

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

金融と保険の融合について

森本 祐司

Discussion Paper No. 99-J-13

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒100-8630 東京中央郵便局私書箱 203 号

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

金融と保険の融合について

森本 祐司*

要 旨

本稿は、「金融と保険の融合」をキーワードとして、次の3つのトピックについてまとめたサーベイ研究である。

1. ART：実務面における融合の象徴的分野として、保険リスクの証券化などが挙げられる。こうした手法は一般に ART (Alternative Risk Transfer、代替的リスク移転手法) と呼ばれており、現在保険・金融双方で関心が高まっている。本稿では、ART の定義、分類、歴史的経緯、商品概要、価格設定の考え方などをまとめる。
2. 保険数理と金融工学の融合：理論面、特に価格理論において融合の萌芽が見え始めている。保険数理と金融工学がこれまでどのような発展経緯を辿り、昨今どのように関連を強めているかについて説明する。
3. EVT：リスク管理の高度化、金融リスクと保険リスクの統合管理に向けて、重要な役割を果たす可能性を期待されている EVT(Extreme Value Theory、極値論) について、基礎的な内容を解説した後、数値例等を示す。

本稿は、上記の各項目毎に、それぞれ一章ずつを割当てている。これらの内容は、広い意味で密接に関連し合っているものの、本稿ではそれぞれ独立した解説として扱っており、読者の興味・関心に応じて、必要な章に焦点を当てて読むことが可能である。

キーワード：ART、集合的危険論、保険料計算原理、無裁定と完備、EVT

JEL Classifications: C13, G13

*日本銀行金融研究所研究第1課(E-mail: yuji.morimoto@boj.or.jp)

本稿は、研究第一課 森本 祐司が作成した研究資料である。本稿の作成に当たっては、木島正明教授(東京都立大)、中川秀敏氏(東京大学大学院 数理科学研究科)および東京海上火災保険(企業商品業務部 開発グループ)の方々から貴重なコメントを頂いた。

目 次

1	はじめに.....	1
2	Alternative Risk Transfer (ART)	3
2.1	ART とは.....	3
2.2	ART の分類.....	4
2.3	発展までの経緯	5
2.4	ART の具体例.....	8
2.4.1	ホリスティック・カバー	8
2.4.2	コンティンジェント・キャピタル.....	14
2.4.3	保険リスクの証券化 (ILS).....	16
2.4.4	保険デリバティブ	21
2.5	ART の今後.....	23
3	保険数理と金融工学の融合.....	25
3.1	保険数理の歴史的経緯.....	26
3.1.1	集合的危険論とは何か	26
3.1.2	集合的危険論の基本モデル.....	27
3.1.3	モデルの一般化.....	32
3.1.4	保険料計算原理	36
3.2	金融工学の歴史的経緯.....	39
3.2.1	基本モデル (無裁定と完備)	39
3.2.2	一般化：非完備な市場.....	41
3.3	融合の流れ	42
4	Extreme Value Theory (EVT)	44
4.1	EVT とは	45
4.2	EVT の基礎理論.....	45
4.2.1	最大値の確率的性質.....	45
4.2.2	和の確率的性質	46
4.2.3	最大値の確率的性質 (再び)	48
4.2.4	超過データの確率的性質	56
4.3	数値例	60
4.4	応用研究事例の紹介	66
5	参考文献.....	68

1 はじめに

昨今、金融分野と保険分野の融合¹が世界的に様々な面で見られる。例えば、保険会社と銀行・投資顧問などとの提携・合併や、欧州に見られるバンカシュランス² (Bancassurance) 等、企業・業務としての融合、規制緩和による業際の垣根の低下といった制度面での融合、地震リスクの証券化といった商品面での融合、保険リスクと金融リスクの統合管理のようなリスクの概念としての融合等、数多くの事例を挙げることができる。

本稿では、そうした融合の流れに関連する次の3つのトピックを紹介、解説する。

ART

実務面の融合、特に商品面での融合の象徴的存在として、保険リスクの証券化や金融リスクと保険リスクの統合的商品などが挙げられよう。これらは、代替的リスク移転手法 (Alternative Risk Transfer、以下 ART) と呼ばれ、保険及び再保険分野で重要な役割を担いつつあるものである。ART という用語は、まだ一般には馴染みが薄いと思われるが、投資銀行を始めとして、金融界からも強い関心が集まっている。

保険数理と金融工学の融合

商品・取引手法が融合する中で、その価格理論やヘッジ戦略の理論構築に実務家・研究者の関心が集まりつつある。

金融と保険の理論は、共通の数学的手法 (確率過程等) の上に展開されており、その意味では従来から類似点があるとも言える。しかしながら、保険数理はリスクを甘受する中でどのようにそれを制御するかという危険論として発展してきた一方、金融工学は金融派生商品の価格理論に見られるように、ある価格変動を複製することで完全にリスクがヘッジできることを前提として理論が展開されてきており、この点が両者の発想の違いとな

¹ 本稿では、保険分野として、主として損害保険分野に焦点を当てている。生命保険分野についても、融合の流れはあるが、本稿では深くは立ち入らない。

² フランスにおいて、銀行が保険業務へ業務分野を拡大する現象を表す用語。ドイツではアルフィナンツ (Allfinanz) と呼ばれる。

っている。

こうした 2 つの理論は現在、保険商品が流動化されていく中で、金融商品的色彩の強い保険商品をどのように価格付けするか、また、金融商品についても市場の完備性という従来の理論の前提が成立しない場合にどのようにして価格理論を再構築するかといった観点から、様々な形で融合の可能性が模索されている段階にある。

EVT

融合はリスク管理面にも及んでいる。Paul-Choudhury [31] は「昨今見られるようなペースで金融と保険市場の収束が続けば、金融と保険のリスク管理の違いといった議論は、そう遠くない将来消滅しているかもしれない」と指摘している。

本稿では、両者のリスク管理を融合しうる可能性を秘めた理論として、極値論 (Extreme Value Theory、以下 EVT) を紹介する。本手法は、その名が表す通り、確率分布の異常値 (最大値や最小値など) を分析する理論である。元々は水文学などで発達してきた分野であって、再保険などの例外を除いて金融・保険分野では従来殆ど適用されてこなかった。しかし、最近になって、保険リスクや信用リスク等、いわゆるファット・テールな確率分布を対象とするリスク管理においては、本手法が威力を発揮すると考えられ、注目が集まりつつある。また、EVT は今後、システミック・リスクやマーケット・クラッシュの分析等にも応用される可能性があるだろう。

本稿の構成は以下の通りである。2 章では ART について、その定義、分類、歴史的経緯、商品例等をまとめる。3 章では、金融と保険の理論面における融合について考察する。保険数理については、相対的に馴染みが薄いと思われることから、本稿では定義や一般的な定理等の数学的内容についても整理している。4 章では、最近金融分野および保険分野への応用が展望されている EVT について基礎的な解説を行う。

これら 3 つのテーマは、金融と保険の融合という大きな流れの中では、様々なに関連している。但し、読者によって興味の対象が異なることや、特に 3 章および 4 章は数学的記述も多いことから、各章を極力独立した内容として扱うように工夫した。従って、興味・関心に応じて必要な章のみをピックアップして読んで頂きたい。

2 Alternative Risk Transfer (ART)

金融分野と保険分野の融合を商品面から見ることのできる代表的な例として、ARTがある。ARTは、これまでの伝統的保険商品では達成できない（または達成困難な）リスクの移転を、様々な手段を通じて実現させるものである。概念自体は決して新しいものではないが、リスクの複雑化、コンピュータ技術の発達、保険業界の規制緩和とそれに伴う国際化等により、昨今特に注目を集めている。

以下で述べるように、ARTには多種多様なものが含まれるが、ここでは主題に沿って金融と保険の融合に関連するもの、例えば、金融リスクと保険リスクを包括的にカバーする保険や、保険の証券化、保険デリバティブを中心に紹介する。従って、ARTとして考えられ得る取引がすべて網羅されている訳ではない点を予め断っておく。なお、ARTについて体系的にまとめられた文献はこれまで殆どなく、定義や分類なども定番といえるものが存在していない。以下は、現時点で集められた情報を基に、整理を試みたものである。

2.1 ARTとは

上にも述べたように、ARTに確立した定義は存在しない。簡潔に言えば、Alternative Risk Transferとは、文字通り代替的（Alternative）とリスク移転（Risk Transfer）という2つの要素により特徴付けられる。まず、代替とは、（伝統的）保険の代替という意であるが、何が伝統的で、それをどう代替しているのかが分かりにくい。こうした点を理解するには、保険の基本的概念および歴史的経緯に立ち戻る必要があると思われる。

リスク移転とは、リスク保有（Risk Retention）の対極となる概念である。企業も個人も日常活動を行う際に、様々なリスクに曝されているが、それらに対し、意識的または無意識のうちに、個々のリスクの発生頻度（frequency）と発生時の損害額（severity）及びヘッジコストとを比較し、リスクのうち一部を自ら保有する一方、残りは第三者に移転することによりヘッジする、という行動をとる。

一方、歴史的背景を振り返ると、保険は近代的企業の誕生よりも遙かに遅れて発生しており、再保険は保険会社の誕生よりもさらに遅れている（世界最古

の再保険専門会社である CogloneRe の設立は 1846 年) ことから、1980 年代までの流れは、大きく捉えれば、リスク保有からリスク移転への動きであったと考えられる。ここでいうリスク移転は、いわゆる伝統的保険³である。

しかし、こうした動きは、1980 年代の米国賠償危機(後述)を中心とした保険危機により、保険・再保険のキャパシティーの低下、保険料の高騰、引受けの拒否等といった問題が生じたことから、徐々に見直されるようになった。端的に言えば、一般企業は伝統的なリスク移転の限界を知り、保険会社は再保険の限界を認識することとなったのである。

その結果生まれてきたのが、企業にとっては自家保険やキャプティブ⁴(Captive)等、リスク保有への回帰(1980 年代以降)であり、保険会社にとっては保険リスクの証券化やデリバティブ等への展開(1990 年代以降)、つまり金融市場を活用したキャパシティーの拡大であった。それらの手法は、従来の単純なリスク保有でも、リスク移転でもないことから、代替的なリスク移転(リスク保有への回帰も、これまでリスク移転として捉えていたものの再移転であると考える)すなわち ART という分野となった。

なお、後述するように、上記のような流れに加え、伝統的な保険の枠組みを超えた新しい保険商品も ART の一角を成しており、結果として ART は多種多様な手法・商品を内包した分野となっている。

2.2 ART の分類

分類についても、定説は存在していない。ここでは、Schanz [35] が提唱している次の分類を紹介する。Schanz [35] はどういう手段でリスクを移転するのかという観点から、ART を以下の三つに分類している(各取引の詳細は 2.4

³ 誤解を恐れずに、伝統的保険のイメージを示すと次のようになる。保険の対象として考えられるのは、通常我々が保険でカバーされると考えているようなもの、つまり火災や風水災などの災害に限定される。これらをそれぞれリスク別に、保険会社と保険契約を締結することによってリスク移転を行う。保険契約の期間は一部(生命保険や積立型の損害保険など)を除いて一年間である。保険会社はリスクの大半を、大数の法則に基づいて保有し、一部を再保険会社に渡す。この世界では、保険会社、再保険会社以外に保険リスクが移転されることはない。

⁴ 一般の保険会社のように、不特定多数の顧客を対象とするのではなく、特定の企業もしくは企業グループに属し、その企業(グループ)のリスクのみを専門に引き受ける保険子会社のこと。

節で説明する。

1 . Alternative Solutions

第一は、商品による代替移転である。従来の保険の概念では扱っていなかったものを、新しい商品によってカバーする ART を意味している。例としては、保険金支払のタイミングのずれによる投資収益変動リスクをカバーするものや、金融リスクと保険リスクを包括的にカバーする商品、さらには災害発生時における保険会社の資金調達を目的とした契約等を指している。

2 . Alternative Risk Absorbers

第二は、リスクの受け皿を拡大・変更することによる代替移転である。上にも述べたように、保険のキャパシティーを増大化させることで、新たなリスク移転への道を切り開くものである。この中で、昨今最も注目を集めているのが、保険の証券化などに代表される、金融市場を新しいリスクの受け皿とした ART である。

3 . Alternative Sales Channels⁵

第三は、リスクの流通経路を変更することによる代替移転である。上に述べた一般企業のリスク保有への回帰の流れに相当するもので、キャプティブを利用する形態がその典型である。なお、キャプティブの利点としては、従来、税務面での優位性、保険コストの低減といった点にスポットが当たっていたが、昨今では、社内のリスク・コントロール意識の向上といった効用も指摘されている。

2.3 発展までの経緯

ART 自体は、例えばキャプティブなどをはじめとして 1950 年代頃から存在していた。しかしながら、昨今 ART が特に注目されることとなった契機は、上にも述べた 1980 年代の賠償危機であり、その流れを加速させたのが 1980 年代後半から 1990 年代前半にかけて起こった巨大自然災害の集積だといわれている。

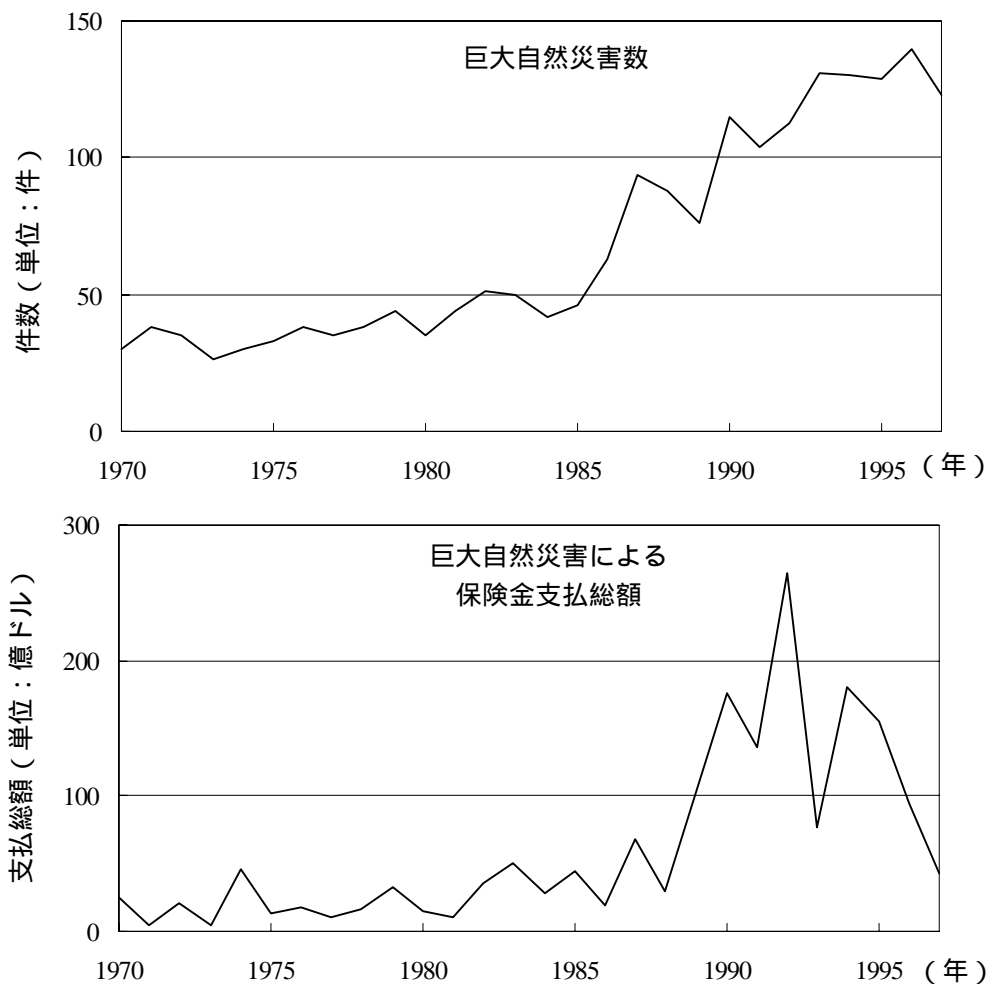
賠償危機とは、1980 年代米国において、アスベストや汚染問題を中心とする

⁵ Alternative Sales Channels は本稿には直接関係ないことから、以下省略する。

賠償責任訴訟が多発し、結果として深刻な賠償保険のキャパシティー不足および賠償保険料率の高騰を招いた事象を指す。

一方、1980年代後半から1990年代前半の巨大自然災害というと、米国のハリケーン・アンドリュー（1992年）や我が国の台風19号（1991年）などが思い起こされる。1970年以降における自然災害等の大災害に関する分析を行っている sigma [40] によると、巨大損害の発生数そのものは緩やかな増加傾向にあるが⁶、支払保険金額をみると、1989年から1995年までの部分が異常な突出ぶりを示している（【図表 2-1】）。その結果、再保険料率は1989年より上昇し、1995年にそのピークを迎えている。

【図表 2-1】巨大自然災害数（上）および保険金支払額（下）の推移



出典：sigma [40]

⁶ 同文献では、その理由として、情報入手量の増加、人口密度の増加、資産量の増加、先進国への資産の集中、を挙げている。

2 Alternative Risk Transfer (ART)

参考までに、1970年から1997年までの28年間に起こった巨大災害の保険金支払額上位20位を【図表 2-2】に掲載した。

これらの事象は保険業界（元受保険会社）および再保険業界双方に大きな影響を与え、ART という新しいリスクヘッジ手段にさらなる注目が集まることとなった。

【図表 2-2】1970年～1997年の巨大災害（保険金支払額ベース）⁷

順位	損失額 (百万\$)	発生日	災害名	国/地域
1	18,286	1992/8/24	ハリケーン "Andrew"	米国
2	13,529	1994/1/17	南カリフォルニア ノースリッジ地震	米国
3	6,542	1991/9/27	台風 19 号	日本
4	5,636	1990/1/25	冬季ストーム "Daria" (強風)	ヨーロッパ
5	5,427	1989/9/15	ハリケーン "Hugo"	プエルトリコ
6	4,230	1987/10/15	秋季ストーム	ヨーロッパ
7	3,917	1990/2/26	冬季ストーム "Vivian" (強風)	ヨーロッパ
8	2,712	1988/7/6	プラットフォーム "Piper Alpha" 爆発	英国
9	2,603	1995/1/17	阪神淡路大震災	日本
10	2,211	1995/10/4	ハリケーン "Opal"	米国
11	1,943	1993/3/10	東海岸のブリザード	米国
12	1,829	1992/9/11	ハリケーン "Iniki"	米国
13	1,714	1989/10/23	Phillips 石油の爆発	米国
14	1,660	1979/9/3	ハリケーン "Frederic"	米国
15	1,637	1996/9/5	ハリケーン "Fran" (南東部)	米国
16	1,625	1974/9/18	熱帯サイクロン "Fifi"	ホンジュラス
17	1,579	1995/9/3	ハリケーン "Luis"	カリビアン
18	1,509	1988/9/12	熱帯サイクロン "Gilbert"	ジャマイカ
19	1,415	1983/12/17	吹雪、霜害	米国
20	1,413	1991/10/20	都市部へ広がった森林火災、湯水	米国

出典： Swiss Re, sigma [40]

⁷ 表中の損失額は、賠償責任保険を除いた保険金支払額のことであり、自然災害によって生じた全損失額ではない。例えば、阪神淡路大震災のランクが9位に止まっているが、これは、日本における地震保険による損害カバー率が低いことによるものであり、純粋な損害額ではもっと上位にランクされる。

2.4 ART の具体例

以下に、代表的な ART の仕組みについて紹介する。ここでは、金融と保険の融合という観点から有用と思われる次の4つ

- (1) ホリスティック・カバー (Holistic Covers)
- (2) コンティンジェント・キャピタル (Contingent Capital)
- (3) 保険リスクの証券化
- (4) 保険デリバティブ

に限定して説明を加える。

2.4.1 ホリスティック・カバー

ホリスティック・カバーとは、保険リスクとそれ以外のリスク（例えば金融リスク）を一契約でカバーするものである。統合的リスク管理手法 (integrated risk management) またはバランスシート・プロテクション (balance sheet protection) などとも呼ばれる。本商品の構造を理解することにより、金融と保険の統合リスク管理等の概念も整理できることから、ここではやや詳しく考察する。

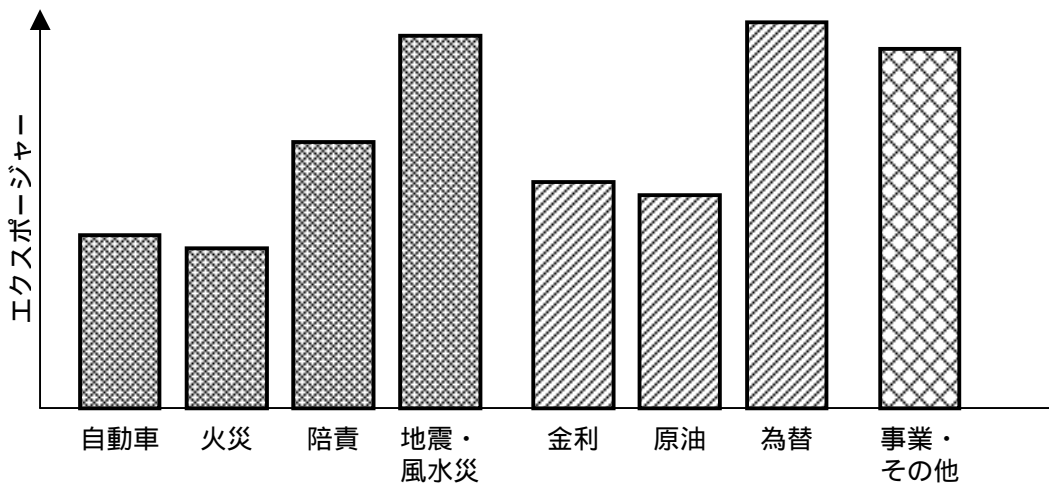
ホリスティック・カバーのイメージ

仕組みを理解するために、【図表 2-3】のようなリスクを抱えた企業 A を考える。通常であれば、これらのリスクに対し、企業は【図表 2-4】のようなカバーを個別に手配することになる（白抜き部分がカバー。残余部分は企業 A がリスク・テイクしている）。保険リスク部分（図の左側）は一般的な企業保険で、金融・商品価格リスク（右側斜線部分）については先物やスワップ等でヘッジしていると考えればよい。こうしたカバー手法は、それぞれの契約が単純であり、また会計・税務の観点でも透明性が高いという利点がある。また、A 社の保険部門では保険リスクを担当、財務部門では金融リスクを担当するとうように、社内の部門別管理が容易に出来る。

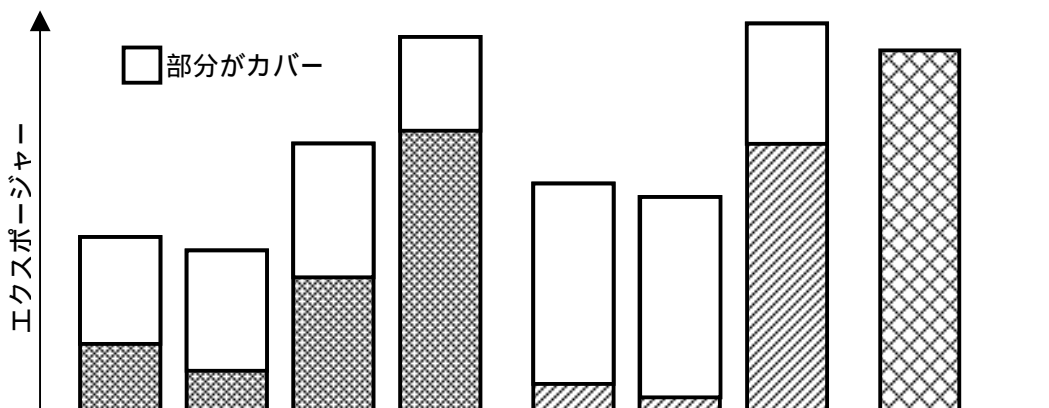
しかし、個別リスク毎に対応しているため、保険契約やヘッジの更新などに手間がかかるといった実務的負担に加え、個別ヘッジの集積が会社全体の最適なヘッジとなっているのかという根本的な問題が残る。これについては、以下で具体例を用いながら検証する。ホリスティック・カバーは、複数のリスクを包括的にカバーすることで、そうした問題を解決しようとするものである。ホリスティック・カバーのイメージを【図表 2-5】に示した。

2 Alternative Risk Transfer (ART)

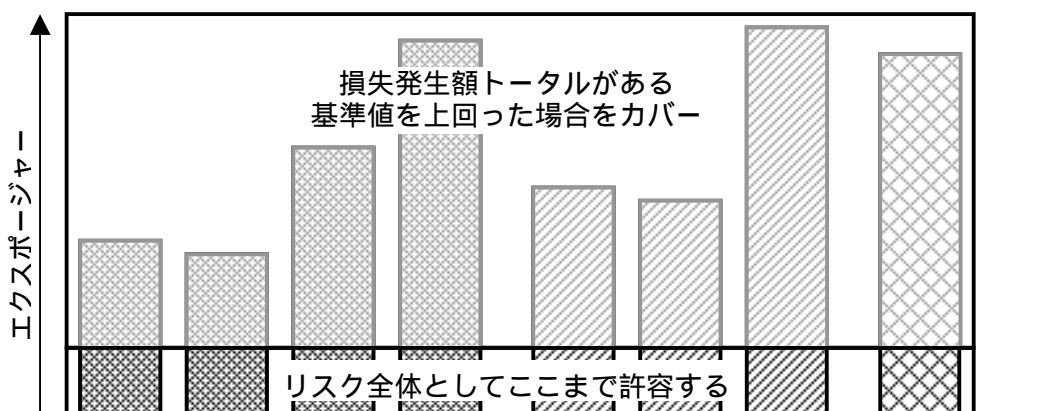
【図表 2-3】架空の企業 A のリスク・エクスポージャー



【図表 2-4】企業 A のリスク・カバー例（従来型）



【図表 2-5】企業 A のホリスティック・カバー（イメージ）



ホリスティック・カバーの具体例⁸

ここでは、ホリスティック・カバーが、個別リスク毎のヘッジの集積と比べて効率的であることを、具体的な例を用いて示す。また、検証の過程で、ホリスティック・カバーは、いくつかの前提の下では個別ヘッジ・ツールの組み合わせによって複製できることも示す。

例として企業Aを考える。計算を単純化するため、次のような前提を置く。

A社は株価リスクと一つの保険リスクのみを保有している。

A社は、上記リスクについてヘッジ・プランを検討しているが、2つのリスクを完全にヘッジするのは過大なコストがかかることから、年間10億円までの損失は許容すると判断している。

まず、個別リスク毎のヘッジの集積で対応する場合を考える。A社のトータル・コストは、各ヘッジ・コストの合計であるから、個別のヘッジ・コスト、すなわち株価リスクについてはオプション・プレミアムを、保険リスクについては保険料を計算する必要がある。ここでは、計算にあたり次の前提を置いた⁹。

オプション・プレミアム

ブラック - ショールズ式に基づくオプション時価を計算

保有株価時価 (株価想定元本) は 50 億円

日経平均 (現時点で 15,000 円と仮定) に完全にリンク ($\rho = 1$)

一年無リスク金利 0.5%

ボラティリティー 20%

保険料

事故発生率に基づく保険金支払額の期待値を計算

保険事故発生数はポアソン分布 ($\lambda = 0.03$) に従う¹⁰

一事故当り保険金額は対数正規分布 (平均約 60 億円) に従う

⁸ 本節での計算手法は、Swiss Re New Markets [42] を参考にした。

⁹ ここでは、株式オプション・プレミアムはブラック - ショールズ式 (つまりリスク中立確率をベースにした期待値) である一方、保険料は純保険料ベース (つまり観測確率をベースにした単純な期待値) であり、ベースが揃っていない。例えば、保険料について安全付加保険料率を考慮すればベースを揃えられるが、ここではイメージを掴むことが目的であるため、簡便な計算方法を採用した。
なお、保険価格理論と金融価格理論の違い、両者の統合の試み等については第3章「保険数理と金融工学の融合」を参照されたい。

¹⁰ 約 33 年に 1 程度程度の事故発生頻度を想定していることになる。

以上の前提の下、許容損失額¹¹を変化させて、ヘッジ・コストを計算した。【図表 2-6】は、完全にヘッジした場合、5 億円まで損失を許容した場合、10 億円まで損失を許容した場合の計算結果である。

【図表 2-6】個別リスク毎のヘッジ・コスト

	完全ヘッジ	許容損失 5 億円	許容損失 10 億円
オプション・プレミアム	384.9 百万円	172.0 百万円	56.3 百万円
保険料	176.5 百万円	161.8 百万円	148.0 百万円

次に、A社が選択可能なヘッジの組み合わせおよびそのコストについて考える。選択可能な組み合わせは、各ラインの許容損失額の合計が 10 億円を超えないものである。例えば、それぞれの許容損失額を 5 億円と考えれば、ヘッジ・コストの合計額は $161.8 + 172.0 = 333.8$ 百万円となる。

同様に、株価リスクについては 10 億円を許容損失額とし、保険リスクについては完全にヘッジすることも考えられる。この場合のヘッジ・コスト合計額は $176.5 + 56.3 = 232.8$ 百万円となる。簡単な検証により、個別リスクをヘッジするという組み合わせの中では、このヘッジ・コスト（232.8 百万円）が最小であることが分かる。

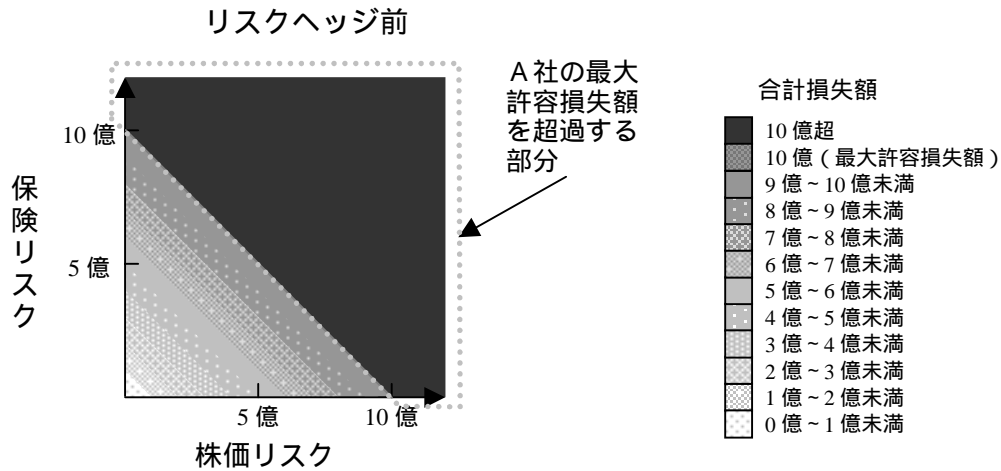
しかし、これらのヘッジは、損失額合計が 10 億円以下であればそれは許容するというA社のヘッジ目的と比較すると、余分なヘッジ部分が必ず存在する。この関係を図示したのが【図表 2-7】である。横軸が株価変動によって生じた損失額、縦軸が保険事故によって生じた損失額を示しており、その和である合計損失額がグラフ上に示されている。合計損失額が大きいほど、色を濃くしている。

図中 がリスク・ヘッジ前、 が個別ヘッジの組み合わせによるヘッジ例、 が最適なヘッジの姿における合計損失額をそれぞれ示している。 を と比較して、色の薄い部分が非効率なカバーであり、その分ヘッジ・コストを過大に支払っていることとなる。

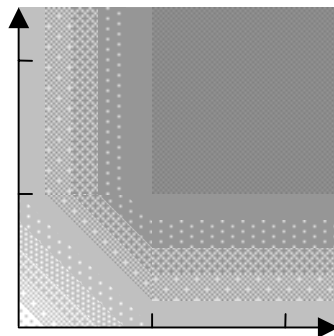
¹¹ 保険で言えば免責条項（例えば損失額のうち 5 億円までは支払わないという条項）付きの契約を意味し、株価の場合は、アウト・オブ・ザ・マネーのプット・オプションとなる。上記例では、許容損失額 5 億円の場合、行使価格は 13,500 円となり、10 億円の場合は 12,000 円となる。

2 Alternative Risk Transfer (ART)

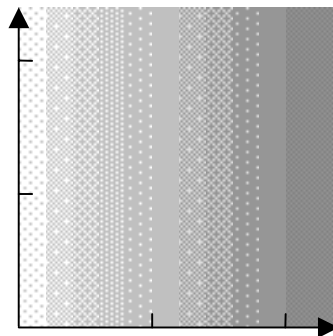
【図表 2-7】A社における2つのリスクが顕在化した場合の合計損失額



個別ヘッジの組み合わせによるリスクヘッジ例

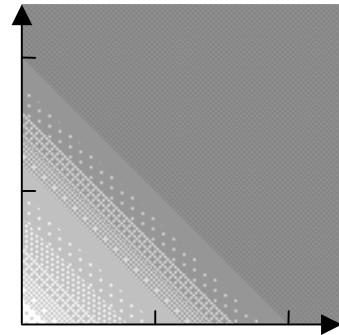


株価リスク、保険リスクとも
許容損失額 5 億円



株価リスクは許容損失額 10 億円
保険リスクは全てカバー

最適なヘッジの姿



のようなホリスティック・カバーが、個別ヘッジの集積と比較してどの程度効率的であるかを見るために、ホリスティック・カバーの価格を計算する必要がある。ここではいくつかの前提の下、株価指数オプションおよび保険商品の組み合わせで、ホリスティック・カバーが複製できることを示し、その複製ポートフォリオの価値から価格を計算する手法を紹介する。

まず、株価リスクについて、許容損失額 10 億円 (日経平均が 12,000 円以下となる部分) についてヘッジを行う。そのためには、行使価格 12,000 円のプットオプション (想定元本 50 億円) を購入することとなる。

次に、保険リスクの損失許容額が、一年後の株価に応じてどのようになるべきであるか、ということを考える。一年後の株価が 12,000 円以下であれば、株価リスクからの損失が 10 億円となり、会社トータルの許容損失額を全て使い

切ってしまうので、保険リスクの許容損失額は 0、すなわち保険リスクは完全にカバーされていないなければならない。一方、15,000 円以上の時は、株価リスクは顕在化しないので、保険リスクの許容損失額は 10 億円となる。一年後の株価が 12,000 円以上 15,000 円以下となった場合、保険リスクの許容損失額 D は、一年後の株価 S_1 に応じて、

$$D = \{(S_1 - 12,000) \div 3,000\} \times 10 \text{ 億円}$$

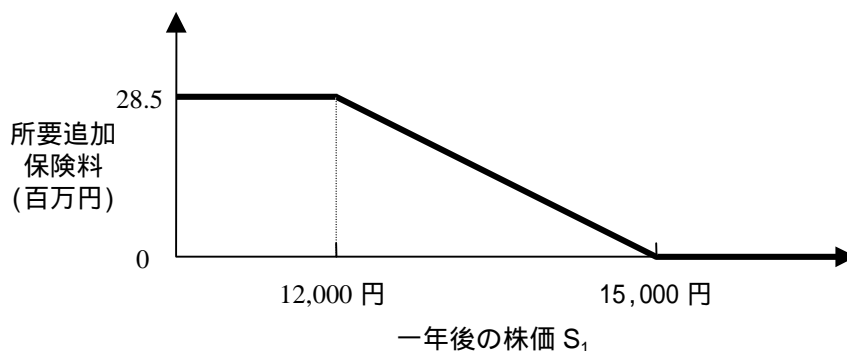
と表される。

以上の関係を把握した上で、保険リスクのヘッジについて考える。まず、一年後の株価に関わらず、許容損失額 10 億円のヘッジは必要であるので、その保険を購入する。次に、一年後の株価に応じて、保険リスクの許容損失額を減らすために保険料を追加する必要となる場合には、それを一年後に支払うと考える¹²。【図表 2-6】から、許容損失額ゼロの場合と 10 億円の場合で、保険料の差は 28.5 百万円 (= 176.5 - 148.0) であることが分かるので、保険料が許容損失額に対して線形的に変化すると仮定すれば¹³、【図表 2-8】が一年後の株価と追加保険料の関係を示していることとなる。

このペイオフは、次の 2 つの株価指数オプション取引により達成される。

- プットの買い（行使価格 15,000 円、想定元本 142.5 百万円¹⁴）
- プットの売り（行使価格 12,000 円、想定元本 142.5 百万円）

【図表 2-8】一年後の株価と追加保険料の関係



¹² 厳密には、計算された保険料に一年分の金利を上乗せして支払う必要がある。ただし、ここでは簡便さを優先して省略した。

¹³ 実際に計算すると線形にはならず、僅かに下に凸の曲線となる。ただし、誤差は微小であり、線形近似とおいてもそれほど問題は生じない。

¹⁴ 日経平均が 12,000 円に下落した時、28.5 百万円のペイオフを生み出す必要があることから、
 想定元本 = $\{28.5 \text{ 百万} / (15,000 - 12,000)\} \times 15,000$
 となり、ここから想定元本 142.5 百万円が導出できる。

ブラック・ショールズ式で両オプションの価格を計算すると、それぞれ 11.0 百万円と 1.6 百万円であることが分かるので、ネットでは 9.4 百万円となる。以上から、全体としては、

保険リスクのカバー（許容損失額 10 億円）	148.0 百万円
株価リスクのカバー（許容損失額 10 億円）	56.3 百万円
<u>上記プットオプションの売買</u>	<u>9.4 百万円</u>
合計	213.7 百万円

となる。このヘッジ・コストは、個別リスクの組み合わせの中で最小であったヘッジ・コスト 232.8 百万円よりも低くなっている。

もっとも、上記の計算例は近似的な要素が含まれている。すなわち、保険リスクの許容損失額と保険料が線形関係にあるという前提に加え、保険リスクと株価リスクが無相関という前提も置かれており、注意が必要である¹⁵。こうした問題をクリアにするためには、ホリスティック・カバーを保険リスクと金融リスクの複合オプションとして考え、両者の相関を取り入れたモデルを構築することなどが考えられる¹⁶。

ホリスティック・カバーの市場規模

ホリスティック・カバーは、新しい商品であり、また伝統的商品との線引きが明確でないことから、市場規模を類推できるような資料は公表されていない。

2.4.2 コンティンジェント・キャピタル

コンティンジェント・キャピタルは、保険会社に偶発的債務を生じさせるような事象が発生した場合（例えば、自然災害等による大規模な保険金支払等）所要資金を調達する手段を提供するものである。保険会社（再保険会社）が大災害時において、一時的に保険金の支払いが嵩むことでバランスシートが不安定になるのを避けるために用いる。

最も単純な形態は、保険会社が金融機関（銀行）との間にコミットメント・

¹⁵ 保険リスクと株価リスクの相関をどう考えるかは難しいところである。事故発生頻度と株価は無相関で問題ないとも考えられるが、保険金額は、インフレ等の影響を受ける可能性があることから、単純に無相関とは言い難い。

¹⁶ 相関のパラメータについては、過去のデータに基づく客観的推定が困難である場合も多いことから、いくつかのシナリオを設定し、相関に対するモデルの頑健性を試す等のテストを行う必要がある。

ラインを設定することである。ここで、融資請求の事由(=トリガー)を、保険事故の発生もしくは保険金額支払いによる損失の発生等に限定する。これはコンティンジェント・クレジット・ファシリティ(Contingent Credit Facility)と呼ばれている。ただし、この手法では、保険会社・銀行双方に信用リスクが発生してしまう他、資金調達方法が借入であるために、貸借対照表上の負債として計上されることとなる。

この問題をクリアにするために考えられたのがコンティンジェント・サープラス・ノート(Contingent Surplus Notes、以下 CSN)もしくはコンティンジェント・エクイティー・プット(Contingent Equity Puts、以下 CEP)と呼ばれるものである。このスキームでは、保険会社が信託口座(CSN トラストもしくは CEP トラスト)を設立し、そこへの投資を募る。集められた資金は流動性・信用度の高い投資対象で運用される。予め決められたトリガーが発生した場合には、保険会社はトラスト内の資産をサープラス・ノート¹⁷(CSN の場合)もしくは優先株(CEP の場合)に変換できるオプションを有している。その権利を維持するために支払われるオプション料(スタンド・バイ・クレジット・フィー)が運用資産に付加されて投資家に還元される。

この方式を取った場合、投資家は保険会社と切り離されたトラストに投資しているため、トリガーが発生するまでは信用リスクが殆どない(スタンド・バイ・クレジット・フィー部分のみ)一方、保険会社もトリガー発生時の資金調達に対して、投資家の信用リスクを考慮する必要がないという利点がある。

コンティンジェント・キャピタルの実施例としては、Nationwide Mutual(4億ドル)、Arkwright Mutual(1億ドル)等がある。

コンティンジェント・キャピタルは、このようにして災害時に資金調達手段を提供してくれる。ただし、保険リスクそのものの吸収は依然として保険会社が行っている。投資家は、トリガー発生時に保険会社の信用リスクを負うことで、間接的に保険リスクにさらされることになっているものの、保険リスクそのものをとっているとは言い難い。これをさらに進めて、保険会社が保険リスク部分を明確な形で投資家に移転するのが、次に挙げる保険リスクの証券化である。

¹⁷ 米国の相互会社に発行が認められた、一種の劣後債。貸借対照表上、資本の部に計上される。

2.4.3 保険リスクの証券化 (ILS)

保険リスクの証券化とは

保険リスク証券 (Insurance Linked Securities、以下 ILS) は、その名の通り、保険リスクが内包されている証券である。証券化という観点では、これまでも資産担保証券 (ABS) やモーゲージ担保証券 (MBS) 等が存在していたが、それらがいずれも金融資産の証券化であるのに対し、ILS は負債の証券化という点でこれまでになかった概念を提供している。

ILS という呼称は最近広く用いられつつあるが、主として地震や風水災といった、発生確率は小さいものの、発生した場合の損害が大きい (low frequency/high severity) リスク (これを一般に catastrophe risk という) を対象としていることから、CAT ボンドとも呼ばれている。

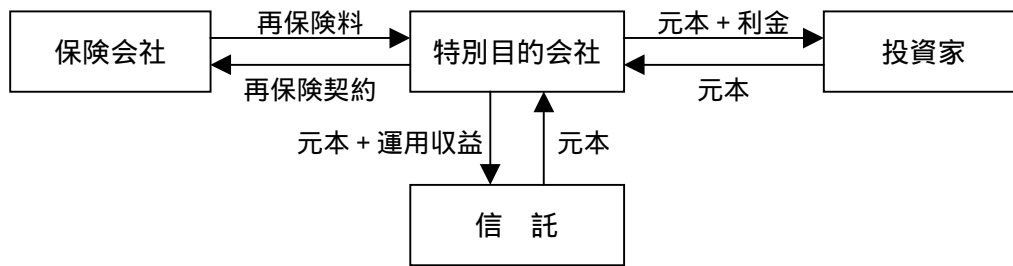
ART の中で昨今最も注目を集めているのが、この ILS であろう。発行体である保険会社にとっては保険リスクの移転先の飛躍的拡大、長期間の再保険確保、リスク移転先の信用リスク回避という点でメリットがある。信用リスク回避というのは、再保険契約の場合、再保険会社の信用リスクが問題となるからである。特に地震・ハリケーン等巨大リスクの場合、その発生が再保険会社の財務内容にどのような影響を及ぼすかを予め推定することが公的情報の中では極めて困難であると考えられることから、回避できるということは保険会社にとって大きなメリットと言えよう。

一方、投資家においても、ハイ・イールドであることに加え、ポートフォリオの分散効果が期待できる (武田 [3] 等を参照)。こうした点が、注目を集める所以である。

証券の一般的仕組み

一般に ILS を発行する (再) 保険会社は、特別目的会社 (Special Purpose Vehicle/Company) を設立するのが通例である。その会社は、(再) 保険会社と再保険契約を締結する一方、投資家に対して証券を発行する。債券の満期までに予め定められた事象が発生すれば、元利金の一定割合が没収されるというリスクを投資家が負うことになる。没収割合については、元本全額というものから、利金のみまで様々な発行例がある。投資家から集められた元本は信託において安全資産に投資され、投資家にはそこから得られた収益と保険会社からの再保険料が利金として支払われる (【図表 2-9】参照)。

【図表 2-9】 ILS のストラクチャー例



ILS では、どのような事象が発生した時に元利金の一定割合が没収されるのかが極めて重要なファクターである。これはリスク指標と呼ばれ、特定の保険会社の実損額を指標とする場合、保険業界の保険金支払額に関するインデックスを使用する場合、それ以外の客観的な指標を用いる場合の3つに大別される。

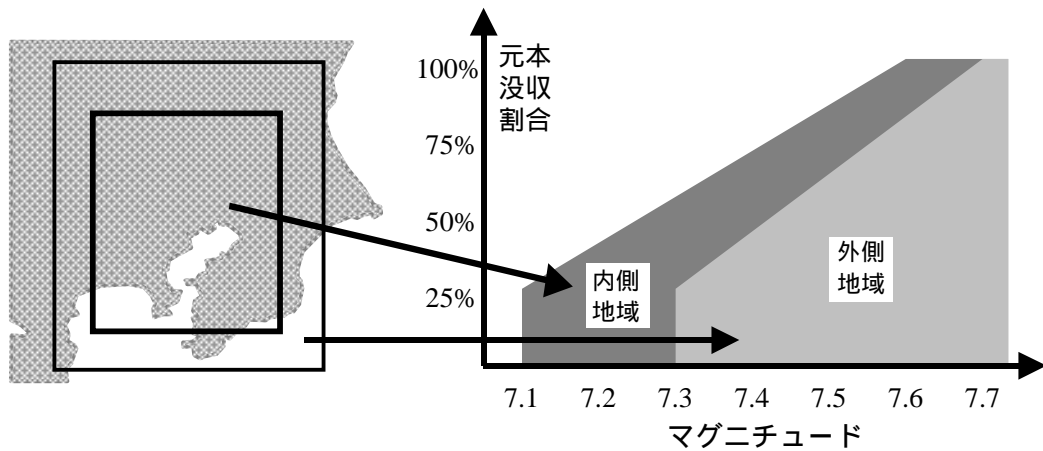
保険会社の実損額を指標とする場合、発行する側としては被った損失が填補されるので、最も望ましい形態である。しかし、モラル・ハザード（保険金支払軽減の努力を怠る）や逆選択（保険契約ポートフォリオ中、収益性が悪いと思われるものだけを対象とする）が生じる危険性がある。また、投資家側には損失の実態が完全には見えないことから（情報の非対称性）、過大なプレミアムを要求される可能性もある。

それに対し、業界全体の損害額に関するインデックスを用いる場合には、こうした問題は殆ど発生しない。こうしたインデックスの例としては、米国のPCS¹⁸などが有名である。ただし、このようなインデックスが存在している地域・リスク対象は限られていることに加え、保険会社が必要とするカバーとインデックスとの乖離から生じるベシス・リスクを被ることになる。

最後の客観的指標は、例えば地震のマグニチュードのように、損害規模と間接的に関係した客観指標をベースとして支払額を決めるものである。この場合、指標の内容に関する理解度・信頼度が高い上に、米国のPCSのような特殊なインデックスが存在していない地域の保険リスクも対象とすることができる。ただし、保険事故を引き起こす原因となる事象に関する数値を指標化しているだけであり、直接保険金支払額とはリンクしていないことから、ベシス・リスクは一段と広がることとなる。

¹⁸ 全米を9つの地域に分け、そこである特定の期間（通常3ヶ月）に発生した自然災害損失の累計値をインデックス化したもの。なお詳細についてはCanter, Cole and Sandor [10]を参照のこと。

【図表 2-10】東京海上が発行した ILS で用いられたリスク指標
(南関東の地震リスクをカバー)



参考までに、【図表 2-10】に、東京海上火災保険が 1997 年に発行した ILS における客観的指標の例を掲載した。内側地域（地図中に示された小さい四角の内側）と外側地域（小さい四角よりは外側で、大きい四角よりも内側）それぞれにおいて、その地域を震源とするマグニチュードによって、元本没収割合が決定される。右グラフの横軸がマグニチュード、縦軸が元本の没収割合を示している。

ILS のプライシング

ILS のプライシングは、次に掲げる保険デリバティブのプライシング同様、重要かつ興味深い問題である。技術的な解説は第3章に譲るとして、ここでは保険リスクの計量について簡単に述べる。

Catastrophe リスクに限らず、一般に保険リスクを扱う上では事故の発生頻度と発生時の損害額の推定が重要となる。このうち、より困難なのは損害額の推定である。

すぐに思い付く推定方法は、過去の統計データをそのまま用いる手法、つまり過去に起きた同種の自然災害についての被害データを集めるという手法である。勿論、生データをそのまま用いるのではなく、損害額についてはインフレ率等で現在価値に換算したり、人災に関わる部分については、過去の時点から現在までの人口増加率を勘案するといった調整を施す必要がある。しかしながら、同手法には様々な問題がある。まず人口の増加は全国均一ではない。保

険リスクが増加していると思われる地帯は、全国平均以上の人口密集地帯であることも多いことから、そうした要素を加味する必要がある。さらには建物の材質・構造も大きく変化している。

上記問題点を解決するために、過去に実際に起きた自然災害と同じ災害が現時点で発生したと仮定して、各地域での被害額の推定を行う手法が考えられる。ただし、直接過去の自然災害を用いようとする、一つの自然災害のデータを適用できるのはそれが実際に発生した一つの地域に限定される。そこで、過去の自然災害の主要なパラメータ（台風であれば、中心気圧や速度など）を分析して、それぞれのパラメータに適当な確率分布を当てはめて、それらを基に架空の自然災害を発生させるという手法が考えられる。実際、現在はこの手法が最も多く使われている¹⁹。

ただ、こうした評価は極めて複雑であり、最近ではこうした保険リスクを専門に分析・リスク評価・コンサルティングを行ったり、解析用ソフトウェアを提供する会社が出現しているほどである。ILS の発行に当たっては、価格の正当性・透明性を確保するという観点から、リスク評価をこうしたコンサルティング会社に依頼することが多いようである。

プライシングにおいては、その他にもいくつか考慮すべき点がある。例えば、地震などの発生確率に関しては、時間依存確率（time-dependent probability）の問題が挙げられる。地震、特に大地震は、その発生メカニズムから考えて、かなり長期の周期性があると考えられている。それが正しいと仮定すれば、地震発生に関する条件付確率は、地震が発生していないという条件の下では徐々に上昇し、逆にある程度の規模の地震が発生してしまえば、大きく低下することになる。従って、債券発行時点で、現在どのような状況に置かれているかの分析が極めて重要となる。

このことは、既発債の価格にも影響する可能性がある。例えば、【図表 2-10】に示した ILS を想定し、仮に南関東にマグニチュード 7.0 の地震が起きたとしよう。これはリスク指標にかからないので、ILS に内在する再保険契約はそのまま継続される。一方、その状況で、引き続きマグニチュード 7.0 以上の地震

¹⁹ 究極的には、自然災害の発生メカニズムおよびそれがどのような被害をもたらすかといったプロセスそのものをモデル化し、それを用いてシミュレーションするという方法も考えられる。しかし、こうした分析はかなり複雑であり、現時点ではあまり現実的な選択肢とは言えないようである。

が発生するとは考えにくい（エネルギーが再び蓄積されるまでに相応の時間を要する）と投資家が考えれば、当該債券の魅力は劇的に上昇し、価格が急騰する可能性がある。

その他の自然災害、例えば台風や竜巻などは、地震のように発生確率が前回発生時点に依存していることはないと考えられる。しかしその一方で、例えばエルニーニョ等が台風の発生にどのような影響を与えるのかといった問題はある。また、そもそも台風の発生に季節性があることは、証券のプライシング、特に既発債には重要な要素である²⁰。

最近の発行例

スイス・リー・ニュー・マーケットズ (Swiss Re New Markets) 社によると、1998年には、過去最高の ILS 発行が行われた。損害保険に関する ILS に限定しても²¹、14 もの発行例が確認された（【図表 2-11】）。1997 年以前での発行数が 10 例だったことに鑑みると急激な伸びであることが分かる。

表中で興味深い点がいくつかある。まず目につくのは注記されているスワップ契約であろう。スワップの場合、発行コストを抑えられるという利点がある一方、カウンターパーティーが限定されるため高額のリスク転嫁には向かないことや、元本の移動がないために互いに信用リスクが生じる、またその結果、契約期間をあまり長くするとむしろ割高となる可能性があるといった問題点も内包している。従って、転嫁したいリスクのプロファイルに応じて契約形態を使い分けるべきと考えられる。

このほか、Toyota Motor Credit の発行した証券は、対象リスクが巨大自然災害でなくリース車の契約満了時における残存価格の変動である点が特徴的である。予め見込んでいた残存価格と比べて、実際のリース車の価値が 9% 以上下がっていた場合、その下落分の 9 割が証券を購入した投資家の負担となる（日吉 [4]）。

²⁰ こうした要素を考慮した上で、個別の ILS のプライシングについて考察を加えた興味深い論文として、Schmock [36] が挙げられる。Schmock は、ウィンターツール (Winterthur) 社が 1997 年に発行した保険リスク付転換社債について、様々な推定手法で価格を計算し、各モデルの問題点・頑健性などを検証している。同論文には、計算の基となるデータや、計算手法が細かく記述されており、具体的な数値を使いながらモデルの内容が理解できるようになっている。

²¹ 【図表 2-11】にはないが、生命保険の証券化もいくつか行われている。

2 Alternative Risk Transfer (ART)

【図表 2-11】1998年に発行された主な ILS (損害保険関連)

発行会社名	リスク相当額 ²²	元本	期間	対象リスク	リスク指標
Centre Solutions	\$72.0 百万	\$83.5 百万	0.9~11.9 年	フロリダ風水災	実損填補
三井海上 ^a	\$30.0 百万	\$30.0 百万	3 年	南関東の地震	客観指標
USAA	\$450.0 百万	\$450.0 百万	1~1.5 年	東海岸ハリケーン	実損填補
安田火災	\$80.0 百万	\$80.0 百万	5~7 年	日本の台風	実損填補
AXA ^b	\$40.0 百万	\$40.0 百万	1 年	PCS (カリフォルニア地震)	インデックス
Toyota Motor Credit	\$566.0 百万	\$566.0 百万	1~3 年	リース車の残存価格	実損填補
Mosaic Re	\$45.0 百万	\$54.0 百万	1~2.5 年	保険会社の実損	実損填補
XL MidOcean Re ^a	\$100.0 百万	\$100.0 百万	1 年	米国風水災・地震	実損填補
Allianz ^b	\$150.0 百万	\$150.0 百万	3+3 年	ドイツの風害・雹害	実損填補
Societe General ^a	\$25.0 百万	\$25.0 百万	1 年	PCS(米国の地震)	インデックス
AXA ^b	\$25.0 百万 ^c	\$25.0 百万 ^c	1 年	PCS (カリフォルニア地震)	インデックス
Societe General ^a	\$15.0 百万	\$15.0 百万	1 年	PCS(米国の地震)	インデックス
Centre Solutions	\$54.0 百万	\$56.6 百万	1~2 年	フロリダ風水災	実損填補
Mosaic Re	\$50.0 百万	\$59.0 百万	0.9~2 年	保険会社の実損	実損填補

出典： Swiss Re New Markets 社

a：スワップ契約、b：債券オプション契約、c：推定額

2.4.4 保険デリバティブ

保険デリバティブとは

保険デリバティブはその名の通り、保険に関連する指数にリンクした派生商品のことである。1992年にシカゴ商品取引所（Chicago Board of Trade）に上場された ISO（Insurance Services Office）が提供するインデックスにリンクした先物・オプションが始まりである。その後、ISOが1995年のカリフォルニア・ノースリッジ地震の損失を十分反映できなかったことがきっかけで、同先物・オプションのインデックスが PCS（Property Claims Service）に変更された。

上場されたデリバティブとしては、上記に加え、1996年に法人登録されたバミューダ商品取引所（Bermuda Commodities Exchange）におけるオプションがある。ここでは Guy Carpenter Catastrophe Index（GCCCI）という指数が用いられている²³。この指数は、特定の保険会社（計40社前後）の保険金支払額・保険

²² リスク相当額は、投資家が被りうる最大損失額。

²³ この指数は Guy Carpenter 社の 100% 子会社である IndexCo 社によって発表されている。

料収入を基に計算される。対象となるリスクは米国内で発生するハリケーン・竜巻等風水災リスクによる個人財産損害である。なお、PCS オプションと比較すると、

ある期間中に特定の対象地域について発生した損失額をベースにインデックスが計算されるのは PCS と同様であるが、リスク総額以外に、単一の事象から生じた最大の損失額および第二損失額もインデックスとして用いられている

取り扱われているオプションはデジタル・オプション²⁴である

という点が異なっている。

上記2つと多少毛色が異なるのが、1996年11月より開始されたカタストロフ・リスク取引所 (Catastrophe Risk Exchange、以下 CATEX) というニューヨークの取引所であろう。ここでは、リスクのスワップ取引が行われる。例えば、ある保険会社がカリフォルニアの地震リスクを別の特定のリスクと交換したい場合、その旨を取引ネットワーク上に公開すると他の CATEX 参加者が閲覧し、希望すればその会社と交渉することができる。交渉は互いに匿名で行うことも可能である。以上から、CATEX は取引所というよりも情報交換所という位置付けになっていることが分かる。当事者間のニーズが一致すれば、かなり複雑なストラクチャーも可能となる。しかし、あくまでも相対取引ベースであるため、カウンター・パーティーリスクは残ることとなる。

さらに、OTC デリバティブ取引も行われている模様である²⁵。ただし、そのマクロ的な取引状況を窺い知ることは難しい。後藤 [2] によると、上場デリバティブよりも取引量は多いとされている。なお、同文献には、OTC デリバティブ取引の一例として、気温を指数化したディグリー・デイ (degree day)²⁶ 指数を基準とした取引も紹介されている。

²⁴ 原資産がある水準を上回って (下回って) いた場合、ある一定額が支払われるという契約のこと。バイナリー・オプションともいう。

²⁵ 上記の ILS におけるスワップ取引も実は OTC デリバティブであるが、あくまで金融機関へのリスク移転を目論んだという点や、契約までの流れが ILS と殆ど同様であるため、ILS に分類するのが一般的な慣行のようである。

²⁶ ある標準的な気温 (例えば 18 度) に対し、定められた期間の気温がどの程度ずれているかを表す指標。上昇方向にずれる場合を HDD (heating degree-days)、逆を CDD (cooling degree-days) という。例えば、30 日 CDD スワップを契約し、当該期間の平均気温が 20 度であれば、 $60(=2 \times 30)$ degree days に一単位当りの約定金額を乗じたものを支払う。

保険デリバティブのプライシング

保険デリバティブは、市場性のある商品なのでプライシングの研究対象となり得るが、次に述べるように市場での取引が活発でないことから、実データを用いた分析には限界がある。その結果、実務では様々なプライシング技術が用いられているようではあるが、公表された研究報告は少ない。

その中で、Christensen and Schmidli [11] は、ISO 先物について、市場参加者が指数効用関数に従うという前提の下で、価格モデルおよび技術的な問題点について分析が加えられている²⁷。

市場の現状

現時点では、どの市場も取引量は少額に止まっている。理由としては、指数の計算根拠に対する信頼度、指数取引に内在するベシス・リスク等が挙げられている。

2.5 ART の今後

ここでは特に ILS と、金融リスク・保険リスクの融合商品について、今後どのように推移していくかについて考える。

ILS は、上述したようにここ数年、発行数・移転されたリスク相当額ともに増加傾向にあり、損害保険に関連するリスクに関してだけでも、トータルで発行数が 24 例、リスク相当額は 20 億ドルを上回っている。今後の需要・供給両面のニーズを勘案すると、ILS を利用して移転されるリスク量はさらに増えると予想される。

需要面とは、保険会社および再保険会社が、今後どの程度金融市場に保険リスクを移転したいか、ということである。言い換えれば、保険リスクは十分に保険会社・再保険会社で吸収されているか、ということになる。sigma [39] は、自然災害のリスクがどの程度保険でカバーされているかを分析し、地震や洪水に対する備えが低いことを指摘している。例えば東京の大震災については、カバー率が 5% であると推測している。こうした部分をカバーするためには、さらなるキャパシティーが必要となる。つまり、ILS の需要面でのニーズは高い

²⁷ 上述した通り、ISO インデックスはすでに PCS インデックスに変更されているが、同論文によれば、両インデックスは取り扱うリスク範囲等が異なるだけであり、彼らが用いた分析手法は PCS に対しても適用可能であるとされている。

と考えられる。

供給面のキャパシティーはどうか。一般に ILS は、株式市場等伝統的な金融市場との相関関係が殆どないと考えられている²⁸ことから、投資家がこれをポートフォリオに組入れるニーズはあると考えられる。こうした点を勘案し、sigma [38] では、米国の投資銀行およびその他の投資家について、ILS への投資額が米国株式時価総額の 0.5 ~ 1.0% 程度となるのが最適であるというシミュレーション結果から換算し、当時 (1995 年末) の株価水準から 300 ~ 400 億ドル程度のニーズはあると推測している。シミュレーションの詳細が不明であることから、単純な比較はできないものの、1998 年末の株価時価総額が倍増していることを勘案すると、単純計算では 1,000 億ドル近い吸収力を持っている可能性があることになる。

次に、金融と保険リスクの融合商品についても、企業のリスク管理意識の向上やリスク管理技術の高度化などにより、取引ニーズが高まってくるものと予想される。

リスク管理意識の向上の一例としては、コーポレート・ファイナンスの中で最適なリスク・ファイナンスを求めるといった概念が挙げられよう。これは、冒頭で述べたリスク保有かリスク移転かという問題を意識的に解決しようとするもので、例えば地震リスクについて、地震保険を付保するか、地震発生をトリガーとするコミットメントラインを設定するか、または何もせず地震発生時に融資を求めるか、さらには地震発生時の損失を減らすべく保有設備の補強を行うか、といった財務上の意思決定を扱うものである。

一方、リスク管理技術では、ダイナミック・フィナンシャル分析 (Dynamic Financial Analysis) と呼ばれる手法が注目を集めている。これは元来、損害保険会社が自らの資産と負債を分析し、その結果を踏まえてどのように価格を決定し、決定された価格が需給にどのような影響を与えるか、さらにはどのように販売を行うべきかといった営業政策までもトータルに考えるために提言されている手法である。名称のダイナミックはこうした一連の意思決定の相互作用を動学論 (System Dynamics) 的に考えることから来ている。ただし、昨今では金融リスクや保険リスクをトータルに捉えた分析手法というようなより広い概念として捉えられるようになってきている。

²⁸ この点については武田 [3] 参照。

こうした概念・技法の浸透により、金融リスクと保険リスクの一元管理がさらに加速されることとなり、ART の必要性はさらに高まることになると考えられる。

3 保険数理と金融工学の融合

ART のような金融と保険の融合は、これまでそれぞれの分野において研究・分析を続けてきた研究者および実務家達に、新鮮かつ重要な技術的テーマを提供することとなった。中でも特に重要な問題は、金融と保険のリスクが両方内包されている商品のプライシングおよびリスク・コントロールはどのように行うべきかというものである。

これまで、金融商品についての価格理論は、特に 1970 年代のオプション価格理論の登場以来、高度な数学が駆使されるようになり、金融工学もしくは数理ファイナンスという学術分野まで確立するという飛躍的發展を遂げている。一方、保険商品については、アクチュアリーが保険数学の中で価格設定やリスク把握手法の考え方を進展させてきた。特に、保険ビジネスがもつ確率的要素を解析する危険論 (Risk Theory)、中でも契約全体の確率的動向を勘案した集合的危険論 (Collective Risk Theory) は、昨今の保険数理理論において重要な役割を果たしている。

金融工学と集合的危険論にはいくつか興味深い共通点がある。まず、それぞれの価格理論の鍵となるのが、確率過程論である。これは、主に 20 世紀に築き上げられた比較的新しい理論であるが、その主要な応用先として、保険・金融がともに重要な役割を担っている。後に述べるように、両者が基礎モデルとして用いるブラウン運動とポアソン過程は、現代の確率過程論でも中心的な役割を担っている。

しかしながら、両者の価格理論へのアプローチには大きな違いがあり、その結果、理論の融合に向けて接近しようという動きは殆ど見られなかった。比較的最近になるまで、アクチュアリー界において金融工学理論を適用した研究は限られていたし、ファイナンスの世界に至っては保険数理の応用などは皆無に

等しいものであった。

それが、上記に見られる金融商品と保険商品の融合や、さらには信用リスクという、従来金融で用いていた確率過程では扱いにくいジャンプを含んだモデル（これは保険では一般的なモデル）が導入されるにつれ、両者の技術的ギャップは徐々に埋まりつつある²⁹。

本章では、それぞれの理論展開の経緯・内容を対比させながら簡単にまとめた後、今後、どのように理論的な統合が図られていくかについて、考察を加えることとする³⁰。

3.1 保険数理の歴史的経緯

本節では、金融と保険の融合に密接に関連している集合的危険論にポイントを絞って、その歴史的経緯を述べる。一般にこのような保険数学については金融の分野で相対的に馴染みが薄いと思われるが、昨今信用リスク・モデルへの応用が見られ始めていることから、ここで基礎的なサーベイを行っておく意義があると考え³¹。

以下、集合的危険論とは何かについて、その歴史的背景も含めて簡潔に述べた後、集合的危険論の基本モデルとその一般化を扱い、最後に集合的危険論の枠組みの中で保険料をどのように決められるか（保険料計算原理）について説明する。

3.1.1 集合的危険論とは何か

保険数学は 17 世紀末の生命表による年金原価計算に端を発している。古典的保険数学理論では、同種のリスクを数多く抱えることで、個々のリスクは不安定であっても、全体としては安定したポートフォリオになるという、大数の法則を基本としている。しかしながら実際には、特に損害保険会社において、時として巨大なリスクの顕在化に見舞われてきた。ペソーネン [5] はこの現

²⁹1999 年初に、*Stochastic Processes for Insurance and Finance* と題された本が出版されているほどである（Rolski, Schmidli, Schmidt and Teugels [34]）。ただしこの本は、主として保険の確率過程を扱っている。

³⁰ 本章全体の構成について、Embrechts, Frey and Furrer [15] を参考にした。

³¹ より詳しく理解するには、Bühlmann [7]、Gerber [21] 等を参照されたい。Gerber [21] はマルチンゲール理論を集合的危険論に適用した、読みやすい導入テキストである。

象を「小数の不法則」と表現しているが、産業の発達に伴うリスクの巨大化がこの傾向に拍車をかけることとなった。

このようなリスクに直面している保険会社のポートフォリオについて分析するために、考案されたのが集合的危険論である。この理論では、保険契約の集まりを考え、時間の経過とともに生じる確率的事象がその集まりの収支変動等にどのように影響を与えるかについて考察する。分析の対象としては、保険会社が破産する確率、またそれに備えるための保険料水準、初期段階の資本金（または責任準備金）水準等がある。

3.1.2 集合的危険論の基本モデル

集合的危険論の基本モデルは、ルンドベルイ（Lundberg）、クラメール（Cramér）という2人の学者の貢献によって発展したため、クラメール・ルンドベルイ・モデルと呼ばれている³²。ルンドベルイは、（損害保険の）保険金の発生を次のように定義される斉時ポアソン過程でモデル化することを提案した。

定義：（斉時ポアソン過程）

計数過程³³ $N = \{N(t)\}_t$ が次の条件を満たす時、強度（intensity） $\lambda > 0$ を持つ斉時ポアソン過程（homogeneous Poisson process）という。

(a) $N(0) = 0$, a.s.³⁴

(b) N は独立増分を持つ。すなわち、任意の時点 $0 \leq s < t$ に対し、増分 $N(t) - N(s)$ は、 s 時点までの履歴 $\{N(u), u \leq s\}$ と独立である。

(c) N は定常増分を持つ。すなわち、任意の時点 $0 \leq s < t$ に対し、増分 $N(t) - N(s)$ の確率分布は、時点 s に依存せず区間の長さ $t - s$ にのみ依存し、パラメータ $\lambda(t - s)$ のポアソン分布に従う。

上記の定義は、ブラウン運動の定義によく似ている。実際、両者とも独立増分かつ定常増分を持つ。一般に、ある確率過程が独立かつ定常増分を持ち、さ

³² 現代の集合的危険論の創始者は、スウェーデンのアクチュアリーであったルンドベルイといわれている。彼の最初の論文は1903年に博士論文として書かれたものであるが、内容が難解であったため発表当時は一般にはあまり注目されなかった。その後、スウェーデンの確率論の大家クラメールが分かりやすい解説を行うようになってから、主としてスウェーデンのアクチュアリー達に広まり、急速に発達するに至った。

³³ ある事象が時点 t までに生じた回数を表示する確率過程 $N = \{N(t)\}_t, t \geq 0$ のこと。

³⁴ 「ほとんど確実に(almost surely)」の略。数学的には、確率1で発生する事象のことである。

らにある種の滑らかさ³⁵を保有しているものをレヴィ (Lévy) 過程と呼ぶが、ブラウン運動と斉時ポアソン過程は、レヴィ過程の代表例である。

保険への適用において、 $N(t)$ は t 時点までの累積保険事故発生数を意味する。これにより k 番目の保険事故発生時点 A_k は、

$$A_k = \inf \{t \geq 0 : N(t) \geq k\} \quad (1)$$

と定義できる。

$(k-1)$ 番目の事故と k 番目の事故の発生間隔を T_k とおく、すなわち

$$\begin{aligned} T_1 &= A_1 \\ T_k &= A_k - A_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

とおくと、 $N(t)$ が斉時ポアソン過程の場合、各 T_k は互いに独立な指数分布 (平均 $1/\lambda$) に従うことが分かる。

次に、各保険事故における保険金額の分布を考える。まず特定の分布形を前提することなく、単に、 k 番目の事故における保険金額 X_k はある有限の平均 μ を持ち、分布関数 F に従う (X は必ず正であるから $F(0)=0$) という仮定だけをおく。また、任意の2つの保険金額 X_i と X_j は互いに独立であるとする。以上から、 t 時点までの総保険金額 $S(t)$ は、

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \quad (2)$$

となる。このような確率過程 $S(t)$ を一般に複合ポアソン過程 (compound Poisson process) といい、その分布関数は³⁶、

$$G_t(x) \equiv P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) F^{n*}(x), \quad x, t \geq 0 \quad (3)$$

ここで、 $P(A)$ は事象 A が発生する確率を表す。

と書ける。この分布を実際に計算するのは簡単でなく、現代の集合的危険論における一研究分野となっている。

収入保険料 $(I(t))_t$ についても、確率過程に従うと考えるべきであるが、ここ

³⁵ サンプルパスが右連続かつ有限な左極限が存在すること。この条件を満たす確率過程は D 過程または R 過程などと呼ばれる。

³⁶ ここで、 $F^{n*}(x)$ は F の n 回たたみ込みを表す。言葉で表現すれば、「確率分布 F に従う事象を独立に n 回発生させた時、発生させた値の合計が x 以下である確率」のことである。ただし、 $n=0$ の場合については、

$$F^{0*}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

と定義する。

では一定割合で増加する決定的過程と考え、 $I(t) = ct$ とする。定数 c は、単位時間あたりの収入保険料となる。

さらに、保険の引受け開始時点 ($t=0$) において初期出資 $u \geq 0$ の存在を想定する。

以上が基本的なパーツである³⁷。このセットアップにより、保険会社（もしくは保険会社内の一ポートフォリオ）の収支は次のような危険過程 $U(t)$ に従うことになる。

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0 \quad (4)$$

これをクラメール - ルンドベルイ・モデルという。

さて、集合的危険論で中心的に扱われるのが、次に定義する破産確率および破産時点である。

定義：(破産確率・破産時点)

有限時間 T までの破産確率を次のように定義する。

$$\Psi(u, T) = P(U(t) < 0, 0 \leq \exists t \leq T) \quad (5)$$

$T = \infty$ とおいた場合の破産確率を $\Psi(u)$ と書く。また、破産時点

$$\tau(T) = \inf \{ t : 0 \leq t \leq T, U(t) < 0 \} \quad (6)$$

と記す（ここで右辺の $\{ \}$ 内が空集合の場合、 $\tau(T) = \infty$ ）。

保険金については、期待値で見れば単位時間での事故発生数が λ 、その時の保険金額が μ であるから、次の条件

$$c - \lambda\mu > 0 \quad (7)$$

が成立している場合には、 $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) = 0$ となる。これは、初期出資が厚ければ破産しないということを意味する。条件(7)を net profit 条件と呼ぶ。以下、この条件は常に成立していると仮定する。 $\lambda\mu$ は単位時間あたりの純保険料であることから、営業保険料が純保険料より大きいことを示している。純保険料を超過する部分、つまり、

$$c = (1 + \rho)\lambda\mu \quad (8)$$

³⁷ ただしこのモデルは、金融において、株価はブラウン運動に従うというモデルと同様、現実を完全に記述しているモデルとは言い難い。例えば、事故の発生頻度には季節性の存在などが考えられるし、保険料や保険金額についても、インフレなどの考慮がなされていない。しかしここでは、拡張を行う前に、基本モデルからどのようなことが言えるのかについて考えてみる。

を満たす ρ を安全付加保険料率 (safety loading) という。

上記モデルでは、破産確率 $\Psi(u)$ について次の定理が成立する。

定理： クラメール - ルンドベルイ・モデルでは、次式が成立する³⁸。

$$1 - \Psi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} F_I^{n*}(u), \quad u \geq 0 \quad (9)$$

ここで、 ρ は安全付加保険料率 (すなわち $\rho = c/\lambda\mu - 1 > 0$) であり、 F_I は

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy \quad (10)$$

で定義される分布関数である。この分布を integrated tail distribution という。(ただし $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$)

$u = 0$ の時、 $\Psi(0) = 1/(1 + \rho)$ となり、初期資本がない場合、破産確率は $\lambda\mu/c$ (= 純保険料 / 保険料) に一致することが分かる。従って、純保険料を保険料とした場合 ($c = \lambda\mu$) には、いつか必ず破産することとなる。なお、この結果が保険金額の分布に依存せず、期待値にのみ依存するというのは興味深い点である。

破産確率 $\Psi(u)$ はどのような形に書けるだろうか。例として、保険金額が平均 μ の指数分布に従っている、すなわち、

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \quad (11)$$

という場合を想定すると、定理から、

$$\Psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} \exp\left(-\frac{\rho}{\mu(1 + \rho)} u\right) \quad (12)$$

と書けることが分かる。ただし、このように $\Psi(u)$ が解析的に解けるのはむしろ例外的なケースであり、保険金額が他の分布関数に従う場合には、 $\Psi(u)$ の解を求められない。そこで、不等式もしくは極限式で $\Psi(u)$ を評価することを考える。まず、次のように定義される正定数 ν が存在する場合を考える。

定義：(ルンドベルイ指数)

次式を満たす $\nu > 0$ が存在する場合、これをルンドベルイ指数 (Lundberg

³⁸ この証明については Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [16] 等を参照されたい。

exponent) または調整係数 (adjustment coefficient) という。

$$\int_0^{\infty} \exp(vy) \bar{F}(y) dy = \frac{c}{\lambda} \quad (13)$$

式(13)は、簡単な計算により、分布 F の積率母関数

$$m_X(\theta) \equiv E[\exp(\theta X)] = \int_0^{\infty} \exp(\theta x) dF(x) \quad (14)$$

を用いて、

$$\frac{m_X(v) - 1}{v} = \frac{c}{\lambda} \quad (15)$$

と書くことができる。この時、次の定理が成立する。

定理 : (クラメール - ルンドベルイの定理)

ルンドベルイ指数 $v > 0$ が存在する場合、任意の $u \geq 0$ に対し、

$$\Psi(u) \leq \exp(-vu) \quad (16)$$

が成立する。さらに、

$$\int_0^{\infty} x \exp(vx) \bar{F}(x) dx < \infty \quad (17)$$

となる場合には、

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \exp(vu) \Psi(u) = \frac{c - \lambda \mu}{\lambda m'_X(v) - c} \quad (18)$$

という極限式が成立する。

この定理により、破産確率の評価式(16)や極限式(18)が得られる。しかしながら、前提となるルンドベルイ指数が存在するには、分布の右裾が少なくとも指数的に減少している必要があるが、この条件を満たす分布は、指数分布やガンマ分布などに限られている。保険への適用に際しては、保険金額がファット・テールな分布に従うと考えることが多いため、上記不等式や極限式を使えないことも多い。

ただし、ルンドベルイ指数が存在しなくても、別の極限式を見つけられる場合がある。この際ポイントになるのは、下記のサブエクスポネンシャル³⁹ (subexponential) という分布クラスである。

³⁹ この分布クラスに関する詳細については、Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [16] 等を参照されたい。

定義：(サブエクスポネンシャルな分布のクラス)

区間 $[0, \infty)$ で定義された⁴⁰分布関数 G が、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - G^{2^*}(x)}{1 - G(x)} = 2 \quad (19)$$

を満たす時、サブエクスポネンシャル分布のクラス S に属するという。

このような分布の右裾は、どのような指数分布よりもゆっくりと減少する(数学的に書けば任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(\varepsilon x) \overline{G}(x) = \infty$ が成立する)。サブエクスポネンシャルの定義を用いると、次の定理が成立する。

定理：クラメール - ルンドベルイ・モデルにおいて、 $F_I \in S$ の時、

$$\Psi(u) \sim \frac{1}{\rho} \overline{F}_I(u), \quad u \rightarrow \infty \quad (20)$$

が得られる。

$F_I \in S$ となる分布 F はパレート分布、対数正規分布、ワイブル分布等、数多く見られることから、この定理は有用であると言える。

これまでは極限的な破産確率 $\Psi(u)$ について見てきたが、有限時間での破産確率 $\Psi(u, T)$ についても様々な評価手法が考案されている。中でも拡散近似 (diffusion approximation) と呼ばれる手法⁴¹は、金融と保険の融合にも深く関わりを持つものであり、様々な研究が試みられている。

また、最近ではマルチンゲール理論を応用した推定手法なども考案されている。

3.1.3 モデルの一般化

ここまでの議論は、基本的なクラメール - ルンドベルイ・モデルに限定されていた。より現実的な分析を行うためには、モデルをさらに一般化する必要がある。本節では、クラメール - ルンドベルイ・モデルにおいて斉時ポアソン過程と仮定されていた保険事故発生数について、いくつかの一般化事例を紹介する。

⁴⁰ 厳密には、この分布に従う確率変数 X が任意の大きな値をとれる、つまり、任意の $x \geq 0$ に対して、 $F(x) < 1$ となる必要がある。

⁴¹ 拡散近似およびその手法を用いた破産確率の評価方法の詳細については Grandell [23] の Appendix A.4 等を参照されたい。

非斉時ポアソン過程

すぐに考えられる一般化は、ポアソン過程の強度 $\lambda > 0$ を時間の関数とすることである。例えば、契約数が毎年増加する場合、強度 (= 単位時間あたりの平均事故発生数) もそれに比例して増加すると考えられるが、そうした性質をモデルに内包しようというものである。このモデルを構築するために、まず連続で非減少な関数 $A(t)$ ($A(0)=0$) を考える。次に、独立増分を持つ計数過程 $N(t)$ を考え、その増分 $N(t)-N(s)$ が $A(t)-A(s)$ を強度とするポアソン分布に従うとする。このような $N(t)$ は非斉時ポアソン過程 (inhomogeneous Poisson process) と呼ばれ、 $A(t)$ は強度測度 (intensity measure) または平均値関数 (mean value function) と呼ばれる。 $A(t)$ に対して

$$A(t) = \int_0^t \alpha(s) ds \quad (21)$$

という関係を満たす $\alpha(s)$ が存在する場合、 $\alpha(s)$ を強度関数 (intensity function) と呼ぶ⁴² ($\alpha(s)$ は s 時点の瞬間的な事故発生数を表していると解釈できる)。契約数の増加によって事故発生数が増加すると考えている場合、 $\alpha(s)$ が s 時点での契約数に比例していると考えられることができる。その場合には保険料も契約数の増加に比例していると考えるのが自然であろう。従って、 s 時点の瞬間的な純保険料は $\mu\alpha(s)$ と表されるので、付加保険料率を一定と仮定すると、 t 時点までの保険料 $I(t)$ は、

$$I(t) = \int_0^t (1+\rho)\mu\alpha(s) ds = (1+\rho)\mu A(t) \quad (22)$$

と表される。従って、式(4) (29ページ) は

$$U(t) = u + I(t) - S(t) = u + (1+\rho)\mu A(t) - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \quad (23)$$

と書けるが、これは $A^{-1}(t) = \sup\{s | A(s) \leq t\}$ を用いると、

$$\tilde{U}(t) \equiv U(A^{-1}(t)) = u + (1+\rho)\mu t - \sum_{k=1}^{\tilde{N}(t)} X_k \quad (24)$$

ただし、 $\tilde{N}(t)$ は強度 1 の斉時ポアソン過程⁴³

と表される。式(24)の右辺はクラメール・ルンドベルイ・モデルに帰着されるので、これを用いて破産確率等を計算すればよいことになる。 A^{-1} は operational

⁴² この強度関数は信用リスク・モデルなどで使われているハザード関数 (hazard function) のことである。信用リスク・モデルについては、木島 [1] 等を参照されたい。

⁴³ これを標準斉時ポアソン過程という。

time scale と呼ばれる。つまり、時間とともに保険料・保険事故とも増大していくと考える代わりに、単に時間の測定単位が変化したと考えるのである。

確率的変動をもつ強度

次に、強度 λ を確定的な関数によって変換するのではなく、確率的に変動させることを考える。例えば、事故の発生数については、年によってかなりのばらつきがある⁴⁴ことから、 λ を確率変数とすることが考えられるが、これを混合ポアソン過程 (mixed Poisson process) と呼ぶ。正式な定義は次の通りである。

定義 : (混合ポアソン過程)

L を正の値を取る確率変数 (つまり $P(L > 0) = 1$) とし、その分布関数を F とする。また、 $\tilde{N}(t)$ を L と独立な標準斉時ポアソン過程とする。この時、確率過程 $N = \tilde{N} \circ L \equiv (\tilde{N}(Lt))_t$ を混合ポアソン過程という。確率変数 L を構造変数 (structure variable) という。

この時、 $0 \leq s < t$ に対し増分 $N(t) - N(s)$ は

$$P(N(t) - N(s) = k) = \int_0^\infty \frac{\{L(t-s)\}^k}{k!} \exp\{-L(t-s)\} dF(L) \quad (25)$$

という確率分布に従う。混合ポアソン過程と斉時ポアソン過程を比較すると、平均が同じであれば分散は混合ポアソン過程の方が大きい。これが保険事故発生数のばらつきを表現していることになる (脚注44参照)。また、混合ポアソン過程は定常増分過程ではあるが、増分の独立性は成立しない。

混合ポアソン過程で最も有名なのは、 L の密度関数 f が

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \alpha^v x^{v-1} e^{-\alpha x} \quad (26)$$

ここで、 $\Gamma(v) = \int_0^\infty x^{v-1} e^{-x} dx$ (ガンマ関数)

となるガンマ分布を想定するモデルである⁴⁵。この場合、上記 N は負の二項過

⁴⁴ 斉時ポアソン過程においても、ある単位時間 (例えば一年) における事故発生数には、当然ながらばらつきが生じる。ただし、斉時ポアソン過程に従う場合、ポアソン分布の特性から、分散は平均 λ と一致することが分かっているが、ここでは観測されたデータから計算される分散が、 λ と比べてかなり大きい場合を考えている。

⁴⁵ このモデルは、Credit Suisse Financial Products 社が発表した信用リスク管理モデル CreditRisk⁺ の中で、デフォルト率にボラティリティーを持たせるために応用されているものでもある。詳細は、Credit Suisse Financial Products [12] を参照のこと。

程 (negative binomial process) またはポーヤ過程 (Pólya process) と呼ばれる。名称から想像がつくように、この場合 $N(t)$ は負の二項分布に従うことが分かる。

さらに一般化を進め、パラメータを確率変数ではなく、時間とともに変動する確率過程とすることが考えられる。これを二重確率ポアソン過程 (doubly stochastic Poisson process) という。

定義 : (二重確率ポアソン過程)

$\Lambda(t)$ をランダム測度⁴⁶とし、 $\tilde{N}(t)$ を $\Lambda(t)$ と独立な標準斉時ポアソン過程とする。この時、確率過程 $N = \tilde{N} \circ \Lambda \equiv \{\tilde{N}(\Lambda(t))\}_t$ を二重確率ポアソン過程、またはコックス過程 (Cox process) という。

ランダム測度 $\Lambda(t)$ がある正の値を取る確率過程 $\lambda(t)$ を用いて、

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds \quad (27)$$

と表せる場合、 $\lambda(t)$ を強度過程 (intensity process)⁴⁷ という。この時、 $0 \leq s < t$ とすると、増分 $N(t) - N(s)$ について

$$P(N(t) - N(s) = k) = E \left[\frac{1}{k!} \left\{ \int_s^t \lambda(u) du \right\}^k \exp \left\{ - \int_s^t \lambda(u) du \right\} \right] \quad (28)$$

が成立する。ここで、 $\lambda(t) = L$ (L は混合ポアソン過程の定義で用いた確率変数) とおけば、混合ポアソン過程となることから、混合ポアソン過程は、二重確率ポアソン過程の特別な場合であることが分かる。

混合ポアソン過程、二重確率ポアソン過程ともに、破産確率の導出は必ずしも容易でなく、ある程度限定された条件の下でしか求めることができない。

事故発生間隔の一般化

次に、発生間隔に関する一般化を考える。斉時ポアソン過程では、事故発生間隔は指数分布に従っていたが、これを一般の分布に拡張した確率過程を再生過程 (renewal process) という。定義は次の通りである。

⁴⁶ 確率過程 $\Lambda(t)$ が、確率 1 で $\Lambda(0)=0$ となり、任意の $t>0$ に対して、 $\Lambda(t)<\infty$ で、非減少なサンプルパスを持つ時、その確率過程をランダム測度 (random measure) という。 $\Lambda(t)$ が確率 1 で連続的な値を取る場合、diffuse という。

⁴⁷ 信用リスク・モデル等で用いられるハザード過程 (hazard process) のこと。

定義：(再生過程)

ある点過程⁴⁸ N において、その発生間隔 $(T_k)_{k \geq 1}$ が互いに独立で、 T_2, T_3, \dots が同じ分布 G に従う時、 N を再生過程と呼ぶ。 T_1 も G に従う場合、通常再生過程 (ordinary renewal process) という。

さらに、 G が有限の平均 $1/\lambda$ を持ち、 T_1 の分布 G_0 が G の integrated tail distribution である (式(10)参照。この時 $G_0(x) = \lambda \int_0^x \bar{G}(s) ds$ となる) 時、定常再生過程 (stationary renewal process) という。

再生過程も、混合ポアソン過程や二重確率ポアソン過程と同程度に一般化を進めたモデルではあるが、破産確率の導出については、再生過程の方が比較的容易に計算できることが知られている⁴⁹。

経済ファクターの導入

これまでの議論の中では、期待インフレ率を加味した現在価値の概念をはじめとする経済ファクターについて、扱ってこなかった。しかし、最近では保険モデルの中に金融モデルの要素が取り入れられることになり、マルチンゲール理論が本格的に利用されている。例えば、Delbaen and Haezendonck [14] は、無裁定市場のもとで、経済的ファクターを組み込めるようなフレームワークを構築している。この辺りから金融への融合が徐々に始まっている。

3.1.4 保険料計算原理

集会的危険論の基本的な考察から、純保険料だけを保険料とした場合、保険会社は必ず破産するということが分かる。それでは適正な保険料はどのように決められるのだろうか。これについては、保険料計算原理 (premium calculation principles) という考え方がある。

保険料計算原理は、ある単位時間の保険金総額を表す確率変数 S から単位時間保険料 c という実数への汎関数 H として定義される。つまり、 $c = H(S)$ となる。こうした汎関数 H にはいくつかの種類が提案されている。

最も単純なのは、 $c = E[S]$ とする純保険料原理 (net-premium principle) であ

⁴⁸ 点過程の厳密な定義は難解である。Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [16] 等を参照のこと。ここでは、時間とともにランダムにいろいろな事象が発生する過程を考え、そのうち事象が発生するという部分に着目した確率過程という程度に考えて差し支えない。

⁴⁹ 詳細は Embrechts, Frey and Furrer [15] 等を参照されたい。

る。ただし、上記の通り、この原理では保険事業そのものが成立しない。そこで純保険料をベースとして、そこに何らかのルールに基づいて付加保険料を加える原理がいくつか存在する。次の4つが代表例である。

$$\begin{aligned} \text{期待値原理 (expectation principle) :} & \quad c = E[S] + \delta E[S] \\ \text{分散原理 (variance principle) :} & \quad c = E[S] + \delta \text{Var}[S] \\ \text{標準偏差原理 (standard deviation principle) :} & \quad c = E[S] + \delta \sqrt{\text{Var}[S]} \\ \text{半分散原理 (semi-variance principle) :} & \quad c = E[S] + \delta E\left[\{(S - E[S])_+\}^2\right] \end{aligned}$$

一方、効用理論によって定義されている考え方もいくつかある。一般には、保険会社に対してある効用関数 $u(x)$ を想定して、その下で保険料と保険金支払が均衡する、つまり $u(x) = E[u(x + c - S)]$ が成立するという前提をおいて保険料計算原理を導くことになる。例えば、指数効用関数 $u(x) = (1 - \exp(-\delta x))/\delta$ を選んだ場合には、保険料計算原理は次のようになることが簡単に示される。

$$\text{指数原理 (exponential principle) :} \quad c = \frac{\log E[\exp(\delta S)]}{\delta}$$

また、バリュー・アット・リスク (VaR) と同様にパーセンタイル値に着目した次の原理も興味深い。

$$\text{分位原理 (quantile principle) :} \quad c = F^{-1}(1 - \delta)$$

ここで、 S は分布 F に従うとし、 $0 \leq \delta \leq 1$ 、 $F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbf{R} : F(x) \geq y\}$ (分位関数) である。例えば $\delta = 0.05$ とおけば、保険料は上位 5% の損失額と同等となる。

最後に、金融の価格理論との関連で研究者の間で注目を集めている考え方として、エッシャー原理を掲げておく。

$$\text{エッシャー原理 (Esscher principle) :} \quad c = \frac{E[X \exp(\delta X)]}{E[\exp(\delta X)]}$$

この原理は直観的には分かりにくいのが、Bühlmann [8] が均衡理論を用いて同原理を導いているので、簡単に紹介する。まず、セットアップのために次の記号を導入する。 n 人の経済主体及びある確率空間 (Ω, F, P) を考え、その確率空間において発生した事象 (ここでは保険事故のイメージ) $\omega \in \Omega$ によって経済主体 i が被る損失額を $X_i(\omega)$ とする。さらに、この経済主体間は保険契約を互いに交わすことができ、それにより、事象 ω の発生で経済主体 i が得られる

保険金額を $Y_i(\omega)$ とする⁵⁰。また、この時保険料は、ある確率変数 φ により、

$$\text{Price}[Y_i] \equiv \int_{\omega \in \Omega} Y_i(\omega) \varphi(\omega) dP(\omega) = E[Y_i \varphi] \quad (29)$$

で表されるとする。ここで、任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\sum_{i=1}^n Y_i(\omega) = 0$ が成立しているとき、 Y をリスク交換 (risk exchange) と呼ぶ。リスク交換が成立している時、全経済主体のトータルのリスク量は変わらない (保険リスクについて閉じている)。以下、リスク交換は常に成立していると仮定する。

この設定のもと、経済主体 i の効用を u_i とおいて、その期待値が保険リスクについて最大化される、つまり

$$\int_{\omega \in \Omega} u_i \left[-X_i(\omega) + Y_i(\omega) - \int_{\omega' \in \Omega} Y_i(\omega') \varphi(\omega') dP(\omega') \right] dP(\omega) \quad (30)$$

を最大化するような (φ, Y) の組を均衡と定義する。ここで、 u_i として上記の指数効用関数を選び、 $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ と置くと、いくつかの計算手順を踏むことにより、

$$\varphi(\omega) = \frac{e^{\delta Z(\omega)}}{E[e^{\delta Z}]} \quad (31)$$

となることが分かる。よって、あるリスク X について、その保険料は

$$\frac{E[Xe^{\delta Z}]}{E[e^{\delta Z}]} \quad (32)$$

で与えられる。ここで X と $Z - X$ が独立だと仮定すれば、(32)式は

$$\frac{E[Xe^{\delta Z}]}{E[e^{\delta Z}]} = \frac{E[Xe^{\delta X} e^{\delta(Z-X)}]}{E[e^{\delta X} e^{\delta(Z-X)}]} = \frac{E[Xe^{\delta X}] E[e^{\delta(Z-X)}]}{E[e^{\delta X}] E[e^{\delta(Z-X)}]} = \frac{E[Xe^{\delta X}]}{E[e^{\delta X}]} \quad (33)$$

となり、ここにエッシャー原理が導出される。

このエッシャー原理の解釈として、別の見方も存在する。それを説明するために、名前の由来にもなっているエッシャー変換 (Esscher transform) について述べる。

定義：(エッシャー変換)

確率測度 P とパラメータ h に対し、次のように定義される測度 Q を、パラメータ h を持つ P のエッシャー変換という。

$$dQ(x) = \frac{e^{hx}}{E[e^{hX}]} dP(x) \quad (34)$$

⁵⁰ 経済主体 i は、保険の出し手となることもできる。その場合、 $Y_i(\omega)$ は負の値となる。

この変換で求められた測度 Q の下で、保険金額 S の期待値を計算し保険料とする方法がエッシャー原理ということになる⁵¹。これは、リスク中立確率を求めてその下での期待値を価格とする金融派生商品の価格計算手法と同じであり、このためエッシャー原理は昨今注目を集めている。

3.2 金融工学の歴史的経緯

かたや金融の世界における確率過程の導入は、バシェリエ (Bachelier) が 1900 年に書いた論文にさかのぼる。ただし、昨今の金融工学において幅広く活用されているモデルは、ブラック - ショールズ・モデルに端を発する派生商品理論によるところが大きい。その内容については、様々な本に紹介されていることから、本節ではブラック - ショールズ以降の流れを簡単に記すに止める。

3.2.1 基本モデル (無裁定と完備)

保険理論同様、金融理論においても、原資産価格がどのように変動するかについてモデル化することが必要である。例えば、ブラック - ショールズ・モデル S_t では、原資産価格が幾何ブラウン運動、つまり

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (35)$$

ここで W_t は標準ブラウン運動

に従うと考えている。その他のモデルでも、必ずある確率微分方程式で書かれたモデルが起点となっている。相違点は主として、次の 2 点である。

1. 無裁定 (no-arbitrage): リスクを取ることなく超過収益は得られないという前提である。換言すれば、無裁定市場ではフリーランチはないということになる。無裁定市場を、市場が viable であるともいう。

厳密には、可予測⁵² (predictable) で自己充足的⁵³ (self-financing) な戦略 ϕ に従うポートフォリオの t 時点の価値 $V_t(\phi)$ ($0 \leq t \leq T$) が、初期値 $V_0(\phi) = 0$ かつ最終値 $V_T(\phi) \geq 0$ (但し $P(V_T(\phi) > 0) > 0$) を満たす場合⁵⁴、その

⁵¹ ただし、単に測度変換をして期待値をとる、というだけでは理念的な背景が見当たらない。上記均衡モデルの理由付けがあって意味付けを行うことができるわけである。

⁵² 可予測は previsible ともいわれる。数学的な定義は Lamberton and Lapeyre [26] 等を参照されたい。

⁵³ ポートフォリオを組み替える際に、資金の流出や流入がないこと。

⁵⁴ Harrison and Pliska [24] は、許容可能 (admissible) な戦略、すなわち可予測かつ自己充足的であり、ポートフォリオ価値が常にゼロ以上な戦略を考え、初期値ゼロの許容可能戦略において、最終価値の期待値が正となる場合を裁定取引としている。

戦略を裁定戦略といい、裁定戦略が存在しない市場を無裁定市場という。

2. 完備 (complete): 派生証券の価格理論では、ある資産の派生証券を、その原資産と無リスク資産を用いた自己充足的な戦略で複製することを試みることから始まる。自己充足的な戦略で構築されたポートフォリオの満期時点の価値を派生商品の価値と同じにできる時、その派生商品は複製可能 (replicable⁵⁵) であるという。任意の派生商品が複製可能である時、市場は完備であるという。

この2つに密接に関連するのが、マルチンゲール理論である。マルチンゲール理論は多くのテキストで紹介されていることから、ここでは省略する。無裁定・完備性とマルチンゲール理論は次のように関連付けられる⁵⁶。

定理： 市場が無裁定であることと、確率測度 P と同値⁵⁷な確率測度 P^* が存在して、無リスク資産で割り引いた資産価値 (= 相対価格) がマルチンゲールとなる⁵⁸ことは同値である。
 無裁定市場が完備であるためには、そのような確率測度 P^* が一意に定まることが必要十分である。

無裁定で完備な市場であれば、一意に定まる同値マルチンゲール測度 P^* を用いて派生商品の複製戦略を定めることができ、無裁定条件から、その複製のための初期コストがまさに派生商品の価格となる。

上記理論と相俟って、金融価格理論に重要な役割を果たすのが、確率解析、もしくは確率積分の理論である。これは確率過程の世界における微積分の役割を果たしている。この基礎理論は伊藤によって構築されており、その結果、ファイナンスの世界でも「伊藤の補題」や「伊藤公式」の名が広く知られる結果となった。

ブラック - ショールズによる幾何ブラウン運動のモデル化の場合、同値な確率測度 P^* として、原資産の相対価格が P^* -マルチンゲールとなるものを構築できることが分かる。マルチンゲール表現定理から、 P^* が一意に定められること

⁵⁵ Harrison and Pliska [24] は attainable (達成可能) という用語を用いている。

⁵⁶ これは、Harrison and Pliska [24] による離散時間での定理である。より一般化された設定の下では、上記定理は多少の修正が必要となる。

⁵⁷ 確率測度 P と Q が同値であるとは、 $P(A) > 0 \Leftrightarrow Q(A) > 0 (\forall A \in F)$ となることである。

⁵⁸ より一般化された設定の下では、ローカル・マルチンゲールとなる。

も分かるので、市場は完備である。金融工学のモデルの多くでは、同様の手順により価格ならびにヘッジ戦略を求める。

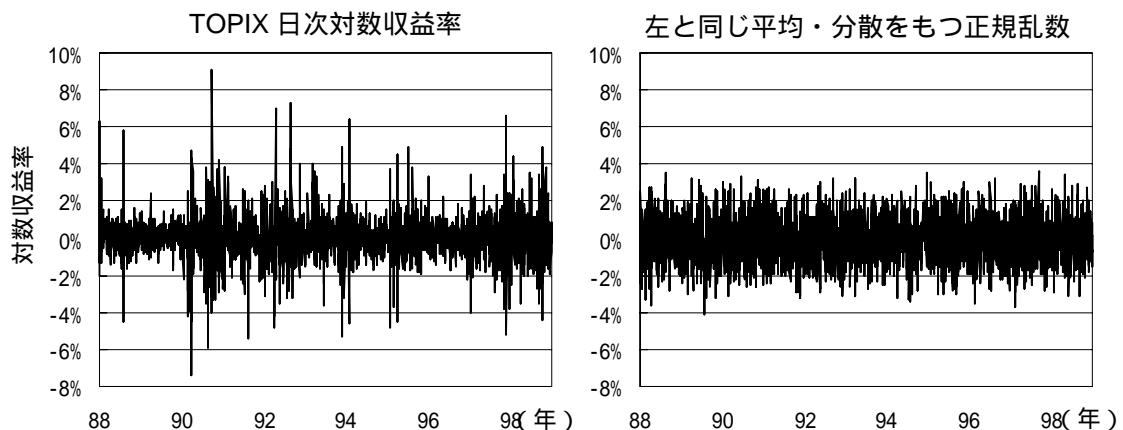
3.2.2 一般化：非完備な市場

この四半世紀の間、上記アプローチは理論的にも実務的にも素晴らしい成功を収めてきた。しかしながら、この理論は非常にデリケートな前提の上に成り立っていることを忘れてはならない。例えば、モデル化にあたり、取引コストや税など市場の摩擦は一切考慮されていないし、売買単位も無限分割可能であると仮定されている。また、ヘッジ戦略は市場に何らインパクトを与えないことが想定されている。

さらに、原資産価格そのものの推移についても、例えば、株価は幾何ブラウン運動に従うという前提を置いている。このモデルでは、株価の対数収益率が正規分布に従うはずであるが、現実のデータがそうでないことは数多くの実証研究により示されている。

簡単な例で見てみよう。【図表 3-1】の左側は、1988 年から 1998 年までの TOPIX の日次対数収益率データ、右側はそれと同じ平均・分散をパラメータとしてもつ互いに独立な正規乱数を表示している。統計的検定等を行わずとも、直感的に両者は違うものであると考えられよう。グラフから、TOPIX の対数収益率に関する特性として、時々大きなジャンプがあることや、分散にむらがある（言い換えれば、大きく変動している時期とあまり変動していない時期がある）ことなどが分かる。

【図表 3-1】(左) TOPIX の日次対数収益率、(右) 同じ平均・分散を持つ正規乱数



こうした特徴をモデルに加味するアプローチがいくつか提唱されている。前者の特質を考慮したモデルの例としては、一般にジャンプ拡散モデル (jump-diffusion model) と呼ばれるものがあり、後者を考慮したモデルの代表例が、確率ボラティリティーモデル (stochastic volatility model、SV model) である。これらのモデルの詳細は、多くの文献に研究成果として発表されているのでここでは省略する。

ただし、ここで一つ問題が生じる。こうしたより現実化されたモデルを原資産の振舞いに導入すると、市場が非完備となってしまふのである。非完備な場合、派生商品を完全に複製することはできないため、複製費用をもとに価格を決定することもできない。現時点では、それに対する決定的な解決策は存在しないものの、いくつか興味深いアイデアが出されている。

その中の一つが優複製⁵⁹ (superreplication) または優ヘッジ (superhedging) と呼ばれるものである。これは、満期時点で派生商品の価値を少なくとも下回らない戦略 (これを優複製戦略または優ヘッジ戦略という) のうち、初期コストが最小となる戦略を考え、その戦略の価値をもって派生商品の価格とするという考え方である。一見すると魅力的な概念だが、残念ながら必ずしも実用的とはいえない面もある。例えば、ある非完備な市場の下で、コール・オプションの優複製価値を求めると、それは現時点の原資産と同じになってしまうことが分かる。つまり、コール・オプションをヘッジするには、原資産を持たなければならないということになってしまう。しかしながら、優複製戦略の条件を多少緩和させた概念を用いた興味深い論文 (Föllmer and Leukert [20] など) が発表されており、その意味では十分考察に値すると考えられる。

それ以外のアイデアとしては、複製ポートフォリオと派生商品の差から生じるリスクを最小化しようとする考え方がある。これはリスク最小化アプローチなどと呼ばれる。こうした戦略が存在するかどうかといった議論については、Schweizer [37] 等に詳しい。

3.3 融合の流れ

以上見てきたように、これまでの保険数理と金融工学は、使っているツールこそ確率過程という共通のものであるが、アプローチは大きく異なっている。

⁵⁹ 本によっては (例えば D. Duffie 「資産価格の理論」など) 「超複製」と訳されている。

一言で言えば、金融（派生商品）理論においては、派生商品を完全にヘッジするために必要な複製費用として価格を算出していたのに対し、保険数理ではリスクテイクを所与のものとし、どのような初期資本（さらには責任準備金や支払備金）・破産確率を選択するか、ということを考え、その中で望ましい保険料計算原理はどれであるかということ考察している。

しかしながら、昨今の融合の流れに合わせるかのように、両者統合の動きがいくつか見られる。まず、保険の世界であるが、無裁定条件を仮定し、マルチンゲール理論を用いたプライシング概念がいくつか登場している（Delbaen and Haezendonck [14]、Sondermann [41]）。

ここでは、Delbaen and Haezendonck [14] について簡単に紹介する。彼らは満期 T を持つある保険契約の集まりを考え、その集まりでの t 時点までの発生保険金額 X_t は複合ポアソン過程に従うと仮定した。さらに、 t 時点において残存しているリスク $(X_T - X_t)$ をある保険料 p_t で常に売却可能であるという仮定を置いた。この仮定から、保険料 p_t は可予測過程となる。以上から、 t 時点でのこのポートフォリオの（損失という観点で見た）価値は $S_t = p_t + X_t$ となる。このポートフォリオはいつでも売却可能であることから、無裁定を意味しており、Harrison and Pliska [24] によって、 S_t をマルチンゲールとするような測度 Q が存在するはずである。彼らはこの測度の一つを導出し、その測度の下で保険金額過程は複合ポアソン過程に従うことを示した。この市場は完備ではない（複合ポアソンは典型的なジャンプ過程）ので、同値マルチンゲール測度は無限に存在する。彼らは、マルチンゲール測度 Q を導くために用いる関数の選択に応じて、複数の保険料計算原理が導出されることを示した。

その後、保険デリバティブの登場により、保険商品の金融工学的アプローチはより多く見られるようになってきている。例えば、Meister [30] は、非完備な保険デリバティブの価格を、指数効用関数と市場均衡理論を用いて導き（その結果、エッシャー原理が導出される）、さらにそのヘッジについてリスク最小化戦略を用いた手法を提言している。ただし、保険デリバティブそのものの取引量が少ないことから、データを用いた実証分析はうまくいかないというのが実情のようである。

逆に、金融分野においては、保険数理を応用してプライシング理論を展開した例は必ずしも多くない。ただし、上記のような非完備市場での価格付けを考える際には、もし優複製という戦略を取らなければリスクを甘受することとな

り、その意味で保険価格理論と同様になる。従って、何らかの金融資産価格原理なるものを仮定する必要がある、保険数理のコンセプトを応用できる可能性がある。

中でも、エッシャー原理は、上述したような特徴から、リスク中立確率による期待値換算を多用する金融理論に当てはまりやすい。例えば、Gerber and Shiu [22] は、原資産が様々な確率過程（ポアソン過程、ガンマ過程等）に従う時に、そのオプション価格がどのように振る舞うかについてエッシャー変換を用いて研究している。Bühlmann, Delbaen, Embrechts and Shiryaev [9] は、無裁定ではあるが非完備という市場において、派生商品のプライシングというエリアにおいて、（金融と保険）両分野の間に存在している方法論的ギャップの橋渡し役として、（条件付）エッシャー変換を用いている。

このほか、金融のリスク管理については、特に信用リスクの計量分析において保険数理の成果を適用するケースが散見される。Credit Suisse Financial Products 社が 1997 年に発表した信用リスク管理ツール CreditRisk⁺や、スイス銀行(SBC、現 UBS)の信用リスク対応会計 ACRA(Actuarial Credit Risk Accounting)などが有名である。

4 Extreme Value Theory (EVT)

本章では、極値論 (Extreme Value Theory、以下 EVT) について解説する。はじめに、EVT の基本的な理論について説明した後、理論をより具体的に理解するために簡単な数値例を示し、最後に応用研究例を紹介することとする⁶⁰。この理論は今後金融・保険双方において重要な役割を担うと期待されており⁶¹、

⁶⁰ 本稿の解説に当たっては、膨大な EVT 理論のうちどの部分を紹介するかについて、Embrechts, Resnick and Samorodnitsky [18] を参考にした。

なお、EVT についてより詳しく学ぶには、Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [16] が金融・保険への適用を意識した詳細なテキストとして推薦できる。

⁶¹ 例えば、1995 年に開催された Research Conference on Risk Measurement and Systemic Risk の Luncheon Address において、グリーンSPAN F R B 議長は "Work that characterizes the statistical distribution of extreme events would be useful" と述べている。

実際に EVT を応用した論文やテキストなどが昨今いくつか見られる。

4.1 EVT とは

EVT を簡単に定義すれば、Extreme という名前が示す通り、極値（最大値、最小値など）がどのような確率的振舞いをするのかを研究対象とする理論ということとなろう。これは決して新しい理論ではなく、古くは水文学や気候学などを中心に発達してきたものである。

4.2 EVT の基礎理論

EVT で着目するのは極端な値、すなわち最大値や最小値、上位 $a\%$ といった値について確率的にどのようなことが言えるかということである。本節では、次節での応用の準備として、最大値およびある閾値を超過したデータに関する理論について説明する。

4.2.1 最大値の確率的性質

まず記号を定義する。分析するデータは互いに独立で同一の分布関数 F に従う⁶²確率変数であると仮定し、そのうち n 個の観測値を

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

と記す。また、最大値を

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (36)$$

と定義する。ここで考えたいのは、最大値の確率分布、すなわち最大値がある値 x を超えない確率であるが、この計算は簡単であり、

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \{F(x)\}^n \quad (37)$$

となる。ここで、分布の右端 (right endpoint) を

$$x_F \equiv \sup\{x \in \mathbf{R} : F(x) < 1\} \quad (38)$$

と定義すると (例: $[0, 1]$ の一様分布では $x_F = 1$ 、正規分布では $x_F = \infty$)

$$P(M_n \leq x) \rightarrow \begin{cases} 0 & x < x_F \\ 1 & x \geq x_F \end{cases} \quad n \rightarrow \infty \quad (39)$$

となるので、 M_n の単調増加性から、

$$M_n \rightarrow x_F \text{ a.s.}, \quad n \rightarrow \infty \quad (40)$$

⁶² 以下、このことを iid (independent and identically distributed) と記す。

となる。しかしこれはほとんど自明の結果である。上式を正規分布で考えれば、要は試行回数を増やせば最大値は無限に大きくなるといっているに過ぎない。そこで、次に、

$$\text{最大値から適当な値を引いたり割ったりしたもの、つまり} \\ (M_n - d_n)/c_n \quad (41)$$

が、ある一定値に収束したり、ある分布に近づいたりしないかということを考える。

これは、確率・統計の世界で古くから行われてきた和の振舞いを理解するために用いたアプローチと同じである。やや余談になるが、和に対するアプローチを再認識することが、何故従来確率・統計手法を単純に EVT に当てはめられないのかを理解する鍵となると考えられるので、次に簡単に説明する。

4.2.2 和の確率的性質

我々が通常扱う確率・統計のツールとしては、平均、分散などを思い付くが、これらは、観測値の和を適当に正規化したものと考えることができる。ここで、 n 個の観測値の和を $S_n (= X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ とする。平均は S_n をデータ数 n で割ったものであるし、分散は観測値の 2 乗の和をデータ数で割ったものから平均の 2 乗を引いたものである。

このように正規化された統計量については大数の法則が成立する。大数の法則は、 S_n を n で割った値が n を無限に大きくしていくとある値 ($= X_n$ の平均値) に収束していく⁶³ことを示している。なお、これを一般化した法則があるので紹介しておく。

定理 : (Marcinkiewicz - Zygmund の大数の強法則)

$p \in (0, 2)$ とする。ある定数 $a \in \mathbf{R}$ が存在して、

$$\frac{S_n - an}{n^{1/p}} \rightarrow 0, \text{ a.s. } n \rightarrow \infty \quad (42)$$

となるためには $E[|X|^p] < \infty$ が必要十分である。その場合、 a としては、

$$a = \begin{cases} 0 & p \in (0, 1) \text{ の時} \\ \mu & p \in [1, 2) \text{ の時} \end{cases} \quad (43)$$

と選ぶことができる。ここで、 $\mu = E[X]$ である。

⁶³ この収束が確率収束の場合を大数の弱法則、概収束の場合を大数の強法則と呼ぶ。

ここで $p=1$ の場合が、我々が一般的に用いる大数の強法則である。(42)式は、まさに和から適当な値(上記では an)を引いたり、適当な値(上記では $n^{1/p}$)で割ったりすることによって正規化された値が、ある一定値に収束している例である。因みに $p=2$ の場合は、(42)式は成立せず、代わりに中心極限定理が対応する。

中心極限定理は、どんな分布であっても $(S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ は標準正規分布に近づくことと理解されている場合が多いが、この記述は分散が存在する場合のみ当てはまるものである。初等的確率論で扱う分布には分散が存在しているケースが殆どであり問題は生じないが、金融や保険のデータに見られるように観測データがファット・テールの場合には、分散の存在を前提とできるかどうか分からない。そこで、上記の中心極限定理をより一般的な形に拡張することが必要となるが、その場合、極限的な分布は下に述べる安定分布となる。

定義:(安定分布)

分布関数 F に従う確率変数 X とその iid な n 個の和 S_n について、

$$S_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + \gamma_n \quad (44)$$

となる⁶⁴ような定数 α, γ_n が存在する時、 F を安定分布 (stable distribution) といい、 G_α と記す。この時の α を特性指数 (characteristic exponent) という。

(44)式における X の係数をより一般的に c_n と置いても、結局は、 $n^{1/\alpha}$ に帰着することが分かる。また α は $(0, 2]$ に属する。安定分布の代表的な例としては正規分布 ($\alpha=2$ の場合)、コーシー分布 ($\alpha=1$ の場合) がある。任意の α に対する安定分布の特性関数はよく知られているが、密度関数は級数展開等の複雑な形でしか得られない⁶⁵。

次に、一般の分布に従う iid 確率変数の和がどのように安定分布に収斂していくかを表現するために、吸引域という定義を導入する。

定義:(吸引域)

分布関数 F に従う確率変数 X の iid な n 個の和 S_n に対し、

⁶⁴ $\stackrel{d}{=}$ は分布として等しいことを示す。

⁶⁵ これら安定分布に関する証明・詳細については例えば Feller [19] を参照されたい。

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} G_\alpha, \quad n \rightarrow \infty \quad (45)$$

となる⁶⁶ような定数 $a_n \in \mathbf{R}$ 、 $b_n > 0$ が存在する時、 F は G_α の吸引域 (domain of attraction) に属するといひ、 $F \in DA(G_\alpha)$ と記す。

$\alpha < 2$ の場合、 $F \in DA(G_\alpha)$ には分散が存在しない ($E[X^2] = \infty$) ことが分かる。ただし、 $\alpha = 2$ の場合、 $F \in DA(G_2)$ に分散が存在するとは限らない。

以上より、次の定理が成立する。

定理： $F \in DA(G_\alpha)$ とする。 $E[X^2] = \sigma < \infty$ の時は、

$$\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n\sigma}} \xrightarrow{d} \Phi, \quad n \rightarrow \infty \quad (46)$$

(ここで Φ は標準正規分布の分布関数) となる。 $E[X^2] = \infty$ の時は、ある適当な $a_n \in \mathbf{R}$ と緩慢変動関数⁶⁷ $L_4(x)$ が存在して、次式が成立する⁶⁸。

$$\frac{S_n - a_n}{n^{1/\alpha} L_4(n)} \xrightarrow{d} G_\alpha, \quad n \rightarrow \infty \quad (47)$$

(46)式および(47)式は、適当に正規化した和がある分布に収斂していくことを示している。しかも収斂先の分布は必ず安定分布である。

和の挙動は平均的な事象、もしくは平均からあまり外れていない事象を記述するのに適している。しかし、平均から大きく乖離したものをわざわざ和の挙動の理論を経由して類推するのは合理的であろうか。むしろ、もし可能であれば上記のような理論を乖離した値についても構築し、その理論に基づいて推測した方がより精度が高まると考えるのが自然な発想であろう。これが EVT の原点である。

4.2.3 最大値の確率的性質 (再び)

Fisher-Tippett の定理

話を最大値の確率的性質に戻す。最大値について大数の強法則と同様の結果

⁶⁶ \xrightarrow{d} は分布への収束を表す。

⁶⁷ 関数 $f(x)$ が緩慢変動 (slowly varying) するとは、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(tx)/f(x) = 1$ が任意の $t > 0$ に対して成立することである。後に述べる正則変動の $\alpha = 0$ に相当する。

⁶⁸ a_n の具体的形状については Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [16] 等を参照のこと。

を得るのは難しい (Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [16] の 3.5 節を参照) が、中心極限定理については類似した次の定理が知られている。これが最大値に関する EVT の基本定理である。証明は、Resnick [32] 等に掲載されている。

定理 : (Fisher-Tippett の定理)

式(36)で定義される M_n について、ある確率分布 H と、定数 $c_n > 0$ と $d_n \in \mathbf{R}$ が存在して、

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H, \quad n \rightarrow \infty \quad (48)$$

となるならば、確率分布 H は次の 3 つの確率分布のどれかと同じ型⁶⁹である。これらの分布は極値分布 (extreme value distributions) と呼ばれる。

$$\text{フレシェ (Fréchet) 分布 } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad (49)$$

$$\text{ワイブル (Weibull) 分布 } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad (50)$$

$$\text{ゲンベル}^{70} \text{ (Gumbel) 分布 } \Lambda(x) = \exp\{-\exp(-x)\}, \quad x \in \mathbf{R} \quad (51)$$

ここで、 d_n を中心化定数 (centering constants)、 c_n を標準化定数 (normalizing constant) と呼び⁷¹、二つを合わせて正規化定数 (norming constants) という。

上記 3 つと同じ型の確率分布は、次のような 3 パラメータを持った一つの式で表現できる。これを一般極値分布 (generalized extreme value distribution、以下 GEV) と呼び、 $H_{\xi;\mu,\sigma}$ と記す。 μ 、 σ を特に考えない場合は、 H_ξ と記す。

$$H_{\xi;\mu,\sigma}(x) = \exp\left\{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)_+^{-1/\xi}\right\}, \quad x \in \mathbf{R} \quad (52)$$

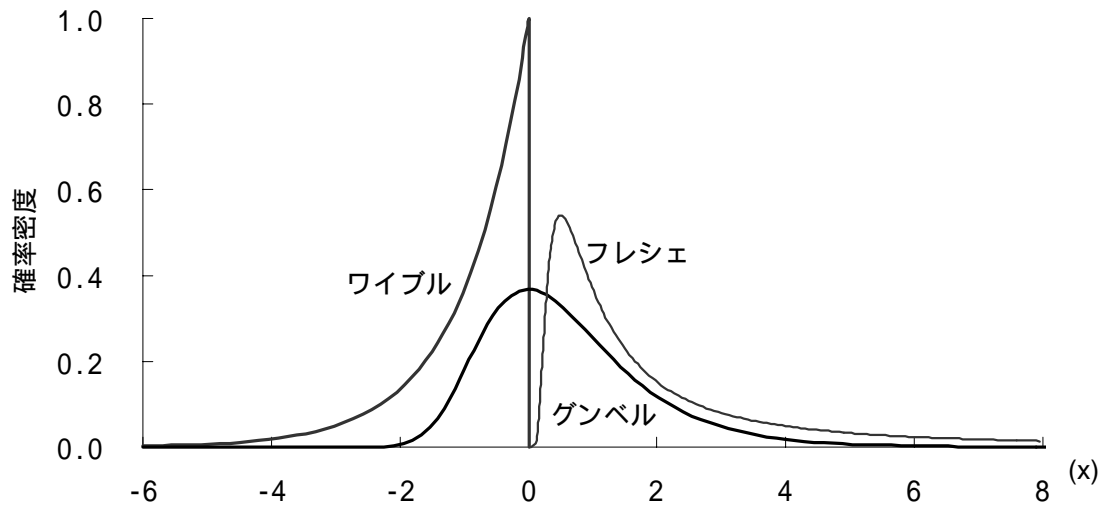
μ 、 σ もそれぞれ中心化定数、標準化定数と呼ばれる。 ξ を形状パラメータ (shape parameter) という。 $\xi = 0$ の時は、上記式で $\xi \rightarrow 0$ とすればよく、その結果、

$$H_{0;\mu,\sigma}(x) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right\}, \quad x \in \mathbf{R} \quad (53)$$

⁶⁹ ここで、「確率分布 F と G が同じ型である」とは、適当なパラメータ $a > 0$ と $b \in \mathbf{R}$ が存在して、任意の x について $G(x) = F\{(x-b)/a\}$ が成立することである。

⁷⁰ 「統計学辞典」等では「ゲンベル分布」と記されている。

⁷¹ それぞれ位置パラメータ (location parameter)、尺度パラメータ (scale parameter) と呼ばれる。

【図表 4-1】極値分布の密度関数例 ($\alpha = 1$ の場合)

となる。 $\mu = 0$ 、 $\sigma = 1$ を代入すると、

$\xi > 0$ の時、 $\alpha = 1/\xi$ とおけば、 Φ_α に、

$\xi = 0$ の時は Λ に、

$\xi < 0$ の時、 $\alpha = -1/\xi$ とおけば、 Ψ_α に、

それぞれ対応していることが分かる。【図表 4-1】に3つの極値分布の密度関数を図示した。

図を見ると分かる通り、3つの分布は、GEV という共通型で表現できるものの、形状がかなり異なっており、またその特性もかなり異なる。

一般に知られている殆ど全ての分布、特に連続的な分布はほぼ間違いなく、3つの極値分布型のどれかに収斂し⁷²、さらに、一つの分布について対応する極値分布型は一つである（正規化定数を変えても、極値分布型そのものは変わらない）。

ワイブル分布に収斂するものは、右端 x_F (式(38)参照) が有限の値を取る分布であり、フレシエ分布は逆に右端が緩やかに減少するファット・テールな分布の最大値の収斂先である。

ある極値分布 H に収斂する分布の集合を最大値吸引域 (maximum domain of attraction) といい、 $F \in MDA(H)$ と記す。【図表 4-2】に、それぞれの極値分布の最大値吸引域にどのような分布が含まれているかを例示した。この中で興味

⁷² ポアソン分布・幾何分布等の離散分布は、極値分布を持たない例外的な分布である。

深いのは対数正規分布のポジションである。一般に、同分布はファット・テールの代表例として考えられており（実際、積率母関数は存在しない）、保険の損失額分布としても用いられている。しかし、この表から、フレシェ分布の最大値吸引域に属する分布ほどはファット・テールではないことが分かる。

【図表 4-2】極値分布の最大値吸引域に属する分布

フレシェ分布 Φ_α	グンベル分布 Λ	ワイブル分布 Ψ_α
コーシー分布 パレート分布	正規分布 対数正規分布 指数分布	一様分布 ベータ分布

最大値吸引域と正規化定数

一般に、ある分布がどの最大値吸引域に属し、またその正規化定数をどのように選べばよいかについても研究が進んでいる。まず、EVT 全体の理論構成において重要な役割を果たしている、次の定義を導入する。

定義：(正則変動)

$(0, \infty)$ で定義された正の(ルベグ可測な)関数 f が ∞ で正則変動(regularly varying) するとは、任意の $t > 0$ に対し、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = t^\alpha \tag{54}$$

となる α が存在することである。この時、 $f \in \mathbf{R}_\alpha$ 、 $f \in \mathbf{RV}_\alpha$ 等と記す。

$\alpha = 0$ の時は、脚注67(48ページ)の緩慢変動に相当する。上記定義は、右辺の t^α という形状が恣意性を帯びているように思われるが、実は、左辺の極限が存在してそれが t の関数で書ける場合は、その関数は必ず t^α となる。

さて、正則変動を利用すると、最大値吸引域の特性が上手く表現でき、そこから正規化定数を導くことが可能となる。一番直感的に分かりやすいのは、ワイブル分布に収束する場合 ($F \in \mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$ の時) であろう。

定理：($F \in \mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$ の性質と正規化定数)

$F \in \mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$ となるには、 $x_F < \infty$ かつ $\bar{F}(x_F - 1/x) \in \mathbf{R}_{-\alpha}$ となることが必要十分である。正規化定数は、

$$d_n = x_F$$

$$c_n = x_F - F^{-1}(1-1/n)$$

とすればよい。ここで $F^{-1}(t)$ は分位関数⁷³ (Quantile function) つまり

$$F^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbf{R} : F(x) \geq t\}, \quad 0 < t < 1 \quad (55)$$

である。

例えば、 F が $[0,1]$ の一様分布の時、 $x_F = 1 < \infty$ であり、 $t > 0$ に対し、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x_F - 1/(tx))}{\bar{F}(x_F - 1/x)} = \frac{1/(tx)}{1/x} = t^{-1}$$

となるので、 $F \in MDA(\Psi_1)$ となる。

上記の正規化定数はどう捉えればよいか。ワイブル分布の形状 (【図表 4-1】参照) を勘案すると、正規化された最大値は負の値しかとりえない。従って、中心化定数 d_n として、最大値が決して超えることのできない値である x_F を用いるのは妥当であろう。

標準化定数 c_n はどう考えればよいだろうか。標準化定数は、データの散らばり具合を揃える効果があることを念頭に置いて考えてみる。一様分布のように右端が有限な分布の場合、データ数が多くなるにつれて、最大値は収斂する、つまり散らばり具合は小さくなると考えられる。その意味では、標準化定数は n が増大するにつれて小さくなるべきであるが、上記 c_n はそれを満たしている。

さらに具体的に、 c_n の式の意味を考えてみる。式のうち、 $F^{-1}(1-1/n)$ の部分は、 n が 100 ならば 99 パーセンタイルを、1,000 ならば 99.9 パーセンタイルを表しており、データ数に応じた大雑把な最大値の期待値を示していると考えられる。この値は n が増大するにつれて x_F に近づくことが期待される。つまり c_n は、最大値と x_F の相対的な近さを表していると考えられることから、その値で割るということは、距離の標準化を行っていると同理解できよう。

フレシェ分布に収束する場合は次の通りである。

定理 : ($F \in MDA(\Phi_\alpha)$ の性質と正規化定数)

$F \in MDA(\Phi_\alpha)$ となるには、 $\bar{F}(x) \in \mathbf{R}_{-\alpha}$ となることが必要十分である。

正規化定数は、

$$d_n = 0$$

$$c_n = F^{-1}(1-1/n)$$

⁷³ 分位関数は、いわゆるパーセンタイルであり、 $t=0.99$ ならば 99 パーセンタイルが得られる。

とすればよい。

例えば、パレート分布 $F(x) = 1 - (a/x)^b$ (ただし $a > 0$, $b > 0$) に対し、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{a/(tx)\}^b}{(a/x)^b} = t^{-b}$$

となるから $F \in MDA(\Phi_b)$ となる。

正規化定数のうち、 c_n はワイブル分布の時と同様、データ数に応じた大雑把な最大値の期待値を示していると考えられるので、その大きさによって標準化しているという感覚は理解できよう。 c_n が値とともに増大するという事は、データが多くなるにつれて最大値の散らばり具合が増大することを意味しているが、これもファット・テールの特徴を捉えているといえよう。一方、 $d_n = 0$ に対する直感的理解を求めるのは難しい。

ゲンベル分布に収束する場合 ($F \in MDA(\Lambda)$ の時) は複雑である。

定理 : ($F \in MDA(\Lambda)$ の性質と正規化定数)

$F \in MDA(\Lambda)$ となるには、ある $z < x_F$ が存在して、任意の $z < x < x_F$ に対し、

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\} \quad (56)$$

と書けることが必要十分である。ここで、 $c(x)$ と $g(x)$ は可測な関数で、各々

$$\lim_{x \rightarrow x_F} c(x) = c_1 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_F} g(x) = 1$$

を満たし、 $a(x)$ は絶対連続な正の関数で

$$\lim_{x \rightarrow x_F} a'(x) = 0$$

となる。正規化定数は、

$$d_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$$

$$c_n = a(d_n)$$

とすればよい。

(56)式における c 、 g 、 a の選び方は一意ではない。なお、 a については次のような関数を選ぶことが可能であるということが分かっている。

$$a(x) = \int_x^{x_F} \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(x)} dt, \quad x < x_F \quad (57)$$

(57)式は後述する平均超過関数に他ならない。

以下、実際の最大値がどのような分布となるか、正規化定数はどのような値を取るか、どの程度の速さで実際の最大値分布に収斂していくか等について、具体的なイメージを掴むため、元の分布 F が標準正規分布の場合を例にとって見ることにする。

最大値吸引域と正規化定数：正規分布の場合

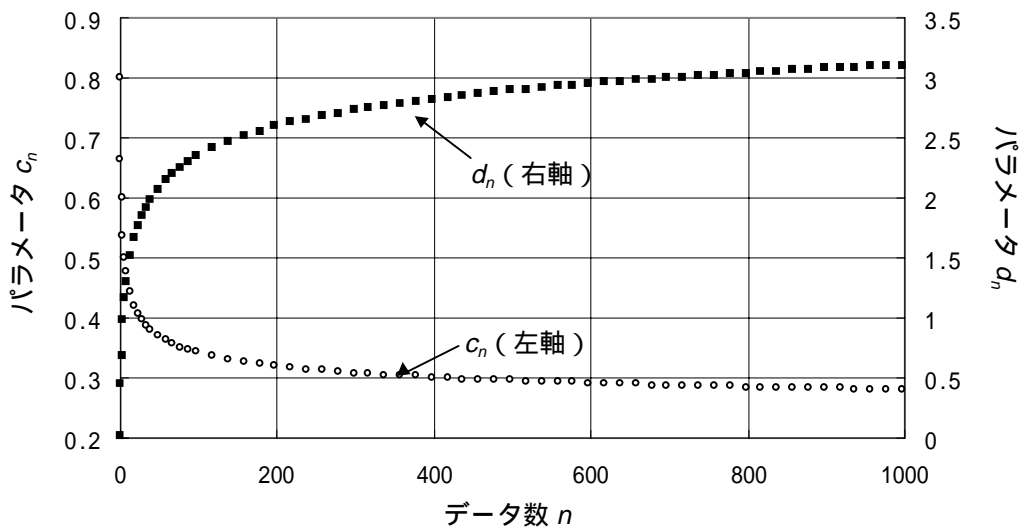
まず、正規化定数がどのように推移するかを見る。正規分布の場合、分位関数を解析的に求めることは出来ないため、 d_n を求めるには何らかの近似解を用いるか、ニュートン法等の数値計算法を用いることになる。ただし、最近はスプレッド・シートの関数等を用いれば容易に計算することができる。

一方、 c_n を求めるには、 $a(x)$ を計算する必要があるが、正規分布の場合、上記(57)式は簡単な計算により

$$a(x) = \int_x^\infty \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty \exp(-k^2/2) dk}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-k^2/2) dk} dt = -x + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} \quad (58)$$

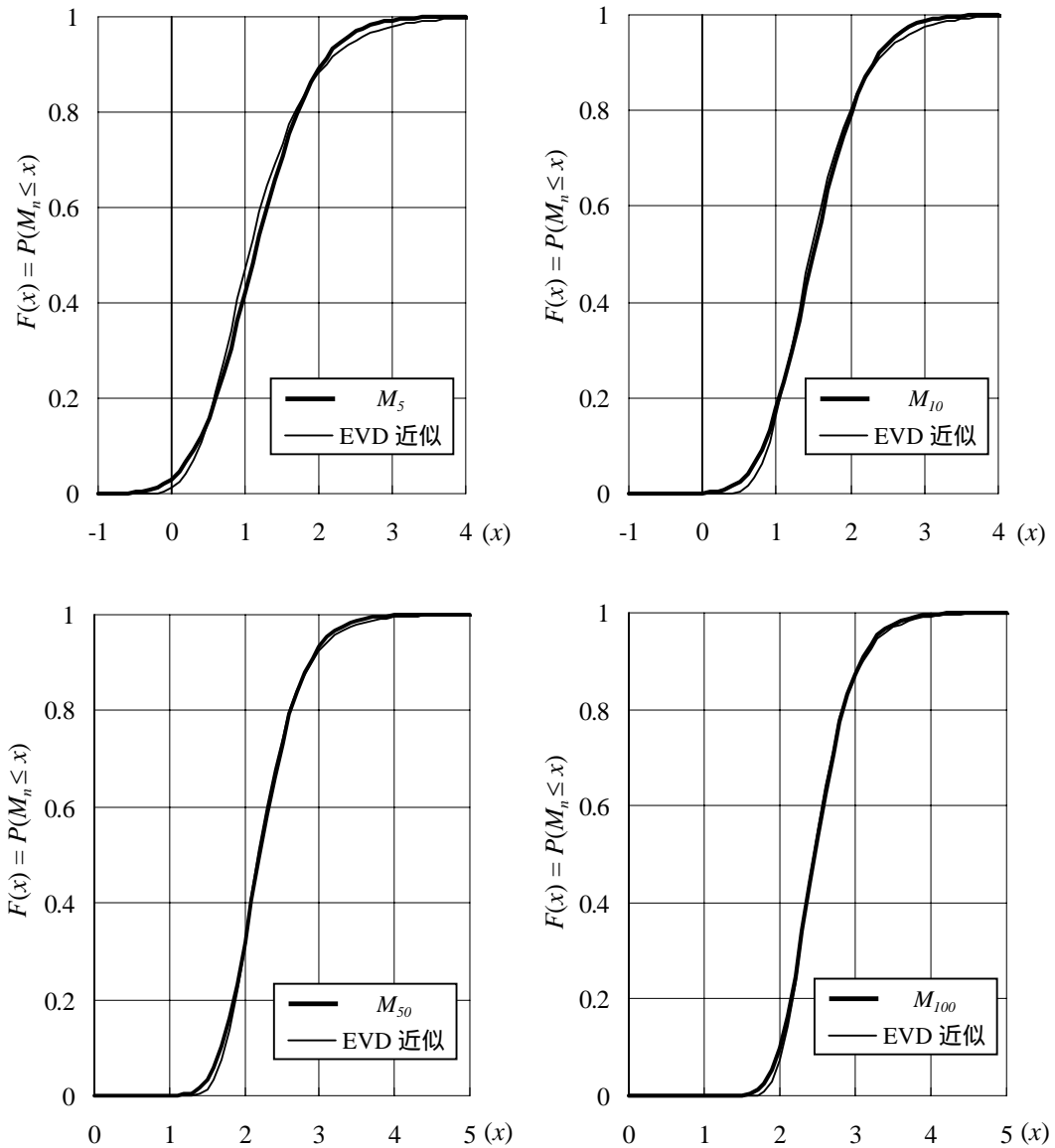
となる（ここで、 φ は標準正規分布の密度関数、 Φ は分布関数を表す）よって、 d_n が求めれば、 c_n も容易に求まる。このようにして計算された c_n と d_n を【図表 4-3】に示した。グラフを見ると、 c_n は僅かずつであるが減少している。つまり正規分布の最大値は、データが増大するにつれ、僅かずつ収斂していく（散らばり具合が減少していく）ことが分かる。

【図表 4-3】標準正規分布の M_n に関する n と正規化定数の関係



4 Extreme Value Theory (EVT)

【図表 4-4】 M_n の分布関数と極値分布による近似分布関数の比較
 (標準正規分布、左上: $n=5$ 、右上: $n=10$ 、左下: $n=50$ 、右下: $n=100$)



次に、これらの正規化定数を用いて、正規分布の最大値がどのように極値分布（この場合はゲンベル分布）に収斂していくかを見る。最大値の推移がよく分かるように、【図表 4-4】が、 M_n の分布と $c_n \Lambda + d_n$ とを比較したものである。

【図表 4-4】から、極値分布による近似分布関数（細い実線で表示）は、かなり当てはまりがよいことが分かる。特に、 $n=100$ のグラフはほぼ一致している。また、 n が増加するにつれてグラフの傾斜が急になっているが、これは先程標準化定数のグラフのところでも述べた傾向、すなわちデータ数の増大とともに、最大値の散らばり具合が僅かずつ収斂する傾向を示している。

4.2.4 超過データの確率的性質

最大値と同様に重要な分析対象として、ある閾値 u を超過したデータの確率的振舞いがある。例えば、ある水準を超過するような損失額はどのような確率分布に従っているのか、ある水準を超えて発生する損失額の平均値はいくらか、といった問題である。

超過データを数学的に扱うために、次の定義を導入する。

定義：(超過分布関数、平均超過関数)

右端(式(38)参照) x_F を持つ分布 F に従う確率変数 X を考える。

ある $u < x_F$ に対し、

$$F_u(x) \equiv P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad u \leq x \leq x_F \quad (59)$$

を閾値 u に対する X の超過分布関数 (excess distribution function) という。また、

$$e(u) = E(X - u | X > u) \quad (60)$$

を平均超過関数 (mean excess function) という。

F_u は excess-life または残余寿命 (residual lifetime) 分布関数とも呼ばれる。保険の世界では超過損害額 (excess-of-loss) 分布関数ともいわれる。

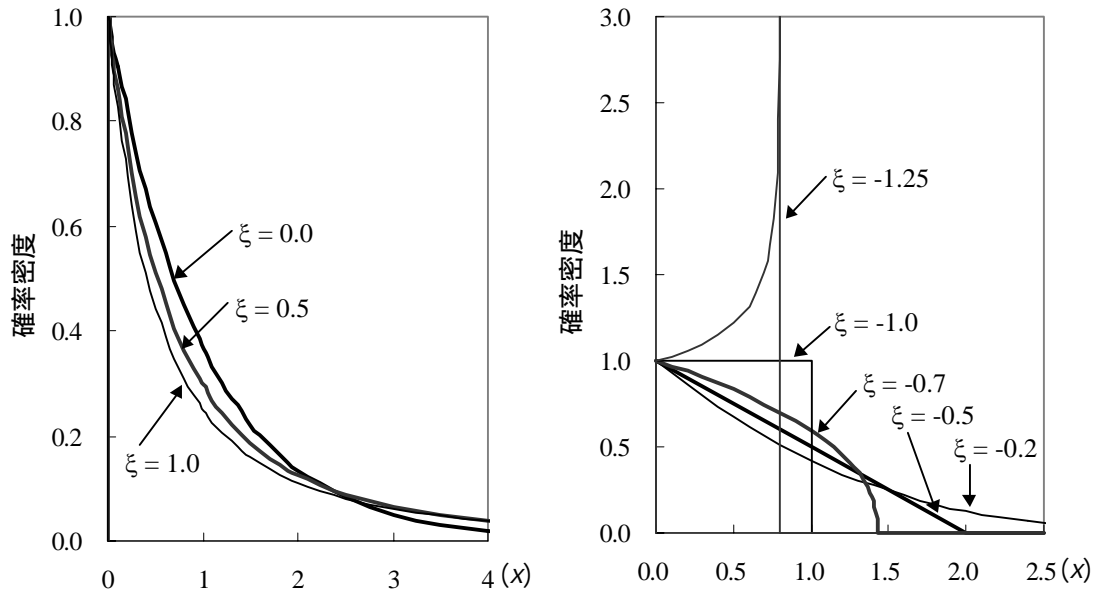
データ分析に際して平均超過関数を用いることが多い。これについては、次の式を理解していると便利である。

$$e(u) = \frac{1}{F(u)} \int_u^{x_F} (x-u) dF(x) = \frac{1}{F(u)} \int_u^{x_F} \bar{F}(x) dx \quad (61)$$

この式は、(57)式と全く同じである。例えば、 X が指数分布 ($\bar{F}(x) = \exp(-\lambda x)$) に従う場合には、 $e(u) = 1/\lambda$ となる。これは、ある u を超過したという条件下での超過幅の期待値が、 X の期待値に一致することを示している。これは指数分布の無記憶性という性質による。

一方、最終的に観察したいのは F_u である。これがどのような性質を有するかを調べるために、 u を右端 x_F に近づけた場合、 F_u がどのような分布に収斂していくかを見る。その結果は、後述する Pickands - Balkema - de Haan の定理によって、一般パレート分布 (generalized Pareto distribution、以下 GPD) に近づいていくことが示される。定理を述べる前に GPD について説明する。GPD の分布関数 $G_{\xi;\beta}(x)$ は次のように表される。

【図表 4-5】GPD の確率密度関数 ($\beta = 1$ 、左： $\xi \geq 0$ 、右： $\xi < 0$)



$$G_{\xi;\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \text{の時} \\ 1 - \exp(-x/\beta) & \xi = 0 \text{の時} \end{cases} \quad (62)$$

ここで、 $\beta > 0$ であり、分布関数の定義域は、 $\xi \geq 0$ の時 $x \geq 0$ 、 $\xi < 0$ の時 $0 \leq x \leq -1/\xi$ である。GPD も GEV 同様、中心化定数を入れてより一般化することも可能だが、中心化定数がゼロの場合を扱うことが多いので、省略するのが普通である。因みに、 $\xi = 0$ の時は指数分布に一致する。

【図表 4-5】に $\beta = 1$ として、 ξ を変化させた場合の GPD の確率密度関数をプロットした。グラフの左側が $\xi \geq 0$ の場合で、右側が $\xi < 0$ である。右側のグラフは値に応じてかなり独特の形状となることが分かる。

GPD を用いると、次のことが言える。

定理：(Pickands - Balkema - de Haan の定理)

分布関数 F について、 $F \in MDA(H_\xi)$ であるためには、ある適当な正の関数 $\beta(u)$ が存在して、

$$\lim_{u \uparrow x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0 \quad (63)$$

となることが必要十分である。

式(63)は一見難解だが、 u を大きくするにつれて、超過分布関数 F_u が GPD に

収斂していく（両分布関数において最も離れている部分がゼロに近づく）ことを意味している。この定理から、超過データの分布と最大値の分布には密接な関係があることが分かる。よって、超過データを観測することにより、最大値について何か示唆を得られる可能性がある。

式(63)のうち、 ξ については最大値吸引域のパラメータと一致するので、前節で用いた手法によって求めることが可能である。

$\beta(x)$ については、 $\xi = 0$ の場合とそれ以外に分けて考える。 $\xi = 0$ （すなわち $F \in MDA(\Lambda)$ ）の時は、(57)式の $a(x)$ を用いることができる。 $\xi \neq 0$ のうち、 $\xi > 0$ の場合は、 $\bar{F}(x)$ に対して正則変動関数の表現定理⁷⁴を用いることにより、

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp \left\{ \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < \infty \quad (64)$$

と表現できる（ただし、 $z > 0$ であり、関数 a と c は

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c \in (0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)/x = \xi^{-1}$$

を満たす必要がある）が、ここで得られる $a(x)$ を $\beta(x)$ とすればよいことが知られている。 $\xi < 0$ の場合も、 $\bar{F}(x_F - 1/x)$ に対して、(64)式の表現を適用し、その $a(x)$ を $\beta(x)$ とすればよい。

次に、 u の値を大きくした場合の GPD の超過分布関数への収斂度合い、言い換えれば GPD がどの程度超過分布関数の近似となっているかを見る。元の分布 F としては先程同様、標準正規分布を採用する。標準正規分布の場合、 $\xi = 0$ であることが分かっているので、 $\beta(x)$ は(58)式を使えばよい。

【図表 4-6】は、 $u=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の場合について、超過分布関数および GPD 近似による分布関数を掲載した。グラフから、 u が大きくなるにつれて、近似の役割を十分に果たしていることが分かる。

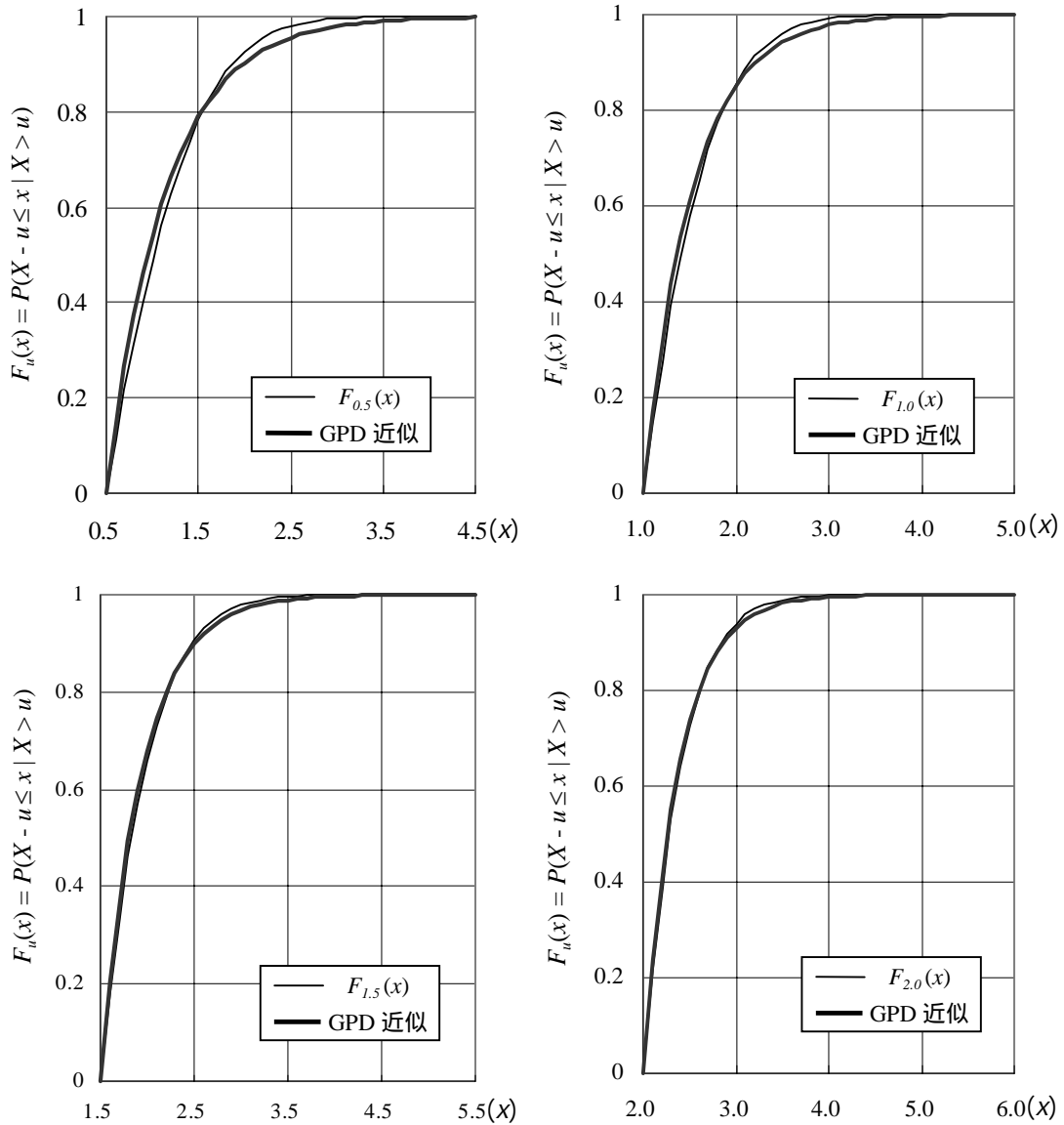
GPD への収斂を用いると、中心からかなり離れたところの分布形を推定することが可能となる⁷⁵。例えば、ある u に対し、それよりさらに x 以上大きなデータ（すなわち、 $u+x$ を超過するデータ）が発生する確率 $\bar{F}(u+x)$ は、上記 F_u の定義から、

⁷⁴ 詳細については、Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [16] の付録 A3.3 を参照

⁷⁵ このような分析手法は、元々は水文学において発展してきたものであり、最近では、Peaks over Threshold (POT) 手法と呼ばれている。

4 Extreme Value Theory (EVT)

【図表 4-6】 u の値を変えた場合の超過分布関数 $F_u(x)$ と GPD 近似
(標準正規分布、左上： $u=0.5$ 、右上： $u=1.0$ 、左下： $u=1.5$ 、右下： $u=2.0$)



$$\bar{F}(u+x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x) \quad (65)$$

となることが分かる。よって、右辺を推定し、それを左辺の近似関数と考えればよい。右辺にある2つの分布関数のうち、 $\bar{F}(u)$ については、 u を超過するデータ数を N_u 、全データ数を N として、 N_u/N を推定値とすることができる。ただし、安定した推定値を得るためには、 u を超過するデータ数がある程度以上存在している必要があるため、あまり大きな u を選ぶことはできない。

一方、 $\bar{F}_u(x)$ は上記定理から、データからパラメータ ξ および β が推定できれ

ば、その GPD で近似できる。勿論、その前提として、上記定理の近似が成立していること、つまり上の例でも見たように u が十分に大きいことが必要となる。従って、この2つの相反するニーズを満たす適当な u の搜索がポイントとなる。

4.3 数値例

ここまでで解説してきた EVT の手法を現実の問題にどのように適用可能かを具体的に見るために、本節では実際の株価データに対し、POT 手法を用いて中心から外れた値が従う分布に関する簡単な分析を試みることにする。

データとしては、前章で使用した TOPIX の日次対数収益率 (1988 年 ~ 1998 年) を再度用いる。【図表 4-7】は、同データの平均・標準偏差といった基本統計量とヒストグラムである。

【図表 4-7】の基本統計量の中で、特に歪度と尖度を見ると、単なるブラウン運動とは考えにくいことが分かる。尖度が 3 より大きいことから、裾は正規分布よりも厚い。また、わずかではあるが歪度が正の値をとっており、右への歪みが見られることから、相対的に裾の右側がファット・テールとなっている可能性がある⁷⁶。

さて、通常データ解析同様 EVT においても、この手法を用いれば絶対に正解に辿り着くというような万能な統計解析手法は存在しない。データを様々な角度から眺め、検証を行う必要がある。そのための分析手法・ツールが数多く考案されているが、ここではそのうちの数例を紹介する。

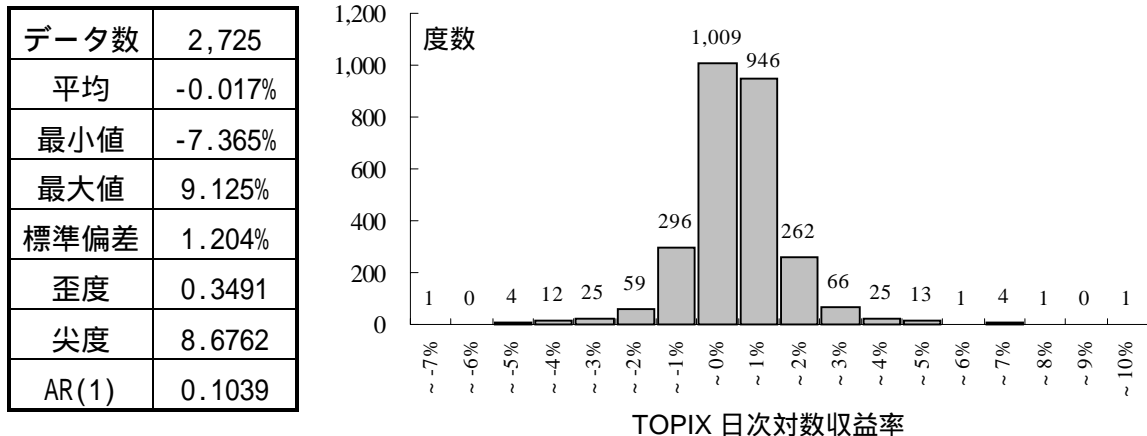
⁷⁶ なお、【図表 4-7】の基本統計量の中で一つだけ注意しておかなければならないのが、自己相関 ($AR(1)=0.1039$) の存在である。自己相関が存在する場合、サンプルデータが iid であるという仮定に反することになるため、これが有意にゼロと異なるかどうかを検証する必要がある。

ここでは、サンプル・データが正規分布に従っているという仮定を置くことはできないので、通常の検定方法は用いることができない。そこで、サンプル・データをランダムに並べ替え、その $AR(1)$ を求めるという計算を 5,000 回繰り返したが、絶対値において上記 $AR(1)$ の値を上回ることはなかった (最大で 0.06 程度)。このことから、TOPIX の対数収益率には自己相関があると考えて差し支えないと思われる。従って、厳密には iid を前提としない理論を適用すべきだが、その場合は手法が複雑になる。そこで、ここでの目的は EVT 手法の例示であることを勘案し、以下 iid を前提として分析を行うことにする。

なお、iid を前提としない EVT 手法の詳細については、Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [16] や McNeil and Frey [29] 等を参照のこと。

4 Extreme Value Theory (EVT)

【図表 4-7】TOPIX データの基本統計量（左表）およびヒストグラム（右グラフ）



まず、上記のような裾の状況をより詳しく分析する。そのために用いられるのが、平均超過関数である。一般に、分布がファット・テールである場合、平均超過関数は u に関する増加関数に、指数タイプはほぼ平らに、裾が薄い場合は減少関数となることが知られている。この性質を利用して、裾の状況をより詳しく見ることができる。

観測データについて平均超過関数の様子を見るためには、次に掲げる平均超過プロット (mean excess plot) と呼ばれるプロットを実行することになる。これは横軸に閾値 u 、縦軸に $e(u)$ の実測値、すなわち、

$$e_N(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} (X_i - u)_+ \quad (66)$$

を代入する（ここで、 N はデータ数、 X_i は i 番目のデータ、 N_u は u を超過するデータ数を表す）ものである。

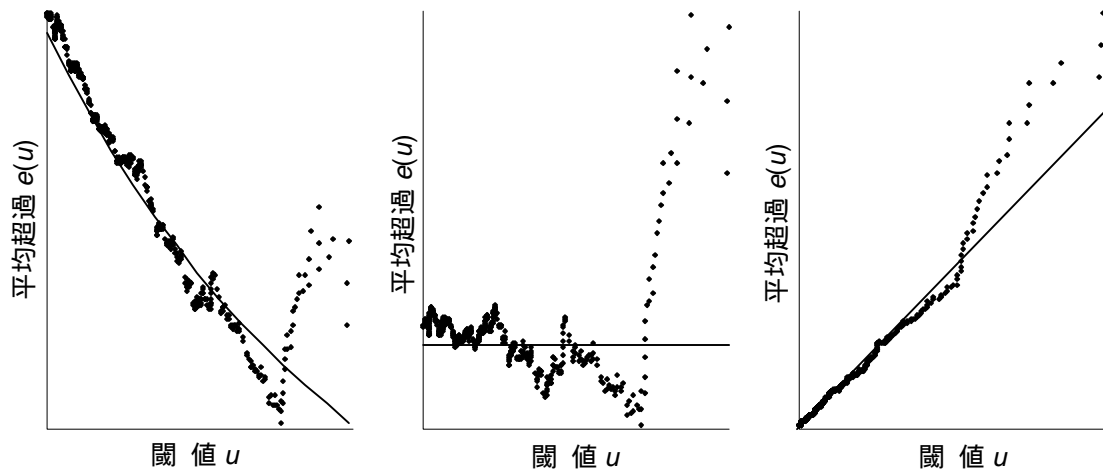
【図表 4-8】は正規分布、指数分布、GPD ($\xi=0.5$ 、一般に GPD はファット・テールな分布である) に従うランダムなデータを発生させ、それを用いて平均超過プロットを行ったものである。グラフ上に実線で描かれているのは、平均超過関数 $e(u)$ である。

前にも述べたように、正規分布の平均超過関数は、(58)式と同じであり、指数分布の平均超過関数は、平均値そのもの（従って一定値）である。また、GPD の平均超過関数は、 $\xi < 1$ かつ $\beta + u\xi > 0$ を満たす場合には、

$$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi} \quad (67)$$

で与えられる（従って、直線となる）ことが分かる。

【図表 4-8】ランダムに発生させたデータによる平均超過プロット⁷⁷
 (左：正規分布、中央：指数分布、右：GPD)



【図表 4-8】から、平均超過プロットは、平均超過関数にほぼ近似した振舞いを見ることが見てとれる⁷⁸。なお、上記のどのグラフを見ても、右の方へ行くに従いプロットしたデータがかなり不安定になることが分かるが、これは、式(66)の分母が小さくなる、すなわち超過データ数が少なくなることにより、測定誤差が大きくなっているためである。

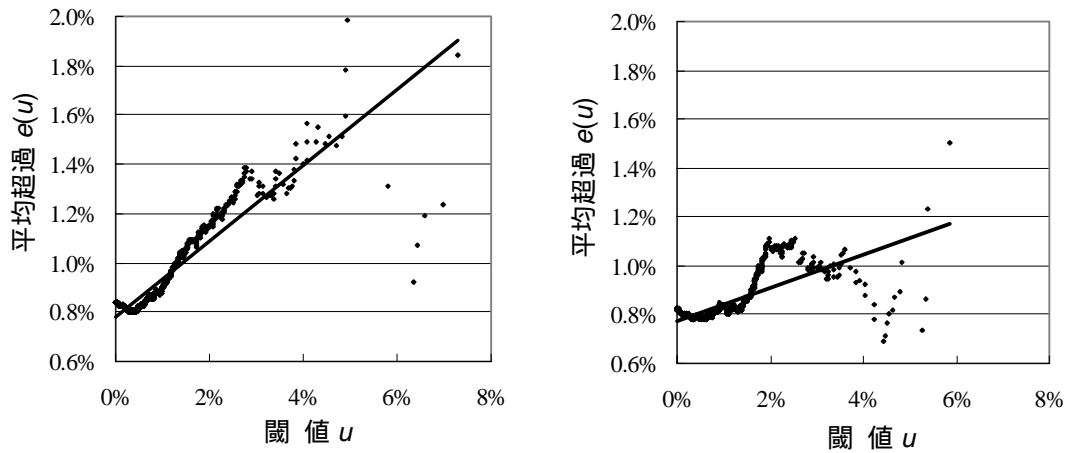
一方、TOPIX データに平均超過プロットを適用したのが【図表 4-9】である。左のグラフは通常のプロット (u とした場合)、右のグラフは分布の左裾の状況を調べるため、データの符号をすべて入れ替えたものを用いている。なお、グラフ上の直線はプロットされたデータに対して線形回帰を行ったものである。

線形回帰した直線は両グラフとも右上がりとなっており、特に左側のグラフ (つまり最大値近辺) の方が回帰直線の傾きが急になっている。このことは、先ほどの基本統計量およびヒストグラムから得られたファット・テールに関する考察 (両裾とも厚いが特に右裾が厚い) と一致する。

⁷⁷ 具体的には、このデータは 2,000 個の一樣乱数を発生させ、それを各分布に従う乱数に変換した後、上位 500 データについてプロットしたものである。各プロットは、上位 n 番目のデータを x_n と記せば、 $(x_n, e_{2,000}(x_n))$ である。右裾の傾向が似ているのは、元が同じ一樣乱数の実現値から作成されていることによる。なお、上位 10 個のプロットについてはかなり不安定となることから省略した。

⁷⁸ 【図表 4-8】では、縦軸の目盛りを揃えていないことから、傾きの方向だけに意味があり、傾き度合は意味を持たない。

【図表 4-9】 TOPIX の平均超過プロット
(左：分布の右裾、右：分布の左裾、をそれぞれ検証)



さて次に、本題である GPD のパラメータ推定と u の水準設定の問題を考える。これまでの分析から分かるように、裾の厚さを分析する上では、右裾（最大値近辺）の方が明確にその傾向が見てとれるので、以下では右裾に着目する。

まず、GPD のパラメータであるが、先ほども述べたように、 u によってパラメータの推定値が変わるため、 ξ や β は u の関数として表現されることになる。推定方法はいくつか考案されているが、ここでは最尤法を採用する。対数尤度関数 $\ell(\xi, \beta; \mathbf{Y})$ は、

$$\ell(\xi, \beta; \mathbf{Y}) = -n \ln(\beta) - \left(\frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^{N_u} \ln \left(1 + \frac{\xi}{\beta} Y_i \right) \quad (68)$$

ただし、 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_u})$

$Y_i = (\text{TOPIX 日次収益率の上位 } i \text{ 番目の値}) - u$

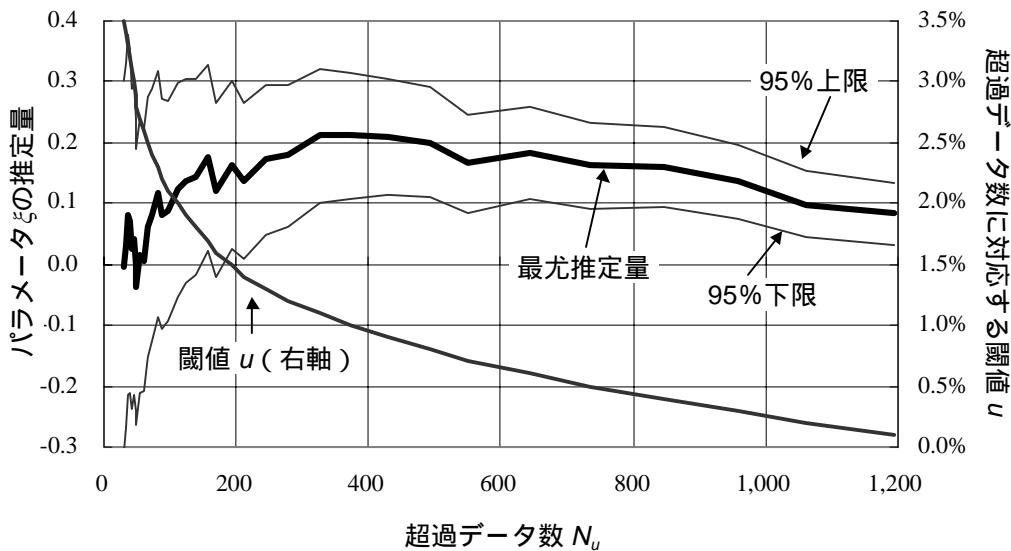
と表される。ここで、 $\tau = -\xi/\beta$ と置き換え、 $\ell(\xi, \beta; \mathbf{Y})$ をパラメータで偏微分したものをゼロとおくことにより、最尤推定量 $\hat{\xi}$ は次式で表されることが分かる。

$$\hat{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_u} \ln(1 - \tau Y_i) \quad (69)$$

ただし、 τ は次式を満たす必要がある。

$$\frac{1}{\tau} + \frac{1}{N_u} \left(\frac{1}{\hat{\xi}} + 1 \right) \sum_{i=1}^{N_u} \frac{Y_i}{1 - \tau Y_i} = 0 \quad (70)$$

【図表 4-10】に、超過データ数毎に求められた $\hat{\xi}$ と、その近似的信頼区間(95% 信頼限界値)をプロットした。また、参考として、超過データ数に対応する閾値 u も示した(右下がりの曲線、目盛りは右軸)。

【図表 4-10】 閾値 (超過データ数) を変えた場合の ξ の最尤推定量

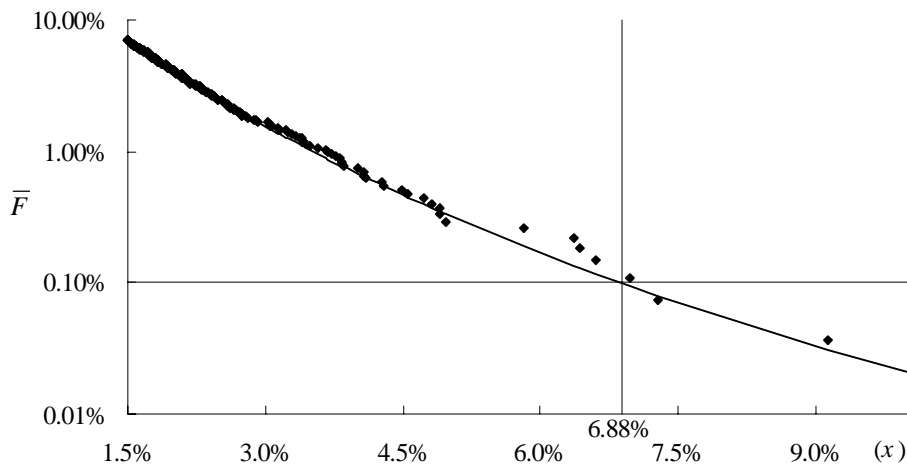
グラフから、超過データ数が多い場合 (200 程度以上) であれば、それなりに安定したグラフとなっており、推定値も概ね 0.1 ~ 0.2 の間に収まっているが、それより少ないところ (グラフ左側) では、かなり不安定になることが見てとれる。

なお、式(67)より、GPD の平均超過関数は直線となり、その傾きは $\xi/(1-\xi)$ となることが分かるが、【図表 4-9】左グラフにおける線形回帰直線の傾きは約 0.15 であり、そこから逆算すると $\xi=0.13$ 程度となる。このことから、極めてラフな検証ではあるが、上記推定値はそれにほぼ近い値であり、それなりに信頼性の高いものであるということがいえる。

パラメータの推定を終えたので、中心から外れた値の従う分布の推定に移る。問題はどの u を用いるかであるが、繰り返し述べているように決定的な推定方法はない。ここでは、上記グラフから極力安定していると見られる範囲での u の最大値である 1.5% を採用する。この時、 $\xi=0.1636$ 、 $\beta=0.0087$ 、 $N_u=193$ となる。よって、 $\bar{F}(u)$ の推定値は、 $N_u/N \approx 0.0708$ となる。

まず、 u を超過する部分について、元データの分布形状と式(65)によって推定された分布関数とをプロットして比較する。その結果が【図表 4-11】である。横軸が対数収益率、縦軸が \bar{F} を表している。グラフの右側 (\bar{F} が限りなくゼロに小さくなる部分) を見やすくするように、縦軸を対数変換した。

【図表 4-11】 1.5%を超過するデータによる \bar{F} (ドット表示)⁷⁹と、GDP を用いて求めた \bar{F} (曲線表示) との比較 (縦軸は対数変換)



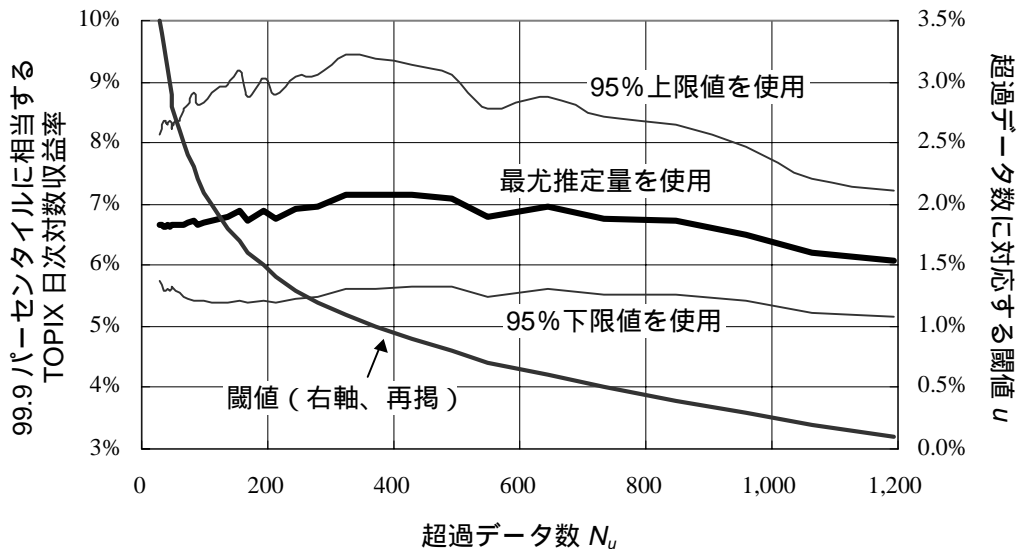
このグラフから、最尤推定量から求めたグラフは、元データにきれいにフィットしていることが分かる。勿論、このフィットは 1.5%以上の部分でのみ成立しており、それ以下の部分には適用できない。

このようにして求められた分布関数を用いて、パーセンタイルの導出が可能になる。例えば、99.9 パーセンタイルに対応する事象は 7%弱 (図中の 6.88%) であることが分かる。参考までに、単に平均と分散から 99.9 パーセンタイルを求めると約 3.7%となり (\approx 平均 + 3.1 標準偏差)、実に倍近い開きがあることが分かる。

なお、このようにして求められたパーセンタイルは、グラフから恣意的に決定した u およびそれを用いて求められた ξ や β に依存していることから、 u を変動させることによって、結果がどのように変わるかという頑健性を見ておく必要がある。

ここでは、様々な u 毎の最尤推定量およびその 95% 信頼限界値を用いて、上と同じ 99.9 パーセンタイル値を求めた。結果は、【図表 4-12】の通りである。最尤推定量がグラフの左側で特に不安定な振舞いをしていたのとは対照的に、99.9 パーセンタイル値は 7%程度の水準である程度安定している。また、信頼区間の限界値を用いてもそう大きくは振れず、どの値も、単に平均と分散から算出した値 3.7%を大きく上回っていることが分かる。

⁷⁹各プロットは、上位 n 番目のデータを x_n 、全データ数 N として、 $(x_n, n/(N+1))$ となっている。

【図表 4-12】 u やパラメータを変化させた場合の 99.9 パーセンタイル値

以上により、当初の目的である中心から外れた値のとり分布を POT 手法によって求め、パーセンタイルを推定することができた。

勿論、実際に分析を行う場合には、これだけでは不十分である。結果の頑健性や、パラメータの安定性、他の推定方法による推定量との比較などについて、さらに分析を加える必要がある。それに加えて、一般の金融データには、脚注76 (60ページ) 上にも述べたようなデータの自己相関性や、分散不均一性 (heteroscedasticity) 等の存在が指摘されることも多い。そこでは、上述したような基本的 EVT を構築する上で前提となっている iid が成立しないため、より一般化された理論および統計処理方法が必要となり、さらなる専門的な知識・技術が必要となる。

4.4 応用研究事例の紹介

本章の最後として、EVT が適用されている分野を紹介する。最初にも述べたように、EVT の発祥は水文学や気象学であり、その分野での応用研究は数多く見られる。その他でも異常値を扱う分野で、EVT が用いられていることがある。

金融と保険に注目すると、保険の方が先行して EVT を応用してきた。特に、超過額再保険⁸⁰ (excess-of-loss cover) といわれる保険の純保険料の分析等に関

⁸⁰対象となる契約において生じた保険金額がある一定額を超過した部分を支払う再保険契約。

して、1960年代にはEVTの適用が行われている⁸¹。その後、いわゆる巨大自然災害リスクの分析において、EVTの適用が多く見られるようになっている。最近では、McNeil [28] がデンマークの大火災の損害額データをEVTによって分析している他、Rootzén and Tajvidi [33] はスウェーデンの風害保険(windstorm insurance)に適用している。

ARTとの関連という意味では、ウィンターツール(Winterthur)社が1997年に発行した保険リスク付転換社債について分析を加えたSchmock [36]の中で、トリガーの発生確率を検証するための手法としてEVTが適用されている。

一方、金融の世界では、EVTの応用事例はまだ限定的である。例えば、“Risk”誌において、Embrechts, Resnick and Samorodnitsky [17] がEVTを紹介としたのは、1998年1月と比較的最近のことである⁸²。

しかし、市場リスク管理を筆頭に、今後適用可能性のある分野は多いと考えられる。バリュー・アット・リスク(VaR)に関して言えば、その概念が広く一般に浸透した一方で、ファット・テールな分布に従うリターンをもった金融資産に対しての有効性に限界があるといった問題などが指摘されている。例えば、Artzner, Delbaen, Eber and Heath [6] で、リスク指標が保つべき4つの公理(sub-additivity, homogeneity, monotonicity, risk-free condition)を挙げ⁸³、VaRがそれを満たしていないこと等を指摘している。これに対して、Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [16] は、 $E[X|X > \hat{x}_p]$ (ここで \hat{x}_p はあるパーセントイルの推定値) というリスク指標を提案しているが、これが上記4つの公理をほぼ満たしていることをArtzner, Delbaen, Eber and Heath [6] は示している。この指標は、上で定義した平均超過関数(厳密にはそれに \hat{x}_p を加えたもの)であり、EVTを利用して初めて推定可能となる指標である。

このほか、市場リスク以外では、オペレーショナル・リスクに対してEVTの適用を試みた論文としてCruz, Coleman and Salkin [13] を挙げることができる。また、信用リスクの分析にも応用可能性があると思われるが、現時点では、具体的な応用例は殆ど見受けられない。

⁸¹ 例えば、Jung [25] などがある。

⁸² 勿論、それ以前に、金融市場にEVTを応用した例が全くなかったわけではない。例えば、Longin [27] 等を参照のこと。

⁸³ 同論文では、この4つを満たすリスク指標をコヒーレント・メジャー(coherent measure)と呼んでいる。

5 参考文献

- [1] 木島 正明 (1998), 『金融リスクの計量化(下) クレジット・リスク』 金融財政事情研究会.
- [2] 後藤 和廣 (1999), 「ART の概要と特徴」 『インシュアランス』 1/1 号、1/7 号.
- [3] 武田 祐一 (1998), 「保険会社と機関投資家を結ぶ自然災害リスクの証券化」 『金融財政事情』, 3月30日号, p.32-35.
- [4] 日吉 信弘 (1998), 「代替的リスク移転 (ART) 入門 - Alternative Risk Transfer」 (財)損害保険事業総合研究所主催 1998年損害保険特別講座資料.
- [5] ペソーネン, E. (1973), 「危険理論とその応用」 昭和48年11月講演テキスト (日本アクチュアリー会、東京海上各務記念財団共催) 日本アクチュアリー会損保研究会編.
- [6] Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber and D. Heath (1997), "Thinking Coherently," *Risk*, Vol. 10 No.11, November pp. 68-71.
- [7] Bühlmann, H. (1970), *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer-Verlag.
- [8] (1980), "An Economic Premium Principle," *ASTIN Bulletin* 11, pp. 52-60.
- [9] , F. Delbaen, P. Embrechts and A. Shiryaev (1998), "No-Arbitrage, Change of Measure and Conditional Esscher Transforms," Preprint, ETH Zürich.
- [10] Canter, M., J. Cole and R. Sandor (1996), "Insurance Derivatives: A New Asset Class for the Capital Markets and a New Hedging Tool for the Insurance Industry," *The Journal of Derivatives*, Winter, pp. 89-104.
- [11] Christensen, C. V. and H. Schmidli (1998), "Pricing Catastrophe Insurance Products Based on Actually Reported Claims," Preprint, University of Aarhus.
- [12] Credit Suisse Financial Products (1997), *CreditRisk+ - A Credit Risk Management Framework*.
- [13] Cruz, M., R. Coleman and G. Salkin (1998), "Modeling and Measuring Operational Risk," *Journal of Risk*, Fall, pp. 63-72.
- [14] Delbaen, F. and J. Haezendonck (1989), "A Martingale Approach to Premium Calculation Principles in an Arbitrage Free Market," *Insurance: Mathematics and Economics* 8, pp. 269-277.

5 参考文献

- [15] Embrechts, P., R. Frey and H. Furrer (1998), "Stochastic Processes in Insurance and Finance," Preprint, ETH Zürich.
- [16] , C. Klüppelberg and T. Mikosch (1997), *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag.
- [17] , S. Resnick and G. Samorodnitsky (1998a), "Living on the Edge," *Risk*, Vol. 11 No 1, January, pp. 96-100.
- [18] , and (1998b), "Extreme Value Theory as a Risk Management Tool," Preprint, ETH Zürich.
- [19] Feller, W. (1966), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 2*, John Wiley and Sons. (邦訳:「確率論とその応用 (上・下)」国沢清典監訳、紀伊国屋書店)
- [20] Föllmer, H. and P. Leukert (1998), "Quantile Hedging," Preprint, Humboldt-Universität zu Berlin.
- [21] Gerber, H. (1979), *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, S. S. Huebner Foundation Monograph Series No.8.
- [22] and E. Shiu (1994), "Option Pricing by Esscher Transforms," *Transactions of the Society of Actuaries XLVI*, pp. 99-140.
- [23] Grandell, J. (1991), *Aspects of Risk Theory*, Springer-Verlag.
- [24] Harrison, J. M. and S. Pliska (1981), "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and their Applications* 11, pp. 215-260.
- [25] Jung, J. (1964) "On the Use of Extreme Values to Estimate the Premium for an Excess of Loss Reinsurance," *ASTIN Bulletin*, pp. 178-184.
- [26] Lamberton, D. and B. Lapeyre (1996), *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall.
- [27] Longin, F. (1996), "The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns," *Journal of Business*, Vol. 69, no. 3, pp. 383-408.
- [28] McNeil, A. (1997), "Estimating the Tails of Loss Severity Distributions Using Extreme Value Theory," *ASTIN Bulletin*, Vol. 27, No. 1, pp. 117-137.
- [29] and R. Frey (1998), "Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach," Preprint, ETH Zürich.

5 参考文献

- [30] Meister, S. (1995), "Contributions to the Mathematics of Catastrophe Insurance Futures," Diplomarbeit, ETH Zürich.
- [31] Paul-Choudhury, S. (1998), "Getting Down to Business," Insurance Risk Special Report, *Risk* July, pp. 1.
- [32] Resnick, S. (1987), *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*, Springer-Verlag.
- [33] Rootzén, H. and N. Tajvidi (1997), "Extreme Value Statistics and Wind Storm Losses: a Case Study," *Scandinavian Actuarial Journal*, 1: pp. 70-94.
- [34] Rolski, T., H. Schmidli, V. Schmidt and J. Teugels (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons.
- [35] Schanz, K. U. (1998), "The Convergence of (Re)insurance and Capital Markets – the Financial Services Industry Reinventing Itself," (財)損害保険事業総合研究所主催特別講演会時(1998年11月27日)配布資料.
- [36] Schmock, U. (1998), "Estimating the Value of the WINCAT Coupons of the Winterthur Insurance Convertible Bond: a Study of the Model Risk," Discussion paper, ETH Zürich.
- [37] Schweizer, M. (1991), "Option Hedging for Semimartingales," *Stochastic Processes and their Applications* 37, pp. 339-363.
- [38] sigma (1996), "Insurance Derivatives and Securitization: New Hedging Perspectives for the US Catastrophe Insurance Markets?" No. 5, Swiss Re, Zürich (<http://www.swissre.com> にて入手可) .
- [39] (1997), "Too Little Reinsurance of Natural Disasters in Many Markets," No. 7, Swiss Re, Zürich (<http://www.swissre.com> にて入手可) .
- [40] (1998), "Natural Catastrophes and Major Losses in 1997: Exceptionally Few High Losses," No.3, Swiss Re, Zürich (<http://www.swissre.com> にて入手可) .
- [41] Sondermann, D. (1991), "Reinsurance in Arbitrage-Free Markets," *Insurance: Mathematics and Economics* 10, pp. 191-202.
- [42] Swiss Re New Markets (1998), "Integrated Risk Management Solutions – Beyond Traditional Reinsurance and Financial Hedging," Swiss Re Publications.