{ \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_{-\infty}^{-a} f(x) dx \right\} \\
 &= E[\max(X, a)] + \int_{-a}^a xf(x) dx \\
 &\quad - a \left\{ \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_{-\infty}^{-a} f(x) dx \right\},
 \end{aligned} \tag{A-36}$$

となる。ここで、関数 $f(x)$ は 0 を中心にして対称な関数である ($f(x) = f(-x)$) とすると、

$$\int_{-a}^a xf(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{-a} f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx, \tag{A-37}$$

であり、関数 $f(x)$ は確率密度関数であるから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \tag{A-38}$$

35) 4 次以上の偶数次のキュミュラントは非ゼロであるかもしれないが、3 次以上の奇数次のキュミュラントは 0。

36) 簡単化のため、分布は絶対連続分布とし、確率密度関数が存在するものとして示す。

である。(A-36)式に(A-37)式、(A-38)式を代入すると、

$$E[\max(X, -\alpha)] = E[\max(X, \alpha)] - \alpha, \quad (\text{A-39})$$

を得る。

ここで、(A-39)式の X として $\ln S_{t+T} - \ln S_t e^{(r-r^*)T}$ 、 α として $\ln \alpha$ を考えると、

$$\begin{aligned} & E[\max(\ln S_{t+T} - \ln S_t e^{(r-r^*)T}, -\ln \alpha)] \\ &= E[\max(\ln S_{t+T} - \ln S_t e^{(r-r^*)T}, \ln \alpha)] - \ln \alpha, \end{aligned} \quad (\text{A-40})$$

であり、対称なコールとプットについては(A-28)式が成り立っているので、(A-40)式は、

$$E[\max(\ln S_{t+T}, \ln K_p)] = E[\max(\ln S_{t+T}, \ln K_c)] - \ln \alpha, \quad (\text{A-41})$$

と書ける。(A-41)式を対数評価モデルの枠組みである(A-18)式、(A-19)式に代入すると、

$$\ln(c + K_c e^{-r^*T}) - \ln(p + S_t e^{-r^*T}) = \ln \alpha, \quad (\text{A-42})$$

が得られ、 $K_c e^{-r^*T} = \alpha S_t e^{-r^*T}$ より(A-42)式は、

$$\frac{c + \alpha S_t e^{-r^*T}}{p + S_t e^{-r^*T}} = \alpha, \quad (\text{A-43})$$

すなわち、 $c = \alpha p$ となる。したがって、対数評価モデルでは、満期日の原資産価格の対数値が正規分布に従っていないくとも、3次以上の奇数次のキュミュラントが0の対称な分布に従ってさえいれば、対称なオプションのプレミアム比は α となる。

補論4. 高次キュミュラントがボラティリティ・スプレッドに与える影響の計測 — ジャロー・ラッドの方法を用いた数値計算

(1) キュミュラントの定義

分布関数 G を持つ確率変数 X の j 次キュミュラント κ_j は、確率変数 X の第2特性関数 $h(t)$ の $t=0$ のまわりでのテイラー展開の第 j 項の係数として定義される。³⁷⁾

$$h(t) = \sum_{j=0}^n \kappa_j \frac{(it)^j}{j!} + o(t^n), \quad (\text{A-44})$$

37) (A-44)式の展開は $E(X^n)$ が存在する場合にのみ可能。また、 $o(t^n)$ とは残差が $t \rightarrow \infty$ では0になることを意味する。

ここで、

$$h(t) = \log g(t), \quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x), \quad (\text{A-45})$$

であり、特に関数 $g(t)$ を確率変数 X の特性関数と呼ぶ。³⁸⁾

期待値を μ_1 、期待値まわりの j 次 ($j \geq 2$) のモーメントを $\mu_j = E[(X - E[X])^j]$ とするとき、4 次までのキュミュラントとモーメントの間には次の関係が成立する。

$$\kappa_1 = \mu_1, \quad \kappa_2 = \mu_2, \quad \kappa_3 = \mu_3, \quad \kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2. \quad (\text{A-46})$$

期待値 μ 、分散 σ^2 の正規分布では、

$$\kappa_1 = \mu, \quad \kappa_2 = \sigma^2, \quad \kappa_3 = \kappa_4 = \dots = 0, \quad (\text{A-47})$$

となるため、キュミュラントは正規分布からの「ズレ」をみるために使用されることが多い。

(2) ジャロー・ラッドによるプレミアム評価公式

Jarrow and Rudd[1982] は次のような手順で、満期日の原資産価格の確率分布が対数正規分布からずれている場合のプレミアム評価公式を導いた。満期日の原資産価格が従う真の分布の確率密度関数を $f(S_{t+T})$ とする。他方、ブラック・ショールズ・モデルでは満期日の原資産価格は対数正規分布に従うと仮定しており、その確率密度関数 $\alpha(S_{t+T})$ は次のように表される。³⁹⁾

$$\alpha(S_{t+T}) = \frac{1}{S_{t+T}\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left[-\frac{\{\log S_{t+T} - \log S_t - (r - r^* - \frac{\sigma^2}{2})T\}^2}{2\sigma^2 T}\right]. \quad (\text{A-48})$$

真の分布の確率密度関数 $f(s)$ をブラック・ショールズ公式で仮定する確率密度関数 $\alpha(s)$ のまわりで展開する (一般化したエッジワース展開⁴⁰⁾)。ただし、両分布の期待値は一致させることとすると、

38) ラオ[1977] pp. 92-94 を参照。なお、(A-45) 式の第2式中の積分はルベーグ・スティルチェス積分であり、分布関数が絶対連続ではない、すなわち、離散分布あるいは特異連続分布であっても対応できるように一般的に表記したものである。

39) Jarrow and Rudd[1982] は配当のない株式オプションについて説明しているが、ここでは通貨オプションで考える。

40) 一般化したエッジワース展開については Jarrow and Rudd[1982] の Appendix を参照。

リスクリバーサル取引の理論的含意について

$$f(s) = a(s) + \frac{\kappa_2(F) - \kappa_2(A)}{2!} \frac{d^2 a(s)}{ds^2} - \frac{\kappa_3(F) - \kappa_3(A)}{3!} \frac{d^3 a(s)}{ds^3} \\ + \frac{(\kappa_4(F) - \kappa_4(A)) + 3(\kappa_2(F) - \kappa_2(A))^2}{4!} \frac{d^4 a(s)}{ds^4} + \varepsilon(s), \quad (A-49)$$

となる。ここで、 $\kappa_i(F)$ $i=2, 3, 4$ は真の分布 $f(s)$ の i 次のキュミュラント、 $\kappa_i(A)$ $i=2, 3, 4$ はブラック・ショールズ・モデルの分布 $a(s)$ の i 次のキュミュラントであり、

$$\kappa_2(A) = \mu_1(A)^2 q^2, \quad \kappa_3(A) = \mu_1(A)^3 q^3 (3q + q^3), \\ \kappa_4(A) = \mu_1(A)^4 q^4 (16q^2 + 15q^4 + 6q^6 + q^8), \quad (A-50)$$

ただし、

$$\mu_1(A) \stackrel{\text{def}}{=} S_t e^{(r-r^*)T}, \quad q^2 \stackrel{\text{def}}{=} e^{\sigma^2 T} - 1,$$

となる。また、5次以上のキュミュラントの影響は $\varepsilon(s)$ でまとめている。

コール・プレミアム $c(F)$ は満期日の期待収益の割引現在価値、

$$c(F) = e^{-rT} \int_K^\infty (s - K) f(s) ds, \quad (A-51)$$

として求めればよい。ここで $j \geq 2$ に対して、部分積分により、

$$\int_K^\infty (s - K) \frac{d^j a(s)}{ds^j} ds = \left[(s - K) \frac{d^{j-1} a(s)}{ds^{j-1}} \right]_K^\infty - \int_K^\infty \frac{d^{j-1} a(s)}{ds^{j-1}} ds \\ = - \left[\frac{d^{j-2} a(s)}{ds^{j-2}} \right]_K^\infty = \frac{d^{j-2} a(K)}{ds^{j-2}}. \quad (A-52)$$

が成立している。(A-51)式に(A-49)式を代入し、5次以上のキュミュラントの影響 $\varepsilon(s)$ を無視し、(A-52)式に注意して整理すると、コール・プレミアム $c(F)$ の評価公式は、

$$c(F) = c(A) + e^{-rT} \frac{\kappa_2(F) - \kappa_2(A)}{2!} a(K) - e^{-rT} \frac{\kappa_3(F) - \kappa_3(A)}{3!} \frac{da(K)}{dS_{t+T}} \\ + e^{-rT} \frac{(\kappa_4(F) - \kappa_4(A)) + 3(\kappa_2(F) - \kappa_2(A))^2}{4!} \frac{d^2 a(K)}{dS_{t+T}^2}, \quad (A-53)$$

となる。ただし、 $c(A)$ はブラック・ショールズ公式によるコール・プレミアムである。

他方、プット・プレミアム $p(F)$ は、

$$p(F) = e^{-rT} \int_{-\infty}^K (K - s) f(s) ds, \quad (A-54)$$

として求めればよく、(A-52)式と同様、 $j \geq 2$ に対して

$$\int_{-\infty}^K (K-s) \frac{dja(s)}{ds^j} ds = \frac{d^{j-2}a(K)}{ds^{j-2}}. \quad (A-54)$$

となることに注意すれば、コールの場合と同様に、

$$\begin{aligned} p(F) = p(A) + e^{-rT} \frac{\kappa_2(F) - \kappa_2(A)}{2!} a(K) - e^{-rT} \frac{\kappa_3(F) - \kappa_3(A)}{3!} \frac{da(K)}{dS_{t+T}} \\ + e^{-rT} \frac{(\kappa_4(F) - \kappa_4(A)) + 3(\kappa_2(F) - \kappa_2(A))^2}{4!} \frac{d^2a(K)}{dS_{t+T}^2}, \end{aligned} \quad (A-56)$$

と計算できる。ただし、 $p(A)$ はブラック・ショールズ公式によるプット・プレミアムである。⁴¹⁾

(3) ボラティリティ・スプレッドの推定

本節では、実際の為替相場の3次のキュミュラントを推定し、その推定値を(2)で紹介したジャロー・ラッド法に適用してボラティリティ・スプレッドを推定する方法について記述する。

まず、ドル為替相場の対数値の前日差 L_t について3次のキュミュラント（モーメント）の推定値 $\hat{\kappa}_3^d$ を次のように求める。

$$\hat{\kappa}_3^d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L})^3, \quad (A-57)$$

ただし、 $\bar{L}$ は L_t の平均である。

30日間の対数差分である $\ln(S_{t+T}/S_t)$ は「1日の対数差分」の30日間の和であるから、1日の対数差分が独立に同一の分布に従っているとするならば、30日間の対数差分の j 次のキュミュラントは1日の対数差分の j 次のキュミュラントの30倍になる。⁴²⁾ したがって、 $\ln(S_{t+T}/S_t)$ の3次のキュミュラントの推定値 $\hat{\kappa}_3^m$ は $\hat{\kappa}_3^m = \hat{\kappa}_3^d \times 30$ となる。

ブラック・ショールズ・モデルからの乖離に注目したジャロー・ラッドの方法では、想定する分布での S_{t+T} の3次のキュミュラントと対数正規分布の3次のキュミュラントとの差 $\kappa_3(F) - \kappa_3(A)$ が問題となる。そこで、 $\hat{\kappa}_3^d$ から $\kappa_3(F)$ をどのように推定するかについて考える。まず、 $S_{t+T} - S_t$ が S_t に比べて十分小さい場合には1次のテイラー展開により、

$$\ln \frac{S_{t+T}}{S_t} \sim \frac{S_{t+T} - S_t}{S_t}, \quad (A-58)$$

41) Jarrow and Rudd [1982] はプット・プレミアムに対する式を提示していないが、本論文では便宜上記述した。また、本文中の(2)式、(3)式では2次のキュミュラント（つまりボラティリティ）を変化させず、 $\kappa_2(F) = \kappa_2(A)$ とみなして算出した式を提示している。

42) 独立な確率変数の和の特性関数は、各々の確率変数の特性関数の積になることによる。

と近似できる。この近似が成立しているとして、 $(S_{t+T}-S_t)/S_t$ の3次のキュミュラントの推定値 $\hat{\kappa}_3^m$ を、 $\ln(S_{t+T}/S_t)$ の3次のキュミュラントの推定値 $\hat{\kappa}_3^m$ で置き換える。また、 $(S_{t+T}-S_t)/S_t$ の3次のキュミュラント $\hat{\kappa}_3^m$ (すなわち、3次のモーメント) は、 $(S_{t+T}-S_t)/S_t$ の3次のモーメントに一致し、さらに、

$$E\left[\left(\frac{S_{t+T}-S_t}{S_t} - E\left[\frac{S_{t+T}-S_t}{S_t}\right]\right)^3\right] = \frac{1}{S_t^3} E[(S_{t+T}-E[S_{t+T}])^3], \quad (A-59)$$

となる。ここで、左辺の推定値が $\hat{\kappa}_3^m$ となるのに対し、右辺の $E[(S_{t+T}-E[S_{t+T}])^3]$ が想定する分布の3次のキュミュラント $\kappa_3(F)$ に一致するため、 $\kappa_3(F)$ は $S_t \hat{\kappa}_3^m$ と推定できることがわかる。⁴³⁾

図10で扱った10年間のデータについてみると、 $\hat{\kappa}_3^d$ は -1.514×10^{-7} であった。一方、対数正規分布の3次のキュミュラントは、

$$\kappa_3(A) = (S_t e^{(r-r^*)T})^3 q^3 (3q + q^3) \quad \text{ただし } q^2 = e^{\sigma^2 T} - 1, \quad (A-60)$$

で与えられるため、図7での原資産価格 ($S_t=85$ 円/ドル)、金利、ボラティリティ、満期までの期間等の前提から $\kappa_3(A)=1.232$ と計算でき、

$$\kappa_3(F) - \kappa_3(A) = -1.514 \times 10^{-7} \times 30 \times (85)^3 - 1.232 = -4.020, \quad (A-61)$$

となる。図7を作成するときに用いた計算により、3次のキュミュラントのこの乖離幅 -4.02 は -0.63 のボラティリティ・スプレッドに対応することがわかる。

(4) 技術的な修正を加えた場合の高次のキュミュラントの影響

イ. 考え方

デルタ25のボラティリティ・スプレッドが、4次のキュミュラントから微妙に影響を受けるのは、本文でも示したように、以下の2点による。

- ① 「デルタ25」 (より一般には「デルタ X 」) は対称なコールとプットではないこと。
- ② オプション・プレミアム評価公式では、期待値をとる際に先にキャッシュ・フローの対数値をとって計算していないこと。

43) 原資産価格の30日前比の3次のキュミュラントを直接推定せず、対数前日差のキュミュラントを求め、30日間に期間を延ばし、真数のキュミュラントに直すという煩雑な手続きをとっているのは、以下の2点の技術的な理由による。

- ① 30日前比ではオーバーラップが生じるために、系列相関を持つ。
- ② 対数値の30日差は対数値の前日差を30日間加えたものであり、確率分布の和の分布を考えればよい。真数値の分布について考えるより扱いやすい。

そこで以下では、「デルタ25」ではなく補論1.(3)で説明した「対称なコールとプット」について(上記①をクリア)、プレミアム評価がブラック・ショールズ・モデルからずれていると考えるのではなく補論2.で説明した「対数評価正規モデル」からずれていると考える(上記②をクリア)。この場合に、計算されるボラティリティ・スプレッドが上記①、②のようなバイアスを持たなくなることをジャロー・ラッドの方法と同様の手法を用いて示す。

ロ. 対数評価モデルでのプレミアム評価公式

まず上記の考え方にに関して、真のプレミアムを「対数評価正規モデル」のプレミアムからのズレで考える際の枠組みを説明する。

$\ln S_{t+T}$ を新たな確率変数 X と置き、 X が従う真の分布の確率密度関数を $f(x)$ とする。他方、対数評価正規モデルにおいては X は正規分布に従い、その確率密度関数 $a(x)$ は、

$$a(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left\{-\frac{(x - \ln \mu)^2}{2\sigma^2 T}\right\}, \quad \mu = S_t e^{(r-r^*)T}, \quad (\text{A-62})$$

である。

$f(x)$ と $a(x)$ は3次、4次のキュミュラントのみ異なるとし、 $f(x)$ を $a(x)$ のまわりで展開すると、

$$f(x) = a(x) - \frac{\kappa_3(F)}{3!} \frac{d^3 a(x)}{dx^3} + \frac{\kappa_4(F)}{4!} \frac{d^4 a(x)}{dx^4}, \quad (\text{A-63})$$

となる。ただし、 $\kappa_3(F)$ 、 $\kappa_4(F)$ はそれぞれ $f(x)$ の3次、4次のキュミュラントである。⁴⁴⁾

(A-18)式を用いてコールのプレミアムを評価することを考える。まず、右辺の期待値部分は、

$$E[\max(\ln S_{t+T} - \ln K, 0)] = \int_{\ln K}^{\infty} (x - \ln K) f(x) dx, \quad (\text{A-64})$$

である。また、 $j \geq 2$ に対して、部分積分により、

$$\begin{aligned} \int_{\ln K}^{\infty} (x - \ln K) \frac{d^j a(x)}{dx^j} dx &= \left[(x - \ln K) \frac{d^{j-1} a(x)}{dx^{j-1}} \right]_{\ln K}^{\infty} - \int_{\ln K}^{\infty} \frac{d^{j-1} a(x)}{dx^{j-1}} dx \\ &= - \left[\frac{d^{j-2} a(x)}{dx^{j-2}} \right]_{\ln K}^{\infty} = \frac{d^{j-2} a(\ln K)}{dx^{j-2}}, \end{aligned} \quad (\text{A-65})$$

44) $a(x)$ の3次、4次のキュミュラントは0になる。

である。(A-64)式に(A-63)式、(A-65)式を代入すると、

$$\begin{aligned} & E[\max(\ln S_{t+T} - \ln K, 0)] \\ &= \int_{\ln K}^{\infty} (\ln x - \ln K) a(x) dx - \frac{da(\ln K)}{dx} + \frac{\kappa_4(F)}{4!} \frac{d^2 a(\ln K)}{dx^2}, \end{aligned} \quad (A-66)$$

となり、(A-66)式をさらに(A-18)式に代入すれば、

$$\ln(c(F) + Ke^{-rT}) = \ln(c(A) + Ke^{-rT}) - \frac{\kappa_3(F)}{3!} \frac{da(\ln K)}{dx} + \frac{\kappa_4(F)}{4!} \frac{d^2 a(\ln K)}{dx^2}, \quad (A-67)$$

を得る。ただし、求めるコールのプレミアムを $c(F)$ 、対数評価正規モデルによるコールのプレミアムを $c(A)$ とする。

同様に、(A-66)式を(A-19)式に代入して、

$$\ln(p(F) + S_t e^{-r^*T}) = \ln(p(A) + S_t e^{-r^*T}) - \frac{\kappa_3(F)}{3!} \frac{da(\ln K)}{dx} + \frac{\kappa_4(F)}{4!} \frac{d^2 a(\ln K)}{dx^2}, \quad (A-68)$$

を得る。ただし、求めるプットのプレミアムを $p(F)$ 、対数評価正規モデルによるプットのプレミアムを $p(A)$ とする。なお、

$$\frac{da(x)}{dx} = -\frac{(x - \ln \mu)}{\sigma^2 T} a(x), \quad \frac{d^2 a(x)}{dx^2} = \left\{ -\frac{1}{\sigma^2 T} + \frac{(x - \ln \mu)^2}{\sigma^4 T^2} \right\} a(x), \quad (A-69)$$

となる。

ハ. 対数評価モデルを用いた場合の対称なコールとプットのボラティリティ・スプレッド

(A-67)式および(A-68)式によって与えられる $c(F)$ と $c(A)$ の関係、 $p(F)$ と $p(A)$ の関係を利用し、対称なコールとプットのボラティリティ・スプレッドを考察する。ボラティリティ・スプレッドを数式で表現するのは複雑なので、補論3.(1)の結論を念頭において、ここでは対称なコールとプットのプレミアム比に注目する。対称なコールとプットの権利行使価格をそれぞれ K_c 、 K_p とすると、 K_c 、 K_p は(A-27)式のように定義される。

(A-67)式、(A-68)式の権利行使価格 K に各々 K_c 、 K_p を入れ、(A-28)式、(A-69)式を利用すると、

$$\begin{aligned} \ln(c(F) + K_c e^{-rT}) &= \ln(c(A) + K_c e^{-rT}) \\ &+ \left[\frac{\kappa_3(F)}{3!} \frac{\ln \alpha}{\sigma^2 T} + \frac{\kappa_4(F)}{4!} \left\{ -\frac{1}{\sigma^2 T} + \frac{(\ln \alpha)^2}{\sigma^4 T^2} \right\} \right] a(\ln K_c), \end{aligned} \quad (A-70)$$

$$\begin{aligned} \ln(p(F) + S_t e^{-r^*T}) &= \ln(p(A) + S_t e^{-r^*T}) \\ &+ \left[-\frac{\kappa_3(F)}{3!} \frac{\ln \alpha}{\sigma^2 T} + \frac{\kappa_4(F)}{4!} \left\{ -\frac{1}{\sigma^2 T} + \frac{(\ln \alpha)^2}{\sigma^4 T^2} \right\} \right] a(\ln K_p), \end{aligned} \quad (A-71)$$

となる。ここで別途、対称なコールとプットについては $c(A) = \alpha p(A)$ であるから (補論 3. (1) 参照)、

$$\ln \frac{c(A) + \alpha S_t e^{-r^*T}}{p(A) + S_t e^{-r^*T}} = \ln \alpha, \quad (\text{A-72})$$

である。(A-70)式から (A-71)式を引き、 $\alpha (\ln K_c) = \alpha (\ln K_p)$ 、(A-27)式に注意して整理すると、

$$\ln \frac{c(F) + \alpha S_t e^{-r^*T}}{p(F) + S_t e^{-r^*T}} = (\ln \alpha) \left\{ 1 + \frac{\kappa_3(F)}{3\sigma^2 T} \alpha (\ln K_c) \right\}, \quad (\text{A-73})$$

となる。(A-73)式は次の2点を示している。

① $\kappa_3(F) = 0$ のとき、プレミアム比 $c(F)/p(F)$ は α となるので、補論 3. (2) よりボラティリティ・スプレッドは 0 になる。ただし、一般に $\kappa_3(F) = 0$ の時は、ボラティリティ・スプレッドは非ゼロである。これは、「満期日の原資産価格の対数値が従う確率分布の3次のキュミュラントがボラティリティ・スプレッドに影響を与える」ことを意味している (ブラック・ショールズ・モデルで考えた場合の結論と同じ)。

② 右辺に $\kappa_4(F)$ は現れていないので、仮に $\kappa_3(F) = 0$ であれば、 $\kappa_4(F)$ の値にかかわらずプレミアム比 $c(F)/p(F)$ は α となり、補論 3. (2) よりボラティリティ・スプレッドは 0 である。すなわち、「対称なコールとプットについて対数評価モデルで考えれば、満期日の原資産価格の対数値が従う確率分布の4次のキュミュラントはボラティリティ・スプレッドに全く影響を与えない」ことを意味している (ブラック・ショールズ・モデルで考えた場合の結論と異なる)。

以 上

[日本銀行金融研究所研究第1課]

【参考文献】

- 日本銀行金融市場研究会、『オプション取引のすべて デリバティブズとリスク管理』、金融財政事情研究会、1995年
- 三浦良造、『モダンポートフォリオの基礎』、同文館、1989年
- ラオ、『統計的推測とその応用』、(奥野忠一ほか訳)、東京図書、1977年
- Bates, D., "The Crash of '87: Was It Expected? The Evidence from Options Markets," *Journal of Finance*, Vol. 46, No. 3, 1990, pp. 1009-1044.
- Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, 1973, pp. 637-654.
- Cox, J. C. and M. Rubinstein, *Options Markets*, Prentice-Hall, 1985.
- D'Agostino, R. B. and G. L. Tietjen, "Approaches to the Null Distribution of $\sqrt{b_1}$," *Biometrika*, Vol. 60, No. 1, 1973, pp. 169-173.
- Duffie, D., *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, 1992.
- Garman, M. B. and S. W. Kohlhagen, "Foreign Currency Option Values," *Journal of International Money and Finance*, Vol. 2, 1983, pp. 231-237.
- Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, Second Edition, Prentice-Hall, 1993.
- Jarrow, R. and A. Rudd, "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, Vol. 10, 1982, pp. 347-369.
- Kariya, T., *Quantitative Methods for Portfolio Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- Malz, A. M., "Using Option Prices to Estimate Realignment Probabilities in the European Monetary System," *Mimeo*, Federal Reserve Bank of New York, 1995.