IMES Discussion Paper Series 97-J-12
1997 年 10 月

信用リスクを反映した金融商品のプライシング

小田信之[†]

要　旨

本稿では、一般に金融商品をプライシングする上で、取引相手等の信用リスクを反映させた理論価格を算定する方法について解説する。

はじめに、金融機関において信用リスクのプライシングを行うための実務的な考え方を整理する。具体的には、レプリケーションの考え方および割引率に織り込むリスクプレミアムの推定方法の２点を中心に検討する。ここでは、確定的なキャッシュフローをもつ金融商品を対象として、直観的に理解しやすいフレームワークで説明を行う。

次に、デリバティブ商品を含めた任意の金融商品を対象とできる一般的なプライシング理論を紹介する。具体的には、これまでに提唱されてきた各種プライシング・モデルの中から、ジャローとターンブル等によるモデル、ダフィー等によるモデル、ロングスタッフとシュワルツによるモデルの３つに焦点を当てて、数理的な解説を行う。

最後に、クレジット・デリバティブの理論価格を算定する方法について検討を加える。それまでに示した知識を前提として、各種のクレジット・デリバティブごとに、どのようなプライシング方法が有効であるかを議論する。

信用リスクを反映させてプライシングを行うことは、競争的な市場において金融ビジネスを効果的に展開する上での重要な要素である。従って、本稿で整理したような内容が、現実の経営に有効に活用されることが望まれよう。

キーワード：信用リスク、アセット・プライシング、リスクプレミアム、クレジット・デリバティブ

† 日本銀行 金融研究所 研究第１課 (E-mail: nobuyuki.oda@boj.or.jp)

１．はじめに

金融商品の価格は、トレーディング業務・バンキング業務を問わず金融仲介ビジネス全般において、経営・営業政策運営上不可欠な情報である。例えば、本部・営業店間の仕切りレート（行内移転価格）の設定が営業政策上果たす役割や、複雑なデリバティブ商品を開発・取引する上でのプライシングおよびヘッジ技法の役割などを思い起こせば、プライシングの重要性を理解することは容易である。実際、金融機関は、従来から熱心にプライシング技術の開発・実用化に取り組んできている。ただ、取引相手等の信用リスク（ディフォルト可能性の効果）の扱いについて従来の実務上の対応をみると、全体として枠管理等を行うに止まり、個別取引レベルのプライシングでは比較的粗い近似計算に終わる場合が多かったようである。その背景について考えると、特にわが国では信用度の高い相手との取引を前提としたり有担保原則を基本とするといった取引慣行が長期にわたり続いていたという事情があるが、このほかに技術的な問題としては、信用リスクの効果を正面から推定しようとするとディフォルトという事象を扱うために高度な確率モデルを用意する必要があり、その負担が重かったという面もあろう。しかし、近年の金融数理技術の発展に伴い、信用リスクの効果を厳密に扱うプライシング・モデルが提唱されはじめ、このところ研究者および実務家の間で注目を集めている。また、銀行業界を取り巻く環境変化をみても、信用リスクを定量的に把握して経営・営業戦略に反映させるインセンティブが強まっている。特にわが国では、金融業務自由化の流れの中で競争原理の機能が高まってきていること、バブル崩壊の反省、あるいはリスク対比リターンに基づくパフォーマンス評価の浸透などの諸要因から、金融取引を締結する上で相手の信用リスクに見合った適正スプレッドを認識しておく必要性が強まっている。また、会計制度の見直し議論においても、すべての資産を時価評価すべきといった考え方があるが、それを徹底しようとすれば伝統的な貸出から最新のデリバティブ取引に至るまであらゆる金融取引について取引相手の信用リスクを勘案した公正価格[1]を算出することに行き着く可能性もある。さらに、最近話題のクレジット・デリバティブについても、信用リスクそのものを取引する商品であることから、そこで収益をあげていくためには信用リスクに見合った公正価格を知ることがポイントとなる。

---

[1] 本稿では、fair value の訳語として浸透している公正価格という言葉を使用するが、その直観的な意味は、客観的にみて適正な価格といったものであって、文字どおり「公正な」価格が特定的に存在している訳ではない点に注意されたい。

このように、信用リスクを反映させたプライシングという問題については、実務上の重要性が高まる一方で依然として技術上の扱いが必ずしも容易ではない面がある。そこで本稿では、既存の主要研究論文のサーベイ等をベースに筆者独自の解釈も織りまぜ、信用リスクを反映させたプライシングに関する技術的課題につき包括的な参考情報を提供することを目的とする。この分野では、既に確立した方法論が存在しているとは言い難い一方、議論が日進月歩で進んでいる面もある。このため、教科書的な情報整理が可能かどうかは疑わしいが、少なくとも現時点で典型的な各種の考え方を理解しておくことは重要であろう。

本稿の構成は次のとおりである。まず第２章では、金融機関の実務家が金融商品のプライシングに当たって信用リスクをどのように扱おうとしているか、基本的な考え方を示す。そこでの方法だけが全てではないが、実務家がしばしば念頭に置いている典型的な考え方をまとめたものと位置付けられる。次に、第３章では、実務的方法の背景にある理論的枠組みを示すとともに、デリバティブ商品なども分析対象とすることが可能な一般化されたプライシング理論について解説する。具体的には、各種理論モデルの中でも特に有名な３つのタイプのモデルの概要をそれぞれ紹介する。さらに第４章では、それまでに解説した方法論の応用例を示すことも兼ねて、各種クレジット・デリバティブ商品の理論価格の導出方法を整理することを試みる。最後に第５章では、こうしたプライシングに関する若干の留意点を述べて結びとする。

２．信用リスクを取り入れたプライシングの実務的方法

本章では、複雑な理論モデルに立ち入ることなく、信用リスクの効果を取り入れたプライシングを実践する上での基本的な考え方を示す。本章では、特に、約定キャッシュフローが確定した金融取引[2]だけを評価対象とする。プライシングの対象をデリバティブ取引等に拡張するにはより技術的な議論を避けられないが、それらは第３章の理論的解説の中で扱われる。

なお、市中金融機関が基準スプレッドを設定する際には、信用リスクのほかに流動性リスク見合いのプレミアムを勘案するほか、管理会計的な視点からオーバーヘッド等の諸コストを割り当てたり、営業政策的な視点から「総合採算」

---

2 貸出や固定利付債券が該当する一方、スワップ、オプション等のデリバティブ取引などは含まれない。

ベースでの調整を加えたりすることがある。本稿では、信用リスクの議論に焦点を絞るためにこれらの問題には立ち入らない。しかし、実務的にはこれらの扱いの重要性は、わが国に限らず欧米の商業銀行等でも強く認識されている[3]ことに注意を要する。

（1）プライシングの基本

信用リスクを取り込んだ金融商品のプライシング方法としては、基本的に、

①レプリケーション（複製）、
②割引（リスクプレミアムを織り込んだ割引レートの推定）、

の２つの考え方がある。両者は、本章だけでなく、本稿全体を通じて議論の主軸となる。割引（将来のキャッシュフローの現在価値化）の考え方自体は良く知られているので、改めて解説する必要はなかろう。実務上は、割引レートの中に織り込むべきリスクプレミアムの評価方法が論点となり得るが、この問題は（２）節で扱う。また、レプリケーションの考え方も、信用リスクを勘案したプライシング上の問題にとどまらず、現代ファイナンス理論全体の根幹をなす重要な概念である。これは、取引コストや税効果等を無視し得る世界において、無裁定条件[4]の成立を仮定した場合、ある取引Ａと全く同一のキャッシュフロー・スケジュールをもつポートフォリオＢ（Ａ以外の複数個の取引から構成）を想定すると、取引Ａの市場価格とポートフォリオＢの市場価格（Ｂを構成する各取引の市場価格の合算値）が常に一致しなくてはならないという原理である。取引Ａの価格が未知であるがポートフォリオＢを構成する各商品の市場価格が分かっている場合に、ポートフォリオＢの価格をもって取引Ａの価格とするのがレプリケーション法である。

仮に市場が完備（完備性については後述）であれば、レプリケーションの方法だけによってあらゆる金融商品をプライシング可能である。しかし現実の市場は完備でないため、レプリケーション法だけではプライシングできない金融商品が存在する。これらの理論価格を導出するには、何らかのモデルに基づき推定したリスクプレミアムを使ってキャッシュフローを割り引く必要がある。

---

3 こうした効果を実務的にどのように調整するかについては、例えばBasu and Rolfes, Jr [1996]等を参照。

4 無裁定条件とは、リスクをとることなく利益を稼ぐ（すなわち、裁定の機会がある）ことはできない、という命題である。

次に、レプリケーションと割引の考え方を信用リスクの問題と関連づけて具体的に示す。はじめに、信用リスクがなく将来のキャッシュフロー・スケジュール（現時点から i 期先に C_i のキャッシュフローが発生）が確定している[5]タイプの資産（例えば利付国債）を考える。現時点 t におけるその理論価格 P_t は、各キャッシュフローC_i を無リスク金利$R_t^F(i)$で割り引いた現在価値の合算値として、

$$P_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{[1 + R_t^F(i)]^i} \tag{2-1}$$

と表される[6]。このアナロジーとして、ディフォルト可能性がある資産（例えば事業債）の理論価格は、

$$P_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{[1 + R_t^F(i) + \rho_t(i)]^i} \tag{2-2}$$

と書ける。ここで、分母の$\rho_t(i)$はクレジット・スプレッドである。これは、与信先のディフォルト確率（厳密には、累積ディフォルト確率）$\Pi_t(i)$、ディフォルト時の回収率$\varphi_t(i)$、投資家が要求するリスクプレミアム$\xi_t(i)$といった変数に依存して決まるはずである。その関係をみるには、(2-2)式に代替する表現として、

$$\begin{aligned} P_t &= \sum_{i=1}^{n} \frac{E[C_i]}{[1 + R_t^F(i) + \xi_t(i)]^i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{[\varphi_t(i)\Pi_t(i) + \{1 - \Pi_t(i)\}] \cdot C_i}{[1 + R_t^F(i) + \xi_t(i)]^i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{[1 - \{1 - \varphi_t(i)\}\Pi_t(i)] \cdot C_i}{[1 + R_t^F(i) + \xi_t(i)]^i} \end{aligned} \tag{2-3}$$

と記述可能である[7]ことが参考になる（E[・]は期待値を表す）。(2-2)、(2-3)を比較すると、

$$\rho_t(i) \cong \pi_t(i) + \xi_t(i) \tag{2-4}$$

5　キャッシュフロー・スケジュールが確定しているとは、すべての C_i が定数で与えられており、他の市場レート等の将来の動向に依存しないということである。

6　本章では、理解の容易さを重視し、離散時間の世界で表記する。因みに、(2-1)式を連続時間の世界で表現すると、$P_t = \int_t^T e^{-(s-t)\cdot R_t^F(s-t)} dC_s$ となる。なお、第 3 章では、理論面での扱い易さを重視し、連続時間の世界での議論を基本とする。

7　ここでの代替表現に関する説明は、室町・浅原 [1997]にヒントを得たものである。

という関係が示される[8]。ただし、右辺の$\pi_t(i)$は次式により定義される変数であり、回収率調整後のディフォルト確率（年率ベース）と解釈可能である。

$$[1-\pi_t(i)]^i \equiv \varphi_t(i)\Pi_t(i)+[1-\Pi_t(i)] \qquad (2\text{-}5)$$

次に、前述したレプリケーション法の具体例を示す。ある事業会社が j 期先(j = 1, 2, …, n)に満期を迎える n 種銘柄の割引債（額面金額は 1）を発行している仮想的なケースを考える。各割引債の市場価格D_t^jは、市場での流通価格として観測可能であるとする。このとき、同社が他にどのような債券（ただし満期が n 期以内）を発行するとしても、その理論価格P_tを導出可能である。具体的には、当該債券の i 期におけるキャッシュフローをC_iとして、

$$P_t = \sum_{i=1}^{n} C_i D_t^i \qquad (2\text{-}6)$$

となる。なぜなら、i 期に満期を迎える割引債をC_i単位ずつ(i = 1, 2, …, n)集めて構成したポートフォリオは、新たに発行する債券と完全に同一のキャッシュフロー・スケジュールを有するため、レプリケーション（複製）の関係にあるからであり、債券価格は上記ポートフォリオの時価に一致しなければならない。

この例に限ってみれば、同事業会社が実際に n 種類の割引債を発行しており、かつ市場でその時価を観測可能である場合に、市場は完備であると言う。このように、市場の完備性と無裁定条件が満たされていれば、レプリケーション法のみによってあらゆる資産をプライシングすることが可能である。

ところで実際の市場では、無裁定条件も市場の完備性も厳密には成り立たない。無裁定条件が成り立たないのは、取引コストや会計・税制等の制度要因な

---

[8] (2-2)、(2-3)および(2-5)式より、

$$[1+R_t^F(i)+\rho_t(i)] = [\frac{1+R_t^F(i)+\xi_t(i)}{1-\pi_t(i)}]$$

の関係を得る。ここで、$0 \leqq \pi_t(i) \ll 1$であることから$\frac{1}{1-\pi_t(i)} \cong 1+\pi_t(i)$とテーラー近似できることに着目すると、

$$\begin{aligned}[1+R_t^F(i)+\rho_t(i)] &= [\frac{1+R_t^F(i)+\xi_t(i)}{1-\pi_t(i)}] \\ &\cong [1+R_t^F(i)+\xi_t(i)]\cdot[1+\pi_t(i)] \\ &\cong 1+R_t^F(i)+\xi_t(i)+\pi_t(i)\end{aligned}$$

と近似可能であり、(2-4)式が示される。

ど、様々な「摩擦」が市場に存在するからである。本稿では、こうした「摩擦」の効果が僅少であるとの近似を前提に、以下無裁定条件の成立を仮定して話を進める[9]。一方、市場の完備性が成り立たないケースとしては、上例において、n 種類の割引債のうち幾つかが発行されていない（または市場で流通していない）場合を想定できる。実際、１つの事業会社が毎期ごとに満期を迎える n 種類の債券を発行しているのは例外的であろう。ここでは、k 期先 (1＜k＜n)を満期とする割引債が存在しないと想定して、どのような対応が考えられるか検討してみる。欠けている情報はD_t^kであるが、(2-2)、(2-3)式によれば理論的には、

$$\begin{aligned} D_t^k &= \frac{1}{[1+R_t^F(k)+\rho_t(k)]^k} \\ &= \frac{[\varphi_t(k)\Pi_t(k)+\{1-\Pi_t(k)\}]\cdot 1}{[1+R_t^F(k)+\xi_t(k)]^k} \end{aligned} \qquad (2\text{-}7)$$

と表現できる。従って、外生的に、$\rho_t(i)$ないし$\Pi_t(i)$、$\varphi_t(i)$、$\xi_t(i)$を推定できれば、D_t^kに関する情報を補うことができる。ここで技術的にポイントとなるのは、各パラメータの推定方法、就中$\xi_t(i)$の推定方法である。これについては（２）節で扱う。

なお、予め断ったように、本章での議論は約定キャッシュフローが確定的である資産（貸出や固定利付き債等）のみを対象とした。この場合、将来実現するキャッシュフローを事前に正確には予想できないと言う意味での不確実性を生み出しているのは、与信先のディフォルト可能性という要素のみである。従って、各期のディフォルト確率だけを状態変数としてその総数と同数個の相異なる資産について市場価格を知ることさえできれば、市場の完備性が保証される訳である。しかし、実際の市場には、キャッシュフローがディフォルト確率のほかに各種市場レート等にも依存する金融商品が数多く出回っている。典型的には、将来の原資産価格（金利、為替レート、株価等）の動きに依存してキャッシュフローが決まる各種デリバティブ商品（先物、スワップ、オプション等）を挙げられる。これらの商品をプライシングする場合には、ディフォルト確率に加え、各種市場レートにも対応した状態変数を認識する必要があり、その分だけ多種類の資産について市場価格を知ることができなければ市場が完備であるとは言えない。このように考えると、レプリケーション法によってプライシングが可能なのはむしろ例外的なケースであって、実際には、何らかのモデルに基づきリスクプレミアム等を推定することによって市場完備性を補完す

---

[9] こうした「摩擦」の効果を明示的に取り入れたモデルによりプライシングを行う試みも最近では見受けられるが、本稿ではこの問題には立ち入らない。

る必要がある場合が多いと言える。

（2）割引レート算定のためのリスクプレミアムの推定

前節で示したように、レプリケーション法だけではプライシングできない金融商品に対しては、割引レートを推定することによりプライシングを行えばよい。割引レート $R_t(i)$ を無リスク金利、回収率調整後ディフォルト確率、リスクプレミアムの和として

$$R_t(i) \equiv R_t^F(i) + \pi_t(i) + \xi_t(i) \tag{2-8}$$

と定義すると、(2-2)、(2-4)式から、ディフォルト可能性がある債券の価格 P_t は、

$$P_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{[1 + R_t(i)]^i} \tag{2-9}$$

と表される。本節の目的は $R_t(i)$ を算定することであるが、(2-8)式の右辺各項の中で、①無リスク金利 $R_t^F(i)$ は国債イールドカーブから算定可能であるほか、② $\pi_t(i)$ も回収率（回収額や償却額等に関するヒストリカル・データから推定）および累積ディフォルト確率（信用格付け＜含、行内格付け＞およびディフォルト確率のヒストリカル・データから推定）の推定値に基づき(2-5)式に従って決定可能である[10]。一方、③リスクプレミアム $\xi_t(i)$ の推定方法は理論的に必ずしも自明ではない。

このように、割引レートを算定する上でテクニカルな検討が問われる部分は主としてリスクプレミアムの推定方法であることを踏まえ、本節では以下、この問題に焦点を当てる。

実務家の間では、リスクプレミアムの推定方法として、

イ．リスク・キャップ法
ロ．ベータ法（ＣＡＰＭの応用）

と呼ばれる手法が利用可能であると言われている。それぞれ、コンセンサスを得た唯一の計算手順が確立している訳ではないようであるが、以下では、各計算方法の一例について順に紹介・解説する。

---

[10] 実務上は、ディフォルト確率や回収率の推定はヒストリカル・データの制約等もあって決して容易な作業ではないが、本稿では理論的問題に焦点を絞るため、これらの推定方法の問題には立ち入らない。

イ．リスク・キャップ法

リスク・キャップ法（またはリスク・キャピタル法）の基本的考え方は次のとおりである。金融機関は、経営の健全性を維持するために、保有ポートフォリオのリスクに見合ったキャピタル（これをリスク・キャピタル＜risk capital＞と呼ぶ）を準備しておく必要がある。そのキャピタル保有に伴うコスト（cost of capital）をリスクプレミアムとして認識し、スプレッドに転嫁することによって採算を確保すればよい。

リスク・キャップ法の計算ステップは、

①対象取引にかかるリスク・キャピタルの算定、

②資本コストの推定、

の２つから成る。①、②のそれぞれについては、唯一の決まった方法がある訳ではない。本稿では、比較的理解し易くかつ市場での利用例が報告されている方法の１つとして、①についてバリュー・アット・リスク（以下、VAR）の計算を、②について CAPM (Capital Asset Pricing Model)に依拠した推定を解説する。

すなわち、既存のポートフォリオを P、それに新規取引 i を加えたポートフォリオを P+i と表記すると、後者と前者のリスク・キャピタルの差

$$\mathrm{VAR}(P+i;\phi)-\mathrm{VAR}(P;\phi) \qquad (2\text{-}10)$$

が、①で算定すべき値である。VAR 算定上の信頼度（パーセンタイルの水準）の設定については、個々の金融機関が自己のリスク選好度（パラメータϕ）を反映させて最適な選択をすると考える。また、VAR の計算ロジックそのものについては、特に信用リスクを評価する場合には確立された手法が決まっている訳ではなく様々な選択があり得るが[11]、本稿では各方法論の比較には立ち入らず、金融機関それぞれが最適と考えた計算方法を採用すると想定する。次に、②の資本コスト推定に当たって実務的にしばしば用いられる方法は、株主が金融機関経営者に要求する所要リターン k_t を CAPM の枠組みで推定するものである[12]。具体的には、

$$k_t = R_t^F + \beta \cdot (R_t^M - R_t^F) \qquad (2\text{-}11)$$

---

11 信用リスクを取り込んだ VAR の計算方法については、池森 [1997]、小田・村永 [1996]、J.P. Morgan & Co. [1997]等を参照。特に、J.P. Morgan & Co. [1997]は、VAR 計算上の諸過程において様々な選択肢や考え方があり得ることを包括的に整理している。

12 この考え方は、多くの標準的な解説書で示されている。例えば、Basu and Rolfes, Jr [1996]を参照。

が算定すべきコスト率である（ここでR_t^Mは株式市場全体の収益率を表す）。(2-11)式において、βは金融機関自身の株価にかかるベータ値であり、通常は過去の株価収益率の時系列データをマーケットリスク・プレミアムに対して回帰分析することによって推定される。(2-10)および(2-11)より、取引 i に対する所要リスクプレミアム額（金額ベース）は、

$$k_t \cdot [\mathrm{VAR}(P+i;\phi) - \mathrm{VAR}(P;\phi)] \qquad (2\text{-}12)$$

と求められ、これを取引 i の元本で除せば、(2-8)式におけるリスクプレミアムξ_tを得る。これを実際に計算する上での技術的な問題は、如何に VAR を定義し計量するかにあるが、この点については（３）節の議論とも関係する。

ロ．ベータ法（CAPM 法）

ベータ法は、従来株式市場に対して適用されてきた CAPM の考え方をクレジット市場（主として信用リスクを有する債券の市場）に適用することによってリスクプレミアムを推定しようとするものである。こうした分析については、信用スプレッドを対象とする投資戦略の策定やリスク・コントロールを行う上で有効であるとの報告がなされている[13]ほか、本節と同様リスクプレミアムの推定を目的とした応用例も報告されている[14]。CAPM の枠組みでは、市場参加者が株式資産に分散投資を行う結果としてアンシステマティック・リスクに対するリスクプレミアムの存在が否定されることとなるが、この考え方を本節の文脈に応用すれば、信用リスクについてもシステマティックな部分だけに着目してリスクプレミアムを推定すればよいと解釈できる。

具体的な計算をみるには、まず、分析対象商品 i の収益率（リターン）$\tilde{R}_t^i$の期待値$E_t[\tilde{R}_t^i]$を CAPM に従って次のようにモデル化する。

$$E_t[\tilde{R}_t^i] - R_t^F = \beta_i (E_t[\tilde{R}_t^M] - R_t^F) \qquad (2\text{-}13)$$

ただし、$\beta_i \equiv \dfrac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_t^i, \tilde{R}_t^M)}{\sigma_{R_t^M}{}^2}$、$\tilde{R}_t^M$＝ベンチマーク市場の収益率

13 例えば、Karagiannis [1994]、Litterman and Winkelmann [1996]を参照。特に、Litterman and Winkelmann [1996]は、米証大手のゴールドマン・サックスが自社ポートフォリオのマーケット・リスクの測定およびコントロールを行うために実際に利用している考え方（market exposure と呼ばれる概念）を紹介しているが、その背景にある論理は、CAPM と同様であると考えられる。

14 例えば、Hurley and Johnson [1996]を参照。

通常の標記に従い、リスクの市場価格(market price of risk)を

$$\frac{E_t[\tilde{R}_t^M]-R_t^F}{\sigma_{R_t^M}} \equiv \lambda_t \qquad (2\text{-}14)$$

と表すと、(2-13)は、

$$E_t[\tilde{R}_t^i] = R_t^F + \beta_i \cdot \lambda_t \sigma_{R_t^M} \qquad (2\text{-}15)$$

となる。ここでのリスクとは、与信先のディフォルト可能性に伴うものである。一方、(2-15)の左辺はリターンの期待値であるから、約定利回り（＝割引レート）R_t^i から期待損失率（＝回収率調整後ディフォルト確率）π_t^i を差し引くことにより、

$$E_t[\tilde{R}_t^i] = R_t^i - \pi_t^i \qquad (2\text{-}16)$$

と表される。(2-15)、(2-16)より、R_t^i は、

$$R_t^i = R_t^F + \pi_t^i + \beta_i \cdot \lambda_t \sigma_{R_t^M} \qquad (2\text{-}17)$$

となる。従って、リスクプレミアムξ_t^iは、(2-17)、(2-8)より、

$$\xi_t^i = \beta_i \cdot \lambda_t \sigma_{R_t^M} \qquad (2\text{-}18)$$

となる。この値は、ベンチマーク市場および当該債券 i のリターンに関するヒストリカル・データから$\lambda_t \sigma_{R_t^M}$ およびβ_i を推定することにより算定できる。

（３）公正価格と採算価格

イ．公正価格と採算価格の相違点

前節では、金融商品の価格の意味を厳密に定義することなく議論を進めたが、本稿の目的に照らすと、

①公正価格（fair price）、

②採算価格(break even price)、

の両者をはっきり区別しておくことが重要である。オーバーヘッド・コスト（間接費用）等を捨象するという本稿の仮定の下では、①、②の最大の相違点は、プライシングの過程でリスクプレミアムを算定する際に、システマティック・リスクだけを対象とするか（上記①に対応）、アンシステマティック・リスクまでを含めるか（上記②に対応）にあると言える。株式資産に関する CAPM と

同様に、より一般的なポートフォリオにおいても、システマティック・リスクとは、完全に分散投資されたポートフォリオを有する市場参加者が価格決定力を持つと想定した場合のリスクであると定義できる。一方、アンシステマティック・リスクとはポートフォリオが分散されていないことに伴うリスクである。

（２）節で示した手法との対応をみると、ベータ法（CAPM 法）については、定義によりシステマティック・リスクだけを対象として公正価格を算出するものであると言える。一方リスク・キャップ法については、原則として採算価格を計算する方法であると位置付けられる。これは、リスクキャップ法においてVAR を算定する際に、個々の市場参加者に特有の情報（例えば、資本コスト、リスク選好度、ポートフォリオの分散状況＜換言すればアンシステマティック・リスクの状況＞）を反映させることからも明らかである。

ここで、①公正価格と②採算価格の経済的な意味と用途を簡単に整理しておく。公正価格は、市場参加者全体の需給を反映した価格であると解釈できる。具体的には、公正価格は、市場流動性が高い商品については時価（市場価格）と同義である一方、市場流動性が低い商品については当該時点で潜在的に取引可能な価格をプライシング・モデル等により推定した値である。一方、採算価格は、商品の市場流動性の如何に関わらず、個々の市場参加者が当該金融商品を売る（買う）場合に採算が合うための最低（最高）価格である。採算を評価するには当該取引にかかる予想利益が問題となるが、ディフォルト可能性等将来のキャッシュフローに不確実性（リスク）を及ぼす要素が内在するため、リスクに見合う資本を有するためのコストも採算評価に反映させる必要がある。ここでいうリスクは、個々の市場参加者のポートフォリオの内容やリスク選好度等に依存するものであるから、採算価格も、これらの要素に依存する。

①と②の使い分けとしては、プライシングの目的がポートフォリオ価値の客観的評価やその周辺問題（例えば、適正貸倒引当金や実質自己資本の推定など）にあるならば①の公正価格を推定・利用すべきであるのに対し、営業戦略上の意思決定（例えば、新規与信の是非）や内部管理（仕切りレートの設定）などの主観的な問題を目的とするならば、②の採算価格を推定・利用すべきであると言える。

ロ．システマティック・リスクとアンシステマティック・リスクの解釈

システマティック・リスクおよびアンシステマティック・リスクの意味について特に与信ポートフォリオの信用リスクの観点から解釈すれば、システマティック・リスクは信用度変動リスクに、アンシステマティック・リスクは与信集中リスクにそれぞれ対応すると言える。この事情を明らかにするために、本

節では、潜在的な最大損失額（パーセンタイル値）としての VAR の代わりにポートフォリオの期待損失額の分散値をリスクの代理変数として、それを上記 2 種類のリスクへ分離することについて論じた分析を王・佐上 [1997]に沿って紹介する。

具体的には、取引先企業 i への与信から発生する損失額を表す確率変数を L_i とし、n 先の与信から成るポートフォリオの損失額 PL（ただし、$PL = \sum_{i=1}^{n} L_i$）の分散 V[PL]をシステマティック・リスクおよびアンシステマティック・リスクに分離する。分析の出発点として、各企業 i の将来のディフォルト確率 $\tilde{\Pi}_i$ は、現時点で評価されたディフォルト確率 Π_i^0 を中心として分散 $(\Pi_i^0 a_i)^2$ をもつ正規分布に従う（厳密に言えば、Π_i^0 の変化率が正規分布に従う）と仮定する。すなわち、

$$\tilde{\Pi}_i = \Pi_i^0 + \Pi_i^0 a_i \cdot \tilde{\varepsilon} \qquad （ただし、0 \leqq \tilde{\Pi}_i \leqq 1）$$

$$E[\tilde{\varepsilon}] = 0、V[\tilde{\varepsilon}] = 1 \qquad （\tilde{\varepsilon} は標準正規乱数） \tag{2-19}$$

$$E[\tilde{\Pi}_i] = \Pi_i^0、V[\tilde{\Pi}_i] = (\Pi_i^0 a_i)^2$$

と仮定する。また、L_i および L_i^2 の条件付き期待値を $\tilde{\Pi}_i = \Pi_i^0$ のまわりで線形近似することにより、

$$E[L_i | \tilde{\Pi}_i] = E[L_i | \Pi_i^0] + A_i(\Pi_i^0) \cdot \Pi_i^0 \cdot a_i \tilde{\varepsilon}$$

$$E[L_i^2 | \tilde{\Pi}_i] = E[L_i^2 | \Pi_i^0] + B_i(\Pi_i^0) \cdot \Pi_i^0 \cdot a_i \tilde{\varepsilon} \tag{2-20}$$

$$ただし、A_i(x) \equiv \frac{\partial E[L_i(\tilde{\Pi}_i = x)]}{\partial x}$$

$$B_i(x) \equiv \frac{\partial E[L_i^2(\tilde{\Pi}_i = x)]}{\partial x}$$

と表す。王・佐上 [1997]は、この設定下で V[PL]が次のように表されることを証明した。

$$V[PL] = \sum_{i=1}^{n} V_\alpha[L_i] + \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{V_\beta[L_i]}\right)^2 \tag{2-21}$$

$$ただし、V_\beta[L_i] \equiv (A_i \Pi_i^0 a_i)^2 \tag{2-22}$$

$$V_\alpha[L_i] \equiv V[L_i] - V_\beta[L_i] \tag{2-23}$$

(2-21)式の右辺をみると、与信件数 n を増加させる場合に第１項は n のオーダーで増加する一方、第２項は n^2 のオーダーで増加する。(2-21)式はリスクを分散として表示しているが、これを標準偏差のスケールに引き直せば、各項の影響はそれぞれ $\sqrt{n}$ および n のオーダーである。従って、分散投資を進める場合（すなわち、n を無限大に増加させる極限的ケース）について単位与信当たりのリスクを評価しようとすると、(2-21)式の第１項は、その効果が消失する（すなわち、$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}=0$）という意味でアンシステマティック・リスクと解釈される一方、第２項は、その効果が残る（すなわち、$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1\neq 0$）という意味でシステマティック・リスクであると解釈できる。特にシステマティック・リスクの起源を確認するために(2-22)式をみると、取引先企業の将来の信用度の不確実性（$\Pi_i^0 a_i$）にその損失額への影響度（A_i）を乗じた形となっている。従って、信用度変動リスクがシステマティック・リスクであることが分かる。同時に、ここに含まれない与信集中リスクは、理論的には分散投資によって消去可能であるとの性質をもつアンシステマティック・リスクであると裏付けられる。

３．信用リスクを取り入れたプライシングの理論的方法

本章では、前章で実務的な視点から扱ったプライシング手法の理論的な背景を整理する。また、前章では、約定キャッシュフローが確定的であるタイプの金融商品のみを扱ったが、本章では分析対象を拡張し、デリバティブ商品などについても信用リスクを取り込んだ理論価格が算定可能であることを示す。

（１）プライシング理論の枠組み

イ．モデルの分類

一般に、金融商品のプライシング理論の歴史は古く、例えばオプション商品のプライシング方法の原型たるブラック＝ショールズの公式が発表されたのは1973 年のことである。そこでは、取引相手のディフォルト可能性や各種の取引コスト（取引手数料や税など）の影響等は捨象し、理想的な条件下での理論価格が導出された。その後、現実の市場条件にモデルを近づける努力がなされる中で、1980 年代後半以降、取引相手のディフォルト可能性を織り込んだプライ

シング理論が徐々に提唱され始めた[15]。1990 年代に入ると、デリバティブの価格理論と相俟って発展したマルチンゲール[16]の考え方をディフォルト・イベントの記述に応用しようとする試みが始まり、以降様々なプライシング・モデルが発表されて現在に至っている。

信用リスクを勘案した金融商品のプライシング理論は多彩であるが、大別して、①無裁定モデルと②均衡モデルの２種類に分類可能である。この分類は、金利派生商品を（信用リスクを勘案せずに）プライシングする際に利用される各種のイールドカーブ・モデル（タームストラクチャー・モデル）を分類する場合と同様のものである。すなわち、①が市場における無裁定条件だけからレプリケーション法の原理に従って理論価格を導出するのに対し、②はマクロ経済の一般均衡分析を背景に理論価格を導出する。市場参加者のリスク選好度に関する情報は、①ではパラメータに内生化されるのに対し、②では外生的に与える必要がある。やや視点を変えると、①、②はそれぞれ、誘導型モデル(reduced form models)および構造モデル(structural models)と呼ぶことも可能である[17]。これは、②に属するモデルでは、ディフォルトの発生が企業価値の確率過程に基づいて決まるという「構造」を拠り所としていることによる。一方①に属するモデルでは、ディフォルト事象はジャンプ・プロセス[18]（ポアソン・プロセス）と

---

[15] 例えば、Johnson and Stultz [1987]は、オプション商品のプライシングに当たって信用リスクを理論的に反映させることを実現させた先駆的な研究である。同論文では、オプションを売却した企業のディフォルト可能性を評価するために、当該企業の資産価値が対数正規過程に従うとの仮定をおいて分析を行っており、この点では本稿第３章で紹介する Longstaff and Schwartz [1995a]や第４章で紹介する Das [1995]と同じ方向性を有している（無論、モデルの細部は互いに異なるが）。なお、Johnson and Stultz [1987]を拡張したプライシング方法としては、Hull and White [1995]等が知られているが、本稿第３～４章で紹介する諸モデルと比較すると、実務界での受け入れられ方は今一つ進んでいないようにも見受けられる。従って本稿では、このモデルについては立ち入らない。

[16] 確率変数 X_t がマルチンゲールであるとは、任意の時間 t、s(t＜s)において、

$$E_t(X_s) = X_t$$

という性質が成り立つことと定義される（ただし、E(.)は期待値を表す）。この概念は、もともとは確率代数の世界で知られていたが、近年ファイナンスの世界では各種のアセット・プライシング理論に応用されて成功をおさめている。具体的な事例は、Duffie [1996]等の標準的な教科書を参照。

[17] この呼称は、シュワルツ [1996]において使われたものである。

[18] ジャンプ・プロセスを直観的に理解するために、離散的な世界で株価変動を記述する典型的なジャンプ・モデルをみると次のとおりである。すなわち、現時点である確率変数（例えば株価）が S であるとした場合、微小時間 Δt 経過後にはそれが確率

呼ばれる確率過程によって記述されることを先験的に仮定し、その確率過程の背後にあるメカニズムに遡ることなく、現在観測可能な証券の市場価格との整合性が実現するようにモデルのパラメータを決定する。

本章で以下に紹介するプライシングモデルのうち、ジャローとターンブル等によるモデルおよびダフィー等によるモデルは①に、ロングスタッフとシュワルツによるモデルは②に分類される。いずれのモデルが現在実務的にポピュラーであるかは、はっきりとはしない。印象としては、使いやすさの点では①のモデルに、ディフォルト事象の予測力という点では②のモデルに比較優位があるように思われる。各金融機関では、いずれのモデルを原型とするにせよ、何らかの加工を施すことによって現実の市場へ適用しやすくした上で実用化している場合が多いと言われている。

ロ．実務と理論の関係

第２章では、主として実務的な視点から、プライシングの基本がレプリケーションと割引率の決定（リスクプレミアムの推定）の２点にあることを説明した。この解釈と本章で示す理論モデルとの関係についてみると、次の２点を指摘可能である。

第１に、①（無裁定モデル）に属するモデルの原理は、レプリケーション法の活用にある。これは、市場の完備性を前提として、(i)ディフォルトの発生という要素も含めて定義した状態変数に対応する各 Arrow-Debreu 証券[19]の価格を

$\lambda\Delta t$ で S から Su になり、確率 $1-\lambda\Delta t$ で $S\,e^{-w\Delta t}$ になると考える（$u>1, w>0$）。$\lambda\Delta t$ は非常に小さな確率であることを念頭に置くと、このモデルの意味は、ほとんどの時点で株価は w の減少率で低下するが、極くまれに u 倍に増加する（これが「ジャンプ」の語源である）と解釈できる（もちろん、まれに大幅な減少がおこるという方向でモデルを作ることも可能である）。本稿の文脈に当てはめると、貸付や債券等の資産価値は、極めて小さい確率ではあるがまれに発生するディフォルトによって大幅に低下し得る一方、通常は無リスク金利にスプレッドを加えた収益率で成長するということになる。このモデルで Δt を無限小の極限値に近づけると、ジャンプの発生頻度は、よく知られたポアソン分布（率が λ）に従うことが知られている。なお、オプション価格のブラック＝ショールズ・モデル等を導出する上で仮定される拡散過程（ディフュージョン・プロセス）では、ここで示したようなジャンプを伴うレア・イベントを記述することはできない。

[19] Arrow-Debreu 証券とは、将来の経済環境をすべて説明可能な状態変数（ベクトル）を定義可能であると想定した上で、それぞれの状態について、当該状態が実現した場合のみに単位通貨のキャッシュフローが支払われる一方、他の状態が実現した場合には何も支払われないという取り決めを持った仮想的証券として定義される。将

市場で流通している証券の時価情報から推定した上で、次に、(ii)推定されたArrow-Debreu 証券価格から評価対象とする任意の証券の価格を導出しようというものである。このプロセスでは、(i)、(ii)の２段階でそれぞれレプリケーション法が適用されている。こうした手法ではリスクプレミアムを明示的に推定する必要はないが、それはリスクプレミアム情報を内包した市場価格情報を活用してレプリケーションを行っているからである。

第２には、②（均衡モデル）に属するモデルを利用する場合には、ディフォルトを記述した後に、プライシングを行う上でリスクプレミアムが必要となる。このためには、何らかの方法により市場参加者のリスクプレミアムを推定しなくてはならない。実務的には、第２章で示した方法を利用可能であるが、研究上は、過去の金融商品価格のデータに基づく実証分析によってこれを推定する場合もある。

（２）プライシング理論の原型

イ．レプリケーション法に基づくプライシング理論の枠組み

本節では、（１）節で示したモデルの分類（①、②）のうち、①（無裁定モデル）に属する各種プライシング・モデルに共通の基本的な考え方について整理しておく[20]。

はじめに、以下の議論を通して、危険資産および非危険資産の両者を含む金融市場全体が完備であることと、無裁定条件が成立することを仮定しておく。このとき、マネー・マーケット資産の収益率（$e^{\int_t^T r_u du}$）を基準財(numeraire)としてあらゆる危険資産および非危険資産の相対価格をマルチンゲールとする確率測度（以下、リスク中立確率と呼ぶ）がただ１種類だけ存在することが知られている[21]。これを前提とすると、現時点 t における危険資産[22]の理論価格（公正

来のあり得べき状態の個数に対応した種類の Arrow-Debreu 証券を定義可能である。市場が完備であれば、これらすべての Arrow-Debreu 証券に価格がつくこととなる。また、任意の証券は、各種 Arrow-Debreu 証券を適宜組み合わせたポートフォリオによって複製（レプリケート）可能である。

[20] 本節で示した理論的整理を行うに当たっては、Jarrow and Turnbull [1995]、Takahashi [1996]および木島 [1997]を参考にした。

[21] これは、Harrison and Pliska [1981]によって証明されたもので、アセット・プライシング理論の根幹を形成する重要な定理である。

[22] 議論を簡単にするため、当面は、危険資産のキャッシュフローが発生するのは満期

価格）S_t は、

$$S_t = E_t^Q\left[e^{-\int_t^\tau r_u du} Z\cdot 1_{\{\tau\leqq T\}} + e^{-\int_t^T r_u du} X\cdot 1_{\{\tau>T\}} \middle| \tau\geqq t\right] \tag{3-1}$$

と表される。ただし、E_t^Q はリスク中立確率による期待値演算子、τはディフォルト時点、T は資産の満期、Z はディフォルト発生時における回収額（上式では簡単のために一定とする）、X はディフォルトが発生しない場合の満期におけるキャッシュフロー、r_u は時点 u における無リスク短期金利をそれぞれ表す（これらの表記は、以下同じ）。また、1_A は、事象 A が実現した場合に 1、実現しない場合に 0 をとる確率変数（事象 A を引数とする写像）であり、

$$1_A \equiv \begin{cases} 1 & (A \quad \text{is} \quad \text{true}\ ) \\ 0 & (A \quad \text{is} \quad \text{wrong}) \end{cases} \tag{3-2}$$

と定義される。

理解を容易にするために、上式の特殊ケースとして、ディフォルト可能性のある割引債（元本 1、満期 T、ディフォルト時の回収率δ＜定数＞）の現時点 t における価格 $P_r(t,T)$を考えよう。ディフォルト事象と金利の独立性を前提として(3-1)式を活用・整理すると、

$$\begin{aligned} P_r(t,T) &= E_t^Q\left[e^{-\int_t^\tau r_u du}\delta\cdot 1_{\{\tau\leqq T\}} + e^{-\int_t^T r_u du} 1_{\{\tau>T\}} \middle| \tau\geqq t\right] \\ &= \delta\int_t^T P_s(t,u)d\tilde{Q}_t\{t\leqq\tau\leqq u\} + P_s(t,T)\tilde{Q}_t\{\tau>T\} \end{aligned} \tag{3-3}$$

となる。ただし、

$$P_s(t,T) \equiv E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \tau\geqq t\right] \tag{3-4}$$

は、無リスクの割引債（元本 1、満期 T）の現時点 t における価格（直観的には市場で観測した国債の価格）を表す。また、(3-3)式では、事象 A の発生に対応するリスク中立確率を $\tilde{Q}_t\{A\}$ と表した。すなわち、

$$\tilde{Q}_t\{A\} \equiv E_t^Q[1_A] \tag{3-5}$$

と定義している。経済学的には、事象 A にかかる Arrow-Debreu 証券（満期 T）の時点 t における価格が $E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r_u du} 1_A\right]$ であると言える。さらに、事象と金利の独

のみと考える。なお、この制約をはずし、期中のキャッシュフローを取り入れられるようにしても、一般性は失われない。

立性を仮定すれば、これを

$$E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r_u du} 1_A\right] = P_s(t,T)\cdot\tilde{Q}_t\{A\} \tag{3-6}$$

と分離可能である。本稿の文脈に沿えば、「特定の期間内にディフォルトが発生すること」を「事象」として想定するから、例えば

$$\tilde{Q}_t\{t_1 \leqq \tau \leqq t_2\} \equiv E_t^Q[1_{\{t_1 \leqq \tau \leqq t_2\}}] \tag{3-7}$$

の経済的な意味は、期間$[t_1,t_2]$におけるディフォルト確率（リスクプレミアム調整ベース；以下、「リスク中立ディフォルト確率」と呼ぶ）であると解釈できる。これを踏まえて$P_r(t,T)$に関する(3-3)式をみると、最右辺第１項は、時点 u（ただし t＜u＜T）にディフォルトとなる場合の回収額（現在価値ベース）$\delta\cdot P_s(t,u)$にリスク中立確率$\tilde{Q}_t\{\tau = u\}$を乗じた期待値の総和（積分値）を表し、同第２項は、満期 T までディフォルトが起こらない場合の償還額（現在価値ベース）$P_s(t,T)$にリスク中立確率$\tilde{Q}_t\{\tau > T\}$を乗じた期待値を表す。

議論を一般化すれば、将来の状態変数ごとに金融商品から発生するキャッシュフローの割引現在価値を計算し、これに当該状態変数が実現する確率（リスク中立確率）を乗じた期待値を算定、あらゆる状態変数にわたって期待値の総和をとった値が求める理論価格であると言える。通常は、まず、市場で時価を観測可能な金融商品の理論価格と実際の時価とが一致するように期間別、格付け別のリスク中立確率（いわばインプライド・リスク中立ディフォルト確率）を決定し、次に、そのリスク中立確率を利用して未知の金融商品の理論価格を導出するというプロセスを辿る。こうした考え方は、信用リスクを勘案せずにデリバティブ商品（ないしすべての金融商品）をプライシングする際には既に良く知られたものである[23]が、本節では、それを信用リスクが存在する場合にも拡張可能であることを強調しておきたい。

ロ．リスクプレミアムの扱い

上記で導出した$\tilde{Q}_t\{A\}$はリスクプレミアムを勘案したディフォルト確率（事象 A を特定のディフォルト事象と想定）であった。市場が完備であればこの$\tilde{Q}_t\{A\}$を推定することができ、さらにその情報を利用してあらゆる危険資産をプライ

---

[23] このような金融商品のプライシング理論を一般的に解説した文献としては、Duffie [1996]、Dothan [1990]等を挙げることができる。また、和書では木島 [1994]が広く知られている。

シングすることが可能になる。

　ここでは、まず、$\tilde{Q}_t\{A\}$の推定方法の一例を示す。議論を簡単にするための技術的な理由から、危険資産がディフォルトした場合にその時点でδを回収するという前述の仮定の代わりに、δを回収するのは常に満期時点であるとの仮定を置く。このとき、危険資産の価格$P_r(t,T)$は、

$$\begin{aligned}
P_r(t,T) &= E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r_u du}\delta\cdot 1_{\{\tau\leqq T\}} + e^{-\int_t^T r_u du}1_{\{\tau>T\}}\middle|\tau\geqq t\right] \\
&= \delta\int_t^T P_s(t,T)d\tilde{Q}_t\{\tau\leqq u\} + P_s(t,T)\tilde{Q}_t\{\tau>T\} \\
&= P_s(t,T)\cdot[\delta\tilde{Q}_t\{\tau\leqq T\}+\tilde{Q}_t\{\tau>T\}] \\
&= P_s(t,T)\cdot[\delta(1-\tilde{Q}_t\{\tau>T\})+\tilde{Q}_t\{\tau>T\}] \\
&= P_s(t,T)\cdot[\delta+(1-\delta)\tilde{Q}_t\{\tau>T\}]
\end{aligned} \tag{3-8}$$

となる。従って、回収率$\delta\,(\neq 1)$を所与とすれば、市場で観測可能な $P_r(t,T)$および$P_s(t,T)$の情報を用いて、

$$\tilde{Q}_t\{\tau>T\} = \frac{P_r(t,T)-\delta P_s(t,T)}{(1-\delta)P_s(t,T)} \tag{3-9}$$

という形で期間 T までの生存確率（リスク調整ベース）を算定できる。なお、危険資産の価格$P_r(t,T)$に着目した表現の代わりに、危険資産の利回りに着目した表現に書き換えることにすると、危険資産と非危険資産のスプレッド$\rho_t(T)$は、

$$\begin{aligned}
\rho_t(T) &= R_t(T) - R_t^F(T) \\
&= \frac{1}{T-t}\log\frac{P_s(t,T)}{P_r(t,T)} \\
&= \frac{-\log[\delta+(1-\delta)\tilde{Q}_t\{\tau>T\}]}{T-t}
\end{aligned} \tag{3-10}$$

となり、$\tilde{Q}_t\{\tau>T\}$と関係付けることができる。ただし、(3-10)式の導出に当たっては、$P_r(t,T)=e^{-(T-t)R_t(T)}$の関係等を利用した。

　次に、現実のディフォルト確率を$Q_t\{A\}$と表し、リスクプレミアム$\pi_t(A)$を

$$\pi_t(A) \equiv \frac{\tilde{Q}_t\{A\}}{Q_t\{A\}} \tag{3-11}$$

と定義する[24]。$Q_t\{A\}$は、当該企業の信用分析によって推定可能である。単に格

[24] ここで定義するリスクプレミアム$\pi_t^i(A)$と第２章で実務上のリスクプレミアムとし

付機関の格付けを利用するならば、各格付けに対応するディフォルト確率の公表データが報告されている。内部格付けを利用するならば、独自のトラック調査等によって予想ディフォルト確率を対応させる必要がある。いずれにせよ、この $Q_t\{A\}$ と市場価格情報から推定した $\tilde{Q}_t\{A\}$ の比率として、リスクプレミアムを算定できる。

以上の議論は公正価格の推定方法に関するものであったが、採算価格を推定する場合には、市場全体のリスクプレミアム $\pi_t(A)$ の代わりに、個々の市場参加者 i に特有のリスクプレミアム $\pi_t^i(A)$ を知る必要がある。原理的には、第２節で示したリスク・キャップ法をすべての事象 A に対して適用すれば、あらゆる状態間遷移に対応したリスクプレミアムを推定可能であり、任意の取引のプライシング・ニーズに備えることができる。しかし、こうした無限に近い多数個の状態遷移をすべて算定するのは事実上不可能であるため、実際の運用としては、取引対象となる個々の商品毎にリスクプレミアムを求めることになろう。

なお、ここまでは A をディフォルト事象と想定していたが、より広義の解釈としては、任意の信用度の変化を事象 A として定義することも可能である。この考え方は、マルコフ連鎖を状態遷移行列によって表現するタイプのモデルにおいて利用される。その一例は、後掲（３）節ロ．で示される。

（３）ジャローとターンブル等によるプライシング・モデル

コーネル大学のジャロー、ターンブル等は、1990 年頃からこの分野における理論研究に着手し、その成果を Jarrow and Turnbull [1995]および Jarrow, Lando and Turnbull [1997]としてまとめた。本節では、両論文の概要を紹介する。

イ．仮想為替レートを利用したディフォルト可能性の評価

Jarrow and Turnbull [1995]は、外為市場における為替レート（例えば、通貨Ａと通貨Ｂの交換レート）の役割にヒントを得て、危険資産と非危険資産を交換する仮想為替レートという概念を導入し、これを用いて危険資産の時価を算出するモデルを提唱した。このモデルの本質的な考え方や結論は、（２）節で示した基本論とほぼ同様であるので、ここでは繰り返さない。ポイントは、仮想

て導入した $\xi_t(T)$ とは、相互に関連はあるものの、定義自体は異なっている点に注意を要する。

為替レートが（２）節で定義したＱ等によって表される点である。この点を具体的に示すと次のとおりである。まず、仮想為替レート $e_1(t)$は、

$$e_1(t) \equiv P_r(t,t) \qquad (3\text{-}12)$$

と定義される。すなわち、$e_1(t)$は、ディフォルト可能性がある割引債の満期時点 t における価値であるから、当該債券が時点 t までにディフォルトしていたならば $e_1(t)=\delta$（回収率）、ディフォルトしていないならば $e_1(t)=1$ である。前節の表記に従えば、

$$e_1(t) \equiv \delta 1_{\{\tau \leqq t\}} + 1_{\{\tau > t\}} \qquad (3\text{-}13)$$

と書ける。この危険資産によって支払いが約束された１ドルは、非危険資産によって確実に支払われることが約束された真の１ドルとは異なる価値をもつ。そこで、危険資産の１ドルを仮想的な別の通貨であると解釈する。例えば、真の１ドルを現時点 t で危険資産建てに換算すれば、$1/e_1(t)$ドルとなる。逆に危険資産建ての１ドルを真のドル建てに変換すれば、$e_1(t)$ドルとなる。

さて、危険資産で満期が T の割引債の価格を真のドル建てによって $P_r(t,T)$と表すことにして、その算出方法を考えよう。同割引債は、将来時点 T において確実に危険資産建ての１ドルを支払うものである。その信用リスクのヘッジ方法を考えることにすると、将来の外貨建てキャッシュフローの為替リスクをヘッジするために通常行われる為替予約取引（フォワード為替レートにより自国資産建てのキャッシュフローとして固定する取引）のアナロジーを検討すればよい。Jarrow and Turnbull [1995]は、ここでの仮想為替取引にかかるフォワードレートが、将来の同為替レートに関するリスク中立期待値として、$E_t^Q[e_1(T)]$と表されることを示した。この結果を利用すると、$P_r(t,T)$は、将来時点 T において真のドル建てでみて $E_t^Q[e_1(T)]$ ドルが確実に支払われる取引であると解釈できるから、そのキャッシュフローを無リスク資産のディスカウント・ファクター（$=P_s(t,T)$）で割り引くことにより、

$$P_r(t,T) = P_s(t,T) \cdot E_t^Q[e_1(T)] \qquad (3\text{-}14)$$

と表されることになる。(3-14)式は、（２）節で得た結論と同一である。

ロ．状態遷移確率行列によるマルコフ過程のモデル化

Jarrow, Lando and Turnbull [1997][25]は、ディフォルトに陥るかどうかだけでなく、

25 Jarrow, Lando and Turnbull [1997]（および Jarrow and Turnbull [1995]）は、回収率が一定値であるとの仮定を置いて議論を進めているが、この条件を緩和したプライシン

信用度（格付け）が変化するイベントについても、実際の確率およびリスク中立確率の概念を導入した。これを離散時間および連続時間それぞれの枠組みで、マルコフ連鎖モデルとして展開した。以下では、離散時間で示されたモデルのポイントを紹介する。

まず、取引先の信用度を表す状態変数のセットとして、{1, 2, …, K-1, K}を考える。このうち、状態 1 は最高の信用度、状態 K-1 は非ディフォルト状態として最低の信用度、K はディフォルト状態を表す。取引先が単位時間内 t に状態 i にあり、時間 t+1 に状態 j に移る確率を q_{ij} と定義する（ただし 1≦i, j≦K、i≠j）。このとき状態 i のまま変化しない確率は、$q_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} q_{ij}$ である（ただし 1≦i≦K）。

あらゆる状態変化の可能性について、その実現確率を行列 Q としてまとめると、

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2K} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ q_{K-1,1} & q_{K-1,2} & \cdots & q_{K-1,K} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{3-15}$$

と表現できる。ここでは、一度ディフォルト状態 K に入った後には非ディフォルト状態に戻る可能性がないとの条件が行列 Q の最終行に織り込まれている。

一方、（２）節の議論と同様に、無裁定条件の成立を前提として、取引先が状態 i（時間 t）から状態 j（時間 t+1）に移るリスク中立確率 $\tilde{q}_{ij}(t, t+1)$ を定義することも可能である（ただし、1≦i, j≦K、i≠j）。このとき、$\tilde{q}_{ii}(t, t+1) = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} \tilde{q}_{ij}(t, t+1)$ である（ただし、1≦i≦K）。これらを行列形式 $\tilde{Q}_{t,t+1}$ としてまとめると、

$$\tilde{Q}_{t,t+1} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_{11}(t,t+1) & \tilde{q}_{12}(t,t+1) & \cdots & \tilde{q}_{1K}(t,t+1) \\ \tilde{q}_{21}(t,t+1) & \tilde{q}_{22}(t,t+1) & \cdots & \tilde{q}_{2K}(t,t+1) \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \tilde{q}_{K-1,1}(t,t+1) & \tilde{q}_{K-1,2}(t,t+1) & \cdots & \tilde{q}_{K-1,K}(t,t+1) \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{3-16}$$

グ・モデルとしては、Das and Tufano [1996]が知られている。このモデルでは、回収率は確率変数であると考えられ、従ってディフォルト確率および回収率から構成される信用スプレッドは２種類の確率ファクターに依存する変数であるとして扱われる。

と表現できる。市場が完備であれば、(3-16)式の各成分を市場価格情報から導出可能であることになるが、実際には各時点(t,t+1)ごとに$(K-1)^2$ 個という多数の情報を引き出すのは不可能に近い（すなわち、市場は完備でない）。このため、Jarrow, Lando and Turnbull [1997]は、次のような仮定を置いて推定を行うことを提案している。すなわち、（２）節でディフォルト確率にかかるリスクプレミアムを定義したのと同様に、状態間遷移に関するリスクプレミアムを

$$\pi_i(t) \equiv \frac{\tilde{q}_{ij}(t, t+1)}{q_{ij}} \qquad \text{（ただし、}1 \leqq i, j \leqq K\text{、}i \neq j\text{）} \tag{3-17}$$

と定義する（リスク中立確率と現実の確率の比率として定義）。(3-17)式での特徴は、リスクプレミアムがはじめの状態 i だけに依存して決まり、終わりの状態 j には依存しないと仮定されている点である。この仮定を前提として、市場で観測可能な金融取引の価格情報から K 個のリスクプレミアム $\pi_i(t)$ $(1 \leqq i \leqq K)$を推定し、別途推定されている q_{ij} を乗じることによって、(3-16)式の各成分を決定することができる。このとき、推定に必要な情報の個数は、(3-17)式を仮定しない場合の$(K-1)^2$ 個から K 個に減少することとなるため、実際の計算上の負担が軽減される。

上記の枠組みを出発点としてディフォルト可能性を反映したプライシングを行うには、取引先が時間 T までディフォルトしないリスク中立確率 $\tilde{Q}_t\{\tau > T\}$（またはディフォルトするリスク中立確率 $\tilde{Q}_t\{t \leqq \tau \leqq T\} = 1 - \tilde{Q}_t\{\tau > T\}$）を求めた上で、（２）節で示した考え方に帰着させればよい。その計算には、単位時間当たりの遷移確率行列(3-16)式から、累積時間ベースでの遷移確率行列を求める方法を使う。具体的には、時間 0 から時間 n までの間に状態 i から状態 j に遷移するリスク中立確率 $\tilde{q}_{ij}(0, n)$ を求める場合、行列 $\tilde{Q}_{0,n}$ を

$$\tilde{Q}_{0,n} = \tilde{Q}_{0,1} \cdot \tilde{Q}_{1,2} \cdot \cdots \cdot \tilde{Q}_{n-1,n} \tag{3-18}$$

として算出し、その(i, j)成分を $\tilde{q}_{ij}(0, n)$ とすればよい。この計算結果を得れば、$\tilde{Q}_t\{\tau > T\}$ は、

$$\tilde{Q}_t\{\tau > T\} = \sum_{j \neq K} \tilde{q}_{ij}(t, T) = 1 - \tilde{q}_{iK}(t, T) \tag{3-19}$$

と求められる。

以上により、状態遷移確率行列を利用してディフォルト確率（リスク中立ベース）を導出する方法が示された。ディフォルト確率が決まれば、（２）節で示したのと同じプロセスに従ってプライシングを行うことができる。

本節で示したプライシング・モデルの特徴の１つは、格付け機関等が報告している信用度変化のデータ（格付け遷移確率のヒストリカル・データ）をその

まま(3-15)式に取り入れることが可能であって使い勝手がよいことにある。

（４）ダフィー等によるプライシング・モデル

イ．モデルの枠組み

本節では、スタンフォード大学のダフィー教授と同僚等による一連の論文によって提唱されているモデルを示す。その特徴は、ディフォルト可能性を表す変数（前節の標記では$1_{\{t_1 \leqq \tau \leqq t_2\}}$ないし同期待値$\tilde{Q}_t(t_1 \leqq \tau \leqq t_2) \equiv E_t^Q[1_{\{t_1 \leqq \tau \leqq t_2\}}]$）をキャッシュフロー変数に乗じるという前節までの形式に代わって、ディフォルト可能性の効果を取り込んだ割引金利によってキャッシュフローを割り引くという形式をとる点にある[26]。本モデルは、このようにディフォルト確率や回収率等の効果をクレジット・スプレッドという１つの情報に集約することから、実務家の間では、実際の運用上の利便性が高いとの評価もみられる。

モデルの定式化は以下のとおりである。まず、ディフォルト可能性を表す変数$1_{\{t_1 \leqq \tau \leqq t_2\}}$は(3-2)式では不連続な確率変数として定義されていたが、これを「トレンド項」と「ランダム項」に分解することによって扱い易くするために、やや技術的な表現を導入する[27]。具体的には、まず、

$$H_t \equiv 1_{\{t \geqq \tau\}} \tag{3-20}$$

という表記を定義する。変数H_tは、時点tにおいて対象企業がディフォルト（その発生時点をτと表記）に至っていれば 1、至っていなければ 0 という数字を取る。次に、ポアソン・プロセス（またはカウンティング・プロセス）と呼ばれる確率過程

$$N_t \equiv \sum_{k=1} 1_{\{t \geqq \tau_k\}} \tag{3-21}$$

ただし$\tau_1 \leqq \tau_2 \leqq \tau_3 \leqq \cdots$

を導入する。この確率過程は、あるレア・イベント（ここではディフォルト）

---

26 この関係は、第２章（１）節で示した割引に関する２とおりの考え方に対応している。すなわち、本章（３）節で扱ったジャローとターンブル等によるモデルは形式上第２章の(2-3)式に対応した結果を導出するのに対し、本節で扱うダフィー等によるモデルは(2-2)式に対応した結果を導出するものである。

27 ここで示す理論的背景については、Madan and Unal [1993]においても言及されている。

が時間 t までに発生する回数を表す[28]ことが分かる。その回数に関する確率分布がポアソン分布に従うと仮定すると、(3-21)式は、ある連続的確率過程 h_t およびマルチンゲール性を有する確率過程 M_t の２つに一意に分解可能であり、次のように表現できることが知られている[29]。

$$N_t = \int_0^t h_u du + M_t \tag{3-22}$$

(3-20)、(3-21)より、H_t と N_t の間には $H_t = N_{t\wedge\tau}$ という関係があることが分かる（ただし、$t\wedge\tau \equiv \min[t,\tau]$）。ここで(3-22)の性質を適用することにより、

$$\begin{aligned} H_t &= N_{t\wedge\tau} \\ &= \int_0^{t\wedge\tau} h_u du + M_{t\wedge\tau} \\ &= \int_0^t h_u \cdot 1_{\{u<\tau\}} du + m_t \end{aligned} \tag{3-23}$$

という形で H_t を表現できる（ただし、$m_t \equiv M_{t\wedge\tau}$）。これを微分型で書けば、

$$dH_t = h_t 1_{\{t<\tau\}} dt + dm_t \tag{3-24}$$

となる。さて、前節で示した危険資産の価格式は、

$$S_t = E_t^Q\left[e^{-\int_t^\tau r_u du} Z \cdot 1_{\{\tau \leqq T\}} + e^{-\int_t^T r_u du} X \cdot 1_{\{\tau > T\}} \middle| \tau \geqq t \right] \tag{3-25}$$

であったが、ここで回収金額 Z を一定とせず時間依存性を許容した上で(3-24)を利用すると、

---

28 本稿では、ディフォルトというイベントは１度限りしか起こらないと考えているので、「ディフォルトの回数」を表現することに疑問を感じるかもしれない。しかし、ここでの考え方は、次のようなロジックに従って理解可能である。まず、(3-21)式では、一定の発生確率に従って「ディフォルト」というレア・イベントが複数回起こり得ることを形式的に許容する（各「ディフォルト」の発生時点を $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \cdots$ とする）。次に、(3-23)式において、「１回目のディフォルト」が発生するまでだけに着目し、それ以降の(3-21)式の情報を捨象することにする。この手続きにより、実際には１度限りしか起こらないディフォルトという事象に対して、ポアソン・プロセスが有する数学的性質(3-22)を適用可能になる。

29 これは、Doob=Meyer 分解と呼ばれる確率代数の一例に当たる。この周辺の数学的な扱いについては、例えば Elliot [1982]に詳しい。

$$S_t = E_t^Q\left[\int_t^T e^{-\int_t^u r_s ds} Z_u dH_u + e^{-\int_t^T r_u du} X \cdot 1_{\{\tau > T\}} \middle| \tau \geqq t\right]$$
$$= E_t^Q\left[\int_t^T e^{-\int_t^u r_s ds} Z_u h_u 1_{\{u<\tau\}} du + e^{-\int_t^T r_u du} X \cdot 1_{\{\tau > T\}} \middle| \tau \geqq t\right] \quad (3\text{-}26)$$

と整理可能である[30]。次に、便宜的に、ディフォルト時点τ以前においてはこの S_t と同一の値をとる変数 V_t を探す（τ以降の V_t の挙動には制約を設けない）ことにする。Duffie, Schroder, and Skiadas [1994]は、 V_t が特定の確率過程

$$dV_t = [-Z_t h_t + (r_t + h_t)V_t]dt + dM_t \quad \text{（}M_t\text{はマルチンゲール）} \quad (3\text{-}27)$$

$$V_T = X \quad \text{（満期における境界条件）} \quad (3\text{-}28)$$

に従う[31]と仮定した場合に、

$$S_t = V_t \cdot 1_{\{t<\tau\}} \quad (3\text{-}29)$$

となることを証明し[32]、上記の条件を満足することを示した。以下の議論では、V_t の方が S_t より扱いやすい性質を有するため、S_t の代わりに V_t に着目する。

なお、ここまでディフォルト時の回収金額 Z_t については何ら仮定を置いていなかったが、Duffie 等の一連のモデルでは、

$$Z_t = \varphi_1(t, V_t)V_t 1_{\{V_t<0\}} + \varphi_2(t, V_t)V_t 1_{\{V_t \geqq 0\}} \quad (3\text{-}30)$$

という定式化がなされている[33]。$\varphi_2(t, V_t)$ は、ディフォルトした取引相手に対し

---

30 (3-26)式においては、dH_u を展開する際に、m_t がマルチンゲールであることから $E_t^Q[dm_T] = 0$ が成立することを利用している。

31 (3-27)式の意味を直観的にみるには、同式を

$$dV_t = [r_t + (1 - \frac{Z_t}{V_t})h_t]V_t dt + dM_t$$

と変形すると良い。回収率調整後のディフォルト確率（リスク中立ベース）が $(1 - \frac{Z_t}{V_t})h_t$ であり、それを無リスク金利 r_t に上乗せした「利率」での資産価値の成長が期待されていることが分かる。

32 証明は極めて技術的であるため本稿では省略するが、そのポイントは、Generalized Ito’s lemma を利用した数式展開にある。通常の Ito’s lemma は対象が標準ブラウン運動に限定されたものであるため、ここで扱うディフォルトの確率過程（非ブラウン運動）に対してはこれを拡張した lemma を利用しなくてはならないからである（例えば、Dothan [1990]を参照）。

33 (3-30)の仮定は、実はさらに拡張可能である。すなわち、(3-30)では自分自身のディフォルトによるキャッシュフローへの影響を取り入れていないが、これを取り入れる

自分のポジションがロングであった場合の回収率である。一方$\varphi_1(t, V_t)$は、自分のポジションがショートであった場合の支払率[34]である。ロング、ショートの両ケースを想定するのは、スワップ商品の扱いに備えるためである[35]。回収（支払）金額は、ディフォルトが起こる直前の当該取引の価値V_tに回収（支払）率を乗じた金額である。(3-30)を(3-27)に代入すると、

$$dV_t = R_t V_t dt + dM_t \tag{3-31}$$

$$R_t \equiv r_t + [1 - \varphi_1(t, V_t)]h_t 1_{\{V_t < 0\}} + [1 - \varphi_2(t, V_t)]h_t 1_{\{V_t \geqq 0\}} \tag{3-32}$$

と整理できる。特に、貸出など常に$V_t \geqq 0$である取引については、

$$R_t \equiv r_t + [1 - \varphi_2(t, V_t)]h_t \tag{3-33}$$

と考えてよい。(3-32)および(3-33)式は、回収（支払）率調整後のディフォルト確率（リスク中立ベース）を無リスク金利に上乗せした金利として解釈可能である。(3-31)および(3-28)から、簡単な計算を経て、

$$V_t = E_t^Q\left[e^{-\int_t^T R_u du} X\right] + E_t^Q\left[\int_t^T e^{-\int_t^s R_u du} dD_s\right] \tag{3-34}$$

という解が導出される。ここでD_tは、満期に至る以前に当該取引から発生するキャッシュフロー（利払いや配当等）である。満期のみしかキャッシュフローが発生しない取引については、単に、

$$V_t = E_t^Q\left[e^{-\int_t^T R_u du} X\right] \tag{3-35}$$

となる。前節での議論にならって解釈すれば、資産価格V_tは、キャッシュフローの割引現在価値に関するリスク中立期待値として計算されると言える。ここでの特徴は、ディフォルトによる潜在的な損失可能性を織り込んだR_tを割引金

ことも理論的に可能である。本稿では、理論的な見通しを良くするために、この拡張については言及しない。

[34] ここで定義する支払率は、取引相手がディフォルトした場合に、その時点における自分の債務（時価）のどれだけを支払う必要があるのか表す情報であり、ネッティングがないとすれば、通常 1 に近い数字になると考えられる（従って、自分が債権者である場合の回収率とは、意味合いが異なる）。本モデルでは、分析の一般性を確保するためにこのパラメータが設けられていると考えられる。

[35] スワップ商品は、原資産価格の変動次第で時価は正にも負にもなり得る（いわば、資産にも負債にもなり得る）という特徴をもつため、ディフォルト時点でポジションがロングであるかショートであるかは事前に確定していない。

利として利用している点である。通常の（信用リスクを勘案しない）金利の期間構造モデル（Hull-White モデル等）と同様に、R_t の期間構造の変化について適当なモデルを与えれば、市場で流通している証券の価格情報に基づきモデルのパラメータを定めることによって、任意の証券を上式に基づきプライシングすることができる。例えば、Duffie and Singleton [1994]では事業債等を、Duffie and Huang [1996]ではスワップ商品（２ファクターモデルを利用）をそれぞれ対象にして、取引相手の信用リスクを勘案したプライシングを試算している。

ロ．モデルの具体化

イ．で示した V_t の解(3-34)を計算するには、その右辺に含まれる確率過程 R_t についてパラメトリックな形式を特定することが必要である。具体的には、

$$R_t \equiv r_t + [1-\varphi_1(t,V_t)]h_t 1_{\{V_t<0\}} + [1-\varphi_2(t,V_t)]h_t 1_{\{V_t \geqq 0\}} \tag{3-36}$$

のダイナミクスをモデル化する必要がある。Duffie 等が一連の論文で示した方法では、まず、

$$\rho_t \equiv r_t + [1-\varphi_1(t,V_t)]h_t \tag{3-37}$$

$$\eta_t \equiv [\varphi_1(t,V_t) - \varphi_2(t,V_t)]h_t \tag{3-38}$$

と定義した変数を用いて、(3-36)式の R_t を

$$R_t = \rho_t + \eta_t 1_{\{V_t \geqq 0\}} \tag{3-39}$$

と書き直す。ここで、ρ_t は、取引相手のディフォルトに伴う損失可能性（$[1-\varphi_2(t,V_t)]h_t$）を含まないという意味で、信用リスクをほぼ捨象したレート（例えば Libor に近いレート）と解釈できる一方、η_t はスプレッドと位置付けられる。ρ_t と η_t の確率過程を特定してやれば、R_t が決まりプライシングを実行できる。まず、ρ_t については、最も単純には１－ファクターモデルにより、

$$d\rho_t = a(b-\rho_t)dt + c\sqrt{\rho_t}\,dB_t \tag{3-40}$$

といった表現で扱う方法がある。より一般的にはマルチファクターモデル（ファクター数 n）を採用可能であるが、その一例として、

$$\rho_t = \sum_{i=1}^{n} Y_t^i \tag{3-41}$$

$$dY_t^i = a_i(b_i - Y_t^i)dt + c_i\sqrt{Y_t^i}\,dB_t^i, \quad 1 \leqq i \leqq n \tag{3-42}$$

といったモデルが利用できる（ただし、Y_t^i は状態変数ベクトルの第 i 成分）。

一方、η_tのモデル化については様々な方向性が考えられるが、Duffie and Huang [1996]はとりあえず簡便モデルの一例として、

$$\eta_t = \bar{c} \text{ または} \tag{3-43}$$

$$\eta_t = \bar{c}' \rho_t \tag{3-44}$$

という定式化を示した[36]。ただし、$\bar{c}$、$\bar{c}'$ は定数である。どの定式化を採用するか決めた後には、実際に市場で時価を観測可能な金融商品の価格情報を利用して逆に(3-40)〜(3-44)式中に現れるパラメータを推定する。この作業はパラメータ・キャリブレーション(parameter calibration)と呼ばれる。

一度パラメータが決まれば、価格が未知の金融商品について、(3-34)および(3-32)の解を求めることにより理論価格を推定することができる。(3-34)式では、金融商品のキャッシュフロー（D_t および X）を任意に設定可能であるから、原理的にあらゆる金融商品を対象にすることができる。ただし、一般には解析的計算は不可能であることから[37]、何らかの数値計算を行う必要がある。例えば、有限差分法、ツリーを利用した格子法、モンテカルロ・シミュレーション法などが利用可能である。

（５）ロングスタッフとシュワルツによるプライシング・モデル

Longstaff and Schwartz [1995a]は、ディフォルト発生のメカニズムを確率過程モデルによって記述した上で、（２）節に示したプライシングの枠組みに帰着させる手法を提案した。具体的には、取引相手の企業がディフォルトするのは、確率変数として表される当該企業価値 V_t が一定の閾値 K（直観的には総負債価値）を下回った場合であるというメカニズムを想定する。企業価値 V_t は、Merton [1974]に倣い、

$$dV_t = r_t V_t dt + \sigma_1 V_t dB_t^1 \tag{3-45}$$

という対数正規過程（リスク中立ベースで表現）に従うと仮定する（ただし、r_t は無リスク短期金利、σ_1 はボラティリティ・パラメータ、dB_t^1 は標準ブラウン

---

36 この定式化には経済学的な背景や根拠がある訳ではなく、解析的計算のフィージビリティを重視してやや強引に簡略なモデル化を行った面があると思われる。

37 もちろん、特殊なケースには解析解も存在する。例えば、(3-40)および(3-42)式のようなＣＩＲ型のモデル(Cox=Ingersoll=Ross モデル)を利用する場合には、割引債の価格について解析解が存在することが知られている。

運動を表す）。簡単のために、状態変数 X_t を

$$X_t \equiv \frac{V_t}{K} \tag{3-46}$$

と定義し、$X_t<1$ であればディフォルト、$X_t \geqq 1$ であれば存続と考える。ここで、(3-45)、(3-46)より、

$$dX_t = r_t X_t dt + \sigma_1 X_t dB_t^1 \tag{3-47}$$

が成立する。また、金利の変動過程については、Vasicek モデルを採用し、

$$dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \sigma_2 dB_t^2 \tag{3-48}$$

に従って短期金利 r_t が変化すると考える（本式もリスク中立ベースでの表現。また、αとβは平均回帰性に関連したパラメータ、σ_2 はボラティリティ・パラメータ、dB_t^2 は標準ブラウン運動を表す）。このとき、ディフォルト可能性がある危険資産の価格を $H(t,X_t,r_t)$と書くと[38]、$H(t,X_t,r_t)$は次の偏微分方程式を満足する。

$$\frac{\partial H}{\partial t} + r_t X_t \frac{\partial H}{\partial X_t} + (\alpha - \beta r_t)\frac{\partial H}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 X_t^2 \frac{\partial^2 H}{\partial X_t^2} + \rho\sigma_1 X_t \sigma_2 \frac{\partial^2 H}{\partial X_t \partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2 H}{\partial r_t^2} = r_t H \tag{3-49}$$

ただし、ρは、２つの標準ブラウン運動（dB_t^1、dB_t^2）の間の相関係数を表す。(3-49)式は、無裁定条件を仮定した上で、前掲 X_t、r_t の確率微分方程式に Ito's lemma を適用することにより導出される。導出方法は、良く知られた Black=Scholes の偏微分方程式の導出とほぼ同様であるので、本稿では解説を省略する（例えば、Duffie [1996]を参照）。満期 T における非ディフォルト時のペイオフを $P(r_T)$、ディフォルト時のペイオフ（回収額）をδ $P(r_T)$とすると、(3-49)の偏微分方程式に課される境界条件は、

$$\begin{aligned} H(T, X_T, r_T) &= P(r_T)\cdot 1_{\{X_T \geqq 1\}} + \delta P(r_T)\cdot 1_{\{X_T<1\}} \\ &= P(r_T)\cdot[1_{\{X_T \geqq 1\}} + \delta \cdot 1_{\{X_T<1\}}] \\ &= P(r_T)\cdot[1-(1-\delta)\cdot 1_{\{X_T<1\}}] \end{aligned} \tag{3-50}$$

である。一般には、(3-50)の条件下で(3-49)を解くことにより、任意の商品の価格を得られる。ただし、解を求めるには、特殊な場合を除き数値計算（有限差分法等）を行う必要がある。

本モデルの利点の１つは、割引債（およびその集合として表される利付債）

---

[38] 本節（および第４章（３）節）における $H(t,X_t,r_t)$は、危険資産の価格関数を表しており、本章（２）節でディフォルト事象を表すダミー変数として導入した H_t とは全く異なるものであることに注意されたい。

の理論価格については、解析的に解を導出できる点である。具体的には、まず境界条件を$H(T, X_T, r_T) = P(r_T) = 1$として、(3-49)の偏微分方程式を解く。これは、金利の期間構造モデルとして Vasicek モデルを採用した場合に無リスク割引債の理論価格を求めることにほかならず、解析解が知られている[39]（$P_s(t, r_t)$とする）。次に、最終的な解の形式を

$$H(t, X_t, r_t) = P_s(t, r_t) \cdot [1 - (1 - \delta) Q(t, X_t, r_t)] \tag{3-51}$$

と記した上で、(3-49)式に代入すると、$Q(t, X_t, r_t)$が満たすべき偏微分方程式が得られる。Longstaff and Schwartz [1995a]は、これを解析的に解くことに成功した（具体的な解は、複雑であるため省略）。

この計算方法を実際に運用する上では、各種のパラメータの推定が問題となる。Longstaff and Schwartz [1995a]によれば、金利の変動過程(3-48)式に含まれるα、β、σ_2については、過去の金利データおよび債券価格データから推定可能である。また、状態変数X_tに関連したパラメータ（σ_1およびρ）は、個々の企業（ないし産業）にかかる過去のデータから推定できる。現在の状態変数X_tの水準については、外生的にV_tおよび K の推定値を与えることにより決定可能であるが、当該企業が複数の債券を発行している場合には、そのうちの１つの債券（最も流動性が高く、従って価格形成が合理的であると考えられる債券を選択する）の市場価格からインプライされるX_tを算出し、それを基に他の債券の理論価格を推定することも可能である。

[39] 解析解の具体的な形式は、Hull [1997]等の標準的な教科書を参照。

４．クレジット・デリバティブのプライシング

最近、企業の信用度に関連した指標（例えば格付けやクレジット・スプレッドなど）を原資産とし、その将来の水準に応じてペイオフが決まるというクレジット・デリバティブの取引が増加傾向にあり、注目を集めている。これら取引の商品性については、これまでにも解説文献がある[40]ので、本稿で改めて解説はしない。一方、それらのプライシングの方法論については、現状まとまった解説が見当たらない上、業者として取引を行っている金融機関の中でも具体的にどのような検討・運用がなされているのか明らかではない。そこで、本章では、前章までで得た知識を踏まえ、クレジット・デリバティブのプライシングに関する問題の切り口を独自にとりまとめることを試みる。従って、以下の内容は、市場で一般的に浸透している考え方をまとめたといった位置付けではない点を断っておく。

実際の市場におけるクレジット・デリバティブの価格は、「需給に基づいて決まる」と言われることが多い。現状ではクレジット・デリバティブのマーケット・メーカーの数は決して多くない上、需要・供給のボリュームも必ずしも多くはないのが実状であるから、市場では客観的な商品性に基づく競争的価格形成が行われておらず、むしろ、取引主体のバーゲニング・パワー等に依存して価格が形成されている面があろう。ただ、クレジット・デリバティブの価格設定・評価を行う上での参考情報として、理論価格を知っておきたいというニーズはあり、マーケット・メーカー等は、「アセット・スワップ取引における市場レートを基準に理論価格を算定する」と言われている。もっとも、実際にどの市場レートをどのように調整して最終的な理論価格を得るのか具体的なプロセスは必ずしも明らかではない。また、将来的に市場の競争化が進めば[41]、市場参加者にとって正確な理論価格の把握が不可欠になることは確実である。従って、本章では、クレジット・デリバティブの理論価格の導出方法の考え方を整理しておく。

---

[40] 例えば、J.P. Morgan & Co. [1996a, b]を参照。

[41] 最近のクレジット・デリバティブ市場の動向をみると、マーケット・メイクを行う銀行（J.P. Morgan 等）やブローカー（山根プレボン等）が増加傾向にあることなどからも、次第に市場の競争化が進んでいるように見受けられる。

（１）取引種類別にみたプライシング方法の分類

はじめに、典型的なクレジット・デリバティブの商品分類[42]に対して、そのプライシング方法を検討する観点から各分類をさらにグルーピングすると、次のように整理可能である。

①レプリケーション法を適用してプライシング可能な商品群
- トータル・レート・オブ・リターン・スワップ（以下、TROR スワップ）

②近似的にレプリケーション法を適用可能な商品群
- クレジット・ディフォルト・スワップ（時価評価型・交換型ペイオフ）

③モデルによるプライシングが必要な商品群
- クレジット・ディフォルト・スワップ（事前約定型ペイオフ）
- クレジット・リンク債
- クレジット・スプレッド商品
- デリバティブ型商品（例えば、ディフォルト可能性のある債券を原資産とするオプション）

これらのうち①、②については、クレジット・デリバティブと言っても、経済機能的にみると、オンバランスの原資産（ディフォルト可能性のある事業債等）をそのままオフバランス化しただけのものである。元の原資産とオフバランス化されたクレジット・デリバティブは同一のキャッシュフローを持つため、直接レプリケーション法を適用してプライシングすることが可能である。レプリ

[42] 本章では、J.P. Morgan & Co. [1996a, b]における整理に基づき、各種クレジット・デリバティブを(a) クレジット・ディフォルト・スワップ、(b) トータル・レート・オブ・リターン・スワップ、(c) クレジット・リンク債、(d) クレジット・スプレッド商品、(e) その他デリバティブ型商品の５つに分類する。さらに、(a)はディフォルト時のペイオフの決定スキームに応じて次の３通りに細分類できる。

(a-1) 時価評価型ペイオフ：ディフォルトしたレファレンス資産の時価が額面を下回っている分を支払う取引。

(a-2) 交換型ペイオフ：ディフォルトしたレファレンス資産と引き替えに、債券の額面を支払う取引。

(a-3) 事前約定型ペイオフ：ディフォルト時に支払う固定金額を事前に約定しておく取引。

なお、単に(a)をクレジット・スワップ、(b)をトータル・リターン・スワップと呼ぶ場合もある。また、(d)は、クレジット・スプレッド・フォワードとクレジット・スプレッド・オプションに大別可能である。(e)の具体例としては、ディフォルト可能性のある債券を原資産とするオプションなどを挙げることできる。

ケーションの具体例は（２）節で示す。一方、③の取引についてキャッシュフローをみると、原資産のキャッシュフローに依存しているものの、決して原資産のキャッシュフローそのものではなく加工を施した派生商品となっている[43]（この点で、文字どおり、クレジット・デリバティブと呼ぶのに相応しい）。このため、③のプライシングについては、単純なレプリケーション法では対応不可能である。従って、第３章で扱ったようなプライシング・モデルを利用して信用度が変化するプロセスを与えた上で各キャッシュフローを評価する必要がある。このような金融商品およびプライシング・モデルの具体例は（３）節で示す。

なお、クレジット・デリバティブのプライシング問題に入る前に、前掲第２～３章で解説の対象としたクレジット・デリバティブ以外の諸取引とクレジット・デリバティブとの関係を明らかにするために、それぞれの信用リスクの所在をまとめておく。すなわち以下では、各取引ごとに、トレーディング取引として扱われる場合（時価評価の視点）を(a)として、バンキング取引として扱われる場合（満期まで持ち切りの視点）を(b)として、それぞれ信用リスクが顕現化するケースを整理する。

▽債券（ディフォルト可能性のある企業が発行した債券の購入＜第２～３章での主たる計算例として取扱い＞）
- (a) 債券発行体の信用度の低下（ディフォルトの発生も含む）。
- (b) 債券発行体のディフォルト。

▽スワップ（ディフォルト可能性のある企業を取引相手とするプレーンなスワップ取引＜第３章で、ダフィー等によるモデルの適用例として言及＞）
- (a) 取引相手の信用度の低下。

---

[43] この事情を具体的にみると、事前約定型ペイオフを持つクレジット・ディフォルト・スワップおよびクレジット・リンク債のキャッシュフローは、レファレンス資産がディフォルトするかしないかに依存するという点においてレファレンス資産自体のキャッシュフローと関連性を持つと言えるが、両キャッシュフローは一般には一致しない。すなわち、これらクレジット・デリバティブでは、レファレンス資産ディフォルト時のキャッシュフローは事前に約定された固定金額であるから、必ずしもレファレンス資産の時価低下幅（キャピタル・ロス）とは一致しない訳である。このため、直接的なレプリケーションが不可能である。
　なお、クレジット・スプレッド商品およびデリバティブ型商品については、レファレンス資産ディフォルト時のキャッシュフローの形態は商品形態に応じて多様であって、一般に、レファレンス資産のキャピタル・ロスと一致しないことは自明であろう。

(b) 取引相手のディフォルト かつ スワップ時価が正であること。

▽クレジット・デリバティブ①、②[44]（ディフォルト可能性のある企業が発行した債券にかかる信用リスクを転嫁するサイドの取引＜本章（２）節で取り扱う＞）

(a) 原資産債券の発行体の信用度の上昇 または 取引相手の信用度の低下。

(b) 原資産債券の発行体のディフォルト かつ 取引相手のディフォルト。

▽クレジット・デリバティブ③（ディフォルト可能性のある企業が発行した債券にかかる信用度を原資産とするデリバティブ取引＜本章（３）節で取り扱う＞）

(a) 原資産債券の発行体の信用度の変化 または 取引相手の信用度の低下。

(b) 原資産債券の発行体の信用度の変化 または 取引相手のディフォルト。

これをみると、クレジット・デリバティブの信用リスクを扱う場合の特徴として、原資産（レファレンス資産）のディフォルト可能性と取引相手のディフォルト可能性の両者を同時に評価しなくてはならない点を指摘できる。このためには、理論的に２種類のディフォルト可能性の相関関係を評価する必要が生じるなど、扱いが複雑となる[45]。一方現在の市場実態をみると、マーケット・メーカー以外はクレジット・デリバティブの取引相手として上位の信用度を有する先を選ぶ場合が大半であるほか、マーケット・メーカーの視点に立っても、信用リスクの移転先としての取引相手には信用度が低い先はさほど多くないと考えられる。これらの事情を踏まえ、以下本章では、原則的に取引相手のディフォルト可能性を無視できる（取引相手の信用度が十分に高い）ケースを想定する。また、スワップ取引のように将来の時価の正負が予め定まらない商品については、取引相手だけでなく自分自身のディフォルト可能性も理論価格に反映される筋合いにあるが、議論を簡単にするために、自分のディフォルト可能性も無視することとする。従って、以下、プライシングを行う上で評価する必要があるのは、主として原資産にかかる信用リスクだけである。

---

[44] ここには、③に分類したクレジット・デリバティブのうち、クレジット・ディフォルト・スワップとクレジット・リンク債を含めて考える。

[45] プライシング上の扱いが複雑になるばかりでなく、金融機関が内部でリスク管理を行う上での負担も増加する点には注意を要する。

（2）レプリケーションによるプライシング

（1）節で分類した①および②に属するクレジット・デリバティブの理論価格は、レプリケーション法を利用して導出可能である。本節ではその具体的な考え方を示す。

イ．取引相手のディフォルト可能性を勘案しないプライシング

はじめに、TROR スワップをどのようにレプリケーション可能であるか考えると、図表４－１のように整理できる。これによると、TROR スワップによって信用リスクをテイクする（ディフォルト時にはキャピタル・ロスを支払う義務を負う）側の取引を実行することと事業債の現物に投資をすること（ファンディングはマネー・マーケットで調達）では、経済的な効果は（TROR スワップにおける手数料の存在を除き）基本的に同一である[46]。従って、無裁定条件の成立を前提とすれば、TROR スワップの仕組みの中で設けられている手数料は、理論的にはゼロになるはずである。ただ実際には、後述のように、TROR スワップを締結する両者の間に信用力の格差がある場合など取引相手のディフォルト可能性を考慮しなくてはならない局面では、この手数料の設定によって調整を行うこととなる。

図表４－１　TROR スワップのレプリケーション

TROR スワップによる信用リスクの引受け
＝TROR の受取り＋無リスク変動金利の支払い＋手数料受渡し
＝「無リスク固定金利＋事業債信用スプレッド」の受取り
　＋事業債キャピタル・ゲインの受取りないしキャピタル・ロスの支払い
　＋無リスク変動金利の支払い
　＋手数料受渡し

↓ ＜レプリケーション＞ ↓

[マネー・ファンディング]＋[事業債投資]
＝[無リスク変動金利の支払い]
　＋[「無リスク固定金利＋事業債信用スプレッド」の受取り
　＋事業債キャピタル･ゲインの受取りないしキャピタル･ロスの支払い]

46 ここでは、ファンディングを行うことに伴う事務コストや会計上のコスト（バランスシートが膨らむことによる経営指標の悪化）などを捨象して考える。

図表４－２　クレジット・ディフォルト・スワップのレプリケーション

クレジット・ディフォルト・スワップによる信用リスクの引受け
＝保証料（手数料調整後）の受取り
　　＋ディフォルト時におけるキャピタル・ロスの支払い

↓ ＜近似的レプリケーション＞ ↓

[マネー・ファンディング]＋[金利スワップ]＋[事業債投資]
＝[無リスク変動金利の支払い]
　　＋[無リスク変動金利の受取り＋無リスク固定金利の支払い]
　　＋[「無リスク固定金利＋事業債信用スプレッド」の受取り
　　＋事業債キャピタル･ゲインの受取りないしキャピタル･ロスの支払い]
＝事業債信用スプレッドの受取り
　　＋事業債キャピタル･ゲインの受取りないしキャピタル･ロスの支払い

次に、クレジット・ディフォルト・スワップ（時価評価型または交換型ペイオフ）について同様の議論を行うと、図表４－２のように整理可能である。これによると、クレジット・ディフォルト・スワップによって信用リスクを引き受ける代価として保証料を稼ぐという取引を実行することと、アセット・スワップ[47]を取引することでは、経済的な効果が互いに近似的に等しい。ここで近似と言う意味は、次の２つの相違点にかかる効果が軽微であると考え、その差異を捨象するということである。相違点の第１は、事業債のディフォルト時において、アセット・スワップ取引では金利スワップの清算（反対取引による手仕舞い）に要する再構築コストが計上されるのに対し、クレジット・ディフォルト・スワップではそうした効果は存在しないことである。第２は、クレジット・ディフォルト・スワップの満期までに事業債がディフォルトしなかった場合に同満期時点で実現するキャッシュフローに着目すると、アセット・スワップ取引では事業債の清算（売却）に伴いキャピタル・ゲイン（ロス）が発生するのに対し、クレジット・ディフォルト・スワップではそのような効果は存在しないことである。この差を無視するという近似の下では、図表４－２から、クレジット・ディフォルト・スワップの保証料は事業債信用スプレッド（市場では、いわゆるアセット・スワップ・レートとして観測される）に一致するとの結論を得る。

[47] アセット・スワップとは、債券（事業債等）に投資するとともに、同債券から受け取る固定金利を変動金利に替える金利スワップを付した取引である。

このようなクレジット・ディフォルト・スワップに対する近似的レプリケーションの議論については、上記と同じ内容をやや異なる視点からみることも可能である。具体例を使って説明すると、例えば、格付けがＡ格の事業債をレファレンス資産とするクレジット・ディフォルト・スワップをＡＡＡ格の取引相手と締結することにより保証を購入した場合、元のＡ格事業債の信用度が実質的に上昇し無リスクの状態（ＡＡＡ格レベル）に向上したと見なすことができる。従って、クレジット・ディフォルト・スワップの購入に伴う付加価値は、ＡＡＡ格事業債・Ａ格事業債間の利回りスプレッドに対応するキャッシュフローの割引現在価値であり、これがクレジット・ディフォルト・スワップにおける保証料としてのキャッシュフローの割引現在価値に一致すべきである。従って、市場で格付け間のスプレッド格差を観測することにより、保証料の理論値を算定可能である。

ロ．取引相手のディフォルト可能性に対するプライシング上の扱い

上記の議論ではクレジット・デリバティブの取引相手のディフォルト可能性を無視した場合の理論価格を扱ったが、現実には、どのような取引相手にもディフォルトの可能性がないとは言えないため、正確な理論価格を算出するにはその効果をプライシング・モデルに取り入れる必要がある。理論的には、第３章でみた各種プライシング・モデルにおいて取引相手のディフォルトを表現する新たな確率変数を追加した上、その確率変数の動向次第でどのようなキャッシュフローが発生するかを記述し、リスク中立期待値を計算して理論価格を得ることが可能である。ただ実際には、新たな確率変数を追加するとそれだけリスク中立確率の推定が困難化するなど、実務面での運用が難しくなるという問題が残る。

では、取引相手のディフォルト可能性について、現在実務的にどのような扱いがなされているのであろうか。例えば、クレジット・デリバティブのマーケット・メーカーの１社である J.P. Morgan が情報ベンダーを介してクォートしているクレジット・ディフォルト・スワップ・レートの画面には、特にオファー・レート（すなわち、J.P. Morgan の取引相手がレファレンス資産の信用リスクをとるサイドの取引に対するレート）について、クォート・レートはベスト・レート（信用度が十分に高い相手に対するレート）であること、従って取引相手の信用度に応じたチャージ[48]をベスト・レートから差し引く場合があり得ること、

[48] このチャージのレベル感を知る上での参考情報として、1997 年 2 月の一時点において、期間３年の取引で 0.0～2.5bp、期間５年の取引で 0.0～5.0bp 程度とされていたこ

を留保している。このチャージが理論的なプライシング・モデルに基づき算定されたのか、実務上の経験から概算したものであるかは明らかではない。ただ、理論上だけでなく実務上も、取引相手のディフォルト可能性（いわゆるカウンターパーティ・リスク）が何らかの形で評価されていることは確かであろう。

（３）モデルを利用したプライシング

本節では、（１）節で③に分類したクレジット・デリバティブの中で、特にクレジット・スプレッド・オプション（クレジット・スプレッド商品の一種）および信用リスクを有する債券を原資産とするオプション（デリバティブ型商品の一種）の２つを取り上げ、それぞれをプライシングするために考案されたモデルを簡単に紹介する。

なお、③に属するクレジット・デリバティブをプライシングするにはモデルを利用する必要があることは前述のとおりであるが、具体的なモデルの形態については、対象とする金融商品に応じて特別な制約がある訳ではない。例えば、本節で紹介するモデルの代わりに、第３章で扱った一般的なプライシング・モデルを利用することも可能である[49]。

イ．クレジット・スプレッド・オプションのプライシング・モデル

まず、Longstaff and Schwartz [1995b]によって提案されたクレジット・スプレッド・オプションのプライシング・モデルの概要を紹介する。この方法の特徴は、取引相手のディフォルト確率や企業価値を確率変数とみなすのではなく、クレジット・スプレッド自体を確率変数としてモデル化の対象としている点である。

具体的には、時点 t におけるクレジット・スプレッドの log 値を X_t と表記し、これが平均回帰性をもった正規過程（短期金利の変動過程に関するモデルとして有名な Vasicek モデルと同一の形態）に従うとする。

とを付記しておく（もっとも、こうしたチャージは常に変化する可能性がある点には注意）。

49 この事情は、第２章のリスク・キャップ法で VAR を算定する際に信用度の変動過程について何らかのモデルを想定する必要があったが、その形態について原理的な制約は何もなく、如何に実証データの説明力を高めるかが重要であったのと同様である。

$$dX_t = (a - bX_t)dt + \sigma_1 dB_t^1 \qquad (4\text{-}1)$$

また、短期金利 r_t の変動過程については、Vasicek モデルを採用する。

$$dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \sigma_2 dB_t^2 \qquad (4\text{-}2)$$

(4-1)、(4-2)ともに、リスク中立ベースでの表現である。また、a、b、α、βは平均回帰性に関連したパラメータ、σ_1、σ_2 はボラティリティ・パラメータであり、dB_t^1、dB_t^2 は標準ブラウン運動（両者の相関はρ）を表す。対象とする危険資産の価格を $H(t,X_t,r_t)$と書くことにすると、(4-1)、(4-2)は、次の偏微分方程式に変換できることが知られている。

$$\frac{\partial H}{\partial t} + (a - bX_t)\frac{\partial H}{\partial X_t} + (\alpha - \beta r_t)\frac{\partial H}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2 H}{\partial X_t^2} + \rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 H}{\partial X_t \partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\partial^2 H}{\partial r_t^2} = r_t H \qquad (4\text{-}3)$$

Longstaff and Schwartz [1995b]は、クレジット・スプレッド（$= e^{X_t}$）を原資産とし、満期 T、行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプションの理論価格を求めるために、境界条件として、

$$H(T, X_T, r_T) = \max[0, e^{X_T} - K] \qquad (4\text{-}4)$$

を設定した上で(4-3)を解き、解析解を導出した。解析解は、形式的には、ブラック＝ショールズの公式によって与えられる株価を原資産とするプレーンなヨーロピアン・コール・オプションの理論価格と類似している（ただし、パラメータの内容が非常に複雑であるため、本稿では具体的な解は掲載しない）。なお、ヨーロピアン・コール・オプション以外にも、あらゆるペイオフをもつクレジット・スプレッド商品に対して(4-3)式は有効であるが、解の導出に当たっては一般には有限差分法等の数値計算を行う必要がある。

ロ．信用リスクを有する債券を原資産とするオプションのプライシング・モデル

Das [1995]は、信用リスクを有する債券（ここでは、事業債として代表させる）を原資産とするオプション（同ペーパーでは CRO <credit risk option>と呼称）のプライシング方法を提案した。本節ではそのエッセンスを紹介するために、事業債発行体の全負債は当該事業債だけから構成される（他の種類の負債が無い）という仮定を置いて話を進める。

プライシングは、次の２つのステップから成る。第１に、CRO 満期時点 T における事業債（原資産）の価格 B_T を表現する。前提として、事業債発行体の企業価値 V_t が対数正規過程（ボラティリティはσ）に従うと仮定する。このとき、事業債の価格 B_T は、同額面 F の現在価値 $PV_T(F)$からヨーロピアン・プット・オプション（原資産＝事業債発行体の企業価値、行使価格＝事業債の額面総額、

満期＝事業債の満期 T'）の理論価格 $\mathrm{Put}(V_T, F, T'-T, \sigma)$ を差し引いた金額で与えられる。すなわち、

$$B_T = PV_T(F) - \mathrm{Put}(V_T, F, T'-T, \sigma) \qquad (4\text{-}5)$$

となる。これは、Merton [1974]に沿った考え方である。なお、関数 Put(・)は、ブラック＝ショールズの公式で与えられる。第 2 に、CRO（事業債オプション＜以下ではプット・オプションを想定する＞、行使価格 K）の理論価格を導出するには、CRO 満期時点 T におけるペイオフを

$$\max[0, K-B_T] \qquad (4\text{-}6)$$

として、これをリスク中立確率の下で現在価値に割り戻せばよい。(4-6)および(4-5)をみると、CRO の原資産 B_T 自身がまた別の形のオプションとなっていることが分かる。こうした金融商品は、コンパウンド・オプション（または、オプション・オン・オプション）と呼ばれ、理論価格が知られている。以上の考え方に基づき、Das [1995]は、CRO の理論価格の解析解を導出した（具体的な解は省略）。なお、同論文では、無リスク金利のダイナミクスを HJM モデルによって記述したり、企業価値 V_t をマルチファクター・モデルによって記述したりすることにより、上記で紹介した最も簡単な考え方の拡張を試みている。

５．結び

本稿では、金融商品のプライシングにおいて信用リスクを反映させるための方法論を実務・理論の両面から整理した。解説に当たっては、各種方法論の背景にあるロジックを解き明かすことに重点を置いたため、実際の市場データを用いた計算例を示すことは行わなかった。ただ、本稿で示した主たる考え方を理解しておけば、市場データを入手して実際に理論価格を導出することが可能であろう。

注意しなければならないのは、本稿の中でも言及したように、信用リスクを取り入れた理論価格の多くは近似や誤差を有しており、その程度を見極めることが実務上不可欠である点である。理論的に整ったプライシング・モデルであっても、必ず前提として幾つかの仮定を置いているはずである。特に信用リスクを扱おうとすると、モデルによる単純化が容易ではない問題が少なくないのが現実である。例えば、担保や保証の効果をどのように評価すべきか、コブナンツの効果はどうか、より一般的には回収率の扱いをどのように行うのが最適か、といった問題等を挙げられる。また、本文中にも留保したように、流動性リスク・プレミアムやオーバーヘッド等諸コストの転嫁をどのようにプライシングに取り入れるべきかも、実務上は不可避の問題である。

ただ、プライシング・モデルにこうした限界があるからといって、その利用価値がなくなる訳ではない。数年前までは、定量的な分析が市民権を得ていなかったこの分野の状況を思い起こせば、近年の理論的発展と実務への浸透傾向は高く評価されよう。金融業界にとっての今後の課題は、信用リスク関連データ・ベースなどのインフラ整備を進めつつ、より正確なプライシング・モデルの開発を模索し、同時に価格情報・リスク情報を金融機関経営の中で有効に活用できる体制作りを推進することであろう。

以　　上

参考文献

池森俊文、「信用リスクを計測する方法について」、『金融工房』、1997 年 3 月.

王京穂・佐上啓、「信用リスクの数量化とプライシング」、理財工学研究部会（東京工業大学）講演論文、1997 年 5 月.

小田信之・村永淳、「信用リスクの定量化手法について――ポートフォリオのリスクを統合的に計量する枠組みの構築に向けて――」、『金融研究』第１５巻第４号、日本銀行金融研究所、1996 年 11 月.

木島正明、『ファイナンス工学入門 第 II 部 派生証券の価格付け理論』、日科技連、1994 年.

―――、「金融リスク計量化の一考察」、Private Communication、1997 年 6 月.

シュワルツ、エデュアルド、「デフォルト・リスクを持つ負債の評価とクレジット・デリバティブ」、第７回日興インベストメントリサーチセミナー講演資料、日興證券投資工学研究所、1996 年.

鈴木茂央、「信用リスクと社債評価－ディフォルト率・回収率を考慮した社債評価と日本市場の実証分析」、『証券アナリスト・ジャーナル』、1996 年 7 月.

室町幸雄・浅原大介、「信用リスクの計量化とその応用」、信用リスク管理セミナー（日本ＩＢM株式会社）講演資料、1997 年 5 月.

Basu, Sam N. and Harold L. Rolfes, Jr., *Strategic Credit Management*, John Wiley & Sons, 1996.

Das, Sanjiv R., "Credit Risk Derivatives." *Journal of Derivatives* 2 (3), 1995, pp. 7-23.

――― and Peter Tufano, "Pricing Credit-Sensitive Debt When Interest Rates, Credit Ratings and Credit Spreads Are Stochastic." *Journal of Financial Engineering* 5 (2), 1996, pp. 161-98.

Dothan, Michael U., *Prices in Financial Markets*, Oxford University Press, 1990.

Duffie, Darrell, *Dynamic Asset Pricing Theory*, Second Edition, Princeton University Press, 1996.

――― and Ming Huang, "Swap Rates and Credit Quality." *Journal of Finance* 51 (3), 1996, pp. 921-49.

―――, Mark Schroder and Costis Skiadas, "Two Models of Price Dependence on the Timing of Resolution of Uncertainty." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University, 1994.

Duffie, Darrell and Kenneth J. Singleton, "Econometric Modeling of Term Structures of Defaultable Bonds." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University, 1994.

Elliott, R., *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, 1982.

Harrison, M. and S. Pliska, "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading." *Stochastic Processes and Their Applications* 11, 1981, pp. 215-60.

Hull, John and Alan White, "The Impact of Default Risk on the Prices of Options and Other Derivative Securities." *Journal of Banking and Finance* 19, 1995, pp. 299-322.

Hurley, William J. and Lewis D. Johnson, "On the Pricing of Bond Default Risk." *Journal of Portfolio Management*, Winter 1996, pp. 66-70.

Jarrow, Robert A., David Lando and Stuart M. Turnbull, "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads." *Review of Financial Studies* 10 (2), 1997, pp. 481-523.

——— and Stuart M. Turnbull, "Pricing Options on Financial Securities Subject to Credit Risk." *Journal of Finance* 50 (1), 1995, pp. 53-86.

Johnson, H. and R. Stulz, "The Pricing of Options with Default Risk." *Journal of Finance* 42 (2), 1987, pp. 267-80.

J.P. Morgan & Co., "Credit Derivatives: An Innovation in Negotiable Exposure." Working Paper, March 1996 a.

———, "Credit Derivatives: Structures and Applications." Working Paper, March 1996 b.

———, *CreditMetrics™ - Technical Document*, April 1997.

Karagiannis, Evangelos, "Credit Spread and Fair Value in the Corporate Market." *Financial Analysts Journal*, July/August 1994.

Litterman, Robert B. and Kurt D. Winkelmann, "Managing Market Exposure: Levering Your Covariance Matrix to Control Market Risk." *Journal of Portfolio Management*, Summer 1996, pp. 32-48.

Longstaff, F. and E. Schwartz, "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt." *Journal of Finance* 50 (3), 1995a, pp. 789-819.

——— and ———, "Valuing Credit Derivatives." *Journal of Fixed Income*, June 1995b.

Madan, Dilip B. and Haluk Unal, "Pricing the Risks of Default." Working Paper, College of Business, University of Maryland, 1993.

Merton, Robert C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates." *Journal of Finance* 29, 1974, pp. 449-70.

Takahashi, Akihiko, "Notes on Default Risks I." Mimeo, January 1996.

Wong, Kit P., “On the Determinants of Bank Interest Margins under Credit and Interest Rate Risks.” *Journal of Banking and Finance* 21, 1997, pp. 251-71.