IMES DISCUSSION PAPER SERIES

ボラティリティ研究の新潮流
― ラフ・ボラティリティ ―

しのざきゆうじ　ひらきかずひろ
篠崎裕司・平木一浩

Discussion Paper No. 2024-J-1

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

IMES Discussion Paper Series 2024-J-1
2024 年 1 月

ボラティリティ研究の新潮流
― ラフ・ボラティリティ ―

篠崎裕司（しのざきゆうじ）*・平木一浩（ひらきかずひろ）**

要　旨

資産価格変動の不確実性を表すボラティリティは、ファイナンス研究において重要な研究対象である。近年、ボラティリティが「ラフ性」を有すること、すなわち、ボラティリティの時間発展が従来の認識に比べ激しいことを示唆する研究が進展しており、ボラティリティ研究の新潮流となっている。これらの研究では、資産価格の高頻度データやデリバティブ価格から計測されるボラティリティのラフ性などの実証に加え、ラフなモデル化の必要性に関する理論や、デリバティブの価格付けなどへの応用が議論されている。また、ラフ性を生じさせるメカニズムの解明を試みる研究もみられている。本論文では、資産価格変動の時系列解析、デリバティブの価格付け・リスク管理、資産価格形成のメカニズム解明の 3 つの論点に関し、それぞれの発展経緯を整理し、ラフ・ボラティリティ研究の位置づけや発展可能性を述べる。とくに、金融実務における問題意識や経済学との関わりも踏まえ、ボラティリティを結節点とした分野横断的な研究が重要であることを明らかにする。

キーワード：ヒストリカル・ボラティリティ、インプライド・ボラティリティ、マーケット・マイクロストラクチャー、高頻度取引、デリバティブの価格付け、リスク管理、市場予測
JEL classification: D53、G12、G13、G17

* 日本銀行金融研究所企画役補佐（E-mail: yuuji.shinozaki@boj.or.jp）
** 日本銀行金融研究所企画役（E-mail: kazuhiro.hiraki@boj.or.jp）

本稿の作成に当たっては、大橋和彦教授（一橋大学・東京工業大学）、深澤正彰教授（大阪大学）、渡部敏明教授（一橋大学）ならびに金融研究所スタッフから有益なコメントを頂いた。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

目 次

1 はじめに

ファイナンス研究では、不確実性が存在するもとでの金融資産価格の形成メカニズムの解明や、最適な投資行動、リスク管理手法などを明らかにすることが主要なテーマとなっている。このため、資産価格変動の不確実性 (変動の大きさ) を表すボラティリティは、ファイナンス研究におけるもっとも基本的な研究対象の一つとして、経済学や数理科学、情報科学などの様々な分野とも関わりながら発展してきた。

ボラティリティは、その計測手法に応じて、資産価格の過去データから算出される変動率 (実現した価格変動から計測される変動率) である「ヒストリカル・ボラティリティ」(HV) と、デリバティブ価格から算出される原資産価格の予想変動率である「インプライド・ボラティリティ」(IV) の 2 種類に分類できる。HV を対象とした研究では、おもに時系列データを分析対象として、ボラティリティ予測モデルの構築や投資戦略などへの活用が研究されてきた。一方、IV を対象とした研究は、デリバティブ (金融派生商品) の価格付けやヘッジなどの基礎として活用されてきたほか、VIX などのボラティリティ指数の理論的根拠を提供してきた。

このように、HV 研究と IV 研究は、ボラティリティの計測方法や分析の目的は異なるものの、ボラティリティが確率的に変動することや、様々な変動の特徴を持っていることを明らかにしたうえで、そのような特徴を表現するモデルの開発を進めてきた点で共通している。とくに、ボラティリティの確率的な変動のモデル化にあたっては、ブラウン運動や、対応する離散時間モデルであるランダム・ウォークを、確率的な変動を表すための基礎的な構成要素として用いつつ、より高度なモデルの開発が進められていった。

そのような発展のなか、2000 年代以降、従来のブラウン運動をベースとしたモデルでは説明が難しい、IV や HV の「ラフな挙動」が報告されていった。ここで、ラフ性は、短時間で激しく変動するという時系列特性を指し、たとえば「非整数ブラウン運動」はこの特性を持つことが知られている[1]。2000 年代後半に、IV 研究において、非整数ブラウン運動を用いることで、「負のべき乗則」と呼ばれる IV の期間構造に関する観測事実[2]をより整合的にモデル化きることが明らかになり (Alos et al. [2007]、Fukasawa [2011])、ラフ・ボラティリティ研究の嚆矢となった。HV 研究では、Gatheral et al. [2018] が、株価などの高頻度データから観測される HV の挙動がラフ性を持つという結果を報告した。

これらの研究を契機として、ラフ性を表現できる数学的ツールである非整数ブラウ

---

[1]時間間隔 Δ でのブラウン運動の変動幅の標準偏差は、$\Delta^{1/2}$ となるのに対して、非整数ブラウン運動の変動幅の標準偏差は Δ^H となる。ここで、$H \in (0,1)$ はハースト指数と呼ばれるラフ性の度合いを表すパラメータで、$H < 1/2$ のとき、短い時間間隔 (小さい Δ) での変動幅の標準偏差がブラウン運動対比大きくなる。すなわち、$H < 1/2$ のとき、非整数ブラウン運動は、ブラウン運動のケース以上に激しく変動する。なお、ラフ性は、一般には、サンプル・パスのヘルダー連続を用いて定義される (2.(2) 節参照)。

[2]負のべき乗則とは、IV の期間構造に関する特徴 (様々な満期のデリバティブから算出された IV の関係) で、主にボラティリティ取引が盛んな米国の株式デリバティブ市場で観測されている。詳細は、4.(2) イ節参照。

ン運動を用いたボラティリティ研究が、近年の潮流の一つとなっている[3]。とくに、非整数ブラウン運動を用いたボラティリティ・モデルは、上記のような HV や IV の挙動を表現することができることに加え、ボラティリティ・デリバティブ (VIX を原資産とするオプションなど) を含むデリバティブの価格付けなどの応用研究も数多く行われている。さらに、市場参加者の個別の売買注文行動に関する「マーケット・マイクロストラクチャー (MM)」の観点から、どのような売買注文行動がなされる場合に資産価格のボラティリティにラフ性が生じるかを明らかにする研究がみられる。このように、ボラティリティの計測や数理的な性質に関する研究だけでなく、デリバティブ実務への応用研究や、なぜボラティリティがラフ性を有するのかという点に関する経済学的な理論的根拠を探求する研究など、ラフ・ボラティリティ研究は広がりを見せている。

このような研究の発展がみられる一方で、今後さらなる研究が必要とされる論点も残されている。まず、ボラティリティがラフであるかどうかについて、議論が続いている。すなわち、上述の通り、ラフ性の実証的観測や応用可能性を示唆する研究が多くみられる一方で、ラフ性の指標の推計値がバイアスを持つ可能性を指摘する研究などもみられている。また、ラフ性を表現するために非整数ブラウンを用いたモデル化が本当に適切か、についても議論が続いている[4]。このほか、ラフ・ボラティリティ・モデルを実務で活用するにあたっては、効率的な数値計算を可能とする技術や理論の更なる発展が必要である。

こうした潮流を踏まえ、本論文では、HV・IV・MM の 3 つの観点から、これまでのボラティリティ研究の歴史を振り返りつつ、ラフ・ボラティリティに関する先端的な研究をまとめる。ここで、HV・IV・MM の既存研究の分野として、それぞれ、資産価格変動の時系列的特徴の分析を主な研究目的の一つとする「計量ファイナンス」、デリバティブの価格付け問題を中核とする「数理ファイナンス」、資産価格形成メカニズムを経済学的観点から分析する「金融経済学」がおおむね対応する。そのため、金融実務における問題意識や経済学との関わりも交えつつ各分野の発展の歴史・経緯をまとめたうえで、ラフ・ボラティリティ研究の位置づけや発展可能性を述べる。これらを通じ、ボラティリティ研究を結節点とした分野横断的な研究の発展の可能性・必要性、および、金融実務における活用の展望を述べる。

以下、2 節では、後の節で必要な数理的事項を紹介する。具体的には、数理ファイナンス分野を中心としてボラティリティ研究における基礎的な道具となってきたブラウン運動や伊藤解析などを導入する。そのうえで、ラフ性を表現する有力なモデルである非整数ブラウン運動の定義や性質について、従来のブラウン運動との共通点や相違点に着目しつつ紹介するとともに、ラフ性の直観的な解釈を解説する。

3 節では HV に焦点をあて、計量ファイナンス分野におけるボラティリティ研究の歴

[3]Gatheral et al. [2018] の著者の一人である Jim Gatheral(ニューヨーク州立大学) は、ラフ・ボラティリティ研究により、Risk 誌の「Quant of the year 2021」を受賞した。このことから、研究者と実務家双方からの注目度が高いことがわかる。なお、Jim Gatheral は、金融機関で実務に従事したのち大学教授に転身した人物で、実務的な問題意識も背景にあったことが窺われる。

[4]現状、ラフ・ボラティリティ研究は、非整数ブラウン運動を利用したモデル化が主流であるが、非整数ブラウン運動以外のモデルでもラフ性を示唆する観測事実を表現できる可能性は否定されていない。

史を振り返ったうえで、HV のラフ性に関する主要研究である Gatheral et al. [2018] およびその後続研究についてまとめる。HV の研究は、観察される HV の時系列的な変動の特徴をよく表現するモデルを構築し、将来のボラティリティの予測精度を高めることを問題意識として発展してきた。なかでも、HV が持つレバレッジ効果や長期記憶性などの性質を表現するモデルの開発について多くの文献がみられてきた。また、利用可能な資産価格データの発展に応じて HV の分析手法が進化してきた点も重要である。とくに、1990 年代後半以降、高頻度の資産価格データから計測される「実現ボラティリティ」(日中の資産価格データから計測されるボラティリティ) の分析が主流となってきた。

こうした流れの中で、2014 年にワーキングペーパー版が公表された Gatheral et al. [2018] は、ラフ・ボラティリティへの注目度を高めた重要論文の一つである。この研究は、実現ボラティリティの時間発展がラフ性を有することを示すとともに、ラフ性を考慮した時系列モデルによりボラティリティの予測精度が向上することを報告した。後続研究のサーベイでは、主に 2 つの論点を整理している。一つは、ラフ性を表す指標 (典型的には非整数ブラウン運動のハースト指数) の推計に関する論点である。実現ボラティリティは、連続時間モデルに従って変動するボラティリティの近似値という意味で計測誤差を含む。このような、計測誤差を含む実現ボラティリティをインプットとして、ラフ性を頑健に推計する手法の研究が進んでいる。もう一つは、既存のボラティリティ研究で論じられてきたボラティリティの特徴、とくに、長期記憶性との関係に関してである。長期記憶性は、ボラティリティが長期間に渡って正の自己相関を持ち、変動に持続性があることを指す。長期記憶性と、短期間での変動が激しいことを示唆するラフ性の 2 つの性質が観察されることについては、さらなる理論的・実証的な解明が待たれる。

4 節では IV に焦点をあて、デリバティブ実務上の問題意識も含め数理ファイナンスの発展経緯を整理したうえで、当該分野におけるラフ・ボラティリティ研究についてまとめる。デリバティブの価格付けモデルは、流動性の高いデリバティブの市場価格を表現できるようにモデル・パラメータを決定したうえで、より複雑なデリバティブの価格算出やリスク管理 (ヘッジ戦略の導出) に使用される。このため、デリバティブの価格付けモデルは、まず、流動性が高い商品の市場価格を表現できる必要がある。IV はデリバティブ価格から算出されるため、このことは、IV を表現できるモデルの構築が必要であることに他ならない。このため、とくに 1990 年代以降、市場で観察される IV を表現するためのデリバティブ・モデルの高度化が進んでいった。

このなかで、2000 年代初頭に、米国の株式デリバティブ市場などにおいて IV の期間構造について負のべき乗則が観測され、ブラウン運動に基づく従来のモデルでは表現することが難しいことが指摘された。その後、2000 年代後半に、Alos et al. [2007] や Fukasawa [2011] は、非整数ブラウン運動に基づくラフなモデルによって、IV の負のべき乗則を表現できることを指摘した。これらの研究は、ラフ・ボラティリティ研究の嚆矢となった。近年、この論点に関する研究が進展し、市場で観測される IV のラフ性 (負のべき乗則から示唆される原資産価格のボラティリティ過程のラフ性) に応じたモ

デルにより価格付け・リスク管理を行わなければ不整合が生じる (裁定機会が生じる) という、ラフ・ボラティリティの必要性を強く根拠づける結果が得られた (Fukasawa [2021])。このような理論的な研究のほかに、実務への応用を意識した研究もみられている。非整数ブラウン運動は、従来のブラウン運動と異なりマルコフ性 (将来の挙動が過去の挙動によらない) などの性質を持たないため、従来の数理ファイナンス理論を適用することが難しいと考えられていた。この点に関し、近年の研究では、ある一定の条件下ではマルコフ性が回復することが明らかになる (Bayer et al. [2016]) など、これらの数理的な困難が克服されつつあり、ラフ・ボラティリティ・モデルのデリバティブ実務への適用可能性が高まっている。ただし、現時点では IV のラフ性が観測される市場 (負のべき乗則が観測される市場) は、米国の株式デリバティブ市場などの一部の市場にとどまっているため、他国や他の資産クラスなどで価格付け・リスク管理のモデルにラフ性を考慮すべきかどうかについては、未解明な点が多い。また、ラフ・ボラティリティ・モデルの実務活用にあたっては、従来のブラウン運動や伊藤解析よりはるかに複雑な数値計算が必要なため、さらなる理論や数値計算技術などの発展が求められる。

5 節では、ラフ・ボラティリティ研究と金融経済学の関連の観点から、MM 分野の関連研究を解説する。MM 研究では、取引所の制度的な構造や市場参加者の個々の取引行動といった、ミクロの市場構造や取引行動が資産価格形成に与える影響が分析される。MM 研究における一つの研究テーマとして、市場参加者の売買注文行動などの「ミクロ的基礎付け」から出発して、資産価格変動の確率過程を導出する研究がみられている。ラフ・ボラティリティ研究においても、市場参加者の売買注文行動がどのような条件を満たす場合に、形成される資産価格のボラティリティにラフ性が生じるかについて研究がおこなわれている。たとえば、El Euch et al. [2018] は、特定の期の売買による価格更新が一定以上の持続性をもって将来の価格更新発生頻度に影響し続ける場合に、ボラティリティがラフな挙動を示すことを示している。このような研究は、ラフ性の金融経済学的な源泉を明らかにする試みで、取引制度の設計や金融安定との関連といった観点からも重要な論点と考えらえる。もっとも、現時点の研究は数理的な枠組みの提示にとどまっていることから、より現実的な投資家行動のモデル化や現実のデータを用いた実証分析などについて研究を深めていく必要があると考えられる。

このように、本論文では、ボラティリティ研究を結節点として、計量ファイナンス・数理ファイナンス・金融経済学の各分野を横断的にサーベイしている。このため、本論文は、読者の知識や関心によって読み方を変えることができる。2 節は、後の節の技術的側面を理解するために必要な事項であるため、研究の概要を把握したい読者は読み飛ばすことができる。また、3、4、5 節は、相互に関係する内容ではあるが、順番を変えて独立に読むことができる。

2　数理的準備：非整数ブラウン運動

本節では、後の節で必要な数理的事項を準備する。まず 2.(1) 節でブラウン運動と伊藤解析 (確率微分方程式) を導入したうえで、2.(2) 節で非整数ブラウン運動の定式化および性質を紹介する。なお、これらの概念は、通常、測度論的確率論に基づいて定式化されるが、本論文では、数学的に厳密な記述は省略し、必要事項をできる限り直観的に述べる。詳細については、ブラウン運動および伊藤積分の数学的取扱は Karatzas and Shreve [1998] や舟木 [2005]、非整数ブラウン運動については Nualart [2006] などが参考になる。また、ブラウン運動の歴史を辿りつつ数理的性質を解説した文献として、池田 [2018] が参考になる。

なお、3、4 節で後述するとおり、ラフ・ボラティリティ研究では、ボラティリティの時間に関する対数変化率を非整数ブラウン運動でモデル化することが多い[5]。

(1)　ブラウン運動と伊藤解析

イ　ブラウン運動の定義と性質

時間とともにランダムに変動する変数を数学的にモデル化したものは確率過程と呼ばれる。数学的には、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義される確率変数の集まり (時刻を表すパラメータ t でパラメータ付けられた集合)$\{X_t \mid t \geq 0\}$ を確率過程と呼ぶ。ある時刻 t を固定した場合の X_t は、この確率過程が時刻 t において取る値を確率変数としてみたものである。一方、ある標本点 $\omega \in \Omega$ を固定して、$X_t(\omega)$ を時間に関する関数としてみたとき、確率過程のある標本点 ω に対する見本路 (サンプル・パス) という。

ブラウン運動は、最も基本的な連続時間の確率過程の一つである[6]。ブラウン運動は、離散時間モデルにおけるランダム・ウォークの連続極限であるほか、増分 (ある時点からある時点への変動幅 $X_{t+\Delta} - X_t$) が、独立な正規分布に従うなど、様々な重要な性質を持っている。ブラウン運動は、以下の性質を満たす確率過程 $\{W_t \mid t \geq 0\}$ として定義さ

[5] たとえば、非整数ブラウン運動 B_t^H とある関数 F を用いて、瞬間的ボラティリティ σ_t を $\sigma_t = e^{F(B_t^H)}$ と、モデル化する (詳細は、3.(2) 節参照)。

[6] 20 世紀初頭より物理学・経済学をはじめとする様々な分野の現象をモデル化することを主眼に、ブラウン運動の数学的な定式化・性質が研究されてきた。とくに、ブラウン運動と金融分野の関わりは古く、数学・物理学での本格的な研究に先立つ 1900 年頃、バシェリエがオプションの価格付けをブラウン運動の原型といえるモデルを用いて議論した。その後、1900 年代前半にコロモゴロフやウィナー、伊藤清らによって、測度論的確率論・伊藤解析などの理論が発展した。よく知られているとおり、Merton [1973] では、伊藤解析に基づくオプションの価格付け手法が提示され、金融工学・数理ファイナンス分野が発展した。

れる[7]。

$$
\begin{cases}
\text{(i) 初期値が 0：} \ P(\omega \mid W_0 = 0) = 1, \\
\text{(ii) 見本路 (サンプル・パス) が連続：} P(\omega \ \mid \lim_{s \to t} W_s(\omega) = W_t(\omega)) = 1, \\
\text{(iii) 増分が正規分布 (平均:0、分散: 時間幅) に従う：時刻 } 0 \leq s < t \text{ に対し、} \\
\qquad\qquad W_t - W_s \sim N(0, t-s), \\
\text{(iv) 増分が独立：時刻 } 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \infty \text{ に対し、} \\
\qquad\qquad W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \text{ は、独立。}
\end{cases} \tag{1}
$$

ブラウン運動は、マルコフ性やマルチンゲール性といった重要な性質を持つことが知られている。マルコフ性とは、確率過程の将来時点での条件付き確率分布が、現時点の情報のみに依存し、過去の履歴 (現時点より前の時点での情報) に依存しないことである。たとえば、ある時刻 s におけるブラウン運動の値が W_s とわかっているもとでの、将来時点 $t\ (> s)$ のブラウン運動の条件付き確率分布は、$P\left(W_t \in B \ \middle| \ \mathcal{F}_s\right) = P(W_t \in B \mid W_s)$ という関係を満たす。ただし、両辺は W_t がある実数の部分集合 B に値を取る条件付き確率で、左辺は時刻 s までのブラウン運動の情報 $\mathcal{F}_s$ で条件づけた確率分布、右辺は時刻 s のブラウン運動の値が W_s だという情報のみで条件づけた確率分布である。また、マルチンゲール性とは、確率過程の将来時点での条件付き期待値が現時点の値に一致するという、いわゆる公平な賭けの性質のことである。数式で表現すると、$E[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s$ が 成り立つという性質である。ブラウン運動のマルコフ性とマルチンゲール性は、ブラウン運動が平均ゼロの独立増分過程であるという性質から導かれる。

ブラウン運動は、二次変分が有界かつ非ゼロの値をとる。ある時刻 $T(> 0)$ までの二次変分は以下で定義される。

$$
\langle W \rangle_{2,T} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(W_{\frac{i+1}{n}T} - W_{\frac{i}{n}T} \right)^2 .
$$

この定義のとおり、二次変分は、一定期間を細かく時間分割したうえで確率過程の増分の二乗を足し合わせていったものである。二次変分は微分可能な (標本) 関数など、滑らかに時間発展する場合はゼロであることが知られている。一方、ランダムに変動するブラウン運動については、二次変分は正の値となる。具体的には、上式は確率 1 で T に収束する。すなわち、

$$
P\left(\langle W \rangle_{2,T} = T\right) = 1
$$

が成り立つ。これは、ブラウン運動の定義 (iii) の $\mathrm{Var}\left[W_{t_i} - W_{t_j}\right] = t_i - t_j$ から従う。

[7]以下の定義を満たす確率過程の存在は自明ではないため、数学的にはブラウン運動の存在は証明が必要な事項である。ブラウン運動の存在証明については、たとえば、Karatzas and Shreve [1998] 2 節を参照。

ロ　伊藤解析

ブラウン運動の最も大きな特長として、ブラウン運動に関する積分 (伊藤積分) を定義できることが挙げられる。具体的には、被積分関数 $h(s)$ に対する伊藤積分は以下のとおり定義される。$0 = s_0 < s_1 \cdots < s_n = t$ を時間分割とし、ブラウン運動の増分 $W_{s_{i+1}} - W_{s_i}$ に $h(s_i)$ の値をかけ合わせたうえで、足しあげていったものを考える (ただし、$h(s)$ の値はブラウン運動の増分の始期時点での値を用いる)。

$$\sum_{i=0}^{n-1} h\left(s_i\right)\left(W_{s_{i+1}} - W_{s_i}\right).$$

ここで、時間分割を細かくしていった場合の極限を数学的に厳密に定式化することができる。このため、上式の収束先を伊藤積分

$$\int_0^t h(s)\ dW_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} h\left(s_i\right)\left(W_{s_{i+1}} - W_{s_i}\right)$$

として定義できる。なお、この極限および収束の厳密な定式化は伊藤解析の中核であるが、正確な記述のためには多くの準備が必要となるため、数学的な詳細はここでは割愛する[8]。伊藤積分に通常の積分項を加えた確率過程が、伊藤過程と呼ばれる。すなわち、伊藤過程 X_t とは、

$$X_t = x + \int_0^t \mu\left(s, X_s\right)\ ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right)\ dW_s \tag{3}$$

の形で表せる確率過程である。ここで、関数 μ が X_s の趨勢的な挙動を、関数 σ が X_s の変動の激しさを表し、式 (3) の第二項、第三項は、それぞれドリフト項、ボラティリ

[8] この点を大まかに述べると以下のとおりである。まず、被積分関数である確率過程 h が単過程 (時間区分的に定数となる確率過程 $h(s) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbb{1}_{\{s_i \le s < s_{i+1}\}}$) の場合、区分的に定数となる区間に合わせて時間分割を取ることで、伊藤積分を $\int_0^t h(s) dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} h(s_i)\left(W_{s_{i+1}} - W_{s_i}\right)$ と自然に定義することができる。より一般的な確率過程 h を被積分関数とする場合は、h を単過程の列で近似できるという事実を利用する。h を近似する単過程の列をそれぞれ伊藤積分した列を考えると、この列も収束することが示せる。この収束先が、より一般的な確率過程 h に対する伊藤積分として定義される。

このような近似・収束の議論を行う際には、被積分関数の集合と、その集合上でのノルム (距離) を適切に定める必要がある。具体的には、被積分関数の集合として、二乗可積分確率過程空間 $L^2 = \left\{h(s) \mid E\left[\int_0^t h^2(s)\ ds\right] < \infty\right\}$ を考えると、L^2 は、$\langle h, g\rangle = E\left[\int_0^t h(s)g(s)ds\right]$，　$h, g \in L^2$ を内積としてヒルベルト空間 (内積が定義された完備なノルム空間) となることが知られている。ここで、ブラウン運動の定義 (iii)、(iv) から、$E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} h\left(s_i\right)\left(W_{s_{i+1}} - W_{s_i}\right)\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} g\left(s_i\right)\left(W_{s_{i+1}} - W_{s_i}\right)\right)\right] = \sum_{i=0}^{n-1} h\left(s_i\right) g\left(s_i\right)\left(s_{i+1} - s_i\right)$ が成り立つ。この結果から、伊藤積分により写された確率過程の集合も

$$\left\langle \int_0^t h(s)dW_s, \int_0^t g(s)dW_s \right\rangle = \langle h, g\rangle = E\left[\int_0^t h(s)g(s)ds\right] \tag{2}$$

を内積とするヒルベルト空間になることを示せるため、上記のような単過程列の伊藤積分の極限の存在を示すことができる。なお、(2) 式は、ブラウン運動の二次変分の収束性 $P\left(\langle W\rangle_{2,T} = T\right) = 1$ と対応して、$dW_t \cdot dW_t = dt$ という形式的な計算が可能なことを表している (伊藤の公式)。

ティ項と呼ばれる。また、式 (3) を微分形式で記述した方程式

$$dX_s = \mu(s, X_s)\ ds + \sigma(s, X_s)\ dW_s, \quad X_0 = x$$

を確率微分方程式と呼ぶ。確率微分方程式により、ブラウン運動を基づき、より複雑なモデル (たとえば、趨勢的な挙動やランダムな変動の激しさが変化するようなモデル) が記述可能となる。なお、 伊藤過程 X_t は、ブラウン運動と同様にマルコフ性を持ち、マルチンゲール性とも深い関わりを持つ[9]。

(2) 非整数ブラウン運動

3 節以降で述べるとおり、ボラティリティの挙動に関し、従来のブラウン運動および伊藤過程では表現できない数理的事象が数多く観測されてきている。そのため、こうした観測事実を表現可能なモデルの開発が進んできた。ブラウン運動および伊藤過程では表現できないボラティリティに関する事象の代表例として、以下が挙げられる。

1. ブラウン運動は独立増分 (過去の増分と将来の増分が独立) だが、実証的にはボラティリティは自己相関を持つ。

2. ブラウン運動の変動幅の分散は、時間幅に比例する (すなわち、W_t をブラウン運動としたとき、$V[W_{t+\Delta} - W_t] = \Delta$)。一方、実証的には資産価格のボラティリティの時間発展はこの性質を満たさない[10]。

これらの性質を記述可能なブラウン運動の拡張として、非整数ブラウン運動というモデルが知られており、ボラティリティの確率的な変動を記述するモデルとしての利用が試みられている[11]。非整数ブラウン運動とは、ブラウン運動と同様、その増分が正規分布に従って時間発展するという性質をもつ。一方、ブラウン運動とは異なり、ハースト指数と呼ばれるパラメータを持っており、自己相関 (過去の増分と将来の増分が独立でなく、相関が存在) を表現できる確率過程である。

確率過程 $B^H = \left\{B_t^H \mid t \geq 0\right\}$ が、ハースト指数 $H \in (0, 1)$ の非整数ブラウン運動である

[9] 伊藤積分 $Y_t = \int_0^t \sigma(s)\ dW_s$ は、マルチンゲール性を持つ。逆に、マルチンゲール性を持つ連続な確率過程は伊藤過程で表現できることが知られている。よく知られているとおり、マルチンゲール性は、無裁定や複製といったデリバティブの価格付け原理の定式化において、中核的な役割を果たしている。また、マルコフ性は、実用上の価格・リスク量計算の数値計算を可能とするために極めて重要な性質である。

[10] ブラウン運動によるモデリングの場合、日次データの分散は週次データの分散の 1/5 となる。一方、高頻度データの分散と低頻度データの分散を比べた場合、ブラウン運動が示唆する以上に、高頻度データの変動が激しいことが明らかになってきている。

[11] なお、ボラティリティではなく、原資産の確率過程としては、引き続き、非整数ブラウン運動ではなく、ブラウン運動や伊藤過程などを用いたモデリングが主流である。

とは、以下の性質を満たすことと定義される。

$$\begin{cases} \text{(i) 初期値が 0：} P\left(\omega \mid B_0^H = 0\right) = 1, \\ \text{(ii) 見本路 (サンプル・パス) が連続：} P\left(\omega \;\middle|\; \lim_{s\to t} B_s^H(\omega) = B_t^H(\omega)\right) = 1, \\ \text{(iii) 任意の時刻 } 0 < s < t \text{ に対し、増分 } B_t^H - B_s^H \sim N\left(0, (t-s)^{2H}\right), \\ \text{(iv) 増分が正規分布に従う：時刻 } 0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \infty \text{ に対し、} \\ \qquad B_{t_1}^H - B_{t_0}^H, B_{t_2}^H - B_{t_1}^H, \ldots, B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H \text{が、正規分布に従う。} \end{cases} \tag{4}$$

すなわち、ブラウン運動の定義 (1)(iii) を、(4)(iii) で置き換えたものである。ここで、$H = 1/2$ のとき、非整数ブラウン運動はブラウン運動となる、すなわち $W_t = B_t^{1/2}$ である。

ブラウン運動とは異なり、($H \neq 1/2$ のとき) 非整数ブラウン運動の増分は独立ではない。とくに、ハースト指数 H の値に対応して以下の関係が成り立つ[12]。$s_1 < t_1 < s_2 < t_2$ に対し、

$$\begin{cases} H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) & \Rightarrow \quad E\left[\left(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H\right)\left(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H\right)\right] < 0, \\ H = \frac{1}{2} & \Rightarrow \quad E\left[\left(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H\right)\left(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H\right)\right] = 0, \\ H \in \left(\frac{1}{2}, 0\right) & \Rightarrow \quad E\left[\left(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H\right)\left(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H\right)\right] > 0. \end{cases}$$

すなわち、$H < 1/2$ のとき増分が負の自己相関を持ち、$H > 1/2$ のとき増分が正の自己相関を持つ。このことからわかるとおり、$H \neq 1/2$ のとき、非整数ブラウン運動は、マルチンゲールでもマルコフ過程でもない。また、自己相似性 ($a > 0$ に対し、$B_{at}^H \sim a^H B_t^H$) や、定常増分性 ($B_{t+s}^H - B_s^H \sim B_t^H$) が成り立つことも知られている。

さらに、(4)(i)、(iii) から、B_t^H の標準偏差の時間発展に関し以下が成り立つ。

$$\sqrt{V\left[(B_t^H)^2\right]} = t^H. \tag{5}$$

すなわち、標準偏差の時間発展が、時間の H 乗となる。これは、ブラウン運動 ($H = 1/2$) の場合、標準偏差がルート t 倍で増大する「ルート t 倍法」の一般化である。

この事実は、ハースト指数 $H < 1/2$ の非整数ブラウン運動は、短時間での変動が激しい確率過程 (ラフな確率過程) であることを意味する。すなわち、ある時点 t での値は

---

[12] (4)(iii) から、$s, t > 0$ に対し、$E\left[B_t^H B_s^H\right] = \frac{1}{2}E\left[\left(B_t^H\right)^2 + \left(B_s^H\right)^2 - \left(B_t^H - B_s^H\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$ が成り立つ。この関係式を用いて、

$$E\left[\left(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H\right)\left(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H\right)\right] = \frac{1}{2}\left((t_2 - s_1)^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H} - (s_2 - s_1)^{2H} + (s_2 - t_1)^{2H}\right)$$

と変形できる。ここで、$a_1 = t_2 - s_1, a_2 = t_2 - t_1, b_1 = s_2 - t_1, b_2 = s_2 - s_1$ とすると、$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = (t_2 - t_1) + (s_2 - s_1) > 0$ および $a_1 > a_2, b_2 > b_1$ が成り立つ。$f(x) = x^{2H}$ とすると、f は $H < 1/2$ のとき上に凸、$H > 1/2$ のとき下に凸であることから、以下の関係式が従う。

$$E\left[\left(B_{t_1}^H - B_{s_1}^H\right)\left(B_{t_2}^H - B_{s_2}^H\right)\right] = \frac{f(a_1) + f(b_1)}{2} - \frac{f(a_2) + f(b_2)}{2} \begin{cases} < 0 & (H < 1/2), \\ = 0 & (H = 1/2), \\ > 0 & (H > 1/2). \end{cases}$$

ブラウン運動同様、正規分布に従うが、早い時点 (t が小さい場合) の正規分布の標準偏差が、ブラウン運動のケース対比、大きい (図 1)。

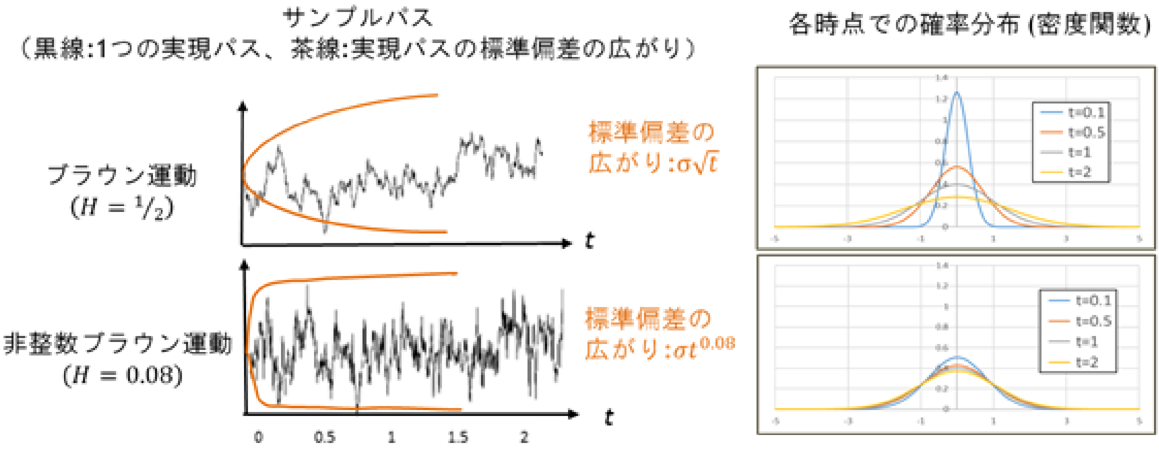

図 1: 非整数ブラウン運動のサンプル・パスの広がり

非整数ブラウン運動は、$H < 1/2$ のとき短時間での変動がブラウン運動より激しい、すなわちサンプル・パスがラフな (荒い) 挙動を示すのに対し、$H > 1/2$ のときは変動が穏やかで、すなわちサンプル・パスがブラウン運動対比ではスムーズな (滑らかな) 挙動をする (図 2)。

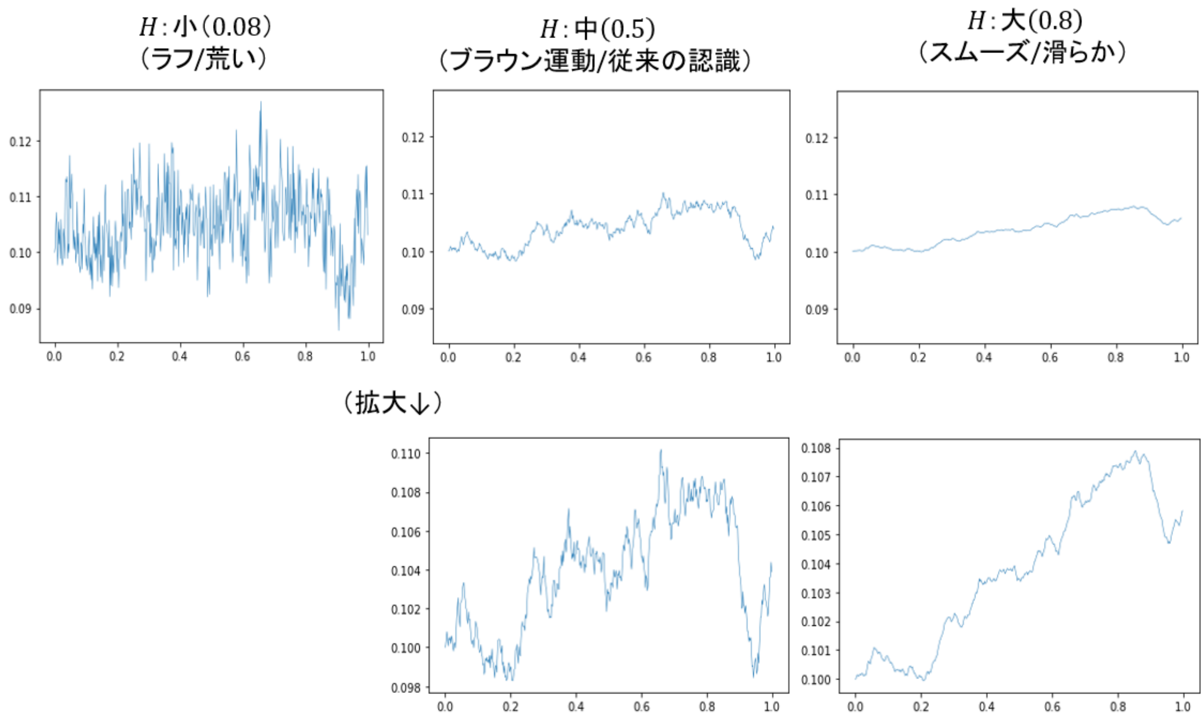

図 2: 異なる H での非整数ブラウン運動のサンプル・パス

なお、ラフ性は、一般には「パス」(時刻でパラメータ付けられた関数) のヘルダー連

続性を用いて定義される概念である。ヘルダー連続性は、サンプル・パスの正則性 (どの程度パスが変動するか) を表すものであり、「ラフ」という言葉の由来となっている。ハースト指数 H の非整数ブラウン運動は $(H-\varepsilon)$– ヘルダー連続であることが知られているため、ハースト指数は非整数ブラウン運動のヘルダー連続性を表す指数とみることができる[13]。

また、これらと類似した性質として、式 (5) から、ブラウン運動の場合は、二次変分が収束したのに対し、非整数ブラウン運動では、$1/H$ 次変動の有界性

$$\langle B\rangle_{1/H,T} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(B^H_{\frac{i}{n}T} - B^H_{\frac{i-1}{n}T}\right)^{1/H},\ \ P\left(\langle B\rangle_{1/H,T} = T\right) = 1$$

が成り立つ[14]。

また、非整数ブラウン定義は、極を持つ被積分関数の伊藤積分 (リーマン・リュービル型の伊藤積分) により表される (Levy [1953], Mandelbrot and Van Ness [1968])。すなわち、

$$B^H_t = \frac{1}{C_H}\left(\int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}}\ dW_s + \int_{-\infty}^{0}\left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}\right)dW_s\right) \tag{6}$$

と表現できる。ただし、$C_H = \left(\int_0^\infty\left((1+s)^{H-\frac{1}{2}} - s^{H-\frac{1}{2}}\right)^2 ds + \frac{1}{2H}\right)^{\frac{1}{2}}$ である。(6) は、ブラウン運動の過去の履歴を含めた伊藤積分を考えると、非整数ブラウン運動の時系列相関構造 (4)(iii) を記述できることを意味する。実際、

$$\begin{aligned}
E\left[\left(B^H_t - B^H_s\right)^2\right] &= \frac{1}{C_H^2}E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}(\max\{t-u,0\})^{H-\frac{1}{2}} - (\max\{s-u,0\})^{H-\frac{1}{2}}\ dW_u\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{C_H^2}E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left((\max\{t-u,0\})^{H-\frac{1}{2}} - (\max\{s-u,0\})^{H-\frac{1}{2}}\right)^2\ du\right] \\
&= (t-s)^{2H}
\end{aligned}$$

と変形できる。この計算からもわかるとおり、(6) 式右辺の第一項 $\tilde{B}^H_t = \int_0^t (t-s)^{H-1/2}\ dW_s$ が、時系列相関構造 (4)(iii) を表現するためのブラウン運動の加重和であり、$\tilde{B}^H_t$ は、リーマン・リュービル型の伊藤積分[15]と呼ばれる。4 節で後述するとおり、デリバティブの価格付けにおいては、非整数ブラウン運動自体ではなく、リーマン・リュービル型ウィナー積分 $\tilde{B}^H_t$ を用いてボラティリティをモデル化することが多い。

[13] 確率過程 $\{B^H_t \mid t \geq 0\}$ が $(H-\varepsilon)$-ヘルダー連続であるは、連続な修正 $\{\tilde{B}^H_t \mid t \geq 0\}$ で、任意の $\varepsilon > 0$ に対しある確率変数 G_ε が存在し、$\tilde{B}^H_t - \tilde{B}^H_s \leq G_\varepsilon|t-s|^{H-\varepsilon}$ を満たすものが存在することと定義される。

[14] そのため、伊藤積分と同じアプローチで、非整数ブラウン運動に関する積分を定義することを試みると、ブラウン運動の場合と異なり、伊藤の公式 $(dW_t \cdot dW_t = dt)$ に相当する形式的な計算ができない。すなわち、伊藤積分の定式化は、ヒルベルト空間における対称性や内積構造に依拠している一方、非整数ブラウン運動に関する積分を定義するためには、対称性や内積構造を有さないバナッハ空間での議論が必要なことを意味する。なお、非整数ブラウン運動に関する積分を定義する別のアプローチとして、近年ラフパス理論 (Lyons [1998]) が発展中である。たとえば、Bayer et al. [2020] では、2014 年にフィールズ賞を受賞した正則性構造理論によるラフ・ボラティリティ・モデルの分析が論じられており、将来的には、ラフ・ボラティリティへの更なる応用が展望される。

[15] リーマン・リュービル積分とは、通常のリーマン積分に対して定義される。これらの研究は、ライ

3　ヒストリカル・ボラティリティのラフ性の観測

本節では、まず 3.(1) 節でボラティリティ研究の重要性を整理したうえで、HV を中心に計量ファイナンス分野におけるボラティリティ研究の発展の経緯を概観する[16]。次に、3.(2) 節では、ラフ・ボラティリティ研究における最重要論文の一つである Gatheral et al. [2018] の概要を解説する。この論文は、様々な金融資産の高頻度データから観察される実現ボラティリティの時系列の「ラフ性」を実証的に報告した論文であり、ボラティリティに関する計量ファイナンス研究 において画期的な論点を提示した論文である。そのうえで、3.(3) 節で、Gatheral et al. [2018] の後続論文によるラフ・ボラティリティ研究に関する論文を紹介する。

(1)　計量ファイナンスにおける HV 研究の歴史

イ　ボラティリティ研究の重要性

ファイナンス研究における主要な研究テーマとして、金融資産価格に不確実性が存在するもとでの最適な投資行動や資産価格形成メカニズムの分析が挙げられる。たとえば、Markowitz [1952] の平均分散ポートフォリオ理論においては、最適ポートフォリオの投資ウェイトは、各銘柄の期待収益率と分散共分散行列から定まる。また、代表的な資産価格評価モデルである資本資産価格モデル (Capital Asset Pricing Model; CAPM) では、代表的な投資家が平均分散ポートフォリオを選択するとの仮定のもと、個別銘柄の期待収益率が、その銘柄の収益率と市場ポートフォリオの収益率との共分散で説明される (Sharpe [1966], Lintner [1965], Mossin [1966])。

このように、ファイナンス研究においては、金融資産収益率の確率分布のモーメントが重要な役割を果たすことから、計量ファイナンス分野を中心に、資産価格変動のモーメントの時系列分析やモデル化が主要な研究テーマとして発展してきた。なかでも、収益率の二次のモーメントであるボラティリティ (標準偏差・分散) に関する研究は、一次のモーメントである期待収益率以上に多くの研究が蓄積している。

このように、ボラティリティに関する研究が期待収益率に関する研究以上に進展してきた背景には、いくつかの理由がある。第一の理由は、期待収益率の推計が非常に困難な一方、ボラティリティはデータの利用可能性の進展や計量的手法の発展により推

プニッツの時代 (15~16 世紀) にさかのぼる。関数 f に対し、λ 階のリーマン・リュービル積分とは、

$$I^\lambda f = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-s)^{\lambda-1} f(s)\, ds$$

と定義されるもので、これは、通常の整数階のリーマン積分を、非整数階に拡張したものである。これが、「非整数」という言葉の由来である。

[16]計量ファイナンス分野におけるボラティリティ研究の概要および詳細については、渡部 [2000]、Takahashi et al. [2023] などを参照。

計精度を高められる点である。たとえば、Merton [1980] は、観察される資産価格に計測誤差がないという仮定のもとでは、より高頻度のデータが利用可能になるほど、ボラティリティをより正確に推計できることを示している。同時に、期待収益率については、たとえ高頻度データが利用可能だとしても、正確な推計が難しいことを指摘している。また、期待収益率は確率的に大きな変動を示すものであり、ヒストリカル・データからの推計は困難を伴うことが知られている (たとえば、Martin [2017])。このような理論的背景のもと、推計や予測が相対的に容易なボラティリティに焦点を絞った研究が多くみられてきた[17]。

第二の理由として、リスク管理におけるボラティリティの重要性が挙げられる。リスク計測・分析において重要となるのは、市場の急変時などにおける価格変動の大きさである。このことは、資産価格変動の大きさを表すボラティリティ (および、確率分布の裾の形状を表すより高次のモーメント) の計測が、リスク管理上重要であることを示している。関連して、数理ファイナンス・金融工学が取り扱うデリバティブの価格付けやリスク管理の分野では、ボラティリティが重要なモデリング対象である一方、期待収益率の推計値は不要である。詳細については、4 節を参照されたい。

このほか、ファイナンス分野にとどまらず、マクロ経済学分野においても、不確実性が実体経済活動に対して負の影響を及ぼすことが多くの研究で示されている (たとえば、Bloom et al. [2007] など)。このため、オプション価格から算出されるボラティリティ指標である VIX 指数や日経平均ボラティリティ・インデックスなどが、不確実性を表す指標としてマクロ経済分析でも多く利用されているほか、様々な種類の不確実性指標を構築する研究がみられている (Bloom [2009]; Baker et al. [2016]; Dew-Becker et al. [2021], 篠原ほか [2020] など)。

以上のように、ボラティリティは様々なファイナンス分野・経済学分野において非常に重要な変数である。このため、計量ファイナンス分野では、実際に観察される資産価格のヒストリカル・データから計測された HV を分析対象として、その時系列特性の分析が進められてきた。そして、それらの時系列特性を表現する離散時間モデルの構築や、ボラティリティの予測精度の向上などが目指されてきた。HV に関する多くの研究が指摘するボラティリティ変動の代表的な特徴としては、「ボラティリティの持続性 (ボラティリティ・クラスタリング)」、「レバレッジ効果」、「長期記憶性」が挙げられる。以下では、これらの特徴に関する研究発展の経緯や関連論文を紹介する。

ロ　HV の持続性とレバレッジ効果

金融資産の収益率データに関する分析からは、収益率そのものの自己相関はほぼゼロで、ランダムに変動することが知られてきた一方、収益率の絶対値や二乗の系列については、非常に長い正の自己相関があることが昔から知られてきた (Mandelbrot [1963];

[17]たとえば、最適ポートフォリオに関する実証研究では、平均分散ポートフォリオではなく、共分散行列の情報のみを利用した最小分散ポートフォリオを対象とした研究が多くみられている (Michaud [1989], Best and Grauer [1991], Jagannathan and Ma [2003] など)。これは、推計誤差が非常に大きい期待収益率の推計値を用いて平均分散ポートフォリオを構築した場合の実証的なデメリットが、期待収益率の情報を活用して平均分散ポートフォリオを構築するという理論的なメリットを大きく上回るためである。

Fama [1965]; Ding et al. [1993] など)。収益率の絶対値や二乗は、資産価格変動の大きさを表す系列であることから、この事実は資産価格のボラティリティに強い自己相関や持続性があることを示している。この現象は、「ボラティリティ・クラスタリング」と呼ばれている。ボラティリティの持続性を表現する時系列モデルとしては、1980 年代以降、金融資産の分散を自己回帰モデルによって表現するモデルが発展していった。まず、Engle [1982] は、ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) モデルを提案した。ARCH モデルでは、ボラティリティが、過去の資産価格のノイズの二乗に関する自己回帰モデルで表される[18]。さらに、Bollerslev [1986] は、ARCH モデルを拡張して、ボラティリティが、ARCH モデル項に加えて自己ラグにも依存する GARCH (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) モデルを提案している。これらの時系列モデルは、シンプルながら観察されるデータへのフィットや予測精度が良好であり、HV の時系列特性分析における基礎的なツールとなってきた。

ボラティリティの持続性とともに著名かつ重要な特性として、株価指数のリターンとそのボラティリティの間に負の相関があることが挙げられる。この特性は、株価下落時にボラティリティが上昇する傾向にあることを意味しており、一般に「レバレッジ効果」と呼ばれる[19]。レバレッジ効果が存在するもとでは、資産価格の確率分布は下落方向に広い裾を持つ。このため、レバレッジ効果を適切に表現できるモデルを利用することは、リスク管理やポートフォリオ構築などの観点から重要である。GARCH 型のモデルを拡張して、レバレッジ効果を表現したモデルとして、Nelson [1991] による exponential GARCH モデルや、Glosten et al. [1993] による GJR モデルなどがある。

ハ　長期記憶性

ボラティリティ変動の特性のうち、多くの計量ファイナンス研究では、金融資産価格変動が「長期記憶性」を持つことを指摘している[20]。たとえば、前述の Ding et al. [1993] は、日次収益率の絶対値の時系列が、10 年程度という極めて長いラグを取った場合でも有意な正の自己相関を示すことを報告している。この特徴は、自己相関関数 (ラグの次数の関数として自己相関を示したもの) が、緩やかに減少していくことを意味する。一方、上述の GARCH 型のモデルは、自己相関関数が指数的に減衰していくことから、長期記憶性を表現できないという制約があった。このため、長期記憶性を持つ時系列

[18] ARCH 型のボラティリティ・モデルの概要については、Hamilton [1994] の 21 章、Poon and Granger [2003]、渡部 [2000] などを参照。

[19] 株価下落時には、当該企業のレバレッジが上昇することで当該株式のリスク度や当該株価のボラティリティが上昇する、という解釈に基づいた呼称。Black [1976] や Christie [1982] を参照。なお、実際にはレバレッジ以外の要因もリターンとボラティリティの負の相関に寄与していることが知られている (Wu [2001]; Avramov et al. [2006])。

[20] 長期記憶性の存在は、水文学等の領域においては、ハースト指数の名前の由来である Hurst [1951] による水流の時系列の研究を含め、古くから研究が進められていた。経済学においては、Granger [1966] や Nerlove [1964] が主要なマクロ経済変数のスペクトル分析を行い、低周波領域の値が大きい (すなわち、長い周期の変動要因の寄与が大きい) ことを指摘している。また、Haubrich and Lo [1991] や Sowell [1992] などが、長期記憶性を持つ時系列モデルである ARFIMA モデルに基づいてマクロ経済変数の分析を行っている。長期記憶性の理論や研究史については、矢島 [2003] が非常に詳しい。また、Baillie [1996] によるサーベイも参考となる。

モデルに基づいたボラティリティのモデル化に関する研究が、とくに1990年代以降、活発にすすめられた。

長期記憶性を表現する代表的な離散時間モデルとしては、autoregressive fractionally integrated moving average (ARFIMA、自己回帰実数和分移動平均) モデルが挙げられる (Granger [1980], Granger and Joyeux [1980], Hosking [1981])。ARFIMAモデルは、ARIMAモデルの拡張となっている。たとえば、最も単純な1次の和分モデルであるARIMA$(0,1,0)$モデルは、一階の差分を取るとノイズ項と等しくなる[21]。すなわち、Lをラグ・オペレータ ($LX_t = X_{t-1}$) とした場合、$(1-L)X_t = \varepsilon_t$と表せる。ARFIMAモデルは、この差分の次数を実数に拡張したものであり、d-次のARFIMAモデルであるARFIMA$(0,d,0)$は$(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$と表される。ただし、この左辺は、以下のとおり形式的に定義される。

$$(1-L)^d X_t = X_t - dX_{t-1} + \frac{d(d-1)}{2} X_{t-2} - \cdots .$$

ARFIMAモデルは、$-1/2 < d < 1/2$のとき定常過程となる。また、$0 < d < 1/2$のとき、自己相関関数は、ラグの次数kについて、k^{2d-1}のオーダーで減衰していくほか、以下の性質を満たす。

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \left|\rho_j\right| = \infty.$$

この性質は、自己相関関数の減衰が緩やかであることを意味しており、長期記憶性の一つの定義となっている。一方、ARMAモデルなどでは、上記の自己相関関数の絶対値の総和は有限となる。このように、$0 < d < 1/2$の時、ARFIMAモデルは、ARMAモデルのような定常かつ長期記憶性を示さない$I(0)$過程と、ランダム・ウォークのような非定常$I(1)$過程の間に位置する時系列モデルととらえることができる。

本論文の主題であるラフ・ボラティリティや非整数ブラウン運動との関係で重要な点として、ARFIMA$(0,d,0)$過程は、ハースト指数Hが$H = d + 1/2$のFGN (fractional Gaussian noise) モデルと同様のべき指数で、自己相関が減衰していくことである。ただし、FGNモデルは、非整数ブラウン運動の差分として定義される離散時間モデルである (矢島 [2003])。このように、長期記憶性を持つ離散時間の時系列モデルであるARFIMA$(0,d,0)(0 < d < 1/2)$は、ハースト指数が1/2より大きい非整数ブラウン運動と密接にかかわっている。

GARCHモデルに長期記憶性を加えた初期の研究 としては、Baillie et al. [1996] による、fractionally integrated generalized autoregressive conditional (FIGARCH) モデルや、Bollerslev and Mikkelsen [1996] による fractionally integrated exponential generalized autoregressive conditional (FIEGARCH) モデルがある。また、Breidt et al. [1998] が長期記憶性を持つ離散時間の確率的ボラティリティ・モデルを提案しているほか、連続時間モデルでは、Comte and Renault [1996]、Comte and Renault [1998]、Cheridito et al. [2003]、 Comte et al. [2012] などが非整数ブラウン運動を利用することで、長期記憶性

[21] 一般に、ARIMA(p,d,q)モデルは、p次の自己回帰項、q次の移動平均項をもつd次の和分モデルである。なお、d次の和分モデルはd回差分を取ることで定常過程となるもので、$I(d)$過程と総称される。

を考慮したモデルを提案している。これらの研究では、長期記憶性を表現することから、離散時間モデルにおいては実数和分パラメータ d が $0 < d < 1/2$ の ARFIMA モデル、連続時間モデルにおいてはハースト指数 H が 1/2 よりも大きな非整数ブラウン運動を用いて分析している。

二　実現ボラティリティ

上述の研究の多くを含む初期の計量ファイナンス研究においては、データ制約の関係などから、主に日次以上の頻度の資産価格データが利用されてきたが、1990 年代後半以降は、日中の資産価格変動をとらえた高頻度データの利用可能性が広がってきた。このデータ利用可能性の拡大は、以下で述べるとおり、理論・実証の両面で計量ファイナンス研究の進展を促すこととなった。

日中の資産価格データが利用可能な場合、たとえば、ある 1 営業日の中での 5 分足の資産価格変化率の時系列データから、その日の日次ボラティリティを算出することが可能になる。このように、高頻度の資産価格データから算出されたボラティリティは「実現ボラティリティ (realized volatility)」と呼ばれ、現在の計量ファイナンス研究における標準的な HV の指標となっている。実現ボラティリティは、具体的には以下のとおり算出される[22]。

$$\mathrm{RV}\,(t, t+1, \pi) = \sum_{i=0}^{n-1} (\log S_{s_{i+1}} - \log S_{s_i})^2 .$$

ただし、S_t は原資産価格であり、π は期間 $[t, t+1]$ の分割 $t = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = t+1$ である。たとえば、実現ボラティリティを 5 分足データ (すなわち $s_{i+1} - s_i$ が 5 分に相当) から算出するといったことが考えられる。

このように定義される実現ボラティリティは、理論的に好ましい性質を持つことが Andersen et al. [2001]、Andersen et al. [2003]、Barndorff-Nielsen and Shephard [2002] などによって詳しく分析されている。後ほど詳しく解説する Gatheral et al. [2018] とも密接に関連することから、ここで簡単に説明を加えたい。

連続時間モデルにおいては、時変ボラティリティを持つ原資産価格は、一般に以下のような確率微分方程式であらわされる (記法については、2 節を参照)[23]。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t\, dt + \sigma_t\, dW_t.$$

ここで、σ_t は時刻 t における瞬間的ボラティリティ (instantaneous volatility) を表す。上述のボラティリティに関する観察事実のとおり、瞬間的ボラティリティは確率的に変

[22] この実現ボラティリティの定義 (および、後ほど定義する累積ボラティリティ) は、ボラティリティ (標準偏差) ではなくバリアンス (分散) に相当するものだが、計量ファイナンス分野の慣例にしたがって、本論文でも実現 (累積) ボラティリティと呼ぶこととする。

[23] Andersen et al. [2001] など では、資産価格過程を一般のセミマルチンゲール過程としている。本論文では、簡単のためジャンプ過程は捨象する。ジャンプ項が存在する場合の実現ボラティリティの性質や一致推計量については、Barndorff-Nielsen and Shephard [2004] を参照。

動するため、σ_t(または、その対数値) は別の確率微分方程式によってあらわされることが多い。このような資産価格に関する確率過程が与えられたとき、ある期間 $[t, t+\Delta]$ における「累積ボラティリティ (integrated volatility)」を次のとおり定義する。

$$\int_t^{t+\Delta} \sigma_s^2 \, ds.$$

このとき、実現ボラティリティは、時間分割 π を細かくしていった場合 (すなわち、より高頻度の日中データを用いて実現ボラティリティを算出した場合)、累積ボラティリティに確率収束することが示される。この収束は、非常に広範な σ_t の定式化のもとで成立する。たとえば、σ_t は伊藤過程やマルコフ過程である必要はなく、非整数ブラウン運動などのケースでも成立する。このように、実現ボラティリティは、特定のモデルによらずにデータから容易に算出が可能であるうえに、上述の累積ボラティリティへの収束を弱い条件のもとで示すことが出来るという理論的に望ましい点もあることから、とくに 2000 年代以降のボラティリティ研究では実現ボラティリティの利用がベンチマークとなっていった[24]。

実現ボラティリティも長期記憶性を持つことが知られており、上述の ARFIMA モデルを用いた分析が多くみられた (このほか、unobserved components モデルと呼ばれる状態空間モデルに基づくアプローチも存在している。たとえば、Nagakura and Watanabe [2015] を参照)。もっとも、近年では、実現ボラティリティの変動を表すモデルには、Corsi [2008] が提案した HAR (Heterogeneous Autoregressive) モデル、およびその派生形が多く用いられている。HAR モデルは、日次の実現ボラティリティを、自己ラグや週次・月次頻度で計測した過去の実現ボラティリティといった複数のデータ周期の実現ボラティリティから予測するモデルである。シンプルなモデル構造であり、長期記憶性を持たないモデルであるが、日次の実現ボラティリティに関する予測力の高さから広く利用されている。HAR モデルについても、GARCH モデルなどと同様、レバレッジ効果を考慮した非対称 HAR モデル (たとえば、Ubukata and Watanabe [2014], Bekaert and Hoerova [2014]) や、資産価格過程のジャンプを考慮した HAR-CJ モデル (Andersen et al. [2007]) などが提案されている[25]。

最後に、ズンバック効果 (Zumbach effect) と呼ばれる、実現ボラティリティと資産価格変化率の相関関係に関する実証的な性質について述べる (Blanc et al. [2017]; El Euch et al. [2020])。まず、日次の累積バリアンスと資産価格変化率の二乗との相互相関関数を下記のとおり表記する。

$$\widetilde{C}^2(\tau) = E\left[\left(\sigma_t^2 - E\left[\sigma_t^2\right]\right) r_{t-\tau}^2\right].$$

さらに、以下の time-reversal asymmetry (TRA) と呼ばれる指標を導入する。

$$Z(\tau) = \widetilde{C}^2(\tau) - \widetilde{C}^2(-\tau), \quad \tau > 0.$$

[24] 日本を対象とした分析としては、たとえば渡部、佐々木 [2006] などを参照。
[25] HAR 型のモデルに関するより詳細なサーベイとしては、渡部 [2020] を参照。

すなわち、TRA は資産価格変化率の二乗に対してボラティリティを先行させた場合の共分散と、ボラティリティに対して資産価格変化率の二乗を先行させた場合の共分散の差を計測したものである。実現バリアンスを累積バリアンスの推計値として、TRA を算出した場合、多くの金融時系列において TRA が正の値となることが、ズンバックやその共著者らによる一連の研究によって指摘されてきた (Zumbach and Lynch [2001], Lynch and Zumbach [2003], Zumbach [2004], Zumbach [2009] など)。一方、標準的な連続時間のボラティリティ・モデルでは、TRA 指標が (ほぼ)0 となることが理論的に示される。このことは、標準的なモデルではズンバック効果を表現することができないことを意味する。近年のラフ・ボラティリティに関する研究からは、ラフ・ボラティリティ・モデルによってズンバック効果を表現可能であるという結果が得られている。この点は 4 節で詳しく解説する。

(2) Gatheral et al. [2018] の概要

以上でみてきたとおり、金融資産価格の時系列のボラティリティに関する理論的・実証的研究には長年の蓄積があり、長期記憶性を中心とした観察されるデータの時系列特性を表現するモデルの構築が進んできたほか、近年では日中データを基に算出される実現ボラティリティを基礎とした分析枠組みの発展が進んできた。この間、2000 年代には、IV の観察からラフ性の必要性を示唆する研究の進展がみられた (詳細は 4 節を参照)。こうした研究による問題意識のもと、2014 年にワーキングペーパー版が公表された Gatheral et al. [2018] は、実現ボラティリティのラフ性を分析した。その結果、株価指数などの実現ボラティリティがラフ性を有することを指摘し、大きな注目を集めた。以下では、当該論文の概要を解説する。

Gatheral et al. [2018] は、さまざまな金融資産に対して、日中データから算出される実現ボラティリティのデータを用いて、そのパス (計測された実現ボラティリティの時系列) のラフ性の指標 H を推計している。このラフ性の指数は、非整数ブラウン運動のハースト指数に対応するもので、$H < 1/2$ のとき、実現ボラティリティの変動はブラウン運動対比、ラフなものとなる。以下、本節では、非整数ブラウン運動のハースト指数の推計を念頭に、ラフ性の議論を行う[26]。

2.(2) 節でみてきたとおり、ボラティリティがハースト指数 $H \neq 1/2$ の非整数ブラウンに従う状況のもとで、ボラティリティの変動幅を計測する間隔 Δ を変化させた場合、その標準偏差はいわゆる「ルート t 倍法」を満たさない。より具体的には、実現ボラティリティの対数値がハースト指数 H の非整数ブラウン運動に従う場合、2(2) 節の (4)(ii) から、実現ボラティリティの変分の絶対値に関して、以下の式が成り立つ。ただし、q はべき乗を表す非負実数であり、下式左辺は実現ボラティリティの変分の (一般化し

[26] 2.(2) 節で述べたとおり、ラフ性はパスのヘルダー連続性によって定義されるため、ボラティリティが非整数ブラウン運動以外の確率過程に従う場合でも定義・計測が可能である。もっとも、多くのラフ・ボラティリティ研究が、非整数ブラウン運動を念頭に置いた分析を行っていることを踏まえて、説明の簡単化のため、本論文でも非整数ブラウン運動のハースト指数の推計を念頭に置いて説明する。

た) モーメントに相当する。

$$E\left[\left|\log\sigma_{t+\Delta}-\log\sigma_t\right|^q\right]=K_q\Delta^{qH}. \tag{7}$$

ここで、両辺の対数を取ると、$\log\left(E\left[\left|\log\sigma_{t+\Delta}-\log\sigma_t\right|^q\right]\right)=$ 定数 $+\,qH\log(\Delta)$ となる。この関係が成立する場合、q を固定したうえで様々な間隔 Δ について上式の左辺の期待値を算出し、Δ について両対数プロットした場合、傾きが qH の直線状にプロットされることが予想される。

Gatheral et al. [2018] は、上式左辺の期待値を標本平均に置き換えてこの予想を実証的に分析している。具体的には、DAX 先物、ドイツ国債先物、S&P 500 指数、NASDAQ 指数について、5 分足データから算出された日次の実現ボラティリティを利用して、(7) 式を検証している。検証にあたっては、5 つの異なる q ($q=0.5,1,1.5,2,3$) と、$\Delta=1$ 日〜1 年について、上式左辺に対応する標本平均値の対数を算出したうえで、それぞれの q について左辺を $\log\Delta$ に回帰することで、まず qH を推計している。さらに、qH を q に回帰することでハースト指数 H の推計値を得ている。その結果、4 つの資産ともハースト指数はおおむね 0.1 程度 (0.082 ~ 0.142) と安定的に推計されたほか、上記の各回帰式のフィットも極めて良好であることが分かった。このように、ハースト指数が安定的に 1/2 未満の値で推計されていることは、これらの資産価格のボラティリティが、ラフな確率変動を示している可能性を示唆している。

次に、Gatheral et al. [2018] は上記の実証的発見と整合的な性質を持つモデルとして、Rough Fractional Stochastic Volatility(RFSV) モデルを提案している。RFSV モデルでは、瞬間的ボラティリティは、確率過程 X_t を用いて、$\sigma_t=\exp(X_t)$ と表される。ただし、X_t は、fractional Ornstein-Uhlenbeck (fOU) 過程と呼ばれる、以下の確率過程である。

$$dX_t=\nu dB_t^H-\alpha(X_t-m)\,dt$$

ここで、B_t^H はハースト指数 H の非整数ブラウン運動、ν,α,m は定数パラメータである。また、短いタイムスケールにおいて、平均回帰項 (上式の dt 項) の寄与が無視できるくらい、平均回帰速度パラメータ α が小さいことを仮定している。fOU 過程は定常過程であるが、この α に関する仮定のもとでは、局所的には X_t が非整数ブラウン運動のように振る舞うことが示されている (数学的な意味については Gatheral et al. [2018] の proposition 3.1 などを参照)。非整数ブラウン運動や RFSV モデルが、Gatheral et al. [2018] における実証的な発見と整合的になるためには、RFSV モデルの中の非整数ブラウン運動のハースト指数が 1/2 未満である必要がある。逆に、Gatheral et al. [2018] は、$H>1/2$ となる Comte and Renault [1998] 型の長期記憶モデルでは、計測される実現ボラティリティの変分の挙動にフィットしないことを報告している。

また、Gatheral et al. [2018] は RFSV モデルに基づいたボラティリティ予測の精度について、AR モデルや HAR モデルなどの既存のモデルとの比較を行っている。その結果、ほぼすべての株価指数およびボラティリティ計測ホライズンにおいて、RFSV モデルは AR や HAR モデル以上の予測精度を示すとの結果を報告している。また、RFSV

モデルをボラティリティ予測に用いる場合、ハースト指数 H の推計値のみあれば十分なことを示している[27]。そのうえで、AR や HAR モデルよりも圧倒的に推計が必要なパラメータが少ないことを踏まえると、RFSV モデルはボラティリティ予測モデルとして、非常に大きな実用上の優位性を持っていると主張している[28]。

以上の、Gatheral et al. [2018] が報告した「ラフなボラティリティ」に関する結果は、研究者や実務家から注目を集めることになった。その要因の一つとして、3.(1). ハ節で紹介した長期記憶性を持つボラティリティ・モデルとの関連がある。たとえば、長期記憶性をもつ連続時間のボラティリティ・モデルとしては、fractional stochastic volatility (FSV) モデル (Comte and Renault [1998] など) が利用されてきたが、FSV モデルにおけるハースト指数は 1/2 よりも大きい値に設定する必要があったことから、Gatheral et al. [2018] による報告結果との関係性について、強い学術的関心を呼ぶこととなった。また、ボラティリティ予測の文脈でも優位性を示唆する結果が報告されたほか、4 節で詳述する IV に関する実証的・理論的な性質とラフ・ボラティリティの関係に関する研究進展と相まって、実務家からも関心を集めることとなった。

(3) HV のラフ性に関する近年の研究動向

イ　実現ボラティリティの計測誤差とハースト指数の推計

Gatheral et al. [2018] の分析に関する後続研究では、主に 2 つの論点についての議論が発展している。第一の論点は、ハースト指数の推計手法に関する研究である。Gatheral et al. [2018] では、5 分足データから算出された日次実現ボラティリティをインプット・データとして、(7) 式に関する回帰分析によってハースト指数を算出している。この際、日次実現ボラティリティの計測誤差については考慮されておらず、インプット・データが真のボラティリティ指標であることが (暗黙に) 仮定されている。

もっとも、離散的にサンプリングされた資産価格を用いて算出される実現ボラティリティは、真の瞬間的ボラティリティ σ_t やその一定期間での累積値である累積ボラティリティ $\int \sigma_s \, ds$ と異なる[29]。このように、実現ボラティリティは、計測誤差を含みうるものであり、このような計測誤差を含むデータをインプットとして単純な推計を行った場合、ハースト指数の推計値にバイアスが生じる可能性がある。実際、Fukasawa et al.

[27] RFSV モデルには、ハースト指数以外にも平均回帰パラメータ α や、そのほかのパラメータが含まれる。もっとも、前述のとおり、短いタイムスケールでは平均回帰項を捨象してもよいことから、α はボラティリティ予測式に現れないほか、そのほかのパラメータについても、予測式の算出過程で打ち消しあうことが Gatheral et al. [2018] で示されている。

[28] なお、Gatheral et al. [2018] では各モデルの予測精度の数値を単純比較しただけで、統計的に有意な精度差があるかまでは検証していない点に留意が必要である。この点、Wang et al. [2023a] は、Diebold and Mariano [2002] 検定や、Hansen et al. [2011] の model confidence set などに基づいて、ラフ性を考慮したモデルと HAR モデルなどとの予測精度の比較を行っており、ラフなモデルである fOU 過程が有意に高い予測力をもつと報告している。このほか、Wang et al. [2023b] では、連続時間モデルである非整数ブラウン運動の期待値を、どのように離散近似することが予測精度の観点から望ましいかという点を分析している。

[29] 原資産価格過程がジャンプを含む場合も、実現ボラティリティはジャンプに関する項を含むことから、累積ボラティリティとは一致しない。ジャンプがある場合の実現ボラティリティの推計については、Andersen et al. [2012] や Barndorff-Nielsen [2005] を参照。

[2022] は、5 分足データから算出された日次実現ボラティリティをインプットとする回帰分析に基づいてハースト指数を推計した場合、真のデータ生成系列のハースト指数にかかわらず、ハースト指数が (Gatheral et al. [2018] が報告している)0.1 前後の値を取ることを指摘している。また、当該論文では、実現ボラティリティの計測誤差がこのようなハースト指数の推計結果につながっている、と論じている。Cont and Das [2023] も、計測される実現ボラティリティのパスの変動をもとにハースト指数を推計した場合、推計値にバイアスが生じることを報告している。このため、推計されたハースト指数が 1/2 未満であっても、ラフ性の証拠とはならないことを指摘している。

このため、実現ボラティリティの計測誤差に関するモデルを導入することで、ハースト指数をパラメトリックに推計する手法がいくつかの論文で提案されている。前述の Fukasawa et al. [2022] は、原資産の対数過程がジャンプ項を含まないセミマルチンゲールに従うという比較的弱い仮定の下で、実現ボラティリティと累積ボラティリティの差分 (すなわち実現ボラティリティの計測誤差) に関する極限定理を示している。具体的には、実現ボラティリティの計測誤差が、平均 0、分散 $2/m$ の正規分布に従うことを示した (ただし、m は一日当たりの日中データの数)。そのうえで、この理論的結果に基づいた擬似最尤推定量を提案している。さらに、この推定量を S&P 500、日経平均株価指数等の主要な株価指数の 5 分足実現ボラティリティに対して適用したところ、ハースト指数の推計値は 0.02 ~ 0.06 程度となり、Gatheral et al. [2018] の報告より小さなハースト指数、すなわち、主要株価指数のボラティリティの時間発展が非常にラフであるという結果を報告している。Bolko et al. [2023] は、原資産の対数過程がジャンプ項を含まないセミマルチンゲールに従うという Fukasawa et al. [2022] と同様の設定の下で、一般化モーメント法 (GMM) 推計に基づいて、ハースト指数を推計する手法を提案している[30]。Bolko et al. [2023] も、主要な株価指数のハースト指数を推計しており、0.05 以下の推計値を得ている。

Damian and Frey [2023] は、高頻度の資産価格変動が点過程であらわされると考え、その点過程[31]の強度 (詳細は、5. (2) 節参照) がボラティリティに相当する隠れファクターで決まる定式化を取っている。このもとで、点過程データからのフィルタリング問題としてボラティリティの推計を行う方針を取っている。ただし、非整数ブラウン運動は、マルコフ性を持たず、確率過程の挙動は経路依存することとなるため、通常のフィルタリング推計を行うことは、計算量やメモリ必要量の観点から現実的ではない。この難点を回避するために、Damian and Frey [2023] は、非整数ブラウン運動が伊藤過程の一種である OU 過程を無限個重ね合わせることで表現できる、という結果に基づいて、マルコフ性を利用可能な設定に変換したうえで、粒子フィルターによる推計を行う手法を提案している。そのうえで、さまざまなシミュレーション分析を行っており、Cont and Das [2023] が指摘するようなノイズによる見せかけのラフ性と真の

[30] Fukasawa et al. [2022] と Bolko et al. [2023] は、前者が擬似最尤推定法、後者が GMM 推定を行っている点のほか、原資産過程のドリフト項やボラティリティ過程の形状に関するいくつかの点で異なる設定を取っている。詳細については、Bolko et al. [2023] の 3 節を参照。

[31] 点過程とは、偶発するイベントの回数など、時系列上もしくは空間上にランダムに分布する点 (イベント) を記述する確率過程。

ラフ性を見分けることが出来ることを報告している。

なお、計測誤差に関連する話題として、観察される資産価格に含まれる「マイクロストラクチャー・ノイズ」(MM ノイズ) の問題がある。たとえば、取引所で取引可能な価格・値幅が離散的 (たとえば１円刻みなど) であることにともなう「丸め誤差」や、ビッド・アスク・スプレッドの存在による機械的な負の自己系列相関 (いわゆる、ビッド・アスク・バウンス) といった現象が知られている [32]。原資産価格が MM ノイズを含む場合、高頻度データを用いたボラティリティ推計には留意が必要である。3.(1) 節でみたとおり、実現ボラティリティを利用する理論的根拠である、原資産価格の二次変分が累積ボラティリティに収束するという性質は、原資産価格が MM ノイズを含まないことを前提としている。一方、原資産価格が MM ノイズを含む場合、実現ボラティリティは、時間分割を細かくしていったときに、求めたい累積ボラティリティではなく、MM ノイズの分散に収束するため、適切な対処が必要となる (Zhou [1996]; Aït-Sahalia and Mykland [2009])。

高頻度データに含まれる MM ノイズへの対処方法には、いくつかのアプローチが存在する。そのうち、もっとも単純かつ広く利用されているのがダウン・サンプリング、すなわち、5 分足などの、やや頻度の低いデータを使うことで MM ノイズの影響を抑制するアプローチであり、Andersen et al. [2001]、Gençay et al. [2002]、Barndorff-Nielsen and Shephard [2002] などで推奨されている[33]。なお、このアプローチは、MM ノイズを抑制できることに加えて、(ティック・データと異なり) 等時間隔のデータ時系列であることから、理論・実証の両面で取り扱いやすいことも利点である。このように、多くの研究は、5 分足データから算出された実現ボラティリティは、非常に単純な実現ボラティリティ算出手法でありながら、十分に高頻度なデータ頻度と、MM ノイズの十分な抑制を両立しているとしている。Fukasawa et al. [2022] も、このことを根拠の一つとして、5 分足データから算出された実現ボラティリティを用いた分析を行っている (Fukasawa et al. [2022], Remark 2.4 (ii))。

なお、この MM ノイズの議論は、上記の Fukasawa et al. [2022] などにおける計測誤差の議論とは混同してはならない。Fukasawa et al. [2022] などは、連続時間のボラティリティの確率過程から定義される累積ボラティリティに対して、離散的にサンプリングされた資産価格から算出される実現ボラティリティに含まれる計測誤差がハースト指数の推計に与える影響を分析している。このような計測誤差は、マイクロストラクチャー・ノイズが存在しない場合でも生じうるものである。このため、Gatheral et al.

[32] マイクロ・ストラクチャーの資産価格に対する影響の概説としては、Campbell et al. [1997] を参照。

[33] Bandi and Russell [2008] は、最適なダウン・サンプリングのデータ頻度の推計を行っている。なお、ダウン・サンプリングは高頻度データを捨てることに相当するため、有益な情報まで捨ててしまっている可能性がある。このことから、高頻度データを利用しつつ、データに含まれるノイズに対して頑健に推計を行う手法についても研究が進められてきた。たとえば、Zhang et al. [2005] は、Two Scales Realized Volatility と呼ばれる、累積ボラティリティと MM ノイズの分散を同時に一致推定する手法を提案している。また、Nagakura and Watanabe [2015] による状態空間モデルに基づいた推計などがある。また、Hansen and Lunde [2006] は、実現ボラティリティの計測における MM ノイズの影響を分析しており、MM ノイズの影響を修正した実現ボラティリティ指標を提案している。もっとも、推計の複雑性などとの兼ね合いを考えると、ダウン・サンプリングが実用上もっとも好ましいとする研究がみられている。たとえば、400 以上の実現ボラティリティの推計値を比較した Liu et al. [2015] は、5 分足実現ボラティリティを明確にアウトパフォームする推計手法は存在しないことを報告している。

[2018] が行ったような実現ボラティリティの回帰によるハースト指数の推計値におけるバイアスは、マイクロストラクチャー・ノイズが存在しない場合でも生じる。

ロ　長期記憶性との関係

実現ボラティリティのラフ性に関する第二の論点は、長期記憶性とラフ性の関係である。(ブラウン運動を含め) 非整数ブラウン運動には、自己相似性 (2 節参照) と呼ばれる性質があるため、適切なリスケールを行いつつ、タイム・スケールを変換した場合に分布特性が変化しない。すなわち、ごく短いタイム・ホライズンでの非整数ブラウン運動の挙動と、非常に長いタイム・ホライズンでの非整数ブラウン運動の挙動は、本質的には同一のものとなる。このため、長い期間にわたって正の系列相関を示す現象である長期記憶性と、短期間で非常に大きな変動を示す (すなわち、負の自己系列相関を示す) ラフ性を、同一のハースト指数を持つ非整数ブラウン運動であらわすことはできない。この点に関連する研究としては、「見せかけの長期記憶性」を検出している可能性を指摘するものと、ラフ性と長期記憶性を同時に表現するモデル定式化を目指す研究がある。

長期記憶性に関する先行研究では、長期記憶性を持たないデータ生成過程であっても、時間トレンドや構造変化、レジーム変化などが存在する場合に、長期記憶性パラメータ (実数和分パラメータ d) にバイアスが生じ、見せかけの長期記憶性が検出されてしまう可能性が指摘されてきた (矢島 [2003]; Diebold and Inoue [2001]; Granger and Hyung [2004] など)。Gatheral et al. [2018] も、見せかけの長期記憶性について考察を加えている。すなわち、RFSV モデルで生成した時系列に対して、Andersen et al. [2001] が行ったような ARFIMA モデルの実数和分パラメータ d の推計を行ったところ[34]、長期記憶性を示すとの結果を得ている。このため、上記の先行研究と同様、RFSV モデルも、本来はラフでありながら長期記憶性を持つと推計されうる時系列モデルである、と主張している。

一方、ラフ性と長期記憶性を同時に表現するモデルも提案されている。たとえば、Bennedsen et al. [2021] は、ブラウン運動を拡張した「Brownian semi-stationary process」(Barndorff-Nielsen and Schmiegel [2007]、Barndorff-Nielsen and Schmiegel [2009]) と呼ばれる確率過程を用いたモデルを提案している。このモデルでは、ラフ性のパラメータと長期ラグにおける自己相関係数が別個のパラメータで表現されることから、ラフ性と長期記憶性の度合いを別個に表現可能である。さらに、当該モデルを実現ボラティリティの計測誤差を考慮しながら、非線形最小二乗法により推計する手法を提案している。また、推計アプローチを S&P 500 指数先物や個別銘柄データに適用した実証分析を行っている。その結果、これら株価指数・個別株価のボラティリティは、ラフ性を示すと同時に長期記憶性も示す、という結果を得ている。

[34] Andersen et al. [2001] の推計では、自己相関関数がべき型に減衰していくことに対応する周波数領域 (自己相関関数のフーリエ変換) での関係式に基づいて推計を行っている。

ハ　本節のまとめと今後の展望

実現ボラティリティのラフ性に関する現時点の研究動向をまとめると、以下の点がポイントと考えられる。まず、Gatheral et al. [2018] が推計に利用した実現ボラティリティは、理論上のモデル化対象である累積ボラティリティの計測値としては計測誤差を含んでいる。このため、この点を考慮しない推計手法 (たとえば、Gatheral et al. [2018] による回帰分析) でハースト指数を推計した場合、推計値に下方バイアス (ラフ性を示す方向へのバイアス) が生じることが指摘されている。もっとも、このような計測誤差を考慮した推計手法を提案しているいくつかの論文は、計測誤差を考慮した場合でも株価指数や個別株式銘柄のボラティリティは強いラフ性を示すことを報告している。

次に、非整数ブラウン運動の自己相似性から、少なくとも単一の非整数ブラウン運動などのシンプルなモデルでは、ラフ性と長期記憶性を同時に表現することはできない。この点については、Gatheral et al. [2018] のように、RFSV モデルが生成する時系列が見せかけの長期記憶性を示す可能性を指摘する研究が存在する一方、ラフ性と長期記憶性を同時に表現可能な確率過程を提案する研究もみられている。

上記の論点は、いずれも、直接観測できない (瞬間的・累積) ボラティリティの性質を分析することの難しさを物語っているといえる。今後も、適切なボラティリティの推計値や、ボラティリティの複雑な挙動を記述するのに適したモデルの検討のほか、ラフ性および長期記憶性に関する指標に関するより頑健な推計手法の発展が継続することが望まれる。

最後に、一部の研究者から、非整数ブラウン運動を利用した複雑なモデルの必要性に対して懐疑的な見方が示されている点について述べる。たとえば、Rogers [2023] は、非整数ブラウン運動に依拠したラフ・ボラティリティ・モデルについて、(1) マルコフ性を持たないことから、デリバティブの価格付けといった実用的な応用の際に、計算量やメモリ使用量などの観点から困難を伴うこと、(2) マルコフ性を持たない資産価格変動を生じさせるような金融経済学的メカニズムが存在するかという点への疑問、(3) 日次や週次といった実証研究上で着目されることの多いタイムスケールにおいては、非整数ブラウン運動を用いた確率過程を用いなくても、伊藤過程によって、時系列特性を表現可能であることを指摘している。この点については、上述のとおり、ラフ性の指標に関するより頑健な推計手法の発展のほか、次節以降で詳述するデリバティブの価格付け・リスク管理におけるラフ性の必要性や、市場参加者の取引行動を出発点とした「ミクロ的基礎付け」のあるモデルとラフ性の関係性など、実現ボラティリティ以外のボラティリティの性質も考慮したうえで、総合的に判断されるべきものと考えられる。

4 インプライド・ボラティリティの形状とラフ・ボラティリティ・モデル

本節では、数理ファイナンス分野の発展経緯を実務面と学術面の双方の視点から解説したうえで、IV の形状 (期間構造) から観測されるボラティリティのラフ性や、ラフ・ボラティリティ・モデルの必要性や実務活用の展望について述べる。数理ファイナンスおよび金融工学[35]は、デリバティブの価格付け・リスク管理を主な対象とし、無裁定[36]や複製[37]といった原理のもと、伊藤解析 (確率微分方程式) を用いて公正な価格を算出する理論を提供してきた。この理論はデリバティブ実務において活用されるとともに、実務における問題意識が理論の発展を促すという、相互関係のもと発展してきた。

その代表例が、本節で焦点を当てる IV の表現問題である。ラフ・ボラティリティは、IV の表現問題のうち、既存手法では解決困難と考えられていた問題 (IV の期間構造に関する「負のべき乗則 (negative power law)」の表現) を解決しうるものとして注目を集めたことをきっかけに、HV や MM などの観点からも研究が進められてきた。その後、デリバティブの価格付けモデルの開発が進み、マルコフ性を持たないラフなモデルによりボラティリティの時間発展を記述した場合においても、追加的な変数（市場で観測されるフォワード・バリアンスなど）を考えることでマルコフ性が回復し、既存の数理ファイナンス理論の枠組みが利用可能なことが示された。さらに、近年では、ラフ性が観測される市場のもとでは、ラフなモデルによりデリバティブの価格付け・リスク管理を行わなければ裁定機会が発生するという理論的結果が示された。この結果は、ラフなモデルを利用する必要性を示す重要な結果である。これに加え、ラフなボラティリティ・モデルにより、既存のデリバティブ・モデルでは解決が困難とされてきた「SPX オプションの IV と VIX オプションの IV への同時キャブレーション問題」を解決しうることがわかってきた。

以下、4.(1) 節では、実務的な問題意識も踏まえ、IV の表現問題を中心に数理ファイナンスのこれまでの発展経緯を整理する。4.(2) 節では、IV に関連するラフ・ボラティリティ研究を紹介する。具体的には、IV の形状からボラティリティをラフなモデルで記述する必要性が示唆されることを解説したうえで、ラフ・ボラティリティ・モデルによるデリバティブの価格付け・リスク管理の方法と発展の展望をまとめる。

[35]数理ファイナンスおよび金融工学は、ともにデリバティブの価格付け理論を中核とする研究分野であるが、前者は応用数学の一分野としての研究分野 (マルチンゲール理論に立脚したデリバティブの公正価値算出理論) を指すことが多い一方、後者は実務応用を志向する研究分野 (市場での観測事項にモデル・パラメータを合わせるなどの、モデルを実用化するための技術など) を指すことが多い。

[36]初期投資なしには、損失リスクを負うことなく、利益を上げることはできないという条件。

[37]デリバティブと同一のキャッシュフローを、原資産などを適切に取引することで生成すること。

(1) 金融工学・数理ファイナンスの発展経緯：IV の表現問題

イ　インプライド・ボラティリティ

先述のとおり、ブラック＝ショールズ・モデル (Black and Scholes [1973]) は、最も基本的なデリバティブの価格付けモデルで、金融工学・数理ファイナンス分野の隆興およびデリバティブ市場の発展の契機となった。また、後段で述べるとおり、ブラック＝ショールズ・モデルは、オプションの市場価格から IV を逆算する際など、現在の実務においても基本的な道具として使用されている。

ブラック＝ショールズ・モデルでは、原資産価格が対数正規分布に従うと仮定されており、ヨーロピアン・コール・オプションなど[38]の価格付けを解析的に行うことができる (価格公式が知られており、数値近似を用いずに価格を算出可能)。ここで、オプション価格は、原資産価格の期待収益率が無リスク金利に一致する確率測度 (リスク中立確率測度) 下でのペイオフの期待値として算出でき、無裁定の仮定のもと、このオプションの複製に必要な初期費用と一致する (詳細は、関根 [2007]、Björk [2009] などの数理ファイナンスの入門書を参照)。このため、ブラック＝ショールズの価格公式を用いることにより、原資産価格の実確率測度下での期待収益率を推計することなく、オプション価格を求めることができる。すなわち、W_t^Q をリスク中立確率測度下でのブラウン運動とし、以下のとおり、原資産価格 $S_t^{(\mathrm{BS})}$ が、幾何ブラウン運動 (1 時点の価格が対数正規分布) に従うとする。

$$\frac{dS_t^{(\mathrm{BS})}}{S_t^{(\mathrm{BS})}} = r\,dt + \sigma\,dW_t^Q, \quad \text{i.e.,, } S_t^{(\mathrm{BS})} = S_0^{(\mathrm{BS})} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^Q\right).$$

ここで、 t: 現時刻、r: 無リスク金利、σ: ボラティリティ、Φ: 正規分布の累積密度を表す。このとき、K: ストライク, T: 満期のヨーロピアン・コール・オプションの価格は、

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{BS}}(r, K, T, \sigma, S_t) &= E^Q\left[e^{-r(T-t)} \max\{S_T^{(\mathrm{BS})} - K, 0\} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= S_t^{(\mathrm{BS})}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_t^{(\mathrm{BS})}}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - e^{-r(T-t)}K\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_t^{(\mathrm{BS})}}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \end{aligned}$$

と表すことができる (Φ は正規分布の累積密度関数)。これが、ブラック＝ショールズ価格公式である。

ブラック＝ショールズ価格公式にあらわれるパラメータ (引数) は、現時点の原資産価格 S_t、無リスク金利 r、ボラティリティ σ、ストライク K、満期 T である。このうち、原資産価格と無リスク金利は市場から観測可能[39]であり、ストライクと満期は価格付け対象商品の条項であることから、ボラティリティ σ が唯一の自由パラメータであ

[38] コール・オプション以外にも、ヨーロッパ型の (将来の一時点のみで支払いが生じる) プット・オプション、デジタル・オプションなどの価格付け公式も導出可能。

[39] 典型的には債券やスワップの価格から逆算される。実務上は、各種ベーシス (RFR-OIS ベーシス、テナー・ベーシスなど) を加味するため、マルチ・カーブが用いられることが一般的である (詳細は、三菱 UFJ 銀行市場企画部 [2022] 参照)。

る。そのため、ブラック＝ショールズ価格公式をもとに、オプション価格とボラティリティ σ の間の一対一関係を考えることができる。とくに、ブラック＝ショールズ価格公式をもとに、オプション価格が与えられたもとで、対応するボラティリティを逆算することができる。具体的には、ストライク K、満期 T のコール・オプションの (市場) 価格 $C^{(\mathrm{mkt})}(K, T)$ が与えられたとき、

$$C^{(\mathrm{mkt})}(K, T) \quad = C_{\mathrm{BS}}\left(K, T, \sigma_{\mathrm{BS}}^{(\mathrm{mkt})}(K, T)\right)$$

を満たす $\sigma_{\mathrm{BS}}^{(\mathrm{mkt})}(K, T)$ を逆算して求めることができる[40]。このようにして逆算された $\sigma_{K,T}^{(\mathrm{BS})}$ が、ブラック・ショールズ IV(BS-IV) である[41]。デリバティブ実務においては、IV を用いてデリバティブの価格を表示・取引する慣例がある[42]。これは、オプションの市場価格は、将来の不確実性に関する市場予想を反映するという、IV の基本な考え方に立ったものである。

ロ　ボラティリティ・サーフェス

原資産価格がブラック＝ショールズ・モデルに従う場合、BS-IV は満期やストライクによらず一定の値 (すなわち、ブラック＝ショールズ・モデルのボラティリティ σ) となる。一方、市場における実際のオプション価格から算出される BS-IV は、通常、ストライク K、満期 T に応じて異なる値となることが知られている[43]。様々なストライクや満期に関するオプションの市場価格が与えられたとき、ストライク K および満期 T の関数として、BS-IV を 3 次元曲面で描画したものを「ボラティリティ・サーフェス」と呼ぶ。なお、実務においては、ストライク K の代わりに対数マネーネス $\kappa = \log\left(\frac{e^{-r(T-t)}K}{S_t}\right)$、満期 T の代わりに残存期間 $\tau = T - t$ を引数とする慣習がある。図 3 は、株式オプション市場などの典型的なボラティリティ・サーフェス (イメージ図) である。

[40] ブラック＝ショールズ価格公式は、σ について単調増加関数であることから、逆算されるボラティリティは一意に定まる。

[41] BS-IV 以外にも、原資産価格過程がブラウン運動に従うとして算出されたブラック (バシェリエ) ボラティリティなどが知られており、金利など原資産が負となりうるオプション市場において用いられる。このほかにも、IV としては、原資産価格に特定のモデルを仮定せずに算出される「モデル・フリー IV」が知られており、後述のとおり、VIX などのボラティリティの指数の算出で活用されている。

[42] オプション価格は原資産価格に応じて変動するため、原資産価格の変動は激しい場合 (たとえば為替など)、オプション価格の変動も激しくなる。このため、市場実務において、オプションを価格で表示すると、原資産価格が変わるたびにオプション価格の表示が変わるため、煩雑になる。また、オプション価格は、満期やストライクにも依存するため、異なる満期・ストライクのオプションの価値を価格で比較することはできない。そのため、原資産価格や満期・ストライクに依存しない (標準化された) ボラティリティでオプションの価値を表示する市場慣行が広がった。ただし、すべてのデリバティブ商品の価値をボラティリティで表示するわけではなく、たとえば、マイナー通貨の為替オプションなどは、価格のまま表示されることもある。

[43] このことは、BS-IV の算出の際には、ブラック＝ショールズ・モデルを仮定した価格公式を利用しているものの、リスク中立確率測度下で原資産価格はブラック＝ショールズ・モデルに従っていないことを意味する。

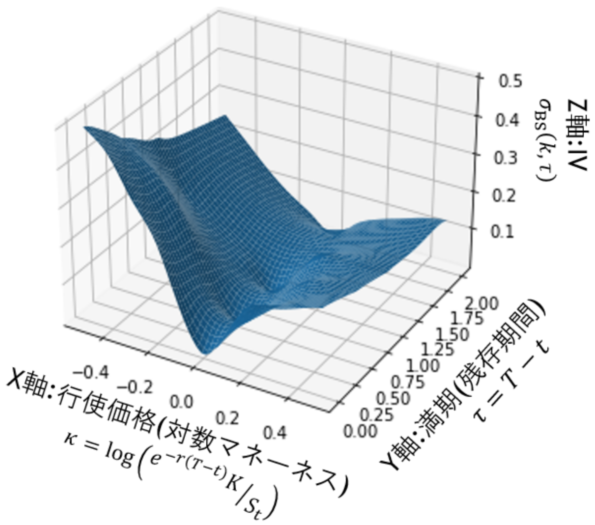

図 3: ボラティリティ・サーフェス (イメージ図)

代表的なオプション市場である株価指数オプション市場では、流動性の高いストライク・満期のオプションの市場価格が、ボラティリティ・サーフェスとしてクオートされる (市場価格が表示される) ことが多い。ある 1 つの満期 τ での断面をみると、低い行使価格ほど IV が高い傾向にあることがわかる。これは、株価下落方向に分布が厚いことに対応しており、「ボラティリティ・スマイル/スキュー」と呼ばれる現象である。ある 1 つの行使価格での断面 (Y 軸方向の断面) をみると、短い満期ほど IV が高い傾向があることがわかる。これは、満期の短いオプションの価格ほど、市場の急変リスクに大きな影響を受ける (IV が高くなる (価格が高くなる)) ことと対応している。

ハ　IV の表現

IV の表現とは、市場でクオートされているボラティリティ・サーフェスに整合するよう、デリバティブの価格付けモデル[44]を構成することを指す。以下、その動機と詳細を述べる。デリバティブ実務の大まかな流れは、

(1) 市場でクオートされている流動性の高いデリバティブの取引価格を表現するモデルを構築し、

(2) そのようなモデルに基づいて、より複雑なデリバティブの価格付けやリスク管理 (ヘッジ戦略の導出など) を行う

[44]デリバティブの価格付けモデルは、比較的簡易な商品 (バニラ・オプション) を価格付けするためのバニラ・モデルと、複雑な商品 (エキゾチック・デリバティブ) を価格付けするためのエキゾチック・モデルに大別される。いずれも、市場流動性が高い商品の市場価格をインプットし、価格付け対象商品の価格を算出する。バニラ・オプションは、類似商品 (たとえば満期が異なるだけの商品) の市場流動性が高いため、バニラ・モデルで行われる主な計算は、インプットである市場価格の補間のみである。一方で、本文で述べるとおりエキゾチック・モデルの場合は、原資産価格過程のリスク中立確率測度下でのパラメータを求めるなど複雑な計算を行う必要がある。IV の表現の概念は、バニラ・モデル、エキゾチック・モデルに共通するものであるが、以下、本文では主にエキゾチック・モデルを想定する。

というものである。ステップ (1) について、流動性の高いデリバティブの価格を正確に表現するモデルの構築は、無裁定条件を満たす形でより複雑なデリバティブの価格を算出するために重要である[45]。先述のとおり、オプション価格と BS-IV が一対一関係にあることを踏まえると、流動性の高いデリバティブ (ヨーロピアン・オプション等) の IV を表現するモデルの構築が重要である。このため、数理ファイナンス分野では、現実に観察されるボラティリティ・サーフェスの特徴を表現できるモデル (リスク中立確率測度下で原資産価格過程が従う確率微分方程式) の提案や、観察される市場価格を再現するように、モデルのパラメータを調整する計算 (キャリブレーション[46]) を効率的に行う方法を中心テーマとして発展してきた。第二のステップについて、複雑なデリバティブの価格計算やヘッジ戦略の導出 (そのために必要となる「グリークス」と呼ばれる原資産価格等の変化に対するオプション価格の感応度の算出)[47]は、実務上、頻繁に求められることから、高精度かつ高速に実行できることが望ましい。また、ヘッジ戦略の導出にあたっては、一時点のボラティリティ・サーフェスだけでなく、ボラティリティ・サーフェスのダイナミクス (時間発展) も表現できることが重要となる (詳細は、新原 [2011]2 節参照)。これらの論点も数理ファイナンスの理論的研究および実務的応用における重要テーマとして様々な研究がおこなわれてきた。

ニ　既存のデリバティブ価格付けモデル

具体的なモデルとして、ボラティリティを確定的な関数として記述する局所ボラティリティ・モデル (Dupire [1994]) や、ボラティリティが確率的に変動する確率ボラティリティ・モデル (Heston [1993]、Hagan et al. [2002])、ボラティリティが非連続に変動するジャンプ・モデル (Bates [1996]) など挙げられる。表 1 は、これらのモデルの概要をまとめたものである。

ホ　キャリブレーションとモデル **IV** の漸近展開

原資産価格過程 $\left\{S_u^{(\text{model})}\right\}_{t\le u\le T}$ が、リスク中立確率測度下で以下の確率微分方程式に従うと仮定する。

$$\frac{dS_t^{(\text{model})}}{S_t^{(\text{model})}} = r\,dt + \sqrt{V_t}\,dW_t^Q.$$

[45]無裁定の関係を保つことが望ましい理由として、たとえば、(1) 対顧取引で鞘を取られるのを防ぐ、(2) 会計上、信頼性のある時価評価が求められる、(3) 自社のポジションのリスクを管理するため、市場流動性のある別のオプションを取引する必要がある、などの点が挙げられる。

[46]工学においては、キャリブレーション (測定器の出力が基準となる正しい値と一致するよう測定器を調整すること) の日本語訳として、「較正」が用いられる。本論文では、金融分野における慣例にならい、「キャリブレーション」という言葉を英語のまま用いる。

[47]デリバティブのヘッジに関する詳細については、三菱 UFJ 銀行市場企画部 [2022] を参照。なお、近年では、深層学習を用いた、グリークスを経由しないヘッジ (ディープ・ヘッジング、Buehler et al. [2019]) も提案されている (サーベイ論文として、篠崎 [2023] などを参照。)。ディープ・ヘッジングにおいても、ボラティリティのラフ性をモデル化することが重要であると考えられる (Horvath et al. [2021b])。

モデル	ボラティリティ項	特性	難点
BS モデル (Black and Scholes [1973])	$V_t = \sigma^2$(定数)	コール・オプションなどの価格公式が利用可能	市場で観測されるオプション価格は、定数ボラの仮定を満たさない
局所ボラ・モデル (Dupire et al. [1994])	$V_t = \sigma(t, S_t)$ (確定的な関数)	ある 1 時点でのサーフェスは正確に再現可能	時間経過に伴うサーフェスの変化は再現できない
確率ボラ・モデル (Heston [1993] など)	$V_t = \mu^V(t, V_t) + \sigma^V(t, V_t)\, dW_t^V$ (確率的に変動する関数)	時間経過に伴うサーフェスの変化を再現可能	サーフェスの形状を完全には再現できない
ジャンプモデル (Bates [1996] など)	$V_t = \mu^V(t, V_t) + \sigma^V(t, V_t)\, dW_t^V + dJ_t$ (確率変動にジャンプ項 dJ_t を追加)	急激な価格変動をジャンプで表現し、サーフェスを柔軟に再現	ヘッジ戦略が実行困難、計算負荷が大きく不安定など実用上の問題あり

表 1: 既存のデリバティブの価格付けモデルの種類

そのうえで、市場のクオートを補間した IV である $\hat{\sigma}_{\mathrm{BS}}^{(\mathrm{mkt})}(K, T)$ に関し、

$$C_{\mathrm{BS}}\left(r, K, T, \sigma, S_t^{(\mathrm{model})}\right) \approx E\left[\max\left\{S_T^{(\mathrm{model})} - K, 0\right\}\right] \tag{8}$$

となるよう、$\left\{S_u^{(\mathrm{model})}\right\}_{t \le u \le T}$ のモデル・パラメータを求めることが、キャリブレーションの問題である。

この問題に対し、式 (8) の右辺の期待が解析的に計算できない場合、漸近展開と呼ばれる近似的手法を用いて、式 (8) を満たすモデル・パラメータを設定するのが一般的である。キャリブレーションの精度を得るためには、高精度な漸近展開法が必要であり、数理ファイナンスにおいて、重要な研究テーマとなってきた (Hagan et al. [2002]、Osajima [2007] など)。

(2) ラフ・ボラティリティによる進展

本節では、IV に関連したラフ・ボラティリティ研究の経緯・概要[48]をまとめたうえで、イ以下の小節でそれらの技術的要点を述べる。

先述のとおり、ボラティリティ・サーフェスの表現および時間発展に伴うリスク管理を動機として、ボラティリティ関数を複雑化する方向にデリバティブの価格付けモデルが発展してきた。このような潮流の中、2000 年代初頭に、株式デリバティブ市場における実証分析にて、既存のデリティブの価格付けモデルでは表現が難しい、ボラティリティ・サーフェスの負のべき乗則と呼ばれる挙動が観測されることが報告された。これに対し、2000 年代後半に、Alos et al. [2007] や Fukasawa [2011] によって、非

[48] これらをまとめたサーベイ論文として、Alòs and León [2021] や Di Nunno et al. [2023] が参考になる。

整数ブラウン運動に基づくモデルを用いることで、負のべき乗則が表現可能であることが示され、その後の HV におけるラフ性の観測とも合わせて、ラフ・ボラティリティが注目を集める契機となった。

その後、デリバティブの価格付けのためのラフ・ボラティリティ・モデルとして、ラフ・ベルゴミ・モデル (Bayer et al. [2016]) やラフ・ヘストン・モデル (El Euch and Rosenbaum [2019]) などが提案された。もっとも、これらのモデルは、非整数ブラウン運動に基づくもので、マルコフ性を持たない確率過程によりボラティリティの時間発展を記述するため、既存の数理ファイナンスの枠組みを直接的には適用できないことが難点であった。この点については、その後の研究によって、フォワード・バリアンス (将来時点でのバリアンスの期待値) の情報を含めることで、マルコフ性を回復できることが示された。この場合、複製・無裁定などに基づく数理ファイナンスの理論を適用できることから、実務上もヘッジ戦略を構築可能となることが示された (El Euch and Rosenbaum [2018]、Fukasawa et al. [2021])。ラフ・ボラティリティ・モデルの実務上の利点として、比較的パラメータ数の少ないモデルながら、市場で観測されるボラティリティ・サーフェスの負のべき乗則を表現可能なことが挙げられる。さらに、Gatheral et al. [2020] では、既存のデリバティブ・モデルでは解決が困難とされていた「SPX・IV と VIX・IV への同時キャブレーション問題」(S&P 500 指数オプションの IV と VIX オプションの IV の両方を単一モデルで同時に表現する問題) が、ラフ・ボラティリティ・モデルによって解決しうることが示された。

これらの発展に加え、Fukasawa [2021] では、一般的な設定下で、「市場で観測されるボラティリティ・サーフェスの形状から示唆されるボラティリティのラフさに応じた、ラフ性をもつ価格付けモデルを用いなければ、裁定機会が生じる」ということを示した。言い換えると、負のべき乗則が観測される市場においては、従来型のラフでないモデルによるデリバティブの価格付け・リスク管理を行うと、裁定機会が生じるため望ましくないことを意味する。この結果は、デリバティブの価格付けにおいて、ラフ・ボラティリティ・モデルを用いる必要性を強く示唆する、非常に重要な理論的結果である。

イ　IV の負のべき乗則の観測と非整数ブラウン運動による表現

Carr and Wu [2003]、Lee [2005]、Fouque et al. [2003] では、オプションの市場価格の実データを用いて、ボラティリティ・サーフェスの形状に関する観測事実として、負のべき乗則が成り立つことを実証的に示した。負のべき乗則とは、

$$\psi^{(\mathrm{mkt})}(\tau) = \left| \frac{\partial}{\partial \kappa} \sigma^{(\mathrm{mkt})}_{\mathrm{BS}}(\kappa, \tau) \right|_{\kappa=0} \text{ に関し、} \tau \text{ が小さいとき } \Psi(\tau) \approx c\tau^{H-\frac{1}{2}}$$

が成り立つという観測である。ある τ を固定したとき、$\psi^{(\mathrm{mkt})}(\tau)$ は、満期 τ のオプションに関するボラティリティ・スキューのアット・ザ・マネー (ATM) での傾きを表している。すなわち、負のべき乗則とは、各満期でのボラティリティ・サーフェスの傾きを満期の関数としてみたとき、満期のべき乗 ($H-1/2$) および定数係数 (c) の 2 パラメー

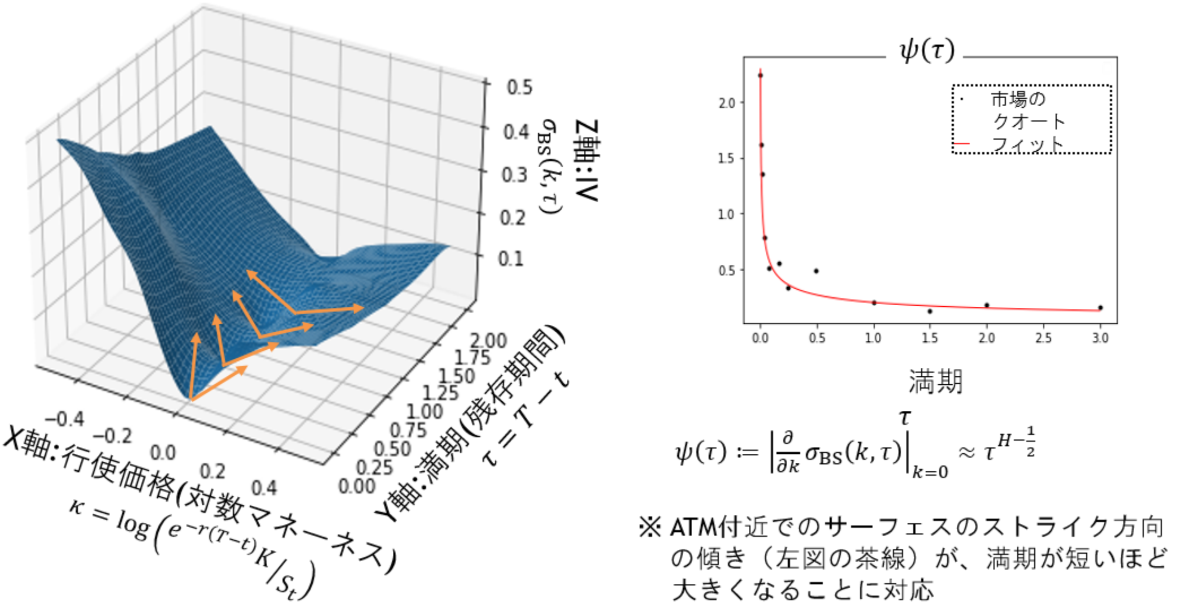

図 4: 負のべき乗則 (イメージ図)

タ関数で表され、満期が短いほど ATM 付近のボラティリティ・サーフェスの傾きが急になるという観測である。とくに、実証的には、H は 1/2 よりも小さく、満期が短いほどボラティリティ・サーフェスの傾きがきつくなることが観察されている。図 4 の右側のグラフは、株式デリバティブ市場などで観測される、典型的なボラティリティ・サーフェスの傾き (黒点) と、傾きにフィットする曲線 (赤線、2 つのパラメータで記述) を示している。

4.(1). ニで紹介した既存のブラウン運動に基づくモデルでは、負のべき乗則を表現することが困難なことが知られている[49]。その後、Alos et al. [2007]、Fukasawa [2011]、Fukasawa [2017] が、IV の漸近展開に関する結果をもとに、ハースト指数 H が 1/2 より小さい非整数ブラウン運動を用いたモデルにより、負のべき乗則を表現できることを示した[50]。先述のとおり、この事実は、市場で観測される IV がラフであることを示唆するものであり、(3 節で解説した Gatheral et al. (2018) 論文に先立つ) ラフ・ボラティリティ研究の嚆矢となった[51]。

さらに、Fukasawa [2021] では、市場で観測されるボラティリティ・サーフェスの形状から示唆されるボラティリティのラフさ (負のべき乗則のパラメータ H) に応じた、

[49] たとえば、確率的ボラティリティ・モデルでは、短い満期で IV がほぼ定数となることから、負のべき乗則の表現が困難である。局所ボラティリティ・モデルは、1 時点の IV の形状を表現することはできるが、ボラティリティ・サーフェスの時間発展に伴う変化を表現するが困難である。ジャンプ・モデルは、ボラティリティ・サーフェスの挙動は表現できるものの、モデルが複雑になり安定的なキャリブレーションが困難となる傾向にあり、ヘッジ操作も難しくなることが多い。

[50] Alos et al. [2007] ではマリアバン解析に基づく漸近展開、Fukasawa [2011] ではマルチンゲール展開をそれぞれ用いている。

[51] ハースト指数が $H < 1/2$ のラフな非整数ブラウン運動を利用した数理ファイナンス分野の研究の嚆矢である。なお、3 節で述べたとおり、$H > 1/2$ の非整数ブラウン運動を用いて、資産価格過程の長期記憶性を表現する研究は、以前からみられていた ([Comte-Renault, 1998])。

ラフ性を持つ価格付けモデルを用いなければ、理論的に裁定機会が生じる[52]ことを示した。これは、無裁定な価格付けを行うには、ボラティリティ・サーフェスの形状から示唆されるボラティリティのラフさと整合的な、ラフなボラティリティ・モデルにより価格付けを行う必要性を示したものである。先述のとおり、HV やマーケット・マイクロストラクチャー (MM) の議論と合わせて、ボラティリティをラフなモデルで記述する理論的根拠を確立した結果である。

以下、Fukasawa [2021] の技術的要点を述べる。まず、原資産価格過程が正値の連続マルチンゲール $S_t^{(\text{model})}$ に従うとし、対数資産価格の二次変分 $\left\langle \log S^{(\text{model})} \right\rangle_{2,t}$ を考える。この二次変分は、時刻 0 から t までの累積バリアンスに対応するものであり、二次変分の時間微分 $\frac{d}{dt}\left\langle \log S^{(\text{model})} \right\rangle_{2,t}$ は、時刻 t における瞬間的バリアンスに対応する。Fukasawa [2021] では、この瞬間的バリアンスの確率過程のヘルダー連続性が H に等しいことに相当する条件が仮定されている。そのうえで、以下の関係が近似的に成り立つことが示される。

$$\psi^{(\text{model})}(\tau) = \left| \frac{\partial}{\partial \kappa} \hat{\sigma}_{\text{BS}}^{(\text{model})}(\kappa, \tau) \right|_{\kappa=0} \propto \tau^{-\frac{1}{2}+H}, \quad \tau \to 0,\ H \approx 0.$$

この結果は、一般的な価格過程に対して、ボラティリティのヘルダー連続性が H のときに、ボラティリティ・サーフェスの形状 $\psi^{(\text{model})}(\tau)$ が、負のべき乗則を示すことを意味する。次に、ボラティリティ・サーフェスの形状から示唆される負のべき乗則の指数を H とし、価格付けモデルとして用いる確率過程 $S_t^{(\text{model})}$ のボラティリティに対応するヘルダー連続の指数を H_0 とする。$H_0 > H$ の場合、すなわち、価格付けモデルのラフさが、観察される IV の形状よりラフでない場合、裁定機会を構成できることが示されている。なお、この裁定機会は、ブラック＝ショールズ・モデルに基づくデルタ・ヘッジの誤差が、IV のラフ性により増幅されることにより生じることに着目して構成されたもので、ごく短期のコール・オプション、プット・オプションの組合せで構成される。

もっとも、上記の IV の負のべき乗則は、主に米国のごく短期の株式オプション市場で観測されたもので、観測に用いるデータや補間・補外の方法には議論の余地がある。とくに、オプション価格データから観測される $\psi(\tau)$ は、満期の長い部分と短い部分で曲率が異なるため、近似する IV の満期の範囲に応じて異なるパラメータを用いることが必要であることが指摘されている。たとえば、Guyon and El Amrani [2022] では、ユーロ・ストック指数や DAX 指数のオプション市場のデータを用いた検証から、ごく短期部分 (満期 2 週間以下) のみに着目した場合は、2 つのパラメータでよくフィットするものの、より長い満期部分も含めた IV 全体にフィットさせる場合は、3 つのパラメータを用いる必要があることが示されている。一方、Delemotte et al. [2023] では、より長期 (2007 年から 2015 年) の米国の株式オプション市場のデータを用いた検証により、既存研究と整合して 2 パラメータで十分フィットできると結論づけている。この点、3 節で触れた、非整数ブラウン運動における長期記憶性 ($H > 1/2$) とラフ性 ($H < 1/2$) の議論と同様、長いタイム・ホライズンと短いタイム・ホライズンで、ボラティリティ

[52] なお、本研究では、取引コストなどの市場摩擦がなく、任意のストライク・満期のバニラ・オプションが取引可能であるなどの、理想的な金融市場を仮定している。このため、実際の市場で実行可能な裁定取引が構築できることは必ずしも意味しない。

の挙動の性質が異なっている可能性を示唆している。また、このタイム・ホライズンごとに異なる IV の性質をモデル化することを試みた研究として、Funahashi and Kijima [2017a]、Funahashi and Kijima [2017b] などが挙げられる。

ロ　ラフ・ボラティリティ・モデル

近年、ボラティリティがラフな確率過程で記述される場合でも、フォワード・バリアンスの情報を含めることで、資産価格過程をマルコフ過程として扱う (マルコフ性の回復) ことを可能とする研究が現れている。この性質は、ラフ・ベルゴミ・モデル (Bayer et al. [2016]) において初めて明示的に示され、それ以降、ラフ・ヘストン・モデルなども同様の性質を持つことが示された。以下、各モデルの概要を述べる。

Bayer et al. [2016] では、ラフな確率過程を用いたデリバティブの価格付けモデルとして、以下のラフ・ベルゴミ・モデルが提案された。ラフ・ベルゴミ・モデルは、フォワード・バリアンスを伊藤過程により記述するベルゴミ・モデル (Bergomi [2004]) を、無限次元に拡張したもので、以下のモデルである。

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu_t + \sqrt{V_t}\left(\rho\, dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}\, dW_t^{(2)}\right), \\ V_t = E\left[V_t \mid \mathcal{F}_u\right] \exp\left(\eta \sqrt{2H} \int_u^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}}\, dW_s^{(1)} - \frac{\eta^2}{2}(t-u)^{2H}\right). \end{cases} \tag{9}$$

ここで、t は現時点、u は過去のある時点であり、V_t は瞬間的なバリアンス、$\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right)$ は 2 次元ブラウン運動を表している。$E\left[V_t \mid \mathcal{F}_u\right]$ は u 時点までの情報で条件づけた将来のバリアンスの期待値であり、フォワード・バリアンスと呼ばれる。スポット・バリアンスが非整数ブラウン運動に従うと仮定したうえで、フォワード・バリアンスを有限時間のリーマン・リュービル型のウィナー積分で記述することで、上記のラフ・ベルゴミ・モデルの表現を導出することができる。

ラフ・ベルゴミ・モデルは、フォワード・バリアンス $\{E\left[V_{t+\theta} \mid \mathcal{F}_t\right]\}_{\theta>0}$ が与えられたもとで、マルコフ過程になる。具体的には、ペイオフ関数 F を持つデリバティブの一般価格公式 $C_t = E\left[F\left(S_T\right) \mid \mathcal{F}_t\right]$ において、ある関数 G を用いて、

$$C_t = E\left[F\left(S_T\right) \mid \mathcal{F}_t\right] = G\left(T-t, S_t, \{E\left[V_{t+\theta} \mid \mathcal{F}_t\right]\}_{\theta\geq 0}\right)$$

と書ける。すなわち、この式の右辺第三引数 (フォワード・バリアンス) を加味することで、マルコフ性などに基づく既存の数理ファイナンスの議論に帰着できることを意味する。このため、ラフ・ベルゴミ・モデルにおいては、複製・無裁定・リスク中立測度などの既存の数理ファイナンスの議論が適用できる。

このことは、ラフ・ベルゴミ・モデルの大きな利点であり、フォワード・バリアンスをボラティリティ・デリバティブの市場価格から推計可能[53]な米国株式ボラティリティ市場において、大きな応用可能性があると考えられている。また、後続のラフ・ボラティリティ・モデルにおいても、フォワード・バリアンスによるマルコフ性の回復が

[53] フォワード・バリアンスは、さまざまな満期のバリアンス・スワップの市場価格などから推計できる。

重要な役割を果たしている。Bayer et al. [2016] は、イ節の議論とも整合して、ラフ・ベルゴミ・モデルによって、負のべき乗則が観測される SPX のボラティリティ・サーフェスを少ないパラメータでより良く表現できることが示した[54]。この議論を発展させ、ラフ・ベルゴミモデルに関する IV の漸近展開公式も提示されており (El Euch et al. [2019]、Friz et al. [2022])、実用に耐えうるキャリブレーションも実現しつつある。また、Jacquier et al. [2018] などでは、VIX 先物などのボラティリティ取引の価格付けへの応用が論じられている。なお、ラフ・ベルゴミモデルは、パラメータが特定の領域にある場合、マルチンゲール性を持つことが知られている (Gassiat [2019])。

その後、El Euch and Rosenbaum [2019] では、ヘストン・モデル [Heston, 1993] をリーマン・リュービル型伊藤積分により拡張することで、ラフ・ヘストン・モデルが提案された。

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu_t + \sqrt{V_t}\Big(\rho\, dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}\, dW_t^{(2)}\Big), \\ V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma(\theta - V_s)\, ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma\sqrt{V_s}\, dW_t^{(1)}. \end{cases}$$

このモデルは、準解析的手法が利用可能であり、効率的にキャリブレーションや価格付けを実行できる[55]。それに加え、El Euch and Rosenbaum [2018] では、ラフ・ヘストン・モデルの自己回帰係数 θ を時間に依存させることで、ラフ・ベルゴミ・モデル同様、マルコフ性が回復し、フォワード・バリアンスなどを用いた複製が可能であることが示された。また、Abi Jaber and El Euch [2019] では、ラフ・ヘストン・モデルをマルコフ型モデルの系列で近似する方法が示されている。この結果は、ラフ・ベルゴミ・モデルが、ベルゴミ・モデルの無限次元化であることに対応している。さらに、ラフ・ヘストン・モデルについては、5 節で後述のとおり、マイクロ・ストラクチャーからの基礎づけを持つこと、3 節で述べたズンバック効果を表現可能なことが知られている (El Euch et al. [2020])。そのほかにも、SABR・モデルを拡張したラフ・SABR・モデルに関し、モデル IV の漸近展開公式が知られている (Fukasawa and Gatheral [2022])。

ハ　SPX オプションの IV と VIX オプションの IV への同時キャブレーション問題

ラフ・ボラティリティ・モデルは、負のべき乗則の表現以外にも、既存のデリバティブの価格付けモデルでは解決が困難と考えられていた問題を解決しうる。SPX オプションの IV と VIX オプションの IV の同時キャリブレーション問題である。ここで、SPX とは米国の株式指数 (S&P 500 指数) で、VIX とは SPX のボラティリティ・インデックスである。VIX は、モデルフリー・インプライド・ボラティリティ (MFIV) と呼ばれる IV の一種であり、SPX 指数の先行き 30 日間の不確実性を表した IV である。MFIV は、バニラ・オプションのポートフォリオによって、実現バリアンスをペイオフとするデリバティブであるバリアンス・スワップを複製できるという理論に基づいて、ブラッ

[54] (9) 式のパラメータについて、H が満期部分の ATM 付近のボラティリティのスキュー、$\eta\rho$ が ATM ボラティリティの長期的水準、ρ が大域的なスキューにそれぞれ対応することから、モデル・パラメータを決定する。

[55] 解の特性関数が満たす常微分方程式が、非整数リッカチ方程式となる (ヘストン・モデルでは、リッカチ方程式となることに対応)。このため、効率的な数値計算による求解が可能である。

ク＝ショールズ・モデルなどの特定の価格付けモデルに依拠することなく算出されるIV である[56]。

VIX は指数として公表されており、市場分析などに活用されるほか、VIX を原資産とする先物取引やオプション取引も活発に行われている。そのため、VIX のボラティリティ・サーフェスが市場でクオートされており、SPX のボラティリティ・サーフェスと同時にキャリブレーションすることが問題となる。すなわち、SPX のオプションと、(SPX のオプションのオプションに相当する)VIX のオプションという、2 つの流動性の高い商品の間で裁定機会が生じるのを防ぐために、両者を整合的・統一的に価格付けしていくことは、米国の株式デリバティブ市場における重要な問題である。この問題は、SPX と VIX の理論的関係を保ちつつ、2 つのボラティリティ・サーフェスにモデルの理論価格 (IV) がフィットするように、SPX の時間発展に関するパラメータをキャリブレーションするという、難問として知られてきた。この問題に関する研究は、Gatheral [2008] に始まり様々な研究が行われてきたが、従来の伊藤過程によるモデルではキャリブレーションが困難なため、ジャンプ型モデルが必要とされてきた[57] (Cont and Kokholm [2013]、Guyon [2020] など)。

Gatheral et al. [2020] では、ラフ・ヘストン・モデルを拡張したモデルにより、ジャンプのない連続確率過程モデルで、この問題が解決されうることが示された。この結果は、SPX の過去の水準に応じて VIX の水準が決まるという振舞いと関係しており、3 節で紹介したズンバッハ効果と深く関係している。

もっとも、この問題に関して、ラフ・ボラティリティ・モデルが唯一の解決策かどうかはわからない。たとえば、Rømer [2022] では、約 15 年間分の SPX や VIX の IV のデータを用いて、ラフ性もジャンプ項も持たない従来型の伊藤過程によるモデルにより、同時キャリブレーション問題を解決可能だと論じている。

ニ　ラフ・ボラティリティ・モデルの活用の展望と課題

上記とおり、負べき乗則が観測される市場においては、少なくとも理論的にはラフ・ボラティリティ・モデルの利用が必要である。また、ラフ・ベルゴミ・モデルやラフ・ヘストン・モデルなどを用いた場合、フォワード・バリアンスのよるヘッジが可能であることから、これらのモデルは、有力なデリバティブの価格付けモデルとして実務活用される可能性を孕んでいる。ただし、以下で述べるとおり、実用のためには更なる技術発展が求められる。

[56]バリアンス・スワップや MFIV の詳細については、杉原 [2010] を参照。なお、VIX はシカゴ・オプション取引所 (Chicago Board Option Exchange) が、実際のオプション取引データに基づいて MFIV を近似的に算出しているものである。詳細については、CBOE [2009] を参照。日本においては、日経平均株価指数を対象として、VIX と同様の算出式に基づいて日本経済新聞社が日経平均ボラティリティ・インデックスを算出しているほか、より MFIV の理論式に忠実な算出式に基づいた VXJ 指数を大阪大学が公表している。

[57]フィットさせる対象の IV の数 (キャリブレーションにおける制約条件) が非常に多くなることも問題を困難にしている。このほか、SPX の IV の短期部分はストライク方向の傾きが大きくなる傾向があるため、SPX のボラティリティ過程のボラティリティ・パラメータを大きくする必要がある一方で、VIX の IV の水準はこのパラメータ水準より小さいことが原因の一つといわれている。

ラフ・ボラティリティ・モデルの実用に際して、最も大きな困難は、数値計算である。先述のとおり、キャリブレーションにおいては、ラフ・ボラティリティ・モデルの期待値として表されるオプション価格を何度も計算し、市場のクオートに合うようモデル・パラメータを調整する必要がある。その際、ラフ・ヘストン・モデルについては、特性関数の準解析解により、オプション価格を表現できるほか、ラフ・SABR・モデルは漸近展開公式が知られているため、キャリブレーションの計算負荷を一定程度抑制できるものの、一般のラフ・ボラティリティ・モデルでは既存のマルコフ型のモデル以上に困難を伴う。この問題への一つの解決策として、深層学習を活用した「ディープ・キャリブレーション」(Horvath et al. [2021a]) といった技術も提案されている。また、価格付け対象となる (より複雑な) デリバティブの価格やグリークスを求める際には、より一般の被積分関数に関する期待値計算が求められる。これに対し、ハイブリッド法 (Bennedsen et al. [2017])、ツリー法 (Horvath et al. [2017])、マルコフ近似 (Bayer and Breneis [2023]、Cuchiero and Teichmann [2019]、Hamaguchi [2023]) などの手法が提案されているが、実務で活用できるアルゴリズムはほとんど知られておらず、理論的な正当性も示されていないものが多い[58]。

ラフ・ボラティリティ・モデルは、負のべき乗則が観察される米国のデリバティブ市場を中心に応用可能性があると考えられる。また、今後の実証研究の進展により、より広範な市場でラフ性を示唆する現象が観測されることで、ラフ・ボラティリティ・モデルの必要性や応用可能性が高まっていくことも考えられる。たとえば、3 節で述べた HV の議論や 5 節で述べる MM の議論と関連して、流動性が高く高頻度で取引が行われる資産のボラティリティがラフ性を示唆する場合、対応するオプション市場でも負のべき乗則が観測されていく可能性が相応にある。このほか、負のべき乗則以外のボラティリティ・サーフェスの形状でも、ボラティリティのラフ性を示唆する特徴が考えられうるため、こうした特徴に関する分析の進展により、ラフ性が示唆される市場が広がる可能性も考えられる。また、金利や為替のオプション市場は、その商品性や市場慣行上、株式デリバティブよりも複雑になる傾向にある[59]。たとえば、スワップションの IV とキャップの IV の同時キャリブレーションなど、標準的な解決手法が確立されていない問題も多い。

[58]Alòs et al. [2023] では、現在のデリバティブ実務で必須な CVA(カウンターパーティー・リスクをデリバティブの評価額に反映させる価格調整) をラフ・ボラティリティ・モデルで計算することを試みている。

[59]たとえば、為替オプションの場合、ストライクという表示は用いずに、「デルタ」や「バタフライ」といった定型商品のボラティリティがクオートされている。また、金利オプションの場合、スワップション (スワップを原資産とするオプション) のボラティリティが、原資産のスワップの年限とオプションの満期とストライク毎にクオートされているほか、キャップやフロアといった商品のボラティリティもクオートされている。

5　マーケット・マイクロストラクチャーとラフ性の発生メカニズム

3 節や 4 節で述べたとおり、資産価格のボラティリティがラフ性を有することを示唆する研究がみられてきている。このため、ボラティリティにラフ性を生じさせる金融経済学的なメカニズムを解明することも重要な論点である。本節では、このような試みの一つとして、マーケット・マイクロストラクチャー (MM) に関連する研究を紹介する。5.(1) 節では、MM に関する先行研究について、市場参加者の個別の売買注文行動を出発点として資産価格変動モデルを導出する研究を中心に概観する。5.(2) 節では、個々の市場参加者の行動と価格形成メカニズムをモデル化し、特定の仮定のもとで、価格がラフ性を持つモデルに収束することを示した研究を紹介する。

(1)　資産価格変動の「ミクロ的基礎付け」に関する研究

数理ファイナンス分野をはじめとする理論的分析においては、ブラウン運動などを用いて記述される連続確率過程で資産価格をあらわすことが多い。もっとも、実際の金融市場では、離散的な取引成立に従って離散的に資産価格が変動しており、ティック・データ (売買取引成立ごとの価格データ) は不連続な確率過程とみなせる。また、投資家もランダムに売買注文を行っているわけではない。

このような、投資家のミクロレベルでの行動のほか、金融市場の制度的な構造 (たとえば、取引所における取引ルール等) が資産価格形成に与える影響を分析する分野として、マーケット・マイクロストラクチャー (MM) 研究がある。MM 研究で取り扱われる課題の一つとして、資産価格変動の確率過程に「ミクロ的基礎付け」(micro-foundation) を与えることが挙げられる。資産価格の変動は、上述のとおり、究極的には投資家による売買行動を受けたティック単位の価格変動の積み重ねで定まっていくものである。このため、投資家のティック単位レベルの売買行動、具体的には、投資家による指値注文やその取り消し、成り行き注文や、こうした行動によって変化していく市場の「板」(limit order book) のモデルを出発点として、より長めのタイムスケールでの資産価格変動のモデルを導出する試みがみられている。このアプローチでは、個々の投資家の売買行動が直接的にモデル化されているという意味での「ミクロ的基礎付け」が存在することから、どのような投資家の行動特性がどのような価格変動特性につながるかという、資産価格形成メカニズムの解明に資する。こうした点への理解を深めることは、取引所のルール設計や規制の在り方といった政策的な観点からも重要である。

板に関する研究は、個別注文レベルのデータの利用可能性が広がり始めた 1990 年代以降、大きく発展していった。たとえば、板の状況の動的な変化を分析した初期の研究としては、Parlour [1998] などがある。個別の売買注文行動モデルから、連続時間の資産価格変動モデルを導出する研究としては、Cont and De Larrard [2013] などがある。Cont and De Larrard [2013] は、成り行き注文・最良買い指値注文・最良売り指値注文・注文取消しのフローがそれぞれ独立なポアソン過程で到着するモデルを分析し、価格

変化の時間間隔の分布や、仲値 (最良ビッド価格と最良アスク価格の中間値) のスケール極限の確率分布などを導出している。とくに、仲値のスケール極限はブラウン運動に収束し、その係数 (ボラティリティ) は、注文の到着強度などであらわされることを導出している。Lakner et al. [2016] は、板の注文状況を確率分布として表現し、注文の到着に応じてこの分布が確率的に変動するモデルを検討しており、そのスケール極限に関する結果を得ている。

成行注文を行った場合は、最良指値注文とマッチすることで売買が成立するが、成行注文の量が最良指値注文の量を上回る場合は、第二最良指値注文とマッチし、それでもまだ成行注文が残る場合は、第三、第四指値とマッチしていくこととなる[60]。このように、大量の売買を行う場合は、成行注文を行う投資家にとって、最良指値よりも不利な価格で約定が発生するほか、取引価格・仲値が大きく上昇することとなる。この現象はマーケット・インパクトと呼ばれている。このようなマーケット・インパクトを軽減するために、大口の注文を行う投資家は、注文を小さなサイズに分割して徐々に執行するといった、いわゆるアイスバーグ取引と呼ばれる手法をとることがある。アイスバーグ取引は、マーケット・インパクトを軽減する一方で、注文全体の執行に時間を要することから、その間の (その他の要因による) 価格変動リスクを負うことになり、このトレードオフによって最適執行戦略が決まる (たとえば、Almgren and Chriss [2001] など)。最適執行戦略に関するサーベイ研究としては、たとえば Donnelly [2022] などを参照されたい[61]。このようなアイスバーグ取引などの投資家行動は、高頻度の価格変動の特性に大きく影響を与えるほか、より長期的な (スケール極限での) 資産価格変動の確率過程の形状に影響を与えると考えられる。

(2) MM によるラフ性分析の枠組み

上記のような注文行動のミクロ的基礎付けがあるモデルから出発して、スケール極限としてラフ・ボラティリティ・モデルが現れる例が、El Euch et al. [2018] によって提示されている。El Euch et al. [2018] では、価格更新の影響がどの程度持続性を持つかによって、形成される価格のボラティリティがラフ性を持つかどうかが決まることを示されている。具体的には、ティック単位の価格の上昇・下落を「ホークス過程」と呼ばれる点過程により記述し、価格更新の影響の持続性をホークス過程の「強度」により表現したモデルのスケール極限について分析しており、ホークス過程の強度に関するパラメータに応じて、形成される価格にラフ性が生じるかどうか決まることが示された。その後、El Euch et al. [2018] の議論の一般化や、ラフ・ヘストン・モデルの解析への応用が論じられている。

本節では、El Euch et al. [2018] でのモデルの基本的な考え方や仮定を中心に、ボラティリティのラフさの源泉の解明しうる枠組みについて紹介する。

---

[60] 最良ではない指値注文の状況も含むより詳細な板モデルに関する分析としては、たとえば、Cont et al. [2023] やその中の引用文献を参照。

[61] このほか、マーケット・インパクトは市場流動性との関係で多くの文献がみられている。たとえば、Amihud [2002], Goyenko et al. [2009] などを参照。

イ　ホークス過程

ホークス過程を定式化するため、まずポアソン分布とポアソン過程について述べる。ポアソン分布とは、ある偶発事象が起こる回数を表す離散確率分布であり、事象の起こりやすさ (平均回数) を表すパラメータ μ を持つ。すなわち、離散確率変数 X がパラメータ μ のポアソン分布に従うとは、

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

となることを指す。ここで、ポアソン分布に従う確率変数の期待値および分散は μ に等しい ($E[X] = V[X] = \mu$)。ポアソン過程 L_t は、ある偶発事象が起きた回数をポアソン分布により表す確率過程で、最も基本的な点過程である。具体的には、時刻 t から $t + s$ の間に事象が起こる回数 $L_{t+s} - L_t$ が、パラメータ $\mu = \lambda s$ のポアソン分布に従うとする。すなわち、

$$P(L_{t+s} - L_t = k) = \frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}$$

を満たす。ここで、λ はポアソン過程の強度と呼ばれるパラメータで、s 時間経過する際に事象が起こる平均回数が λs になることからわかるとおり、強度 λ は事象の瞬間的な起こりやすさを表す。すなわち、$P(L_{t+dt} - L_t = 1) = \lambda dt$ が成立する[62]。

このように、(定常) ポアソン過程の強度は一定である。しかし、現実の偶発現象の中には、本震後の余震、大企業倒産後の連鎖倒産、市場急落後の投げ売りなどの現象など、一度事象が起こると次の事象が誘発される、すなわち、事象の発生により強度が上昇する現象が多くみられる。この性質は自己励起性と呼ばれる。ポアソン過程を拡張し、自己励起性をモデル化したのがホークス過程である。すなわち、ホークス過程 N_t は、ある時点での強度 λ_t が、それまでに事象が起こった回数 N_t に依存して決まる。具体的には、ある関数 h(ホークス過程の核関数) を用いて、

$$\lambda_t = \int_0^t h(t-s)\, dN_s$$

と書ける。たとえば、核関数が正値 ($h(\cdot) > 0$) であれば、事象の発生によって強度が上昇することとなり、自己励起性を表現できる。また、核関数 h が正値の減少関数の場合、過去の事象の発生が強度に与える影響は時間の経過とともに減衰していく。

ロ　**El Euch et al. [2018]** の枠組み

El Euch et al. [2018] は、ホークス過程を用いてティック単位の価格変動をモデル化し、価格変動の強度の収束性に応じて、形成される価格が従う確率過程のボラティリティにラフ性が生じるかどうかが決まることを示している。以下では、この点を簡単に解説する。El Euch et al. [2018] では、ティック単位の価格の上昇回数 N_t^+ と下落回数

[62] 数学的には、独立増分で $P(L_{t+dt} - L_t = 1) = \lambda dt, P(L_{t+dt} - L_t > 2) = 0$ を満たすものとして定義される。

N_t^- が、2 次元ホークス過程でモデル化されている。すなわち、N_t^+、N_t^- の強度をそれぞれ λ^+、λ_t^- としたとき、

$$\begin{pmatrix} \lambda_t^+ \\ \lambda_t^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu^+ \\ \nu^- \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \phi_1(t-s) & \phi_2(t-s) \\ \phi_3(t-s) & \phi_4(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dN_s^+ \\ dN_t^+ \end{pmatrix} \tag{10}$$

と表せる。ここで、核関数 ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3、ϕ_4 は、過去の価格上昇・下落が、それぞれ価格上昇・下落の強度にどう影響するかを表す自己励起パラメータである。たとえば、価格上昇の強度を表す (10) 式の第 1 行目は、

$$\lambda_t^+ = \nu^+ + \int_0^t \phi_1(t-s)\, dN_s^+ + \int_0^t \phi_2(t-s)\, dN_t^-$$

と書け、右辺第二項は過去の価格上昇が現在の価格上昇の強度に与える影響を、右辺第三項は過去の価格下落が現在の価格上昇強度に与える影響をそれぞれ表す。同様に、価格下落の強度も過去の価格上昇・下落の影響を受ける。このように、本モデルでは、相互励起性と呼ばれる、価格上昇と価格下落が相互に影響しながら、将来の価格変動の発生強度に影響を与えることがモデル化されている。

こうした枠組みのもと、各自己励起パラメータに条件をつけ、高頻度取引が行われるもとで形成される価格 P_t(ティック単位の価格変動のスケーリング極限[63]) が従う確率過程にラフ性が生じるか論じている。その結果、価格変化の強度への影響が長期間にわたって残り続ける場合、すなわち、核関数

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} \phi_1(u) & \phi_2(u) \\ \phi_3(u) & \phi_4(u) \end{pmatrix}$$

の $u \to \infty$ での減衰速度が遅い場合、ラフ性が生じることを示した[64]。El Euch et al. [2018] では、このラフ性が現れる条件と対応する市場取引の性質として、先述のアイスバーグ注文のように、大口の注文を小口取引に分割して長期にわたって取引する行動と紐づけている。もっとも、これは上述のホークス過程の強度に関する収束性条件の一解釈であり、異なる投資家行動などと対応付けることも可能であると考えられる。このため、アイスバーグ注文が高頻度取引におけるラフ性の源泉であると、直ちに結論付けることは難しいと考えられることに留意が必要である。

---

[63] 仮想的に取引が無限小時間で行われたもとで形成される価格 $P_t = \lim_{T\to\infty} \frac{N_{tT}^+ - N_{tT}^-}{T}$

[64] たとえば、ある $1/2 < \alpha < 1$ が存在して、$\alpha x^\alpha \int_x^\infty \phi_1(s)\, ds \to C (x \to \infty)$ などの条件が満たされる場合に、スケーリング極限がラフ・ヘストン・モデルに収束する。また、、収束条件に現れる α は、スケーリング極限が従うラフ・ヘストン・モデルのハースト指数 $H = \alpha - 1/2$ に対応する。この結果の技術的な要点は以下のとおり。高頻度取引が行われるもとでは、核関数は、一定の可積分条件 ($\int_0^\infty \phi_1(s)\, ds$ が適切な意味で収束するなど、ホークス過程の「Nearly unstable」と呼ばれる条件) を満たす。この条件が満たされるもとで、$\Phi(u) = \begin{pmatrix} \phi_1(u) & \phi_2(u) \\ \phi_3(u) & \phi_4(u) \end{pmatrix}$ の固有値の収束を議論する。この固有値の減衰度合いに基づいて、ラフ性を持った確率過程に収束するかどうかが決まる。

ハ　ラフ・ボラティリティの MM 研究の展望

その後、El Euch et al. [2018] の枠組みを拡張した研究が行われている。たとえば、Jusselin and Rosenbaum [2020] では、より一般的な設定の市場において、取引の市場価格への影響度合いとラフ性 (ハースト指数 H) の対応関係を明確化している。また、Rosenbaum and Tomas [2021] では、2 次元ホークス過程の議論を多次元ホークス過程に拡張し、複数の資産が取引される市場でのマイクロ・ストラクチャーを解析する枠組みを提示している。今後、より現実的な投資家行動のモデル化や現実のデータを用いた実証分析など、MM の観点からの研究を深めていくことが、ボラティリティのラフ性の源泉を解明していくうえで重要であると考えられる。

6　おわりに

本論文では、ラフ・ボラティリティに関する実証・理論研究や、応用可能性に関する議論を様々な視点から紹介してきた。とくに、ボラティリティのラフ性を示す根拠として、実現ボラティリティの時系列データに関する統計的観測 (3 節)、および、市場で観測される IV の形状 (4 節) が、ラフなモデルである非整数ブラウン運動を用いて表現できるという研究結果を紹介してきた。さらに、4 節では、ラフ性が観測されるデリバティブ市場においては、ラフなモデルを用いた価格付けを行わなければ裁定機会が生じるという結果を紹介した。これは、ボラティリティのラフ性を考慮したモデルの必要性を示す重要な結果である。また、5 節ではラフ性が生じるメカニズムを MM の観点から解明することを試みた研究を紹介した。加えて、ラフ性を考慮したモデルを利用することで、ボラティリティの予測精度の向上 (3 節) や、デリバティブの価格付けモデルの改善 (4 節) につながることを示す研究がみられている。このように、もともと別の問題意識で発展してきた計量ファイナンスや数理ファイナンスを含む様々な分野で、ラフ性の必要性や有用性を示す議論が発展しており、ラフ・ボラティリティはボラティリティ研究の新潮流となっている。

ただし、ボラティリティのラフ性を示唆する研究が多くみられているものの、ボラティリティのラフ性が本当に必要かという点について、議論が続いていることに注意が必要である。これまでの研究の多くは、ボラティリティのラフな挙動を仮定すると観測事項を整合的に説明できるというものであるほか、ラフ性が実証的に確認されているのは、米国の株式市場など一部の市場にとどまっている。このため、ボラティリティのラフ性が資産クラスなどにかかわらず現れる普遍的な性質なのか、といった点について理解を深めていくことが重要と考えられる[65]。また、こうした実証研究から判明したデータの振舞いの背後にある金融経済学的メカニズム、とくに市場参加者のどのような取引行動がラフ性を生み出すかなどを解明していくことも重要な課題である。このため、たとえば 5 節で紹介した MM の観点からの研究がさらに進展することが望

[65]高石 [2019] では、ビットコイン市場における実証分析が行われ、ボラティリティのラフ性が観測されることが報告されている。

まれる[66]。また、ボラティリティのラフ性を所与とした場合でも、応用の観点から、本論文で紹介した非整数ブラウン運動やリーマン・リュービル型の伊藤積分による定式化が、表現力や実装可能性などの観点で最も望ましいモデルか議論の余地がある。このほか、時系列モデルのパラメータ推計、デリバティブ価格付けモデルの数値計算手法の安定化、ヘッジ戦略の分析など、様々な課題が残されている。

ラフ・ボラティリティ研究は、今後も、実務と学術の双方でさらに関連分野を拡大させながら発展していくことが展望される。たとえば、高頻度 (アルゴリズム) 取引への応用 (Guasoni et al. [2021])、機械学習分野との融合や金融時系列データ生成 (Rosenbaum and Zhang [2022]、Horvath et al. [2021b])、広範なリスク管理への応用がすでに始まっている。今後も、金融実務における問題意識の変化などに影響を受けつつ、AI 分野や経済学・情報科学・数理科学などとも交わりながら研究が進展していくことが予想される。このため、今後もその先端的な議論にキャッチアップしていくことが重要である。

参考文献

Abi Jaber, E. and El Euch, O., "Multifactor Approximation of Rough Volatility Models", *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 10(2), pp.309–349, 2019.

Aït-Sahalia, Y. and Mykland, P. A., "Estimating Volatility in the Presence of Market Microstructure Noise: A Review of the Theory and Practical Considerations", In T. Mikosch, J.-P. Kreiß, R. A. Davisand , and T. G. Andersen (Eds.), *Handbook of Financial Time Series* pp. 577–598, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009.

Alòs, E. and León, J. A., "An Intuitive Introduction to Fractional and Rough Volatilities", *Mathematics*, 9(9), 2021.

Almgren, R. and Chriss, N., "Optimal Execution of Portfolio Transactions", *The Journal of Risk*, 3(2), pp.5–39, 2001.

Alòs, E., Antonelli, F., Ramponi, A., and Scarlatti, S., "CVA in fractional and rough volatility models", *Applied Mathematics and Computation*, 442, pp.127715, 2023.

Alos, E., León, J. A., and Vives, J., "On the short-time behavior of the implied volatility for jump-diffusion models with stochastic volatility", *Finance and stochastics*, 11(4), pp.571–589, 2007.

Amihud, Y., "Illiquidity and Stock Returns: Cross-section and Time-Series Effects", *Journal of Financial Markets*, 5, pp.31–56, 2002.

[66]金融経済学の観点からは、リスクプレミアムとラフ性の関係性に関する分析も重要と考えられる。たとえば、ラフ性の度合いと株価の超過収益率の関係を論じた研究がみられている (Glasserman and He [2020]) ほか、分散リスクプレミアムとよばれる、IV と HV の差分についても、ボラティリティのラフ性が関係している可能性がある。

Andersen, T. G., Bollerslev, T., and Diebold, F. X., "Roughing It up: Including Jump Components in the Measurement, Modeling, and Forecasting of Return Volatility", *The Review of Economics and Statistics*, 89(4), pp.701–720, 2007.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., and Labys, P., "The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility", *Journal of the American Statistical Association*, 96(453), pp.42–55, 2001.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., and Labys, P., "Modeling and Forecasting Realized Volatility", *Econometrica*, 71(2), pp.579–625, 2003.

Andersen, T. G., Dobrev, D., and Schaumburg, E., "Jump-Robust Volatility Estimation Using Nearest Neighbor Truncation", *Journal of Econometrics*, 169(1), pp.75–93, 2012.

Avramov, D., Chordia, T., and Goyal, A., "The Impact of Trades on Daily Volatility", *Review of Financial Studies*, 19(4), pp.1241–1277, 2006.

Baillie, R. T., "Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics", *Journal of Econometrics*, 73(1), pp.5–59, 1996.

Baillie, R. T., Bollerslev, T., and Mikkelsen, H. O., "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 74(1), pp.3–30, 1996.

Baker, S. R., Bloom, N., and Davis, S. J., "Measuring Economic Policy Uncertainty", *Quarterly Journal of Economics*, 131(4), pp.1593–1636, 2016.

Bandi, F. M. and Russell, J. R., "Microstructure Noise, Realized Variance, and Optimal Sampling", *Review of Economic Studies*, 75(2), pp.339–369, 2008.

Barndorff-Nielsen, O. E., "Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation", *Journal of Financial Econometrics*, 4(1), pp.1–30, 2005.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Schmiegel, J., "Ambit Processes; with Applications to Turbulence and Tumour Growth", In F. E. Benth, G. Di Nunno, T. Lindstrøm, B. Øksendaland , and T. Zhang (Eds.), *Stochastic Analysis and Applications* pp. 93–124, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Schmiegel, J., "Brownian Semistationary Processes and Volatility/Intermittency", In H. Albrecher, W. J. Runggaldierand , and W. Schachermayer (Eds.), *Advanced Financial Modelling* pp. 1–26, Walter de Gruyter, 2009.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N., "Econometric Analysis of Realized Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models", *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 64(2), pp.253–280, 2002.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N., "Econometric Analysis of Realized Covariation: High Frequency Based Covariance, Regression, and Correlation in Financial Economics", *Econometrica*, 72(3), pp.885–925, 2004.

Bates, D. S., "Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options", *The Review of Financial Studies*, 9(1), pp.69–107, 1996.

Bayer, C. and Breneis, S., "Markovian approximations of stochastic Volterra equations with the fractional kernel", *Quantitative Finance*, 23(1), pp.53–70, 2023.

Bayer, C., Friz, P., and Gatheral, J., "Pricing under Rough Volatility", *Quantitative Finance*, 16(6), pp.887–904, 2016.

Bayer, C., Friz, P. K., Gassiat, P., Martin, J., and Stemper, B., "A regularity structure for rough volatility", *Mathematical Finance*, 30(3), pp.782–832, 2020.

Bekaert, G. and Hoerova, M., "The VIX, the Variance Premium and Stock Market Volatility", *Journal of Econometrics*, 183(2), pp.181–192, 2014.

Bennedsen, M., Lunde, A., and Pakkanen, M. S., "Hybrid scheme for Brownian semistationary processes", *Finance and Stochastics*, 21, pp.931–965, 2017.

Bennedsen, M., Lunde, A., and Pakkanen, M. S., "Decoupling the Short- and Long-Term Behavior of Stochastic Volatility", *Journal of Financial Econometrics*, 20(5), pp.961–1006, 2021.

Bergomi, L., "Smile dynamics I", *Available at SSRN 1493294*, 2004.

Best, M. J. and Grauer, R. R., "On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results", *Review of Financial Studies*, 4(2), pp.315–342, 1991.

Björk, T., *Arbitrage theory in continuous time*, Oxford university press, 2009.

Black, F., "Studies of Stock Price Volatility Changes", In *Proceedings of the 1976 Meeting of the Business and Economic Statistics Section* pp. 177–181, American Statistical Association, 1976.

Black, F. and Scholes, M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81(3), pp.637–654, 1973.

Blanc, P., Donier, J., and Bouchaud, J.-P., "Quadratic Hawkes Processes for Financial Prices", *Quantitative Finance*, 17(2), pp.171–188, 2017.

Bloom, N., "The Impact of Uncertainty Shocks", *Econometrica*, 77(3), pp.623–685, 2009.

Bloom, N., Bond, S., and van Reenen, J., "Uncertainty and Investment Dynamics", *The Review of Economic Studie*, 74(2), pp.391–415, 2007.

Bolko, A. E., Christensen, K., Pakkanen, M. S., and Veliyev, B., "A GMM Approach to Estimate the Roughness of Stochastic Volatility", *Journal of Econometrics*, 235(2), pp.745–778, 2023.

Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31(3), pp.307–327, 1986.

Bollerslev, T. and Mikkelsen, H. O., "Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility", *Journal of Econometrics*, 73(1), pp.151–184, 1996.

Breidt, F., Crato, N., and De Lima, P., "The Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility", *Journal of Econometrics*, 83(1-2), pp.325–348, 1998.

Buehler, H., Gonon, L., Teichmann, J., and Wood, B., "Deep hedging", *Quantitative Finance*, 19(8), pp.1271–1291, 2019.

Campbell, J. Y., Lo, A. W., and MacKinlay, A. C., *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton, N.J: Princeton University Press, 1997.

Carr, P. and Wu, L., "The finite moment log stable process and option pricing", *The journal of finance*, 58(2), pp.753–777, 2003.

CBOE, "The CBOE Volatility Index—VIX", *Chicago Board Options Exchange, White paper*, 2009.

Cheridito, P., Kawaguchi, H., and Maejima, M., "Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes", *Electronic Journal of Probability*, 8, 2003.

Christie, A., "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances Value, Leverage and Interest Rate Effects", *Journal of Financial Economics*, 10(4), pp.407–432, 1982.

Comte, F., Coutin, L., and Renault, E., "Affine Fractional Stochastic Volatility Models", *Annals of Finance*, 8(2-3), pp.337–378, 2012.

Comte, F. and Renault, E., "Long Memory Continuous Time Models", *Journal of Econometrics*, 73(1), pp.101–149, 1996.

Comte, F. and Renault, E., "Long Memory in Continuous-Time Stochastic Volatility Models", *Mathematical Finance*, 8(4), pp.291–323, 1998.

Cont, R. and Das, P., 2023, "Rough Volatility: Fact or Artefact?".

Cont, R. and De Larrard, A., "Price Dynamics in a Markovian Limit Order Market", *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 4(1), pp.1–25, 2013.

Cont, R., Degond, P., and Xuan, L., 2023, "A Mathematical Framework for Modelling Order Book Dynamics".

Cont, R. and Kokholm, T., "A consistent pricing model for index options and volatility derivatives", *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 23(2), pp.248–274, 2013.

Corsi, F., "A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility", *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), pp.174–196, 2008.

Cuchiero, C. and Teichmann, J, "Markovian lifts of positive semidefinite affine Volterra-type processes", *Decisions in Economics and Finance*, 42, pp.407–448, 2019.

Damian, C. and Frey, R., 2023, "Detecting Rough Volatility: A Filtering Approach".

Delemotte, J., Marco, S. D., and Segonne, F., "Yet Another Analysis of the SP500 At-The-Money Skew: Crossover of Different Power-Law Behaviours", *Available at SSRN 4428407*, 2023.

Dew-Becker, I., Giglio, S., and Kelly, B., "Hedging Macroeconomic and Financial Uncertainty and Volatility", *Journal of Financial Economics*, 142(1), pp.23–45, 2021.

Di Nunno, G., Kubilius, K., Mishura, Y., and Yurchenko-Tytarenko, A., "From Constant to Rough: A Survey of Continuous Volatility Modeling", *Mathematics*, 11(19), 2023.

Diebold, F. X. and Inoue, A., "Long Memory and Regime Switching", *Journal of Econometrics*, 105, pp.131–159, 2001.

Diebold, F. X. and Mariano, R. S., "Comparing Predictive Accuracy", *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(1), pp.134–144, 2002.

Ding, Z., Granger, C. W. J., and Engle, F., "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model", *Journal of Empirical Finance*, 1, pp.83–106, 1993.

Donnelly, R., "Optimal Execution: A Review", *Applied Mathematical Finance*, 29(3), pp.181–212, 2022.

Dupire, B., "Pricing with a smile", *Risk*, 7(1), pp.18–20, 1994.

El Euch, O., Fukasawa, M., Gatheral, J., and Rosenbaum, M., "Short-term at-the-money asymptotics under stochastic volatility models", *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 10(2), pp.491–511, 2019.

El Euch, O., Fukasawa, M., and Rosenbaum, M., "The Microstructural Foundations of Leverage Effect and Rough Volatility", *Finance and Stochastics*, 22(2), pp.241–280, 2018.

El Euch, O., Gatheral, J., Radoičić, R., and Rosenbaum, M., "The Zumbach Effect under Rough Heston", *Quantitative Finance*, 20(2), pp.235–241, 2020.

El Euch, O. and Rosenbaum, M., "Perfect hedging in rough Heston models", *The Annals of Applied Probability*, 28(6), pp.3813–3856, 2018.

El Euch, O. and Rosenbaum, M., "The Characteristic Function of Rough Heston Models", *Mathematical Finance*, 29(1), pp.3–38, 2019.

Engle, R. F., "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50(4), pp.987–1007, 1982.

Fama, E. F., "The Behavior of Stock-Market Prices", *The Journal of Business*, 38(1), pp.34–105, 1965.

Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., Sircar, R., and Solna, K., "Multiscale stochastic volatility asymptotics", *Multiscale Modeling & Simulation*, 2(1), pp.22–42, 2003.

Friz, P. K., Gassiat, P., and Pigato, P., "Short-dated smile under rough volatility: asymptotics and numerics", *Quantitative Finance*, 22(3), pp.463–480, 2022.

Fukasawa, M., "Asymptotic Analysis for Stochastic Volatility: Martingale Expansion", *Finance and Stochastics*, 15(4), pp.635–654, 2011.

Fukasawa, M., "Short-time at-the-money skew and rough fractional volatility", *Quantitative Finance*, 17(2), pp.189–198, 2017.

Fukasawa, M., "Volatility has to be rough", *Quantitative Finance*, 21(1), pp.1–8, 2021.

Fukasawa, M. and Gatheral, J., "A Rough SABR Formula", *Frontiers of Mathematical Finance*, 1(1), pp.81–97, 2022.

Fukasawa, M., Horvath, B., and Tankov, P., "Hedging under rough volatility", *arXiv preprint arXiv:2105.04073*, 2021.

Fukasawa, M., Takabatake, T., and Westphal, R., "Consistent Estimation for Fractional Stochastic Volatility Model under High-frequency Asymptotics", *Mathematical Finance*, 32(4), pp.1086–1132, 2022.

Funahashi, H. and Kijima, M., "Does the Hurst index matter for option prices under fractional volatility?", *Annals of Finance*, 13, pp.55–74, 2017a.

Funahashi, H. and Kijima, M., "A solution to the time-scale fractional puzzle in the implied volatility", *Fractal and fractional*, 1(1), pp.14, 2017b.

Gassiat, P., "On the martingale property in the rough Bergomi model", 2019.

Gatheral, J., "Consistent modeling of SPX and VIX options", In *Bachelier congress*, volume 37 pp. 39–51, 2008.

Gatheral, J., Jaisson, T., and Rosenbaum, M., "Volatility Is Rough", *Quantitative Finance*, 18(6), pp.933–949, 2018.

Gatheral, J., Jusselin, P., and Rosenbaum, M., "The quadratic rough Heston model and the joint S&P 500/VIX smile calibration problem", *arXiv preprint arXiv:2001.01789*, 2020.

Gençay, R., Ballocchi, G., Dacorog, M., Olsen, R., and Pictet, O., "Real-Time Trading Models and the Statistical Properties of Foreign Exchange Rates", *International Economic Review*, 43(2), pp.463–491, 2002.

Glasserman, P. and He, P., "Buy rough, sell smooth", *Quantitative Finance*, 20(3), pp.363–378, 2020.

Glosten, L. R., Jagannathan, R., and Runkle, D. E., "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks", *The Journal of Finance*, 48(5), pp.1779–1801, 1993.

Goyenko, R. Y., Holden, C. W., and Trzcinka, C. A., "Do Liquidity Measures Measure Liquidity?", *Journal of Financial Economics*, 92(2), pp.153–181, 2009.

Granger, C. W., "The Typical Spectral Shape of an Economic Variable", *Econometrica*, 34(1), pp.150–161, 1966.

Granger, C. W., "Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models", *Journal of Econometrics*, 14, pp.227–238, 1980.

Granger, C. W. and Hyung, N., "Occasional Structural Breaks and Long Memory with an Application to the S&P 500 Absolute Stock Returns", *Journal of Empirical Finance*, 11(3), pp.399–421, 2004.

Granger, C. W. J. and Joyeux, R., "An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing", *Journal of Time Series Analysis*, 1(1), pp.15–29, 1980.

Guasoni, P., Mishura, Y., and Rásonyi, M., "High-frequency trading with fractional Brownian motion", *Finance and stochastics*, 25(2), pp.277–310, 2021.

Guyon, J., "The joint S&P 500/VIX smile calibration puzzle solved", *Risk, April*, 2020.

Guyon, J. and El Amrani, M., "Does the Term-Structure of Equity At-the-Money Skew Really Follow a Power Law?", *Available at SSRN 4174538*, 2022.

Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski, A. S., and Woodward, D. E., "Managing smile risk", *The Best of Wilmott*, 1, pp.249–296, 2002.

Hamaguchi, Y., “Markovian lifting and asymptotic log-Harnack inequality for stochastic Volterra integral equations”, *arXiv preprint arXiv:2304.06683*, 2023.

Hamilton, J. D., *Time Series Analysis*, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1994.

Hansen, P. R. and Lunde, A., “Realized Variance and Market Microstructure Noise”, *Journal of Business & Economic Statistics*, 24(2), pp.127–161, 2006.

Hansen, P. R., Lunde, A., and Nason, J. M., “The Model Confidence Set”, *Econometrica*, 79(2), pp.453–497, 2011.

Haubrich, J. G. and Lo, A. W., 1991, “The Sources and Nature of Long-Term Memory in the Business Cycle”.

Heston, S. L., “A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options”, *The review of financial studies*, 6(2), pp.327–343, 1993.

Horvath, B., Jacquier, A., and Muguruza, A., “Functional central limit theorems for rough volatility”, *arXiv preprint arXiv:1711.03078*, 2017.

Horvath, B., Muguruza, A., and Tomas, M., “Deep learning volatility: a deep neural network perspective on pricing and calibration in (rough) volatility models”, *Quantitative Finance*, 21(1), pp.11–27, 2021a.

Horvath, B., Teichmann, J., and Zuric, Z., 2021b, “Deep Hedging under Rough Volatility”.

Hosking, J. R. M., “Fractional Differencing”, *Biometrika*, 68(1), pp.165–176, 1981.

Hurst, H. E., “Long-Term Storage Capacity of Reservoirs”, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116(1), pp.770–799, 1951.

Jacquier, A., Martini, C., and Muguruza, A., “On VIX futures in the rough Bergomi model”, *Quantitative Finance*, 18(1), pp.45–61, 2018.

Jagannathan, R. and Ma, T., “Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps”, *Journal of Finance*, 58(4), pp.1651–1683, 2003.

Jusselin, P. and Rosenbaum, M., “No-arbitrage implies power-law market impact and rough volatility”, *Mathematical Finance*, 30(4), pp.1309–1336, 2020.

Karatzas, I. and Shreve, S. E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*, New York, NY: Springer New York, 1998.

Lakner, P., Reed, J., and Stoikov, S., “High Frequency Asymptotics for the Limit Order Book”, *Market Microstructure and Liquidity*, 02(01), pp.1650004, 2016.

Lee, R. W., “Implied volatility: Statics, dynamics, and probabilistic interpretation”, *Recent advances in applied probability*, pp. 241–268, 2005.

Levy, P. B., “Random functions:general theory with special reference to Laplacian random functions”, In *Univ. California Publ. Statist* pp. 331–390, 1953.

Lintner, J., “The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets”, *The Review of Economics and Statistics*, 47(1), pp.13–37, 1965.

Liu, L. Y., Patton, A. J., and Sheppard, K., “Does Anything Beat 5-Minute RV? A Comparison of Realized Measures across Multiple Asset Classes”, *Journal of Econometrics*, 187(1), pp.293–311, 2015.

Lynch, P. E. and Zumbach, G. O., “Market Heterogeneities and the Causal Structure of Volatility”, *Quantitative Finance*, 3(4), pp.320–331, 2003.

Lyons, T. J., “Differential equations driven by rough signals”, *Revista Matemática Iberoamericana*, 14(2), pp.215–310, 1998.

Mandelbrot, B., “The Variation of Certain Speculative Prices”, *The Journal of Business*, 36(4), pp.394–419, 1963.

Mandelbrot, B. B. and Van Ness, J. W., “Fractional Brownian motions, fractional noises and applications”, *SIAM review*, 10(4), pp.422–437, 1968.

Markowitz, H., “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, 7(1), pp.77–91, 1952.

Martin, I., “What Is the Expected Return on the Market?”, *Quarterly Journal of Economics*, 132(1), pp.367–433, 2017.

Merton, R. C., “Theory of Rational Option Pricing”, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), pp.141–183, 1973.

Merton, R. C., “On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation”, *Journal of Financial Economics*, 8(4), pp.323–361, 1980.

Michaud, R. O., “The Markowitz Optimization Enigma: Is ’Optimized’ Optimal?”, *Financial Analysts Journal*, 45(1), pp.31–42, 1989.

Mossin, J., “Equilibrium in a Capital Asset Market”, *Econometrica*, 34(4), pp.768, 1966.

Nagakura, D. and Watanabe, T., “A State Space Approach to Estimating the Integrated Variance under the Existence of Market Microstructure Noise”, *Journal of Financial Econometrics*, 13(1), pp.45–82, 2015.

Nelson, D. B., “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach”, *Econometrica*, 59(2), pp.347, 1991.

Nerlove, M., “Spectral Analysis of Seasonal Adjustment Procedures”, *Econometrica*, 32(3), pp.241, 1964.

Nualart, D., *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Probability and Its Applications, Berlin ; New York: Springer, 2nd ed edition, 2006.

Osajima, Y., “The asymptotic expansion formula of implied volatility for dynamic SABR model and FX hybrid model”, *Available at SSRN 965265*, 2007.

Parlour, C. A., “Price Dynamics in Limit Order Markets”, *Review of Financial Studies*, 11(4), pp.789–816, 1998.

Poon, S.-H. and Granger, C. W. J., “Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review”, *Journal of Economic Literature*, 61, pp.478–539, 2003.

Rogers, L.,
Rogers, L., Things We Think We Know, In D. Gershon, A. Lipton, M. Rosenbaum, and Z. Wiener (Eds.), Options — 45 Years since the Publication of the Black–Scholes–Merton Model pp. 173–184, World Scientific, 2023.
“ Things We Think We Know”, *In D. Gershon, A. Lipton, M. Rosenbaum, and Z. Wiener (Eds.), Options — 45 Years since the Publication of the Black–Scholes–Merton Model pp. 173–184, World Scientific, 2023.*

Rømer, S. E., “Empirical analysis of rough and classical stochastic volatility models to the SPX and VIX markets”, *Quantitative Finance*, 22(10), pp.1805–1838, 2022.

Rosenbaum, M. and Tomas, M., “From microscopic price dynamics to multidimensional rough volatility models”, *Advances in Applied Probability*, 53(2), pp.425–462, 2021.

Rosenbaum, M. and Zhang, J., “On the universality of the volatility formation process: when machine learning and rough volatility agree”, *arXiv preprint arXiv:2206.14114*, 2022.

Sharpe, W. F., “Mutual Fund Performance”, *The Journal of Business*, 39(1, Part 2: Supplement on Security Prices), pp.119–138, 1966.

Sowell, F., “Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models”, *Journal of Econometrics*, 53, pp.165–188, 1992.

Takahashi, M., Omori, Y., and Watanabe, T., *Stochastic Volatility and Realized Stochastic Volatility Models*, SpringerBriefs in Statistics, Singapore: Springer Nature Singapore, 2023.

Ubukata, M. and Watanabe, T., "Pricing Nikkei 225 Options Using Realized Volatility: Pricing Nikkei 225 Options Using Realized Volatility", *Japanese Economic Review*, 65(4), pp.431–467, 2014.

Wang, X., Xiao, W., and Yu, J., "Modeling and Forecasting Realized Volatility with the Fractional Ornstein–Uhlenbeck Process", *Journal of Econometrics*, 232(2), pp.389–415, 2023a.

Wang, X., Yu, J., and Zhang, C., 2023b, "On the Optimal Forecast with the Fractional Brownian Motion".

Wu, G., "The Determinants of Asymmetric Volatility", *Review of Financial Studies*, 14(3), pp.837–859, 2001.

Zhang, L., Mykland, P. A., and Aït-Sahalia, Y., "A Tale of Two Time Scales: Determining Integrated Volatility With Noisy High-Frequency Data", *Journal of the American Statistical Association*, 100(472), pp.1394–1411, 2005.

Zhou, B., "High-Frequency Data and Volatility in Foreign-Exchange Rates", *Journal of Business & Economic Statistics*, 14(1), pp.45–52, 1996.

Zumbach, G., "Volatility Processes and Volatility Forecast with Long Memory", *Quantitative Finance*, 4(1), pp.70–86, 2004.

Zumbach, G., "Time Reversal Invariance in Finance", *Quantitative Finance*, 9(5), pp.505–515, 2009.

Zumbach, G. and Lynch, P., "Heterogeneous Volatility Cascade in Ÿnancial Markets", *Physica A*, 298, pp.521–529, 2001.

池田 信行、『偶然の輝き―ブラウン運動を巡る 2000 年』、岩波書店、2018 年

篠崎 裕司、「深層学習によるファイナンスの新展開-ディープ・ヘッジングとディープ・キャリブレーション-」、日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパーシリーズ、2023-J-6、2023 年

篠原 武史・奥田 達志・中島 上智、「マクロ経済に関する不確実性指標の特性について」、日本銀行ワーキングペーパー、20-J-7、2020 年

新原 祐喜、「確率局所ボラティリティ・モデルのもとでのヘッジ戦略：最尤経路を利用したバリア・オプションの静的ヘッジ」、『金融研究』、30(4), pp.125–185、日本銀行金融研究所、2011 年

杉原 慶彦、「わが国株式市場のモデルフリー・インプライド・ボラティリティ」、『金融研究』、29(2), pp.73–120、日本銀行金融研究所、2010 年

関根 順、『数理ファイナンス (確率論教程シリーズ)』、培風館、2007 年

高石 哲弥、「ビットコインにおけるラフボラティリティとラフ取引高」、人工知能学会第二種研究会資料、2019(FIN-022), pp.19-24、2019 年

舟木 直久、『確率微分方程式』、岩波書店、2005 年

三菱 UFJ 銀行市場企画部、『デリバティブ取引のすべて: 激動の規制対応・金利指標改革後に広がるデリバティブビジネスの羅針盤』、きんざい、2022 年

渡部 敏明、「Heterogeneous Autoregressive モデル : サーベイと日経 225 株価指数の実現ボラティリティへの応用」、『広島経済大学経済研究論集』、42(3), pp.5–18、2020 年

渡部 敏明、『ボラティリティ変動モデル』、朝倉書店、2000 年

渡部 敏明・佐々木 浩二、「ARCH 型モデルと “Realized Volatility” によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」、『金融研究』、25(2) 別冊、pp.39–74、日本銀行金融研究所、2006 年

矢島 美寛、「長期記憶を持つ時系列モデル」、『経済時系列の統計 その数理的基礎』、pp.103-202、岩波書店、2003 年