

**IMES DISCUSSION PAPER SERIES**

**非ガウス型状態空間モデルによる  
確率的ボラティリティモデルの推定**

北川源四郎・佐藤整尚・永原裕一

**Discussion Paper No. 98-J-12**

**IMES**

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES  
BANK OF JAPAN

**日本銀行金融研究所**

〒100-8630 東京中央郵便局私書箱 203 号

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

# 非ガウス型状態空間モデルによる 確率的ボラティリティモデルの推定

北川源四郎/佐藤整尚/永原裕一<sup>1</sup>

## 要旨

確率的ボラティリティモデルのパラメータの推定法としては擬似最尤法がよく知られているが、近年、数値積分やモンテカルロ近似にもとづく非線形フィルタなどの利用により直接、最尤推定値を求める方法も可能となりつつある。本稿では、幾つかの新しい最尤推定および擬似最尤推定の方法を提示し、従来の近似的方法との関係を示すとともに、日経225データの分析およびシミュレーションによって、これらの推定法の比較検討を行った。その結果、擬似最尤法では通常用いられるHRS法よりもKG法の方が最尤推定値に近い結果を与えること、最尤推定を行うNG-HRSとNG-KGはほとんど同じ結果を与えることがわかった。

キーワード：カルマンフィルタ，非ガウス型フィルタ，平滑化，AIC，金融時系列，日経225データ

JEL classification: C1, C22, G12

---

<sup>1</sup> 北川源四郎 統計数理研究所 (E-Mail: kitagawa@ism.ac.jp)  
佐藤整尚 統計数理研究所 (E-Mail: sato@ism.ac.jp)  
永原裕一 明治大学政治経済学部 (E-Mail: nagahara@kisc.meiji.ac.jp)

# 目次

1	はじめに	3
2	状態空間モデル	5
2.1	時系列モデルの状態空間表現	5
2.2	初期分布の決定	5
2.3	非ガウス型観測ノイズモデルへの拡張	6
3	非線形・非ガウス型フィルタによるパラメータ推定	6
3.1	状態の推定とパラメータ推定	6
3.2	カルマンフィルタによる対数尤度の計算	7
3.3	非ガウス型フィルタによる対数尤度の計算	8
3.4	各推定値の関係	9
4	日経 225 データの解析	10
4.1	シミュレーションによる推定量の比較	13
5	まとめ	13

# 1 はじめに

リスク・マネジメントの観点から、株式や為替、金利などの金融データの日次や週次の投資収益率の分布は非常に興味を持たれるようになってきている。実証研究によるとその分布は正規分布より裾が厚く、しかも歪んだ分布になると指摘されている。Fama (1965) と Mandelbrot (1963) は、安定パレート分布のように裾の厚い分布が日次の株式投資収益率に適切なのではないかと指摘している。また、Blattberg と Gonedes (1974) では、安定分布と  $t$  分布を比較し、 $t$  分布の方がより適切であるという結果を得ている。Kariya, et al. (1995) や Nagahara (1996) は、日本の市場において、裾が厚いだけでなく、これらの分布は歪んでいることも検証している。

このような裾の厚い分布が現れる可能性を考慮して、条件付き分散が時間に依存して変化する ARCH モデル (Engle(1982)), GARCH モデル (Bollerslev(1986)), EGARCH モデル (Nelson(1991)) などの時系列モデルが考えられてきた。これらのモデルでは、その条件付き分散が過去のイノベーションや分散の確定的な関数として表現されるが、本稿で扱う確率的ボラティリティ・モデルでは、分散の変化に対して独自のノイズを導入している。最近では、GARCH モデルと確率的ボラティリティ・モデルの比較も株式指数や為替などについて検証されてきている (Heynen, et al. (1994))。彼らの結果によると株式指数については、確率的ボラティリティ・モデルの方がより適切であると結論している。

本稿では、金融時系列  $r_n$  に対する、以下のような簡単な確率的ボラティリティ・モデルの推定の方法を考えることにする。

$$r_n = \sigma_n w_n \quad (1)$$

$$\log \sigma_n^2 = \alpha^* + \beta \log \sigma_{n-1}^2 + v_n \quad (2)$$

ここで、通常定義に従って一応  $w_n$  は平均 0、分散 1 の標準正規分布に従う白色雑音、 $v_n$  は平均 0、分散  $\tau^2$  の正規白色雑音と仮定しておくが、第 3 節以降では  $v_n$  や  $w_n$  がコーシー分布などの一般の分布に従う場合についても考えることにする。この確率的ボラティリティ・モデルは、分散  $\sigma_n^2$  が時間とともに変化する時変パラメータであることが特徴であるが、その変化の仕方は 3 つの構造パラメータ  $\alpha^*, \beta$  および  $\tau^2$  によって規定される。以下ではこれらのパラメータをまとめて  $\theta = (\alpha^*, \beta, \tau^2)^T$  と表わすことにする。

ただし、本稿では実際の推定においては

$$r_n = e^{\alpha/2} \sigma_n w_n$$

$$\log \sigma_n^2 = \beta \log \sigma_{n-1}^2 + v_n \quad (3)$$

を用いることにする。これらの二つの表現は等価であり  $\alpha = \alpha^*/(1 - \beta)$  という関係が成り立つ。ただし、(2) の場合には  $\beta$  に依存して  $\alpha^*$  の値が急激に変化するので、パラメータ推定において尤度関数の曲面が複雑な谷となり、非線形最適化によるパラメータ推定に時間がかかることが多い。

これらの確率的ボラティリティ・モデルに対して Nelson (1988) および Harvey, Ruiz and Shepard (1994) は以下のように、原系列の 2 乗の対数値の系列を用いてモデルのパラメータ  $\theta$  を推定する方法を提案している。

$$\begin{aligned} r_n^2 &= e^\alpha \sigma_n^2 w_n^2 \\ \log r_n^2 &= \alpha + \log \sigma_n^2 + \log w_n^2 \end{aligned} \quad (4)$$

この方法では、(1) あるいは (3) 式右辺の積が和の形に分離され、したがって、変換されたデータ  $\log r_n^2$  のトレンドを推定することにより、 $\alpha$  と  $\log \sigma_n^2$  を推定することができる。ただし、ノイズ項  $\log w_n^2$  は  $\chi_1^2$  変数の対数の分布に従い、その密度関数は

$$\log w_n^2 \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{w}{2} - \frac{e^w}{2} \right\} \quad (5)$$

で与えられるが、上記の文献ではこれを正規分布  $N(\eta, \pi^2/2)$ ,  $\eta = -1.2704$  で近似している。図 1 の実線は (5) の密度関数、点線はそれを近似した正規分布を示す。 $\log w_n^2$  の分布は著しく非対称であり、それを近似した正規分布は左側にずれている。

分散  $\sigma_n^2$  の変化が小さく  $\sigma_n^2 = \sigma_{n-1}^2$  が成り立つ場合にはこの方法は、Kitagawa and Gersch (1985) で用いられた変動分散の推定法と本質的に同じである。この方法では (3) の代わりに、引き続き 2 つの観測値の平方の和の対数値の系列

$$\log \{2^{-1}(r_{2m-1}^2 + r_{2m}^2)\} = \log \sigma_{2m}^2 + \log u_{2m}^2 \quad (6)$$

を考えている。この場合には、 $\log u_{2m}^2$  の分布は二重指数分布 ( $\chi_2^2$  変数の対数の分布)

$$\log u_n^2 \sim \exp \{u - e^u\} \quad (7)$$

となるが、これを正規分布  $N(\zeta, \pi^2/6)$ ,  $\zeta = -0.57722$  で近似してそのトレンドを推定している。図 2 に示すように、 $\log u_{2m}^2$  の分布は (4) の場合の  $\log w_n^2$  の分布より対称かつ正規分布に近く、しかも 0 の付近に集中している。(5) と (7) の分布の分散比が 3:1 である一方、(6) の方法ではデータ数が半分になることを考慮すると、 $\sigma_n^2$  の変化が少ない場合には推定誤差の分散比は 3:2 になる。

Kitagawa (1987) や北川 (1993) では非ガウス型状態空間モデルによって非ガウス型のモデルを直接用いる方法を示している．この方法では  $\log w_n^2$  や  $\log u_{2m}^2$  の確率密度関数を直接用いるので，上記のような正規近似を用いる必要はない．ノイズ項  $\log w_n^2$  の分布の密度関数が (5) や (7) の形で表わされることを利用し，数値計算の誤差を除き厳密にトレンドの予測分布やフィルタ分布を計算することができる．

3 節で示すように，カルマンフィルタや非ガウス型フィルタによって得られる予測分布を用いてモデルの尤度を計算することができる．したがって，その尤度を最大化することによりパラメータ  $\theta$  の最尤推定値や擬似最尤推定値を求めることができる．

## 2 状態空間モデル

### 2.1 時系列モデルの状態空間表現

本節では (3) の確率的ボラティリティ・モデルの推定を考える．時変分散  $\sigma_n^2$  の対数値を状態  $x_n$ ， $\log r_n^2$  を新たな観測値とみなし， $x_n = \log \sigma_n^2$ ， $y_n = \log r_n^2$  とおくと，(3)，(4) の確率的ボラティリティ・モデルは 1 次元の線形・非ガウス型状態空間モデル

$$x_n = \beta x_{n-1} + v_n \quad (8)$$

$$y_n = x_n + \alpha + w_n \quad (9)$$

で表わすことができる．ここで，システムノイズ  $w_n$  を正規近似した場合は線形・ガウス型の状態空間モデルが得られる．また，非ガウス型の状態空間モデルを用いると，正規近似を使わず厳密な二重指数分布を用いた計算ができる．

一方，非線形状態空間モデルの枠組みでは，(3) 式のようにあらかじめ観測値の非線形変換  $y_n = \log r_n^2$  を行う必要はなく

$$x_n = \beta x_{n-1} + v_n \quad (10)$$

$$r_n = e^{\alpha/2} e^{x_n/2} w_n$$

という形の非線形観測モデルを用いて時系列  $r_n$  を直接表現することができる．さらに，一般型状態空間モデルを用いると，観測値  $r_n$  の分布を状態  $x_n$  に依存した条件付き分布で与える  $r_n \sim N(0, e^{\alpha} e^{x_n})$  の形のモデルを考えることもできる．

### 2.2 初期分布の決定

カルマンフィルタなどの状態空間モデルのフィルタリングにおいては状態の初期分布を与える必要がある．確率的ボラティリティ・モデルの場合には (3) で与えられる状

状態  $x_n = \log \sigma_n^2$  の系列は定常であるので，その定常分布を求めればよい．とくに，ノイズが正規分布に従う場合には， $\log \sigma_n^2$  の分布も正規分布となるのでその平均と分散を求めればよい．

まず， $\mu = E[x_n] = E[x_{n-1}]$  として，(3) の両辺の期待値をとると  $\mu = \beta\mu$  となり，これより  $\mu = 0$  が得られる．さらに，(3) の両辺の 2 乗の期待値から  $\text{var}(x_n) = \tau^2/(1 - \beta^2)$  が得られる．したがって，この場合には状態空間モデルの状態  $x_0$  の初期分布としては正規分布  $N(0, \tau^2/(1 - \beta^2))$  を用いればよいことがわかる．

## 2.3 非ガウス型観測ノイズモデルへの拡張

非線形・非ガウス型状態空間モデルあるいは一般型状態空間モデルを用いる場合には観測値の分布が正規分布であることを仮定する必要はない．したがって，たとえば正規分布の代わりにコーシー分布あるいはピアソン VII 型の分布族

$$p(w_n | \tau^2, b) = \frac{\tau^{2b-1} \Gamma(b)}{\Gamma(b-1/2) \Gamma(1/2)} \frac{1}{(w_n^2 + \tau^2)^b} \quad (11)$$

などを用いることもできる． $b$  は形状パラメータ ( $0.5 < b < \infty$ ) で，この値を変えることによっていろいろな分布が得られる． $b = 1$  のときコーシー分布， $b = (k+1)/2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) のとき自由度  $k$  の  $t$  分布， $k \rightarrow \infty$  のとき正規分布となる．ただし，この場合にはボラティリティは通常考えられているような正規分布の分散あるいは標準偏差ではなく，対応する分布の広がりを表わす (dispersion) パラメータに相当するものであるのでその解釈にあたっては注意が必要である (Nagahara and Kitagawa 1999)．

同様に (3) 式のノイズ  $v_n$  に対して非ガウス型の分布を想定することができる．コーシー分布などの裾の厚い分布を用いることにより，分散の急激な変化を自動的に検出することが可能となる (Kitagawa 1987, 北川 1993)．

## 3 非線形・非ガウス型フィルタによるパラメータ推定

### 3.1 状態の推定とパラメータ推定

一般に，時刻  $j$  までの観測値  $Y_j = \{y_1, \dots, y_j\}$  が得られたとき，時刻  $n$  の状態  $x_n$  を推定することを状態推定の問題という．とくに， $j < n$ ， $j = n-1$ ， $j = n$  および  $j > n$  のとき状態推定を予測，一期先予測，フィルタ，平滑化と呼んで区別する．

状態空間モデルの状態  $x_n$  の一期先予測分布  $p(x_n | Y_{n-1})$  が得られると，観測値  $y_n$  の



一期先予測分布は

$$p(y_n|Y_{n-1}) = \int p(y_n|x_n)p(x_n|Y_{n-1})dx_n \quad (12)$$

で与えられる。このとき，

$$L(\theta) = p(Y_N) = p(Y_{N-1})p(y_N|Y_{N-1}) = \prod_{n=1}^N p(y_n|Y_{n-1}) \quad (13)$$

と表現できる。したがって確率的ボラティリティ・モデルの対数尤度は一期先予測分布  $p(y_n|Y_{n-1})$  を用いて

$$\ell(\theta) = \sum_{n=1}^N \log p(y_n|Y_{n-1}) \quad (14)$$

と計算できる。擬似ニュートン法 (DFP 公式や BFGS 公式) などの数値的最適化のアルゴリズムを使えば，この対数尤度関数をパラメータ  $\theta$  に関して最大化することにより最尤推定値  $\hat{\theta}$  を求めることができる (北川 (1993))。

### 3.2 カルマンフィルタによる対数尤度の計算

線形ガウス型の状態空間モデルに対しては，状態推定にカルマンフィルタの効率的なアルゴリズムが適用でき，これを利用して Nelson (1988) および Harvey, Ruiz and Shepard (1994) は確率的ボラティリティモデルのパラメータ推定を行っている。

線形ガウス型モデルの場合，一期先の分布  $p(x_n|Y_{n-1})$  およびフィルタ分布  $p(x_n|Y_n)$  は正規分布となり，平均値と分散共分散行列を用いて

$$\begin{aligned} p(x_n|Y_{n-1}) &\equiv N(x_{n|n-1}, V_{x_n|n-1}) \\ p(x_n|Y_n) &\equiv N(x_{n|n}, V_{x_n|n}) \end{aligned} \quad (15)$$

と表現できる。よく知られているように，これらの平均と分散は以下のカルマンフィルタのアルゴリズムを繰り返し適用することにより計算できる (片山 (1983), 北川 (1993))。

[一期先予測]

$$\begin{aligned} x_{n|n-1} &= \beta x_{n-1|n-1} \\ V_{n|n-1} &= \beta^2 V_{n-1|n-1} + \tau^2 \end{aligned} \quad (16)$$

[フィルタ]

$$\begin{aligned} K_n &= V_{n|n-1}(V_{n|n-1} + e^{\alpha\xi^2})^{-1} \\ x_{n|n} &= x_{n|n-1} + K_n(y_n - x_{n|n-1}) \\ V_{n|n} &= (I - K_n)V_{n|n-1} \end{aligned} \quad (17)$$

ただし,  $\xi^2$  は観測ノイズの分散である. このとき,  $y_n$  の一期先予測誤差とその分散はそれぞれ  $\varepsilon_n = y_n - Hx_{n|n-1}$  と  $s_n = HV_{n|n-1}H + e^\alpha \xi^2$  で与えられるので,

$$p(y_n|Y_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s_n}} \exp\left\{-\frac{\varepsilon_n^2}{2s_n}\right\} \quad (18)$$

となる. これを (17) に代入するとモデルの対数尤度は

$$\ell(\theta) = -\frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \log r_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon_n^2}{s_n} \quad (19)$$

で計算できる.

### 3.3 非ガウス型フィルタによる対数尤度の計算

一般の状態空間モデルの場合にもカルマンフィルタと同様に以下の一期先予測とフィルタのステップを繰り返すことにより予測分布を逐次的に求めることができる (Kitagawa 1987).

[一期先予測]

$$\begin{aligned} p(x_n|Y_{n-1}) &= \int p(x_n|x_{n-1})p(x_{n-1}|y_{n-1})dx_{n-1} \\ &= \int p(x_n|z_n)p(z_n|y_{n-1})dz_n \\ &= \int p(x_n - z_n)p(z_n|y_{n-1})dz_n \end{aligned} \quad (20)$$

[フィルタ]

$$p(x_n|Y_n) = \frac{p(y_n|x_n)p(x_n|Y_{n-1})}{p(y_n|Y_{n-1})}. \quad (21)$$

ただし,  $z_n = \beta x_{n-1}$  であり, フィルタの計算の右辺の分母に現れる  $p(y_n|Y_{n-1})$  は

$$p(y_n|Y_{n-1}) = \int p(y_n|x_n)p(x_n|Y_{n-1}) \quad (22)$$

によって計算できる. これを用いると, 対数尤度は

$$\ell(\theta) = \sum_{n=1}^N \log p(y_n|Y_{n-1}) \quad (23)$$

により計算できる.

実際の計算においては, 一般の非ガウス型の密度関数を取り扱うために, 予測分布  $p(x_n|Y_{n-1})$ , フィルタ分布  $p(x_n|Y_n)$  およびシステムノイズの分布  $p(v_n)$  をそれぞれ適当な方法で数値的に表現し, (20), (22) 式の積分などは数値積分で計算する (付録).

表 1:

$\tau^2$	平均	分散
0	-0.577207	1.644895
$10^{-6}$	-0.577207	1.644896
$10^{-5}$	-0.577206	1.644899
$10^{-4}$	-0.577201	1.644932
$10^{-3}$	-0.577145	1.645268
$10^{-2}$	-0.576586	1.648637
$10^{-1}$	-0.570989	1.682345
1	-0.516555	2.017926
10	-0.069874	5.280601
$10^2$	2.277406	36.418713

### 3.4 各推定値の関係

これまで、確率的ポラティリティ・モデルの推定には、データ  $r_n$  をそのまま用いても、また (4) や (6) のデータ変換を用いてもよいことを示した。さらにノイズの分布をそのまま用いる場合と正規近似をする場合を考えてきた。これらの推定法で推定されたパラメータや対数尤度の値を比較する場合には以下の関係に注意する必要がある。

まず、(6) 式のデータ変換を利用した場合には  $\log \sigma_n^2$  の値は 1 点おきにだけ変化する。この場合

$$\log \sigma_n^2 = \beta \log \sigma_{n-1}^2 + v_n = \beta^2 \log \sigma_{n-2}^2 + \beta v_{n-1} + v_n \quad (24)$$

となるので、(4) を用いて推定した係数は実際には  $\beta^2$  に相当し、ノイズの分散の推定値は  $(1 + \beta^2)\tau^2$  を推定したものとなっている。また、(7) が厳密に成り立つのは  $\log \sigma_n^2 = \log \sigma_{n-1}^2$  の場合に限る。実際には (3) 式によって変動している場合には  $\log u_n^2$  の分布は  $w_n, w_{n-1} \sim N(0, 1)$ 、 $v_n \sim N(0, \tau^2)$  としたときの  $\log(e^{v_n} w_n^2 + w_{n-1}^2)$  の分布に従う。表 1 にシミュレーションで求めたこの分布の平均および分散を示す。

この表から  $\tau^2$  が 0.01 以下の場合には殆ど影響がないが、0.1 の場合には 0.06 程度のバイアスがあることがわかる。さらに、1 以上の場合には平均も分散も著しく異なる。ただし、確率的ポラティリティ・モデルにおいて通常は  $\tau^2$  が 1 以上に近いモデルは考える必要はないと思われる。

さらに、ノイズの分布 (5) や (7) を正規近似した場合には、それぞれ  $\eta$  と  $\zeta$  に相当

するバイアスが生じるので，その補正を行う必要がある．

異なった方法で推定されたモデルの対数尤度の値はそのままの形では比較できない．ただし，データの変数変換の影響を補正した情報量規準 AIC を用いると比較が可能となる．(4) 式の変換を行ったデータに対するモデルの場合には  $\log r_n^2$  の Jacobian

$$J_{HRS} = \log \prod_{n=1}^N \exp\{y_n/2\} = \sum_{n=1}^N \log |r_n| \quad (25)$$

を用いて，補正した AIC

$$\text{AIC} = -2\ell(\hat{\theta}) - 2J_{HRS} + 2 \times 3 \quad (26)$$

を考えることにする．また，(6) 式の変換  $z_n = \log\{2^{-1}(r_{2m-1}^2 + r_{2m}^2)\}$  の場合には

$$J_{KG} = \log \prod_{n=1}^{N/2} 2\pi z_n = \frac{N}{2} \log 2\pi + \sum_{n=1}^{N/2} \log |z_n| \quad (27)$$

を用いて同様に AIC を定義すればよい．

これらの補正をしない通常の AIC は変換した後のデータに対するモデルのあてはまりのよさを評価したものであるのに対して，補正した AIC は原データに対するモデルのよさを表わす．したがって，さまざまな変換を行ったあとのモデルでも，いったんすべて原データにもどして考えることにより，相互に比較することが可能となる．

## 4 日経 225 データの解析

日経 225 データ (1987 年 1 月 1 日–1990 年 8 月 30 日， $N = 961$ ) の一階階差を時系列  $r_n$  と考え，さまざまな方法で確率的ボラティリティ・モデルのパラメータの推定を行った．表 2 で HRS は (4) 式とカルマンフィルタを用いる Harvey, Ruiz and Shepard の方法による結果，NG-HRS はその観測ノイズの厳密な分布 (5) を用いて非ガウス型フィルタで推定したものを表わす．同様に，KG と NG-KG は (6) の変換と正規近似を用いたものと (7) 式の二重指数分布を直接用いたものを表わす．Direct は (12) の一般型状態空間モデルを用いて直接パラメータ推定を行った場合を表わす．さらに，NG-b ( $b=3, 3/2, 1, 3/4, 4/5$ ) は (10) 式とともに (15) 式のシステムノイズ  $v_n$  の密度関数にピアソン VII 型の分布を用いた場合で， $b$  はその形状パラメータを表わす．

HRS と KG の  $\alpha$  は他の方法より小さいが，それぞれのノイズの平均  $\eta = -1.2704$  と  $\zeta = -0.5772$  を引いた補正值  $\bar{\alpha}$  はそれぞれ 10.87, 10.82 となり，ほかの推定値とほぼ等しくなる．ただし，ノイズの分布を正規近似した場合，HRS では  $\tau^2$  の推定値は約 50%，KG では約 5% 小さな値になっている．

表 2: いろいろなモデル・計算法の対数尤度, AIC とパラメータの推定値

Model	対数尤度	AIC	$\tau^2$	$\alpha$	$\beta$	$\bar{\tau}^2$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
HRS	-2191.0	13545.3	0.0546	9.60	0.9686	—	10.87	—
NG-HRS	-2055.3	13273.9	0.1036	10.83	0.9529	—	—	—
KG	-886.8	13338.0	0.1816	10.24	0.9106	0.0950	10.82	0.9543
NG-KG	-856.3	13277.1	0.1935	10.83	0.9110	0.1013	—	0.9545
Direct	-6634.0	13274.0	0.1035	10.83	0.9529	—	—	—
NG-3.0	-6630.0	13266.0	0.2712	10.75	0.9495	—	—	—
NG-1.5	-6627.4	13260.7	0.0275	10.61	0.9544	—	—	—
NG-1.0	-6628.6	13263.1	0.0013	10.49	0.9548	—	—	—
NG-0.75	-6630.5	13266.9	0.0000	10.41	0.9547	—	—	—
NG-0.6	-6631.8	13269.5	0.0000	10.35	0.9551	—	—	—

KG および NG-KG の  $\tau^2$  および  $\beta$  の値は他のものと著しく異なっているが, 3.4 節の変換を行った  $\bar{\tau}^2$  と  $\bar{\beta}$  は他の値とよく対応している.

NG-HG と Direct の対数尤度の値は直接は比較できないが, データの変換の影響を補正した AIC の値はほぼ一致する. これに対して, NG-KG の AIC は 3.2 大きく, 一点おきにだけパラメータが変化するとした仮定の影響が見られる. しかし, HRS の AIC が NG-HRS より約 270 大きいものに対して, NG-KG では約 60 しか大きくなっていない. 以上から, 非ガウス型フィルタを用いて厳密な計算をする場合には (6) 式を用いない方がよいが, 正規近似する場合には (4) 式よりも (6) 式を用いた方が遙かによりよい結果が得られることを示している.

一方, 表 2 の下線より下に示す NG-3.0 などは, (3) 式のシステムノイズ  $v_n$  に (16) 式のピアソン分布族を用いた場合で 3.0 は形状パラメータ  $b$  を表わす.  $b = 1.5$  (自由度 2 の  $t$  分布) の場合に AIC の値が最小となっている.

表 3 は  $\alpha = 0, \beta = 1$  と仮定した非定常な場合の結果をまとめたものである. AIC の値の変化は表 1 の場合とほぼ同様である. ただし表 2 と表 3 を比較すると,  $\beta = 1$  と仮定した方がよいか否かの判定を行なうことができる. この例の場合にはすべての推定法について  $\alpha = 0, \beta = 1$  と仮定しない場合の方が AIC の値が小さくなっている.

図 3 の点は  $\log \sigma_n^2$  の値, 実線は AIC が最も小さくなった NG-HRS で推定した  $\log \sigma_n^2 + \alpha$  を示す.  $\log \sigma_n^2$  はしばしば下方に大きな跳びが見られるが推定された  $\log \sigma_n^2 + \alpha$  は点の分布の上限近くに貼り付いている. これは図 1 のノイズの分布は 3 以上ではほとん

表 3: 非定常モデルの場合の対数尤度, AIC とパラメータの推定値

Model	対数尤度	AIC	$\tau^2$	$\alpha$	$\beta$	$\bar{\tau}^2$
HRS	-2195.2	13549.7	0.0236	0.0	1.0	—
NG-HRS	-2063.3	13286.3	0.0619	0.0	1.0	—
KG	-893.3	13347.0	0.0839	0.0	1.0	0.0420
NG-KG	-864.2	13288.9	0.1216	0.0	1.0	0.0608
Direct	-6642.2	13286.4	0.0620	0.0	1.0	—
NG-3.0	-6640.4	13281.9	0.1679	0.0	1.0	—
NG-1.5	-6637.7	13277.4	0.0173	0.0	1.0	—
NG-1.0	-6638.8	13279.6	0.0006	0.0	1.0	—
NG-0.75	-6640.2	13282.5	0.0000	0.0	1.0	—
NG-0.6	-6641.4	13284.7	0.0000	0.0	1.0	—

ど 0 となることに対応している．一方, 図 4 は  $r_n$  とボラティリティに対応する  $e^{\alpha/2}\sigma_n$  を示す．

図 5 は NG-HRS による  $\log \sigma_n^2 + \alpha$  の推定値とガウス近似を行った HRS による推定値を比較したものである．HRS は NG-HRS と比較して著しく滑らかになっている．これはノイズの分布を分散の大きな正規分布で近似しており, とくに  $(-5, -2)$  と  $(2, 5)$  付近の密度関数の値が相対的に大きいので, 多少のずれを許容してしまうことによる．

図 6 は KG と NG-HRS の比較を示す．図 5 の HRS よりはよい近似が得られている．数箇所 KG の推定値は下方に大きく偏っている部分があるが, これは負の部分では正規密度の収束が (7) の分布より早いために図 3 にみられるいくつかの跳びに敏感に反応したことによる．

図 7 は NG-KG と NG-HRS によって推定した  $\log \sigma_n^2 + \alpha$  の比較であるが, 両者はほとんど一致している．

図 8 は KG の方法により推定したパラメータを用いて, NG-HRS の方法でボラティリティの推定を行った結果を示したものである．図の全域にわたってほぼ NG-HRS と一致しており, 少なくとも視覚的には両者の違いはみられない．これは, 計算時間の最も短い近似的な KG でパラメータ推定を行ない, 厳密な NG-HRS で 1 回だけフィルタおよび平滑化の計算を行うことにより, ほぼ厳密解が得られることを意味しており, ボラティリティの実用的な推定法を示唆している．

図 9 は非ガウス型システムノイズに拡張した NG-1.0 による推定結果を示す．シス

テムノイズに非ガウス型分布 ( $b = 1.0$  の場合はコーシー分布) を用いることにより,  $n = 200$  および  $800$  付近でボラティリティのジャンプ状の変化が自動的に検出されており, しかもその他の場所では NG-HRS と比較してより滑らかな推定値が得られている.

#### 4.1 シミュレーションによる推定量の比較

本稿で考えた確率的ボラティリティ・モデルのパラメータ推定法を比較するために, シミュレーションによる検討を行った. 真のモデルとしては (10) 式で  $\alpha = 1$  と仮定し,  $\beta = 0.9, 0.95, 0.99$  および  $\tau^2 = 0.05, 0.1, 0.3$  の 9 つの組み合わせに対して  $N = 1000$  のデータを 100 回生成し, それぞれの方法で推定したパラメータ  $\hat{\alpha}$  (表 4),  $\hat{\beta}$  (表 5) および  $\tau^2$  (表 6) の平均値と標準偏差を求めた.

推定量の分散に関しては,  $\alpha, \beta, \tau^2$  のすべてに関して, ほとんど常に

$$\text{HRS} > \text{KG} > \text{NG-HRS} = \text{NG-KG} \quad (28)$$

という関係が見られる. ただし, 非定常に近い  $\beta = 0.99$  の場合にはその違いはあまり大きくない. HRS と KG の分散比は理論値 (=1.5) に近い.  $\alpha$  の分散は  $\beta$  の値の増加とともに大きくなるが,  $\beta$  と  $\tau^2$  の分散は逆に小さくなる.

次に平均値についてみると,  $\alpha$  は HRS と KG のバイアス (1.270, 0.577) を補正すると,  $\beta = 0.95$  以下ではどの推定量もよい近似を与えている.  $\beta = 0.99$  の場合は分散が大きく, 平均値もずれているが,  $\beta = 1$  の非定常の場合には,  $\alpha$  はどんな値でも同等であることを考慮すると当然の結果ともいえる.  $\beta$  の推定量については, 全般に僅かな過小評価が見られるがこれは  $\beta$  のパラメータ空間が左右非対称にもかかわらずシミュレーション結果の集計に標本平均を用いたことによると思われる. NG-HRS と NG-KG はほぼ同等で KG もこれらに近い推定値を与えている. 一方,  $\beta$  の値が小さな場合には HRS にはバイアスが見られる.

$\tau^2$  に関しても, NG-HRS と NG-KG はほぼ同等, KG は  $\beta = 0.9$  以外ではこれらと非常に近い値を与えている. 一方, HRS には上方のバイアスが見られる.

## 5 まとめ

データにさまざまな変換を施してからモデルの推定を行うと, その尤度や対数尤度はまったく異なった値をとり, 相互比較は不可能となる. しかし, それらの変数変換を考慮した情報量規準 AIC を用いるとこれらの相互比較が可能となる.

表 4 :  $\alpha$  の推定結果の比較

$N = 1000$	$\hat{\alpha}^{HRS}$	$\hat{\alpha}^{KG}$	$\hat{\alpha}^{NG-HRS}$	$\hat{\alpha}^{NG-KG}$
$\beta = 0.9, \tau^2 = 0.05$	-0.264 (0.063)	0.430 (0.055)	0.999 (0.046)	1.003 (0.046)
$\beta = 0.9, \tau^2 = 0.1$	-0.261 (0.073)	0.438 (0.058)	1.004 (0.049)	1.009 (0.050)
$\beta = 0.9, \tau^2 = 0.3$	-0.276 (0.071)	0.440 (0.059)	0.999 (0.053)	1.015 (0.054)
$\beta = 0.95, \tau^2 = 0.05$	-0.272 (0.073)	0.426 (0.059)	1.001 (0.051)	1.003 (0.051)
$\beta = 0.95, \tau^2 = 0.1$	-0.268 (0.074)	0.438 (0.053)	1.007 (0.050)	1.012 (0.049)
$\beta = 0.95, \tau^2 = 0.3$	-0.281 (0.080)	0.436 (0.069)	0.992 (0.060)	1.006 (0.060)
$\beta = 0.99, \tau^2 = 0.05$	-0.257 (0.182)	0.444 (0.175)	1.017 (0.185)	1.017 (0.182)
$\beta = 0.99, \tau^2 = 0.1$	-0.315 (0.260)	0.384 (0.267)	0.945 (0.279)	0.949 (0.274)
$\beta = 0.99, \tau^2 = 0.3$	-0.282 (0.401)	0.419 (0.418)	0.981 (0.379)	0.993 (0.392)

表 5 :  $\beta$  の推定結果の比較

$N = 1000$	$\hat{\beta}^{HRS}$	$\hat{\beta}^{KG}$	$\hat{\beta}^{NG-HRS}$	$\hat{\beta}^{NG-KG}$
$\beta = 0.9, \tau^2 = 0.05$	0.839 (0.174)	0.873 (0.110)	0.875 (0.085)	0.884 (0.058)
$\beta = 0.9, \tau^2 = 0.1$	0.880 (0.091)	0.893 (0.043)	0.895 (0.033)	0.898 (0.031)
$\beta = 0.9, \tau^2 = 0.3$	0.883 (0.038)	0.890 (0.030)	0.891 (0.025)	0.896 (0.024)
$\beta = 0.95, \tau^2 = 0.05$	0.920 (0.071)	0.935 (0.046)	0.942 (0.021)	0.943 (0.021)
$\beta = 0.95, \tau^2 = 0.1$	0.939 (0.033)	0.943 (0.017)	0.944 (0.016)	0.945 (0.015)
$\beta = 0.95, \tau^2 = 0.3$	0.938 (0.019)	0.943 (0.016)	0.943 (0.015)	0.945 (0.014)
$\beta = 0.99, \tau^2 = 0.05$	0.986 (0.009)	0.986 (0.007)	0.986 (0.006)	0.987 (0.006)
$\beta = 0.99, \tau^2 = 0.1$	0.985 (0.007)	0.986 (0.007)	0.985 (0.007)	0.986 (0.007)
$\beta = 0.99, \tau^2 = 0.3$	0.985 (0.007)	0.985 (0.006)	0.985 (0.006)	0.986 (0.006)



表 6 :  $\tau^2$  の推定結果の比較

$N = 1000$	$\hat{\tau}^{HRS}$	$\hat{\tau}^{KG}$	$\hat{\tau}^{NG-HRS}$	$\hat{\tau}^{NG-KG}$
$\beta = 0.9, \tau^2 = 0.05$	0.133 (0.205)	0.074 (0.078)	0.062 (0.038)	0.056 (0.027)
$\beta = 0.9, \tau^2 = 0.1$	0.126 (0.148)	0.105 (0.059)	0.100 (0.039)	0.095 (0.035)
$\beta = 0.9, \tau^2 = 0.3$	0.346 (0.148)	0.310 (0.091)	0.310 (0.069)	0.291 (0.064)
$\beta = 0.95, \tau^2 = 0.05$	0.087 (0.097)	0.063 (0.045)	0.054 (0.021)	0.053 (0.021)
$\beta = 0.95, \tau^2 = 0.1$	0.115 (0.074)	0.105 (0.036)	0.103 (0.030)	0.100 (0.028)
$\beta = 0.95, \tau^2 = 0.3$	0.343 (0.096)	0.315 (0.071)	0.315 (0.062)	0.301 (0.059)
$\beta = 0.99, \tau^2 = 0.05$	0.052 (0.020)	0.050 (0.015)	0.049 (0.012)	0.049 (0.012)
$\beta = 0.99, \tau^2 = 0.1$	0.107 (0.029)	0.104 (0.024)	0.104 (0.018)	0.103 (0.018)
$\beta = 0.99, \tau^2 = 0.3$	0.311 (0.075)	0.299 (0.057)	0.299 (0.045)	0.291 (0.043)

非ガウス型の分布を用いた計算を直接行う NG-HRS と NG-KG はほとんど同じ結果を与える。分布の違いは変数変換の違いだけで一対一に対応しており、これらの方法の違いは (6) 式の近似を使うかどうかにある。あまり結果が違わないことを考えると、NG-KG を使う必要はないともいえるが、逆に NG-KG の方はデータ数が半分となるので計算時間が半分になる利点はある。非ガウス型フィルタの計算量はかなり大きいので、この点は考慮する価値がある。一方、ガウス近似を用いた HRS と KG の結果はかなり異なる。バイアス、分散の両方の観点から KG の方がよい結果を与えている。ただし、この方法は基本的に  $\beta = 1$  に近い状況を仮定しており、 $\beta$  が 0 に近い場合には変換 (6) を考慮した複雑な補正が必要であることに注意する必要がある。ただし、確率的ボラティリティモデルの場合には  $\beta = 1$  に近いと仮定することは問題がないと思われる。

非ガウス型フィルタを用いる方法とカルマンフィルタを用いた方法では明らかに非ガウス型フィルタを用いて厳密な計算をした方がよい結果が得られる。ただし、計算量の違いが著しいので目的に応じた使い分けが必要と思われる。図 8 の結果は、実用的なボラティリティの推定法を示唆している。すなわち、少なくとも経験的には、もっとも計算時間の早い KG でパラメータ推定を行ない、その結果を用いて NG-HRS での計算を 1 回だけ行うことにより、ほとんど厳密な最尤推定値と同じ結果が得られるとい

う興味ある事実が示された。

非ガウス型分布を直接用いる方法では、システムノイズに非ガウス型分布を用いる拡張も可能である。これによって、実際に AIC の値は改善され、またボラティリティの推定値においてもジャンプの検出と滑らかな推定値という、通常は相反する要求を同時に満たした推定が実現できることも確認できた。

## 参 考 文 献

- Blattberg ,R. C. and Gonedes ,N. J. (1974) , “A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices” , *Journal of Business* , 47 , 244-280.
- Bollerslev , T. (1986) , “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity ” , *Journal of Econometrics* , 31 , 307-327.
- Engle , Robert F. (1982) , “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation ,” *Econometrica* , 50 , 987-1008.
- Fama , E. F. (1965) , “The Behavior of Stock Market Prices” , *Journal of Business* , 38 , 34-105.
- Harvey , A.C. , E. Ruiz and N. Shephard (1994) , “Multivariate stochastic variance model” , *Review of Economic Studies* , 61 , 247-264.
- Harvey , A. and Shephard , N. (1996) , “Estimation of an Asymmetric Stochastic Volatility Model of Asset returns” , *Journal of Business & Economic Statistics* , Vol. 14 , No. 4 , 429-434.
- Heynen , R. C. and Kat , H. M. (1994) , “Volatility Prediction: A Comparison of the Stochastic Volatility , GARCH(1 , 1) , and EGARCH(1 , 1) Models” , *The Journal of Derivatives* , Winter , 50-65.
- Jacquier , E. and Polson , N and Rosi , P.E. , (1994) , “Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models” (with discussion) , *Journal of Business & Economic Statistics* , Vol. 12 , No. 4 , 371-417.
- Kariya , T. , Tsukuda , Y. , Maru , J. , Matsue , Y. and Omaki , K. (1995) , “An extensive analysis on the Japanese markets via S. Taylor’s model” , *Financial Engineering and the Japanese Markets* , Vol. 2 , No. 1 , 15-86.
- Kitagawa , G. (1987) , “Non-Gaussian State-Space Modeling of Nonstationary Time Series” (with discussion) , *Journal of the American Statistical Association* , Vol.82 ,

No. 400 , 1032-1063.

北川源四郎 (1993) , FORTRAN77 時系列解析プログラミング , 岩波書店 , 東京 .

Kitagawa , G. and Gersch , W. (1985) , “A smoothness priors time varying AR coefficient modeling of nonstationary time series” , *IEEE trans. on Automatic Control* , AC-30 , 48-56. Kitagawa , G. and Gersch , W. (1996) , *Smoothness Priors Analysis of Time Series* , Springer-Verlag , New York.

Mandelbrot , B. (1963) , “The Variation of Certain Speculative Prices” , *Journal of Business* , 36 , 394-419.

Nelson , D. B. (1988) , “Time Series Behaviour of Stock Market Volatility and Returns” , *Unpublished Ph.D Dissertation*.

Nelson , D. B. (1991) , “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A New Approach” , *Econometrica* , 59 , 347-370.

Nagahara , Y. (1996) , “Non-Gaussian Distribution for Stock Returns and Related Stochastic Differential Equation” , *Financial Engineering and the Japanese Markets* , Vol. 3 , No. 2 , 121-149.

Nagahara , Y. and Kitagawa , G. (1999) , “Non-Gaussian Stochastic Volatility Model” , *Journal of Computational Finance* , forthcoming.

片山 徹 (1983) , 応用カルマンフィルター , 朝倉書店 , 東京.

## 付録： 非ガウス型フィルタの計算アルゴリズム

最も簡単な方法では , 状態  $x_n$  の範囲をカバーする区間  $x_{min} < x_n < x_{max}$  を  $K$  個の等間隔な区間

$$x_{min} = t_1 < t_2 < \dots < t_K = x_{max}, \quad \Delta t = t_i - t_{i-1} \quad (29)$$

を考え , 区間  $[t_k - \Delta t/2, t_k + \Delta t/2]$  上の確率を  $p_n(k)$  ,  $f_n(k)$  とする . すなわち ,

$$\begin{aligned} p_n(k) &= \int_{t_k - \Delta t}^{t_k + \Delta t} p(x_n | Y_{n-1}) dx_n \\ f_n(k) &= \int_{t_k - \Delta t}^{t_k + \Delta t} p(x_n | Y_n) dx_n \end{aligned} \quad (30)$$

とする . また , システムノイズについては ,  $j = -k, \dots, 0, \dots, k$  について

$$v(j) = \int_{\Delta(t-1/2)}^{\Delta(t+1/2)} p(v) dv \quad (31)$$

と定義する .

このとき , 非ガウス型フィルタは以下の計算により実現できる .

1.  $p(x_{n-1}|Y_{n-1})$  から  $p(z_n|Y_{n-1})$  を求める .

$p(x_{n-1}|Y_{n-1})$  は  $f_{n-1}(1), \dots, f_{n-1}(K)$  によって近似されているとする . このとき

(a)  $g(k) = 0 (k = 1, \dots, K)$

(b)  $j = 1, \dots, K$  について

- $m = (\beta t_j - t_1) / \Delta t$
- $g(m) = g(m) + f_{n-1}(j)(m + 1 - \beta t_j / \Delta t)$
- $g(m + 1) = g(m + 1) + f_{n-1}(j)(\beta t_j / \Delta t - m)$

2.  $p(z_n|Y_{n-1})$  から  $p(x_n|Y_{n-1})$  を求める

$j = 1, \dots, K$  について

$$p_n(j) = \sum_{i=-K}^K g(j-i)v(i) \tag{32}$$

3.  $p(x_n|Y_{n-1})$  から  $p(x_n|Y_n)$  を求める

$$\begin{aligned} \bar{f}_n(j) &= p_n(j)r(y_n|x_n) \\ f_n(k) &= \frac{\bar{f}_n(j)}{\sum_{i=1}^N \bar{f}_n(i)} \end{aligned} \tag{33}$$

ただし ,  $r(y_n|x_n)$  は観測ノイズの密度関数である .

図1 正規分布による近似 (1)

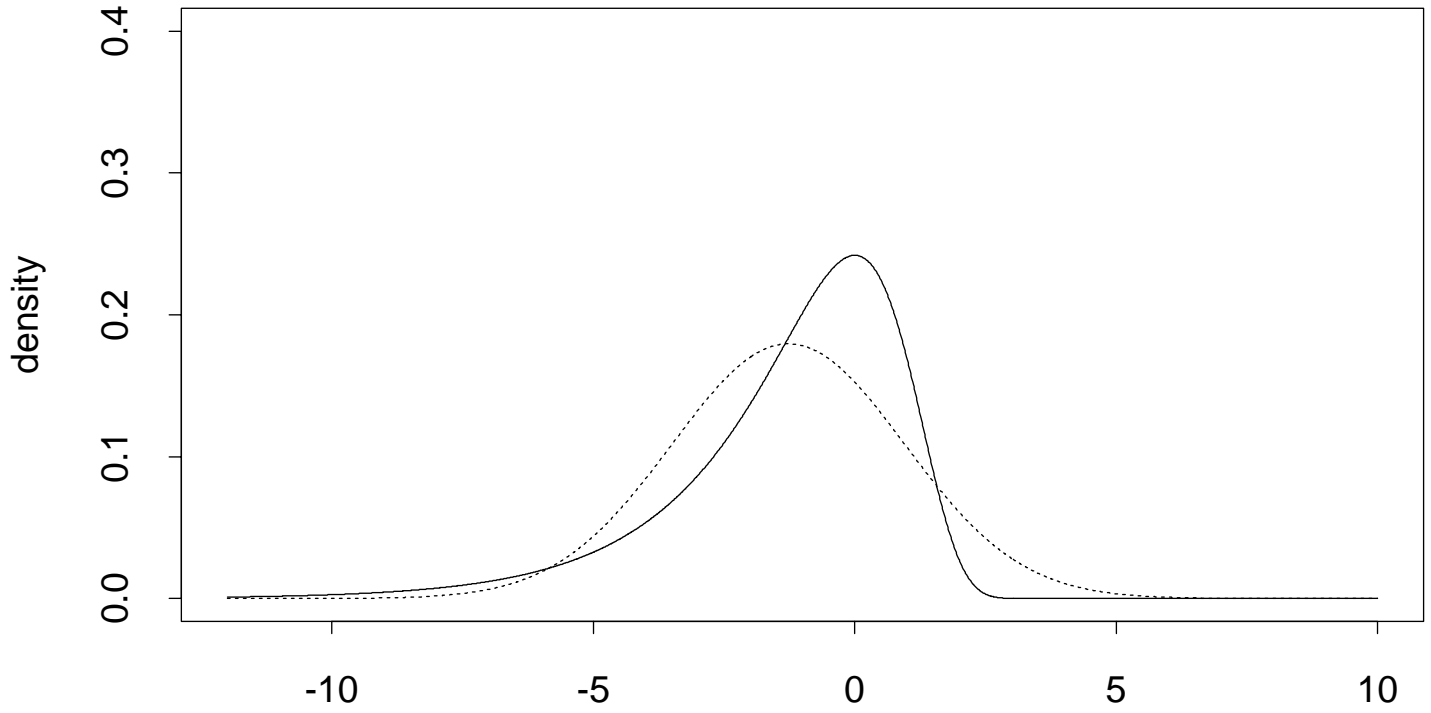


図2 正規分布による近似 (2)

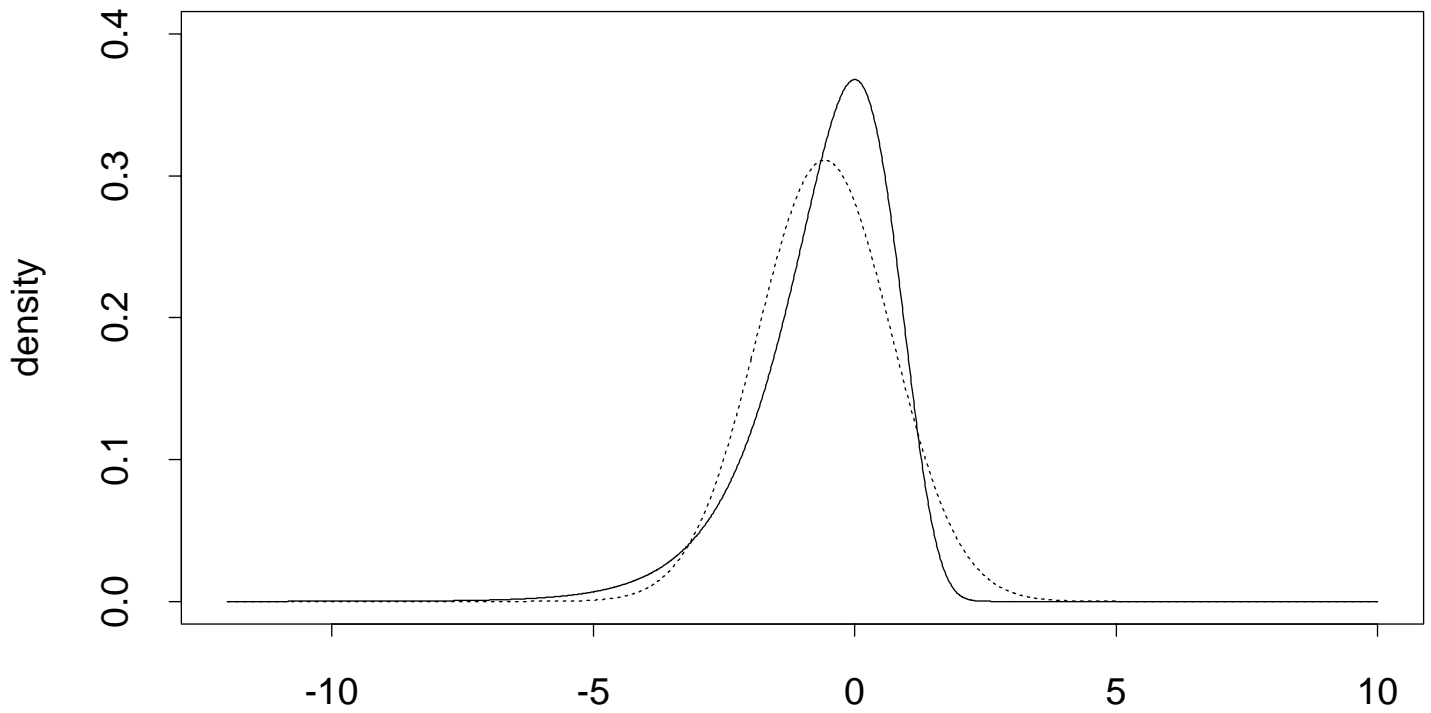
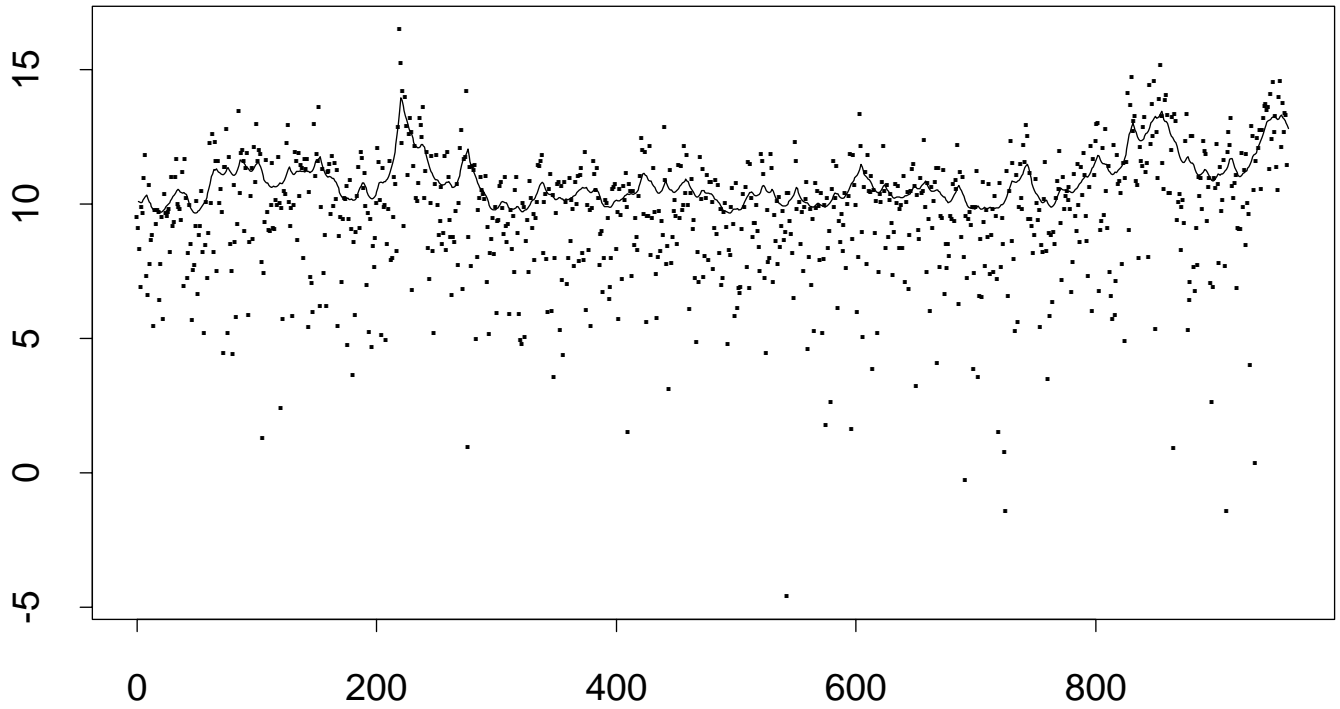
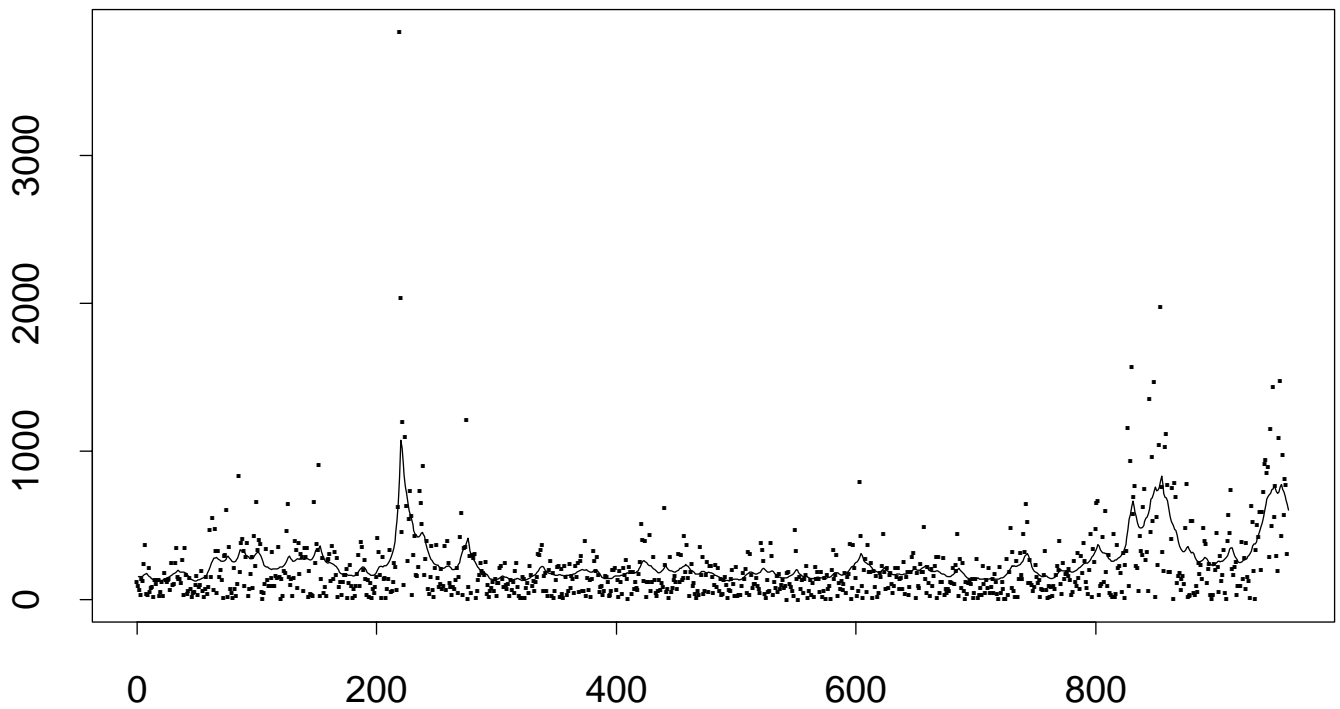


図3 推定された Volatility (Log)



NG-HRS(実線), 観測値(点)

図4 推定された Volatility (絶対値)



NG-HRS(実線), 観測値(点)

図5 HRS(実線), NG-HRS(破線)

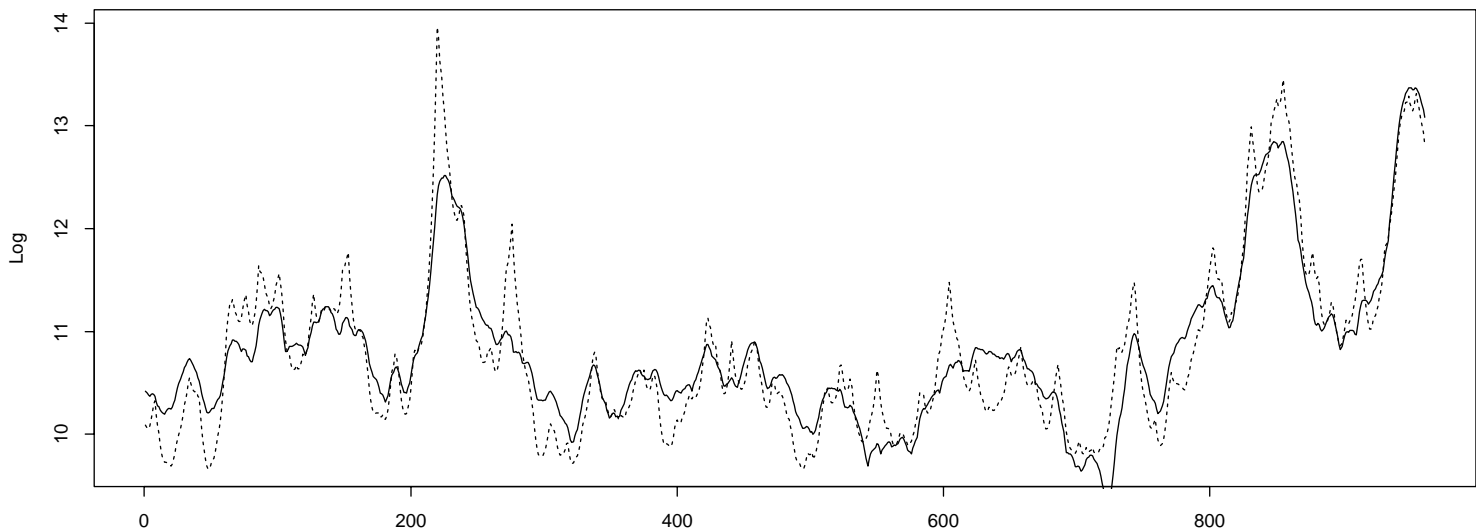


図6 KG(実線), NG-HRS(破線)

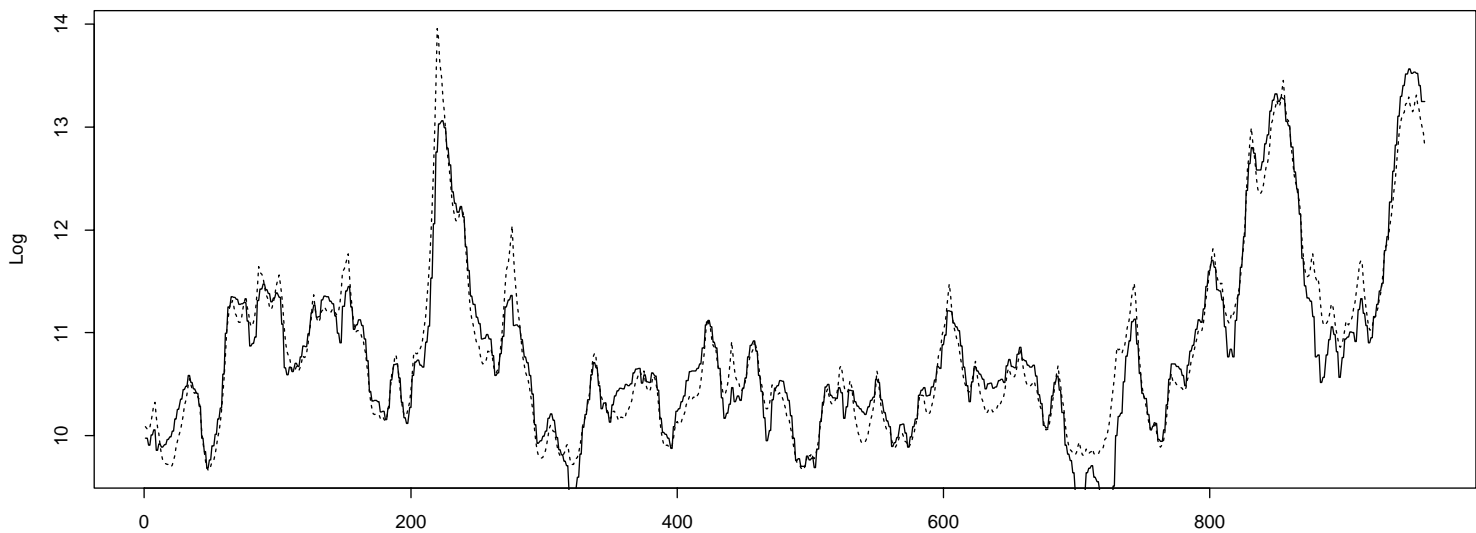


図7 NG-KG(実線), NG-HRS(破線)

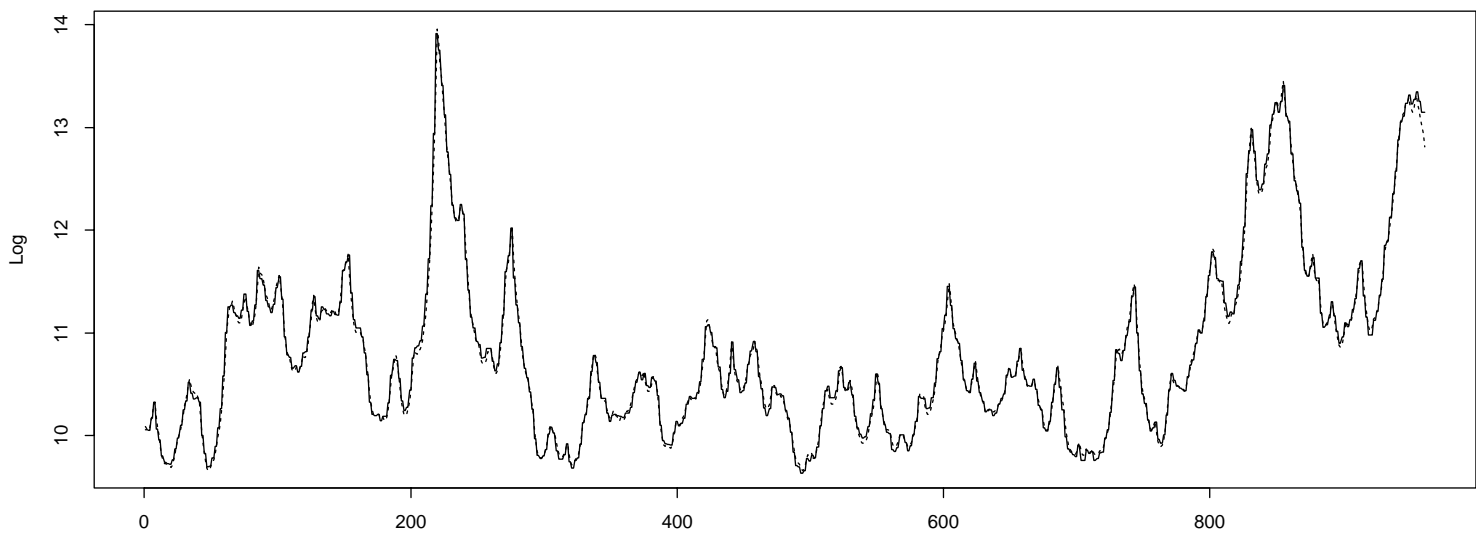


図8 KGのパラメータを使ったNG-HRS (実線), NG-HRS(破線)

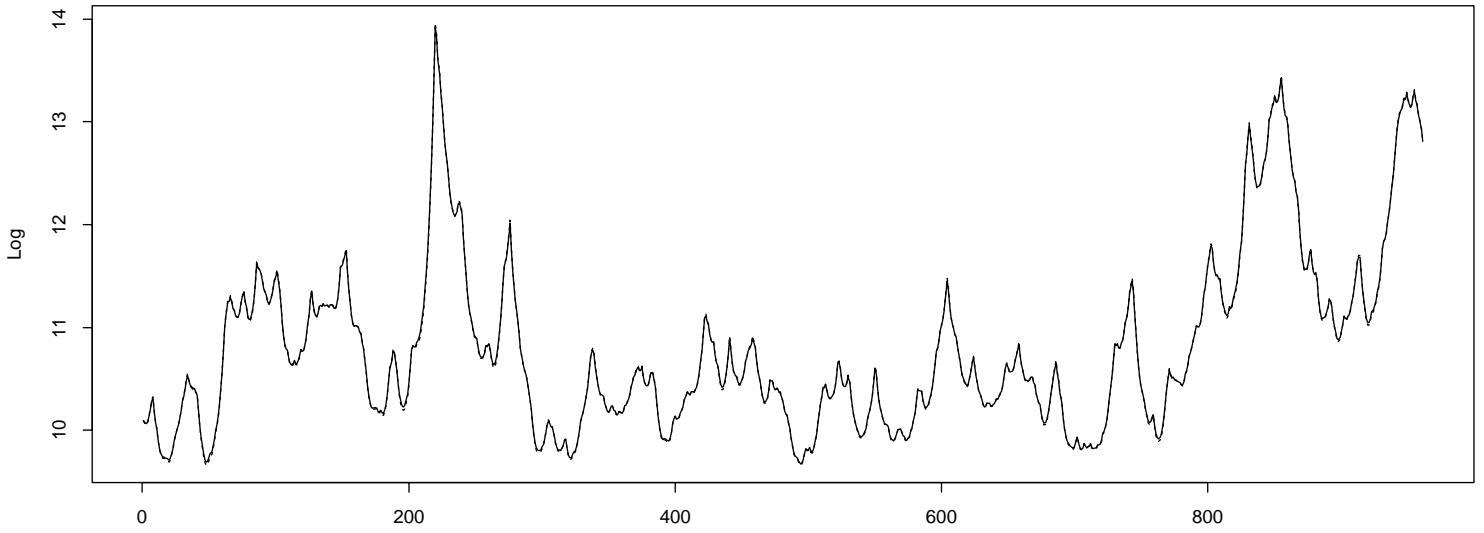


図9 非ガウスモデル NG-1.0(実線), NG-HRS(破線)

