IMES DISCUSSION PAPER SERIES

貨幣の最適な発行単位の選択について

北村行伸

Discussion Paper No. 97-J-3

IMES

日本銀行金融研究所
〒100-91 東京中央郵便局私書箱 203 号

備考：　日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

IMES Discussion Paper 97-J-3
1997 年 1 月

貨幣の最適な発行単位の選択について

北村行伸*

要　旨

本論文では、表面的には市場のない形で並行的に流通している多種類の紙幣および鋳貨が、実は広い意味では市場調整を受けているという点を説明し、それを手がかりに、最適な貨幣発行単位の選択について検討する。

もし、貨幣が一般の財であれば、その使用価値の違いは、市場の需給を通して価格・数量ともに調整されると考えられるが、法定貨幣の価格はその貨幣単位そのものであり、市場メカニズムによって価格が調整される余地はない。従って、それぞれの使用価値あるいは貨幣需要に違いがあれば、それはもっぱら数量で調整されることになる。

ところで、わが国で発行されている貨幣単位は実際の取引に対して最適なものであろうか。そもそも最適な貨幣単位の分布を求めることは出来るのであろうか。また、もしそのような最適性が計算できるとして、現実に流通している貨幣単位はその最適性の基準からどれぐらい乖離しているのだろうか。

本論文では、最適な貨幣単位とは、発行されている貨幣の使用価値が相対的に等しくなり、相対的な需要が無差別になるように定められている貨幣単位であるとした上で、わが国の実際の貨幣単位の設定が、貨幣流通量にどのような影響を与えているかを検討した。その結果、5000 円札が貨幣流通量を大幅に歪めていることがわかった。

キーワード：貨幣、貨幣発行単位、Bâchet 問題
JEL Classification: E40,E50

---

* 慶応義塾大学商学部　（e-mail: kitamura@fbc.keio.ac.jp)

１． はじめに

昨今、電子マネーなど貨幣にかかわる技術革新問題が話題に上ることが少なくない。将来、電子マネーが使われるようになると、紙幣や鋳貨が利用されなくなるという議論すら見受けることがある。しかし同時に、貨幣が電子マネーと共存する時代には、貨幣の利便性の小さな歪みが、貨幣流通量を大きく変化させる可能性も否定できない。

本論文では、表面的には市場のない形で並行的に流通している多種類の紙幣および鋳貨が、実は広い意味では市場調整を受けているという点を説明し、それを手がかりに、最適な貨幣発行単位の選択について検討する。

教科書的には、貨幣は、価値保蔵機能、交換機能（あるいは決済機能）、価値尺度機能を持つ抽象的な概念として扱われているが、具体的には、わが国では、鋳貨として、1 円玉、5 円玉、10 円玉、50 円玉、100 円玉、500 円玉が発行されており、紙幣（日銀券）として、500 円札、1000 円札、5000 円札、10000 円札が発行されている。これらの鋳貨や紙幣が教科書的な三つの機能を持つことには異論はないが、同時に、これらの鋳貨や紙幣の使用価値は相対的に異なり、それぞれの需要が異なることも事実である[1]。

もし、貨幣が一般の財であれば、その使用価値の違いは、市場の需給を通して価格・数量ともに調整されると考えられるが、法定貨幣の価格はその貨幣単位そのものであり、市場メカニズムによって価格が調整される余地はない。従って、それぞれの使用価値あるいは貨幣需要に違いがあれば、それはもっぱら数量で調整されることになる。

ところで、わが国で発行されている貨幣単位は実際の取引に対して最適なものであろうか。そもそも最適な貨幣単位の分布を求めることは出来るのであろうか。また、もしそのような最適性が計算できるとして、現実に流通している貨幣単位はその最適性の基準からどれぐらい乖離しているのだろうか。

結論を先取りして言えば、最適な貨幣単位とは、発行されている貨幣の使用価値が相対的に等しくなり、相対的な需要が無差別になるように定められている貨幣単位のことを指す。ここでその貨幣の使用価値が高いとは、その貨幣を保有することによって、最適な支払いが出来るということであり、最適な支払いとは貨幣の受け渡し（支払いとそれに対するお釣り）が最小量で行えるということを指している。また、最適性からの乖離は相対的な流通数量を見ることによってわかる。以下では、そのような最適貨幣単位の求め方、現実の貨幣単

[1] １万円の支払いをするのに１円玉で支払うのも、１万円札で支払うのも無差別な人は少ないだろう。同様に、１円の支払いをするのに１万円札を使う人もあまりいない。つまり、同じ交換機能はあっても、その支払額に応じて貨幣の使用価値はおおいに違うのである。

位の最適単位からの乖離、現実の貨幣流通量について論じたい。

２．最適な貨幣発行単位の分布

貨幣の使用価値が相対的に等しくなり、相対的な需要が無差別になるような貨幣単位はいかにして求めることができるだろうか。基本的な考え方は、想定されるあらゆる支払いに対して貨幣の受け渡し（支払いとそれに対するお釣り）が最小量で行えること、つまり、日常の生活で保有して持ち歩く貨幣量を最小化するための様々な貨幣の最適な組み合わせを考えることである。この問題に対する理論的接近方法は Telser (1995)によって与えられている。そこで以下では Telser の議論をたどってみたい。

話は少し飛躍するが、数学の整数論には Bâchet 問題として知られているものがある。それは、1 から 41 までの任意の整数で表される重量を天秤で計る時に必要な最小の分銅（様々な重さをとる）の組み合わせを求めよという問題である。これは、重さに関わらず分銅の製造コストが等しいとする時に、1 から有限の上限までの任意の整数量を計れる分銅の組み合わせを最小コストで作れという問題に一般化することができる。

この一般化された Bâchet 問題に対する解答は、(1)既知の重量の分銅を、未知の重量の物が乗っている側も含めて、天秤の左右両方に乗せて用いることが出来る場合、(2)既知の重量の分銅を天秤の片側だけに乗せて用いる場合に分けて考えられている。(1)の場合には、分銅の重量単位を 3 の乗数倍（つまり、1,3,9,27,81,243,....)にするということである。また、最大限 $\sum 3^k = (3^{k+1} - 1)/2$ の任意の整数量まで、この分銅の組み合わせで計測できることもわかっている。また、(2)の場合には、分銅の重量単位を 2 の乗数倍（つまり、1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024....)にするということである[2]。

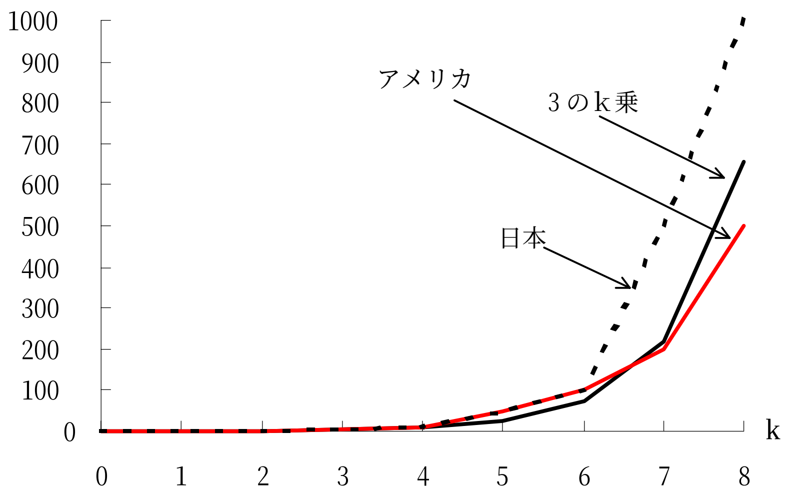
Telser は、一般化された Bâchet 問題が実は任意の現金支払額に対して最適な貨幣単位の分布を求めることと同じであるということを指摘している。現金支払いに際して、釣り銭をもらうことが出来るのであれば、先の(1)の場合に相当し、今では珍しくなったが、バス運賃や自動販売機で釣り銭をもらうことが出来ないケースは(2)の場合に相当する。以下では、釣り銭をもらえる(1)の場合を主として考えよう。具体的に問題となるのは、例えば、消費者が財布の中に入れておく現金、あるいはスーパーマーケットやコンビニエンスストアーで準備しておくべき釣り銭の嵩（かさ）を最小に出来るような貨幣単位の組み合わせ

[2] 詳しい議論については、Hardy and Wright (1960, pp.115-117)を参照されたい。

を考えるということである。補論では Bâchet 問題を最適貨幣単位の分布問題として解釈した上で数学的証明が与えてある。

Bâchet 問題ではあらゆる未知の重量が一様に分布しているケースを考えたが、現金支払いの場合にも支払額はとりあえず一様分布していると考えて差し支えないだろう[3]。図 1 は最小通貨単位で計った発行貨幣単位の分布を日本とアメリカについて調べ、数学的に最適な貨幣単位の分布とされる 3^k と併記したものである。

図１　貨幣単位の累進度



Telser が報告しているように、アメリカの貨幣単位の分布は数学的に最適な貨幣単位の分布とされる 3^k に極めて近似的であることがわかる。実際にアメリカの貨幣単位の平均累進度[4]は 3.34 である。日本の場合は、k=6 まではほぼ最適値に近似しているが、それ以降は急に累進度を増している。因みに、日本の貨幣単位の平均累進度は 3.52 である。

このように日本の累進度が最適累進度 3 を越えていることによって、現実の貨幣・紙幣流通量になにか不都合が起こっているだろうか。それを調べる意味で、先ず理論的に最適な貨幣単位の分布と現実の貨幣単位の分布を表にしたものが表 1 である。

3 例えば、単品別に見た場合、98 円、100 円、990 円、1000 円、10000 円など、０や８や９といった末尾で終わる価格が、それ以外の価格よりも多いといった価格設定上の傾向はあるかもしれないが、単品で売買を行うよりも、いくつかの商品をまとめて買う可能性が高く、また消費税がかかる場合には、末尾が一様分布ではない可能性はそれほど問題にはならないだろう。

4 貨幣単位の平均累進度は（貨幣単位）＝（累進度）^{k}（ここで k=0,1,2,3,...）として、累進度について k=0～8 まで解いたものを平均して求めた。

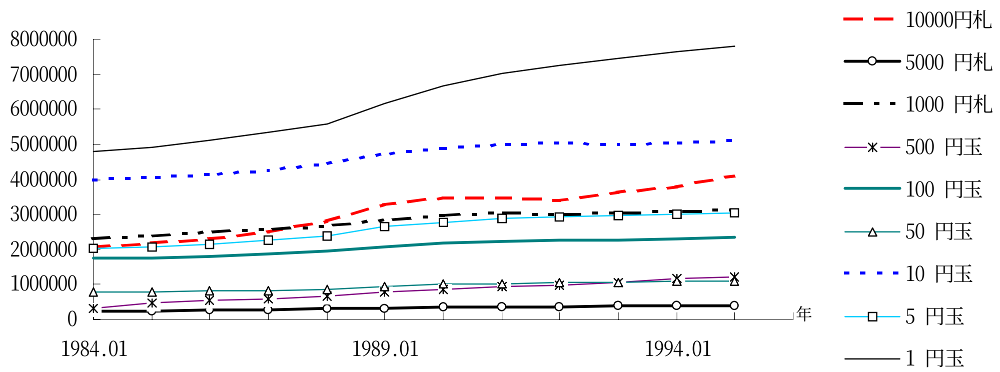
表１　貨幣単位の分布　　（最小貨幣単位に基づく）

最適理論値＝3^k	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
日本	1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000
アメリカ	1	5	10	25	100	500	1000	2000	5000

注：アメリカでは 50 セント玉と 2 ドル札は発行されているがほとんど使われていないので、ここでは除外してある。

この表からわかるように、日本の貨幣単位は最適値からすると近似的に 25 円、250 円、2000 円をとるべきところを、50 円玉、500 円玉、5000 円札を発行しているために、累進度が高くなっていることがわかる。しかし、現実にこれらの鋳貨・紙幣がその他の貨幣と無差別に使われているのならば問題はないだろう。その点を調べるために、わが国で流通している鋳貨・紙幣流通量（数量）を鋳貨・紙幣別に図示したのが図 2 である。

図２　鋳貨・紙幣別流通量



注：500 円札はほとんど流通していないので、ここでは除外してある。

驚くべきことに、先ほど最適値より累進しすぎていると指摘した 50 円玉、500 円玉、5000 円札はどれも極めて流通量は低いことがわかった。特に、5000 円札の流通量は 1000 円札、10000 円札の流通量と比べて顕著に低い。これは、実際の現金取引において、極めて使用価値が低いことを示唆しているのではないだろうか。

ところで、この使用価値はどのように数値化できるだろうか。これは、ある任意の支払額に対して、それぞれの貨幣を使用できる相対的範囲によって表現できるだろう。具体的には、1 円玉と 5 円玉の使用範囲は、中間の 3 円を境にそれ以下であれば 1 円玉を、以上であれば 5 円玉を用いればよいということになる。ここで、1 円玉の使用範囲は 0-3 円までの 3 円であり、5 円玉の使用範囲は

10 円との境界を 7.5 円とすれば、3-7.5 円までの 4.5 円である。以下同様にして、10 円玉の使用範囲は 22.5 円、50 円玉は 45 円、100 円玉は 225 円、500 円玉は 450 円、1000 円札は 2250 円、5000 円札は 4500 円、10000 円札はそれ以上無限大である。貨幣単位が大きくなると、当然使用範囲も大きくなる。そこで、当該貨幣単位で割って基準化し、相対的使用範囲を求めよう。すると 1 円玉の相対的使用価値は 3 であるが、10 円玉、100 円玉、1000 円札の相対的使用価値は等しく 2.25 であり、10000 円札は無限大である。それに対して 5 円玉、50 円玉、500 円玉、5000 円札の相対的使用価値は等しく 0.9 であることがわかる。つまり、10 円玉、100 円玉、1000 円札は 5 円玉、50 円玉、500 円玉、5000 円札の 2.5 倍の使用範囲を持っていることがわかる。これが、5 円玉、50 円玉、500 円玉、5000 円札の使用価値が低い理論的根拠である。因みに、最適な貨幣単位である 3^k の相対的使用価値は最小単位 1 を除いて一律 1.33 である。このように相対的使用価値が等しいことが、どのような貨幣も等しく保有する動機となっており、貨幣単位が最適であることの根拠となっているのである。

次に、現実の貨幣流通量の相対的比率が、現実の貨幣単位から理論的に求められる相対的使用価値の比率（上述の使用範囲比率である 2.5）からどれぐらい乖離しているかを検証してみよう。これを調べることで、貨幣単位の選択が最適でないために生じている貨幣流通量の理論的歪みによって、現実の貨幣流通量がどの程度説明できるかが判るのである。ところで、実現値が理論値にどれぐらい適合しているかを検定する統計テストとして最も標準的なものは、次のように定義されるカイ 2 乗適合度検定である。検定の結果は表 2 にまとめてある。

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2 / \mu \qquad \text{ここで } \mu = 2.5 \text{（理論値）}$$

表２　カイ２乗適合度検定

流通量比率	5 円玉		50 円玉		500 円玉		5000 円札	
	1 円玉	10 円玉	10 円玉	100 円玉	100 円玉	1000 円札	1000 円札	10000 円札
χ^2	3.106**	2.606***	30.626	0.522***	4.786*	16.562	204.247	253.574

ここで $\chi^2(11)$=3.054 (***=1%有意水準）、4.575(**=5%有意水準）、5.578(*=10%有意水準)。ただし、１円玉だけは理論値 $\mu = 3.3$ として計算してある。

表２より、5 円玉は 1 円玉と 10 円玉に対して理論通りの流通量比率になっている。50 円玉も 100 円玉に対しては理論通りの流通量比率であるが、10 円玉は理論より流通量比率が高い、つまり、より多く流通していることを示している。500 円玉は 100 円玉に対しては 10%の有意水準で理論通りの流通量比率になって

いるが、1000 円札は流通量比率が高くなっている。5000 円札は 1000 円札、10000 円札の両方に対して極めて流通量が少ない、逆に言えば 1000 円札、10000 円札は 5000 円札に対して相対的流通量が理論値をはるかに上回っていることを意味している。この結果を要約すれば、5 円玉、50 円玉、500 円玉は多少の例外はあるが、ほぼ理論通りの流通量比率になっているのに対して、5000 円札は貨幣流通量を大幅に歪めていると言えよう。

ただし、現実の貨幣流通量は、相対的使用価値だけではなく、平均的価格水準、一回当たりの平均支払額などの要因によっても規定されており、一概に貨幣単位の歪みによって 1000 円札、10000 円札が過剰に流通しているとは言えない。しかし、他の貨幣流通量と比べた場合、5000 円札の過小流通は明らかであり（図２参照）、その主因は貨幣単位設定の歪みによるものと思われる。ところで、現行の貨幣単位の分布に、2000 円札を加えたら貨幣流通量は全体としてどう変わるだろうか。おそらく 1000 円札、5000 円札、10000 円札は 2000 円札とある程度代替され、それぞれの流通量は少なくなるだろう。特に 1000 円札との代替効果は大きく、500 円玉と 1000 円札の流通量比率の歪みは修正されると予想される。

最後に、10000 円札が 5000 円札に比べて相対的に過剰に流通しているのは、5000 円札による歪みだけではなく、それ以上の貨幣単位がないためでもある。近年の 10000 円札の流通量の増加を鑑みると、次の貨幣単位の発行が話題となることが多い。その際、本論文で紹介した Bâchet 問題に対する整数論の解答は最適な貨幣単位の選択に関して、極めて明確な答えを用意しており、将来の貨幣単位を決定する上でも参考になる。因みに、$3^k = 3^9 = 19683$であり、もし、10000 円札以上の単位の札を発行するのであれば、次は 20000 円札が理論的には望ましいことが判る。

III.　おわりに

今日、市場重視の経済政策運営が経済政策の基本理念として受け入れられている感があるが、そこでは表面的な経済規制緩和や自由化と結びつけられるだけで、本論文で論じたような表面に出てこない制度上の歪みについてはほとんど意識されていない。しかし、近年、比較制度分析の枠組みで盛んに論じられているように、ある制度は、他の制度のあり方にも影響を与えているので（これを制度的補完性と呼ぶ）、市場の一部を規制緩和しても、全体として規制緩和の効果はなかなか出てこないという結果になりがちである。貨幣単位の歪みは直接的には、最適単位をとった場合に比べて、不必要な保蔵コストを生じさ

せているし、間接的には価格付けがある単位の周辺に集中しがちであるなど様々な影響を与えていると思われる。市場重視の経済政策の中には、このような表に出てこない市場の最適化へ向けての調節も含まれるべきであろう。

　また、本論文で理論的基礎となった Bâchet 問題は、純粋数学、特に「数学の女王」と数学者ガウスによって形容された整数論の問題であり、それが経済学の問題にほとんど変更なく適用できたということは、管理実験ができない社会科学の中では画期的なことである。最近では電子マネーなどで重要性が増している暗号論の基礎として整数論が用いられているが、市場経済の大半は整数の世界であることを考えれば、市場経済の分析にも整数論の成果がもっと幅広く応用できるのではないだろうか。

補論　Bâchet 問題の最適な貨幣発行単位の選択問題への応用

Bâchet 問題は任意の現金支払額に対して準備しておくべき貨幣の種類とそれぞれの種類に応じた貨幣量を最小にするような貨幣単位の分布を求める問題と同じことである。ここではより一般的な釣り銭をもらえる支払いのケースを考えてみよう。問題の要点は次の二つである。(1)適当な貨幣を組み合わせることで、任意の現金支払いが必ずできること（補助定理１）。(2)必要な貨幣の種類とそれぞれの種類に対応した貨幣量を最小にするような貨幣単位が存在すること（定理１）。定理１の証明方法は基本的に Hardy and Wright (1960, pp.115-117)を踏襲している。

補助定理１　貨幣単位$k_0, k_1, k_2, ..., k_n$を定めておくと、任意の正整数で表される支払額 a は、釣り銭をもらえるとすると、次のような貨幣の組み合わせで支払う時が、最も貨幣量が少なくてすむ。

$$a = e_0 k_0 + e_1 k_1 + e_2 k_2 + ... + e_n k_n$$

ただしe_iは 0 も含む整数である。

証明　先ず a をk_1で割って、整数商をQ_1、余りを$e_0 k_0$とする。

$$a = e_0 k_0 + Q_1 k_1 \qquad (0 \le e_0 k_0 < k_1)$$

次に、$Q_1 k_1$をk_2で割って、整数商をQ_2、余りを$e_1 k_1$とする。

$$Q_1 k_1 = e_1 k_1 + Q_2 k_2 \qquad (0 \le e_1 k_1 < k_2)$$

これを繰り返して、

$$Q_{n-1} k_{n-1} = e_{n-1} k_{n-1} + Q_n k_n \qquad (0 \le e_{n-1} k_{n-1} < k_n)$$

この関係を順次代入すると次のように表せる。

$$a = e_0 k_0 + e_1 k_1 + e_2 k_2 + ... + Q_n k_n$$

ところで$Q_n k_n$は、k_n以上の貨幣単位がないので、

$$Q_n k_n = e_n k_n \qquad (0 \le e_n k_n)$$

と置き換えると、

$$a = e_0 k_0 + e_1 k_1 + e_2 k_2 + ... + e_n k_n = \sum_{i=0}^{n} e_i k_i$$

と表せる。このことはe_nを最小にするようにe_{n-1}が決まっており、e_{n-1}を最小にするようにe_{n-2}が決まっていることを意味している。以下同様に$e_0, e_1, e_2, ..., e_n$は支払額 a に対して、所与の貨幣単位を用いて最小の貨幣量で表された組み合わせとなっている。（証明終わり）

n+1 個の貨幣単位が最も効率的に用いられ、無駄な重複がないのはe_iが 0,-1,1

のいずれかである場合であり、それを満たすような貨幣単位は 3 の乗数倍であることが、次の定理で示される。

定理１　釣り銭をもらえるとすると、貨幣単位$1,3,3^2,3^3,\ldots\ldots,3^n$で$(3^{n+1}-1)/2$までの任意の額の支払いができ、この貨幣単位の下で支払いに必要な貨幣量は最小になる。

証明　補助定理１より、任意の正整数$a(\leq 3^{n+1}-1)$は 3 の乗数倍の線形結合として表せる。

$$a=\sum_{i=0}^{n} f_i 3^i \tag{1}$$

ここでf_iは 0,1,2 のいずれかである。また、

$$b=\sum_{i=0}^{n} 3^i=(3^{n+1}-1)/2 \tag{2}$$

を(1)式から引くと $c=a-b$ は$-(3^{n+1}-1)/2$から$(3^{n+1}-1)/2$の範囲内の任意の整数をとり、それは次のように表せる。

$$c=\sum_{i=0}^{n} g_i 3^i \tag{3}$$

ここでg_iは-1,0,1 のいずれかをとる。従って、n+1 個の貨幣単位をそれぞれの単位について最大 1 個使うだけで$(3^{n+1}-1)/2$までの任意の額の支払いができることが示されたことになる。

次に任意の正整数 a をそれぞれの貨幣単位について最大 1 個使うだけで表現できるのは貨幣単位が 3 の乗数倍の場合であることを示そう。
貨幣単位k_iは必ず異なっており次のように並べることができる。

$$k_0<k_1<k_2<\ldots\ldots<k_n \tag{4}$$

貨幣単位をそれぞれ最大 1 個だけ使って表現できる最大値 W と最大値に最も近い額 W_1 は次のように表せる。

$$W=k_0+k_1+k_2+\ldots\ldots+k_n$$
$$W_1=k_1+k_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+k_n$$

ここで W と W_1 の差は最小貨幣単位k_0でこれは 1 でなければならない$(k_0=1)$。
W_1 に次いで大きな額 W_2 は、

$$W_2=-k_0+k_1+k_2+\ldots\ldots+k_n$$

であり、W_2=W-2 と表現できる。 W_2 に次いで大きな額 W_3 は、

$$W_3=k_0+k_2+k_3+\ldots\ldots\ldots+k_n$$

である。とすると W_3=W-3 のはずであるから、$k_1=3$ということになる。従って、n=1 については成立することがわかった。

次に帰納法を用いて、

$$k_0 = 1, k_1 = 3, k_2 = 3^2, k_3 = 3^3, \ldots\ldots., k_{s-1} = 3^{s-1}$$

が成立すると仮定しよう。最大値 W は次のように表せる。

$$W = \sum_{t=0}^{s-1} k_t + \sum_{t=s}^{n} k_t \tag{5}$$

ここで、$k_s, k_{s+1}, k_{s+2}, \ldots.., k_n$ はこのままにしておく。ところで $k_0, k_1, k_2, \ldots.. k_{s-1}$ に含まれている貨幣単位を用いると最小限、

$$-\sum_{t=0}^{s-1} k_t + \sum_{t=s}^{n} k_t = W - (3^s - 1)$$

まで支払える。この最小限より小さい支払額のうち最大のものは $W - 3^s$ であり、これは、

$$k_0 + k_1 + k_2 + \ldots.. + k_{s-1} + k_{s+1} + k_{s+2} + \ldots\ldots.. + k_n$$

でなければならない。とすれば、

$$k_s = 2(k_0 + k_1 + \ldots.. + k_{s-1}) + 1 = 3^s$$

が成立する。従って、全ての正整数 n に関して $k_n = 3^n$ が成立する。（証明終わり）

以上

参考文献

Hardy, G.H. and Wright, E.M.(1960) *An Introduction to The Theory of Numbers*, 4th edn. Oxford: Oxford University Press.

Sumner, S.(1993) “Privatizing the Mint”, *Journal of Money ,Credit and Banking*, 25, 26-27.

Telser, L.G.(1995) “Optimal Denominations for Coins and Currency”, *Economic Letters*, 49, 425-427.

Weil, A.(1979) *Number Theory for Beginners*, New York: Springer-Verlag.