IMES DISCUSSION PAPER SERIES

深層学習によるファイナンスの新展開
–ディープ・ヘッジングとディープ・キャリブレーション–

篠崎裕司（しのざきゆうじ）

Discussion Paper No. 2023-J-6

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

IMES Discussion Paper Series 2023-J-6
2023 年 6 月

深層学習によるファイナンスの新展開
−ディープ・ヘッジングとディープ・キャリブレーション−

篠崎裕司（しのざきゆうじ）*

要　　旨

機械学習のファイナンス分野への応用が活発に議論されている。その中でも、深層学習は、金融工学・数理ファイナンスで中心的な役割を担うヘッジおよびキャリブレーションの技術を大きく発展させることが期待されており、実務家と研究者の双方から注目を集めている。深層学習をヘッジに応用した技術である「ディープ・ヘッジング」は、これまで定量化が困難だった取引コストなどの影響を分析可能としうるものであり、デリバティブのヘッジの精緻化・自動化のほか、広範なリスク管理への応用も展望される。一方、「ディープ・キャリブレーション」は、デリバティブの時価評価やリスク管理の過程で必要となるパラメータの最適化計算を、深層学習を活用することで高速化・安定化させることが期待されている。本論文では、実務面と学術面双方の視点を意識しつつ、既存研究の概要と今後の方向性を整理する。とくに、既存のファイナンス論の理論的枠組みや実務における問題意識との関係を明確にしつつ、深層学習が今後もたらしうるファイナンス分野の発展可能性および実務上の留意点について議論する。

キーワード：金融工学、数理ファイナンス、デリバティブ（金融派生商品）、ヘッジ、キャリブレーション、数値的最適化
JEL classification: C63、G12、G13

* 日本銀行金融研究所企画役補佐（E-mail: yuuji.shinozaki@boj.or.jp）

本稿の作成に当たっては、篋島靖文氏（SMBC 日興証券）、多和田宜浩氏（MUFG Securities EMEA）、中山季之氏（三菱 UFJ 銀行）、二宮祥一教授（東京工業大学）ならびに金融研究所スタッフから有益なコメントを頂いた。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

目 次

1　はじめに

近年、深層学習が画像処理や自然言語処理をはじめとする多くの分野で活用されている。ファイナンス分野においても、金融工学・数理ファイナンスの諸問題に深層学習を応用した新しい手法が多数提案され始めている。その中でも、実務上重要である「ヘッジ」および「キャリブレーション」の問題に関する研究が、理論・実務の両面で注目を集めている。このような潮流を踏まえ、本論文では、ヘッジおよびキャリブレーションに関連する研究に焦点を当てつつ、深層学習のファイナンスへの応用を試みた研究の動向をまとめる。そのうえで、深層学習が今後もたらしうるファイナンス分野の発展について論じる。

ファイナンス理論の主要な目的の一つは、金融資産の価格変動リスクをはじめとする不確実性下における意思決定の指針を与えることである。たとえば、将来の原資産価格（株価や為替など）に応じて支払い額が定まるデリバティブ（金融派生商品）について、どのように価格付けを行い、リスク管理を行っていくかは、ファイナンスの代表的な問題の一つである。これらの問題を主に対象とする金融工学・数理ファイナンスは、実務への適用可能性という問題意識に強い影響を受けながら発展してきた。とくに、保有金融資産の将来の価格変動リスクなどをどのように軽減させるかというヘッジの問題と、金融市場で観測される価格とモデルに基づいた理論価格が整合的となるようにモデル・パラメータを調整するキャリブレーションの問題は、金融資産のリスク管理や時価評価といった実務的観点から非常に重要であり、金融工学・数理ファイナンスの中心的な研究テーマとなってきた。

深層学習は、ヘッジとキャリブレーションの技術を大きく発展させることが期待されている。まず、ヘッジについては、取引コストをはじめとする現実的な市場の摩擦などの影響を勘案したヘッジ戦略の導出が目指されてきた。これまでの理論的枠組み（いわゆる「リスク中立評価の枠組み」）でも、理論研究は多くなされてきたが、実務への応用にあたっては様々な制約が存在し、算出されたヘッジ戦略を実務利用することは困難であった。近年提案されている深層学習を応用したヘッジ戦略の導出手法は、これらの制約を克服し、ヘッジ戦略の精緻化やヘッジ取引の自動化につながりうることが期待されている。キャリブレーションについても、深層学習を利用することでパラメータ調整を大幅に高速化できる可能性が指摘されている。その結果として、デリバティブの時価評価の高速化・安定化が可能となることが期待されている。本論文では、このような深層学習がもたらしうるファイナンス分野での発展について、既存の理論的枠組みや実務における問題意識との関係を明確にしつつ、整理する。

本論文の構成は以下のとおりである。まず、2 節では、デリバティブの価格付け・リスク管理に関する金融工学・数理ファイナンスの考え方を整理し、ヘッジとキャリブレーションの問題を定式化する。本論文で述べる深層学習のヘッジへの応用においては、「凸リスク最小化」と呼ばれる枠組みが用いられる。この枠組みは、これまでのリスク中立評価の枠組みと違いがあることから、2 つの枠組みの関係を整理することが、深層学習の金融工学・数理ファイナンスへの応用研究の潮流を理解するうえで有益である。この点を踏まえて、それぞれの枠組みの発展の経緯を整理したうえで、定式化

を行う。

3節では、深層学習の概要を解説する。ニューラルネットワークでは、線形・非線形関数を交互に何度も合成した非常に多くのパラメータを持つ関数系を用いる。この階層構造を深くした機械学習手法が深層学習と呼ばれるもので、近年、様々な分野で目覚ましい成果をあげている。このような近年の展開を概観するために、深層学習の機械学習における位置づけや発展の歴史的経緯、実用上重要な学習の技術やニューラルネットワークが持つ理論的特長について整理する。そのうえで、後の節で必要な記法を準備する。

4節では、ヘッジの問題に深層学習を応用した技術である「ディープ・ヘッジング」に関する研究を紹介する。2節で紹介するとおり、現在の実務では、リスク中立評価の枠組みにおけるデリバティブの「複製」の考え方に基づいてヘッジ戦略を導出するアプローチが主流となっている。もっとも、通常は、市場摩擦がない理想的な金融市場が仮定されるため、取引コストなどの現実の金融市場における摩擦を定量的に価格付けやヘッジ戦略に反映させることが難しいという問題があった。複製の考え方によらないヘッジ戦略の導出アプローチとしては、凸リスク最小化の枠組みがある。この枠組みでは、取引コストやヘッジ誤差といった現実的な要素を勘案して算出される損益に関するリスク量を最小化するヘッジ戦略を求める。しかし、実際のヘッジ戦略導出においては膨大な最適化計算が必要となるため、実務で活用するのは困難だと考えられてきた。ディープ・ヘッジングは、深層学習を用いて凸リスク最小化問題の最適化計算を行うことで、ヘッジ戦略を導出することを実務的に実行可能としうる技術である。具体的には、ヘッジ戦略をニューラルネットワークにより記述し、与えられた市場の将来シナリオのもとでの「損失リスク」（「凸リスク尺度」で計測されるリスク量）を最小化するようニューラルネットワークのパラメータを学習させることで、最適なヘッジ戦略を算出する。なお、ディープ・ヘッジングは、損益のリスクを最小化するポートフォリオの調整方法を求める一般的な手法であることから、デリバティブ分野以外にも、資産負債管理（Asset Liability Management）などのリスク管理技術への応用も展望される。4節では、ディープ・ヘッジングの枠組みを解説したのちに、足もとの研究動向を整理し、今後の発展可能性を展望する。

5節では、デリバティブの価格付けにおけるキャリブレーションに深層学習を応用した「ディープ・キャリブレーション」に関する研究を紹介する。上述のとおり、キャリブレーションとは、モデル価格（リスク中立評価による商品価格）が市場流動性の高い金融商品の市場価格に一致するように、モデル・パラメータを調整する計算のことであり、市場流動性の低い複雑な金融商品の価格付けを、市場流動性の高い金融商品の価格と整合的に行う（商品間で「裁定」が生じない価格に設定する）ための重要な工程である。これまでのキャリブレーション計算では、モデル価格が市場価格に一致するよう反復的にモデル・パラメータを求める、ニュートン法などの手法が主流となってきた。このような反復計算手法は、多数の金融商品をキャリブレーション対象とする必要のある実務上の計算においては、計算負荷が非常に高くなる点が難点であった。これに対し、ディープ・キャリブレーションは、あらかじめモデル・パラメータとモデ

ル価格の関係をニューラルネットワークで学習させることで、毎回の反復計算を省く手法である。これにより、デリバティブの価格計算が、高速化・安定化されることが多数の論文で報告されているほか、計算負荷が高い価格付けモデルの利用を可能としうることから、実務家を中心に注目を集めている。このように、ディープ・キャリブレーションは、リスク中立評価という現行の価格付け・リスク管理の枠組みの中で、キャリブレーションの最適化計算過程のみを深層学習で置き換えるものである。5 節では、ディープ・キャリブレーションの枠組みを解説したのちに、足もとの研究動向を整理し、実務上の利点と留意点をまとめる。

上述のとおり、4 節で扱うディープ・ヘッジングは凸リスク最小化、5 節で扱うディープ・キャリブレーションはリスク中立評価における深層学習の応用である。ディープ・ヘッジングは、デリバティブ実務を将来的に大きく変容させる可能性がある一方で、損失リスクの計測方法や市場の将来シナリオの設定などの論点が存在するため、実務への活用を進めるうえでは、理論・実務の両面からさらなる研究の蓄積が必要な状況である。一方、5 節で扱うディープ・キャリブレーションは、リスク中立評価の枠組み内で行う最適化計算（モデルの理論価格を市場で観察される流動性の高い商品価格に合わせるようにモデル・パラメータを調整する最適化計算）の工程を、深層学習を活用して高速化・安定化させることを主眼としたものである。このように、ディープ・キャリブレーションは、リスク中立評価の枠組みの中での計算技術の改良に相当することから、現在のデリバティブ実務における具体的な課題を解決しうるものとして期待されている。

本論文は、読者の知識や関心によって読み方を変えることができる。2 節は、4 節、5 節で扱う問題の背景をまとめたものであるため、金融工学・数理ファイナンスの理論やデリバティブ実務に馴染みのある読者は読み飛ばすことができる。3 節は、4 節、5 節で用いる深層学習技術の予備知識をまとめたものであるため、深層学習に馴染みのある読者は読み飛ばすことができる。4 節、5 節は、独立して読める内容となっているため、興味がある内容を選択して読むことができる。

2　デリバティブの価格付け・リスク管理におけるヘッジとキャリブレーション

本節では、デリバティブの価格付け・リスク管理に関する金融工学・数理ファイナンスの考え方を整理し、ヘッジとキャリブレーションの問題を定式化する。

標準的な金融工学・数理ファイナンスの理論は、リスク中立評価の枠組みを中核として発展してきた。一方、本論文の主な対象である、深層学習を利用したヘッジ技術（ディープ・ヘッジング）は、凸リスク最小化と呼ばれる異なる枠組みに基づいて定式化されている。このため、深層学習の金融工学・数理ファイナンスへの応用研究の潮流を理解するにあたっては、これら 2 つの枠組みの関係性を整理することが有益である。

このため、本節ではまず、デリバティブの価格付け・リスク管理の問題を念頭に、リスク中立と凸リスク最小化の枠組み、それぞれの発展の経緯を整理する。次に、凸リ

スク最小化の具体的な問題を述べ、4 節で扱うディープ・ヘッジングの問題を定式化する。最後に、ブラック＝ショールズ・モデルを例にとって、リスク中立評価に基づく手法を概観し、5 節で扱うキャリブレーションの問題を定式化する。なお、本節は、実務的な背景も踏まえヘッジとキャリブレーションの問題意識・位置づけを明確化することを主眼としている。このため、通常の金融工学・数理ファイナンスの解説とは異なる方法で各概念を導入している。

リスク中立評価の枠組みなどに関する標準的な解説については、関根 [2007]、Björk [2009]、Shreve et al. [2004] などの数理ファイナンスの入門書を参照されたい。また、実務を意識して書かれた文献として、Baxter et al. [1996]、Andersen and Piterbarg [2010]、ジョン [2016] なども参考になる。凸リスク最小化の枠組みが属する「非完備市場」の理論は、関根 [2007] が詳しいほか、井上 et al. [2014] や Föllmer and Schied [2016] も参照されたい。

(1) デリバティブの価格付け・リスク管理の発展経緯

イ　リスク中立評価の枠組み

デリバティブの価格付けなどを主要な研究テーマとする金融工学・数理ファイナンスは、複製と無裁定の２つの概念を中心に発展してきた。複製とは、デリバティブと同一のキャッシュフローを、原資産などを適切に取引することで生成することである。無裁定とは、初期資本なしには損失リスクを負うことなく利益を上げることができない、という条件である。もし、市場が無裁定条件を満たし、あるデリバティブが複製可能であるならば、そのデリバティブの公正価格は複製のために必要な初期費用と等しくなる、というのが金融工学・数理ファイナンスの基本的考え方である[1]。実務的な観点からは、複製可能性がデリバティブのヘッジ可能性と等しい点が重要である。すなわち、あるデリバティブが複製可能である場合、複製によって反対ポジションを生成し、デリバティブのキャッシュフローと打ち消しあうことによって、損益の不確実性を完全に除去することができる。また、このことからわかるとおり、複製のための取引戦略（複製戦略）は、デリバティブのヘッジ戦略と同一視できる。

複製と無裁定の原理は、理論的にはリスク中立評価の枠組みとして整備されていった。リスク中立評価の枠組みでは、デリバティブの公正価格は、リスク中立確率測度と呼ばれる確率測度のもとでの将来キャッシュフローの期待値を無リスク金利で割り引いたものに等しくなる。将来キャッシュフローに不確実性のあるデリバティブの価格を無リスク金利で割り引くことで価格付けできる理由を直感的に説明すると以下のとおりである。まず、複製・ヘッジが可能なデリバティブは、ヘッジ取引を行うことで価格変動リスクを消去することができるため、デリバティブとヘッジ資産からなる

[1] たとえば、デリバティブ価格が複製に必要な初期費用よりも高い場合、デリバティブを売却する一方で、複製を行うことで、リスクを負うことなく利益を上げることができるため、無裁定条件に反することになる。逆の場合も同様に無裁定条件に反することを示せるため、デリバティブ価格と複製に必要な初期費用は等しくなる必要があることがわかる。

ポートフォリオは無リスク資産と見なすことができる。さらに、無裁定条件が満たされる場合、無リスク資産の収益率は、安全資産の金利（無リスク金利）と等しくなる必要がある。こうした、複製と無裁定の議論から、リスク中立評価に基づいてデリバティブ価格を導出することができる。

金融工学・数理ファイナンスにおける代表的なモデルである、ブラック＝ショールズ・モデルの原論文（Black and Scholes [1973]）では、このような複製と無裁定のアイディアに基づく発見的な方法でオプションの価格公式を導出している。本論文の 2. (3) イ節でも、この考え方に従った整理を行う。ブラック＝ショールズ・モデルが登場した後、より一般的な設定のもと、数学的に厳密な形で、無裁定市場においてリスク中立評価が可能であること（厳密には、無裁定条件が満たされる場合にリスク中立確率測度が存在すること）が、Harrison and Kreps [1979]、Harrison and Pliska [1981] らによって示された。

無裁定と複製を原理としたリスク中立評価の理論的枠組みが金融実務で受け入れられ大きく発展した理由としては、以下の二点が挙げられる。第一に、伊藤解析という数学的に厳密な手段に基づいて、複製の具体的方法を記述できる点である。たとえば、ブラック＝ショールズ・モデルをはじめとする数理ファイナンスのモデルでは、資産価格を確率微分方程式で記述し[2]、伊藤解析を用いることで、ヘッジ・複製戦略や公正価格を厳密に導出することを可能としている。このような、数学的に厳密な理論体系は、デリバティブ実務で利用される技術の理論的根拠となっている。第二に、原資産の期待収益率を推計する必要がないことである。金融資産の期待収益率は非常に変動が激しく、推計が容易ではないことが知られている[3]。このため、原資産価格の期待成長率の推計値を必要とするデリバティブ・モデルは、価格付けやリスク管理といった実務上の利用に耐えられないものであった。一方、リスク中立評価の枠組みでは、期待収益率の推計は不要であり、現時点で市場から観測可能な無リスク金利を用いて価格付けを行える。また、2. (3) 節で後述するとおり、複雑なデリバティブの価格は、市場流動性の高い金融商品の市場価格をもとに導出される。すなわち、リスク中立評価においては、原資産価格の将来予測を行うことなく現時点で市場から観測可能な情報のみで、価格およびヘッジ戦略を導出可能である（4 節で述べるディープ・ヘッジングとの対比は、表 1 を参照）。このことは、オプションの価格付けやリスク管理を行う上で、大きな利点である。

ロ　凸リスク最小化の枠組み

上述のとおり、リスク中立評価の枠組みには大きな利点がある一方で、実務上の難点も存在する。ブラック＝ショールズ・モデルをはじめとする大部分の理論モデルは、市場摩擦が存在しない理想的な金融市場（無リスク資金を自由に借入・貸出できる、原資産価格を取引コスト無しにいくらでも購入・空売りできる、といった仮定を満たす

---

[2]たとえば、ブラック＝ショールズ・モデルでは、原資産価格が幾何ブラウン運動と呼ばれる確率過程に従うとする。この確率過程のもとでは、ある時点の原資産価格は対数正規分布に従う。

[3]たとえば、Cochrane [2011] や Martin [2016] を参照。

市場）を前提としている。しかし、現実の金融取引では取引コストが発生するほか、空売り制約や借入制約といった各種の制約も存在する。また、とくに 2007~08 年の金融危機以降、取引相手の倒産リスクや取引に調達コストなどの影響が大きくなり、CVA をはじめとする xVA（x-Valuation Adjustment）[4]と呼ばれる価値調整が重要になってきている。こうした市場摩擦や取引に付随する条件などは、最適なヘッジ戦略に影響を与えるほか、ヘッジ取引コストへの影響を通してデリバティブの価格付けにも影響を与える。

市場摩擦が存在する状況では、完全な複製を達成することはできないため、複製・ヘッジ誤差が発生し、ヘッジ取引後の合計損益に不確実性が生じる。そのため、リスク中立評価とは異なる枠組みを考える必要があり、非完備市場（取引コストなどの完全な複製を妨げる要素が存在する市場）の理論として多くの試みがなされてきた。Leland [1985] は、ブラック＝ショールズ・モデルを拡張して、取引コストや取引頻度の制限に応じて複製戦略を修正する手法を提示し、市場摩擦が存在する場合においてもデリバティブの公正価格が一定の範囲内に収まることを示した。この研究を受け、Hodges and Neuberger [1989] では、取引コストがあるもとでヘッジ戦略の最適性を定式化するため、効用関数を取り入れ、ヘッジ取引後の合計損益に関する不確実性を定量化するという考え方を導入した[5]。さらに、Davis et al. [1993] は、Hodges and Neuberger [1989] を精緻化しブラック＝ショールズ・モデルと整合的な設定を定式化したほか、この設定のもとで価格の挙動を調べる研究も多くなされた（Shreve [1995]、Rogers [2004]、Whalley and Wilmott [1997]、Barles and Soner [1998] など）。その後、Xu [2006] や Ilhan et al. [2009] は、効用を最大化するという基準の代わりに、凸リスク尺度により測ったリスク量を最小化するという考え方を導入した。この考え方を採用することで、取引主体の選好をより現実的に表現できるほか、2. (3) イ節で後述するとおり、複製可能な場合の価格・ヘッジ戦略の導出との関係を明示的に示しやすいという利点がある。

そのため、本論文では、Hodges and Neuberger [1989] の定式化を基本とし、凸リスク尺度で測ったリスク量を最小化する、凸リスク最小化の枠組みを扱う。すなわち、凸リスク尺度を用いて、ヘッジ取引後の合計損益の不確実性を定量化し、そのリスク量を最小化するヘッジ取引戦略を求める枠組みである。たとえば、凸リスク尺度として

[4]デリバティブの時価評価において、取引相手の倒産リスクや取引に付随して必要な資金のコストなどを加味するための価格調整。

[5]非完備市場におけるデリバティブの公正価格の主要な定式化アプローチとして、効用関数を用いるアプローチのほか、優複製によるアプローチと最小同値マルチンゲール測度によるアプローチが存在する。優複製とは、満期時点での合計損益がどのような場合でも非負になるように、原資産などを適切に取引することである。優複製によるアプローチでは、優複製を達成するために最低限必要な費用をデリバティブの公正価値とするのが基本である。ただし、優複製の戦略は自明なもの（たとえば、1 単位のコール・オプションを優複製するために、原資産をはじめから 1 単位保有するなど）となることが多く、公正価格が高くなることから、この考え方は実用的でない場合が多い（Kramkov [1996] や Föllmer and Kabanov [1997] など参照）。最小同値マルチンゲール測度によるアプローチは、非完備市場で無限に存在にする同値マルチンゲール測度（リスク中立確率測度）の中から、ヘッジ誤差を最小にするものを探索するものである（Föllmer and Schweizer [1991] や Miyahara [2001] など参照）。ただし、探索された測度のもとで、実務的に利用可能なヘッジ戦略が存在しないなどの問題が起こることが多い。なお、取引コストの影響に関してデリバティブ以外の分野も含めてサーベイを行った論文として、Muhle-Karbe et al. [2017] が参考になる。

期待ショートフォールを採用した場合、合計損益の分布の下側面積を最小化する（すなわち、巨大な損失を被る可能性を最小化する）ように、ヘッジ取引戦略を求める問題となる。これが、凸リスク最小化の典型例である。また、この枠組みでは、デリバティブ価格は、ある商品を保有しない場合の期待効用（あるいはリスク量）と、保有した場合の期待効用が同じになる価格、すなわち、「効用無差別価格」として定めることができる。

このような一定の理論的進展はみられたものの、取引コストなどを勘案したヘッジ戦略の導出のためには複雑な最適化計算が必要なため、非完備市場の理論に基づく価格付け・リスク管理は、長らく実用化されなかった。そのため、デリバティブ実務では、リスク中立評価による価格付けやヘッジを基準としつつも、市場摩擦に起因する誤差やモデルの数値計算上の誤差などをカバーするマージンを勘案して、デリバティブ価格の設定やヘッジ戦略の調整を行う手法が主流となってきた。もっとも、このような調整手法は、簡易な算式や取引者の経験・相場感などによることが多いのが実情であるため、非完備市場モデルに基づいたより客観的な手法の発展が期待されていた。

このような歴史的経緯の中、近年、急速に理論や実務面での検討が進んでいるのが、深層学習を活用したディープ・ヘッジングと呼ばれる手法である。ディープ・ヘッジングは、Buehler et al. [2019a] が提唱した手法で、凸リスク最小化などの非完備市場理論における最適化計算を深層学習により行い、取引コストなどを加味した価格付け・リスク管理を可能としうる手法である。

凸リスク最小化の枠組みに基づくディープ・ヘッジングは、リスク中立評価の枠組みに基づく価格付けやヘッジ戦略導出と比べて、重要な違いがある。リスク中立評価に基づくヘッジでは、取引主体のリスク選好を明示的に設定する必要がなかった。すなわち、ヘッジ戦略は取引主体の選好・効用関数によらず同一であった。これは、完全な複製が可能であるという仮定のもと、不確実性なペイオフに関するリスク回避度などを考える必要がないためである。一方、ディープ・ヘッジングにおいては、取引主体の効用関数（損失リスクを定量化するリスク尺度）を明示的に考慮し、凸リスク最小化問題を直接的に解いている点が大きな違いである。先述のとおり、完全な複製・ヘッジが不可能な設定のもとでは、損失発生リスクに関する不確実性を取引主体がどう評価するかを定める必要があるためである。取引主体の効用関数（リスク選好）を考慮して最適取引を導出するという意味で、ディープ・ヘッジングは資産価格評価理論に立ち返った考え方とみなせる[6]。

[6]現代ファイナンス理論における基本的かつ重要な結果としては、Markowitz [1952] によるポートフォリオ選択理論と、Sharpe [1964]; Lintner [1965]; Mossin [1966] による資本資産価格モデル（Capital Asset Pricing Model: CAPM）が著名である。Markowitz [1952] のポートフォリオ選択理論では、ポートフォリオの期待リターン（平均）とリスク（分散）を考慮する、いわゆる平均分散型効用に基づいて最適化行動をとる投資家を分析している。CAPM では、代表的投資家が期待効用を最大化する設定のもと、個々の危険資産のリスクプレミアムの決定要因を示している。このように、期待効用を最大化（または期待損失を最小化）する投資家を仮定することで、最適な投資行動や資産価格形成に関する含意を導く研究は、ファイナンス研究の主要なアプローチとなっている。

(2) ヘッジの定式化：凸リスク最小化問題

本節では、デリバティブのヘッジ問題を凸リスク最小化問題として定式化する。デリバティブのヘッジでは、デリバティブの満期までヘッジ手段（ヘッジに用いる資産）を取引していき、満期時点までのデリバティブのペイオフとヘッジ取引の損益を合計した損益（満期時損益）の不確実性を抑制することが目的となる。ここで、満期時損益を確率変数として定式化する。凸リスク最小化問題とは、確率変数である満期時損益を凸リスク尺度で測ったリスク量を最小化する問題である。以下、Buehler et al. [2019a] の記法を用いて、離散時間モデルでこの考え方を定式化していく。

イ　満期時損益

現時点を 0、デリバティブの満期を T とし、時刻 $0 = t_0 < \cdots < t_k < \cdots < t_n = T$ で市場取引が可能であるとする。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、$\{\mathcal{F}_k\}_{k=0,\ldots,n}$ を離散フィルトレーションとする。簡単のため原資産は 1 種類とし、その資産価格 $\{S_k\}_{k=0,\ldots,n}$ は、$\mathcal{F}_k$-適合な実数値確率過程とする。さらに、デリバティブのペイオフ Z_T は、$\mathcal{F}_n$-可測な実数値確率変数とする。たとえば、権利行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプションの場合、$Z = \max\{S_n - K, 0\}$ となる[7]。

簡単のため、ヘッジ手段には原資産のみを用いる設定を考える[8]。このとき、ヘッジ戦略とは、ヘッジ手段の各時刻での保有量であり、$\mathcal{F}_k$-適合な実数値確率過程 $\delta = \{\delta_k\}_{k=0,1,\ldots,n}$ である。さらに、各時刻 t_k でのヘッジ手段の取引量に応じて定まる取引コスト[9]を $c_k(\delta_k - \delta_{k-1})$ とする。たとえば、取引量に比例する関数として、取引金額の一定割合 ε の取引コストがかかる場合、$c_k(\delta_k - \delta_{k-1}) = \varepsilon |\delta_k - \delta_{k-1}| S_k$ となる。また、このデリバティブの現在価格を p_0 とする。

この設定のもと、デリバティブでショートポジションを取った投資家の満期時損益は以下のとおりとなる。

$$\mathrm{PL}^{(Z_T, p_0, \delta)} = p_0 - Z_T + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k (S_{k+1} - S_k) - \sum_{k=0}^{n} c_k (\delta_k - \delta_{k-1}) \tag{1}$$

右辺第 1 項と第 2 項は、それぞれ、初期時点でのデリバティブ売却益と満期時点で支払わなければならないペイオフを表す。右辺第 3 項は、ヘッジ手段の取引により発生する累積ヘッジ損益である。右辺最終項は、各取引可能時点でのヘッジ取引（ヘッジ・ポジションの調整）のために発生する累積取引コストを表す[10]。

---

[7] なお、以下の議論は、Z_T が $\mathcal{F}_n$-可測な確率変数で成立するため、パス依存型のペイオフや S_n 以外の確率変数に依存するケースにも適用可能である。また、原資産が複数存在する設定にも容易に拡張可能である。

[8] ヘッジ手段として、他の資産を用いる設定にも拡張可能である。

[9] ここで、$\delta_{-1} = \delta_n = 0$ としている。これは、(1) 式で、ヘッジを開始する現時点でヘッジ手段を δ_0 単位購入する際の取引コストと、満期時点でヘッジ手段を δ_{n-1} 単位売却する際の取引コストを加味するためである。

[10] Buehler et al. [2019a] では、満期時損益の記法として、$\mathrm{PL}_T(Z_T, p_0, \delta)$ を採用している。本論文では、満期時損益を確率変数として $\omega \in \Omega$ に対し $\mathrm{PL}^{(Z_T, p_0, \delta)}(\omega)$ と記載すること、後の議論で変更する引数は

ロ　損益のリスク計測

前節で定式化された満期時損益は確率変数であるが、この確率変数に実数値のリスク量を対応させる関数をリスク尺度と呼ぶ。とくに、数理ファイナンスにおいては次の定義を満たす凸リスク尺度を扱うことが多い（凸リスク尺度に関するより詳しい解説については、Föllmer and Schied [2016] を参照）。

定義 1 (凸リスク尺度)**.** χ を Ω 上の確率変数全体の空間とする。$\rho : \chi \to \mathbb{R}$ は、以下の条件を満たすとき、凸リスク尺度と呼ばれる。

$$\begin{cases} \text{1) 単調減少性} : X_1, X_2 \in \chi \text{に対し、} X_1 \geq X_2 \text{ならば、} \rho(X_1) \leq \rho(X_2) \\ \text{2) 凸性} : \alpha \in [0,1], X_1, X_2 \in \chi \text{に対し、} \rho(\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2) \leq \alpha\rho(X_1) + (1-\alpha)\rho(X_2) \\ \text{3) 現金不変性} : X \in \chi, c \in \mathbb{R} \text{ に対し、} \rho(X+c) = \rho(X) - c \end{cases}$$

凸リスク尺度の各条件の直感的な意味は以下のとおりである。まず、単調減少性は、すべての状況でポートフォリオ 1 の損益 X_1 がポートフォリオ 2 の損益 X_2 以上の場合、ポートフォリオ 1 のリスク尺度はポートフォリオ 2 のリスク尺度以下になる（ポートフォリオ 1 のほうが、リスク量が小さくなる）ことを表す。次に、凸性はいわゆる分散効果を公理化したものである。すなわち、2 つのポートフォリオに分散投資したポートフォリオのリスク量は、個別ポートフォリオのリスク量を加重平均したもの以下になる、という条件である。最後に現金不変性は、確実なペイオフ c は、リスク尺度を同額だけ減らすことを意味している。これらの条件は、リスク尺度が持つべきと考えられる性質であり、期待ショートフォールをはじめとする凸リスク尺度はファイナンス分野において古くから研究対象となってきた[11]。

ハ　凸リスク最小化問題

以上の設定のもと、凸リスク最小化問題を定式化する。

定義 2 (凸リスク最小化問題)**.** 凸リスク尺度 ρ を所与とする。ペイオフ関数 Z のデリバティブを、ヘッジ手段 S を用いてヘッジする際の、凸リスク最小化問題とは、以下の最小化問題の解となるヘッジ戦略 $\delta^* = \left\{\delta^*_k\right\}_{k=0,1,\ldots,n}$ を求める問題である。

$$\delta^* = \operatorname*{argmin}_{\delta \in \bar{\mathcal{H}}} \rho\left(\mathrm{PL}^{(Z_T, p_0, \delta)}\right) \tag{2}$$

ただし、最小値は、適切なヘッジ戦略の集合 $\bar{\mathcal{H}}$（実数値確率過程の空間の部分集合）上で探索するものとする。

(Z_T, p_0, δ) であること、および、満期時損益のみを扱うことから、$\mathrm{PL}^{(Z_T, p_0, \delta)}$ を採用する。

[11] 期待ショートフォール $\mathrm{ES}_\alpha(X)$ は、$\mathrm{ES}_\alpha(X) = E[X \mid X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)]$ と定義される。なお、バリュー・アット・リスクは金融実務上よく使用されるリスク尺度ではあるものの、凸性を満たさない（すなわち凸リスク尺度ではない）ことに注意が必要である。リスク尺度の性質を調べた研究としては、Föllmer and Leukert [2000]、Föllmer and Schied [2002] などを参照。

注意 1 (ヘッジ戦略の探索空間). 定義 2 では、適切なヘッジ戦略の集合 $\bar{\mathcal{H}}$ においては、$\rho\left(\mathrm{PL}^{(Z_T,p_0,\delta)}\right)$ を最小化する δ^* が存在すると仮定した。ただし、この仮定が成立するための $\bar{\mathcal{H}}$ の条件は自明ではない[12]。そのため、Buehler et al. [2019a] では、$\mathcal{H}$ を選択可能なヘッジ戦略の集合と定義し、$\inf_{\mathcal{H}} \rho\left(\mathrm{PL}^{(Z_T,p_0,\delta)}\right)$ について収束などを議論している（4.(1) イ節参照)。ディープ・ヘッジングの定式化にあたっては、$\rho\left(\mathrm{PL}^{(Z_T,p_0,\delta)}\right)$ を最小化する δ^* が存在するかどうかは問題とならないことから、本論文では、凸リスク最小化問題を明示的に定式化するため、$\bar{\mathcal{H}}$ に強い仮定を置いている。

ニ　効用無差別価格

凸リスク最小化の枠組みのもとでは、以下で定義される効用無差別価格としてデリバティブの価格付けを行うことが一般的である。ここで、最小化されたリスク量を、$\pi(Z_T, p_0) = \min_{\delta\in\bar{\mathcal{H}}} \rho\left(\mathrm{PL}^{(Z_T,p_0,\delta)}\right)$ とする。

定義 3. ペイオフ関数が Z_T のデリバティブの効用無差別価格 p_0^* とは、以下を満たすものである。

$$\pi\left(Z_T, p_0^*\right) = \pi\left(0, 0\right)$$

すなわち、デリバティブを取引しない場合のリスク量と、最適なヘッジ取引を行いつつデリバティブを取引する場合のリスク量が等しくなる当該デリバティブの価格が、効用無差別価格である。また、(1) 式と凸リスク尺度の現金不変性（定義 1 条件 3)）から、

$$\begin{aligned}
\pi\left(Z_T, p_0^*\right) &= \min_{\delta\in\bar{\mathcal{H}}} \rho\left(p_0^* - Z_T + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k\left(S_{k+1} - S_k\right) - \sum_{k=0}^{n} c_k\left(\delta_k - \delta_{k-1}\right)\right) \\
&= -p_0^* + \min_{\delta\in\bar{\mathcal{H}}} \rho\left(-Z_T + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k\left(S_{k+1} - S_k\right) - \sum_{k=0}^{n} c_k\left(\delta_k - \delta_{k-1}\right)\right) \\
&= -p_0^* + \pi\left(Z_T, 0\right)
\end{aligned}$$

と変形でき、定義 3 から、

$$p_0^* = \pi\left(Z_T, 0\right) - \pi\left(0, 0\right)$$

が成立する。

[12] たとえば、リスク尺度を期待ショートフォールとした場合の条件は、Godin [2016] Lemma 2.1 参照。

(3) キャリブレーションの定式化：リスク中立評価におけるモデル・パラメータの決定問題

キャリブレーション[13]とは、金融市場で実際に観測される価格とモデルに基づいた理論価格が整合的となるように、モデル・パラメータを調整することを指す。一般的なデリバティブ実務においては、市場価格に信頼がおける市場流動性の高い金融商品と整合的になるようにモデル・パラメータをキャリブレーションしたうえで、市場で取引が行われていない（または流動性が乏しい）複雑な金融商品の価格付けやヘッジ戦略の導出にモデルを用いる。このため、高速かつ安定的なキャリブレーションを実現する技術は、デリバティブ実務やリスク管理上、極めて重要である。本論文では、リスク中立評価におけるキャリブレーションを対象とする。すなわち、リスク中立評価の枠組みに基づいて算出されるモデル価格が、市場価格と整合的になるようにモデル・パラメータを調整する問題を扱う。以下では、まず、凸リスク最小化との関係を踏まえつつ、リスク中立評価の直感的な考え方を簡単に述べる[14]。そして、キャリブレーションの問題を定式化する。

イ　リスク中立評価の導出

リスク中立評価理論では、通常、連続時間モデルが用いられるほか、市場摩擦が存在しない理想的な金融市場が仮定される。すなわち、任意の時間に（空売りなどを含む）任意の取引を取引コストなく行えることが仮定される。このような、連続時間の理想的市場における損益の確率過程を、離散時間モデルとして定式されていた前節の $\mathrm{PL}^{(Z_T,p_0,\delta)}$ と区別して、$\widetilde{\mathrm{PL}}_t^{(Z_T,p_t,\delta)}$ と記述する。ただし、$t\in[0,T]$ とし、$\widetilde{\mathrm{PL}}_t^{(Z_T,p_t,\delta)}$ は時刻 t から T までに生じる満期時損益を表す[15]（詳細な定式化は後述)。

この記法を用いると、複製は、以下を満たす価格（リスク中立価格）$p_t^{(\mathrm{RN})}$ と複製戦略 $\{\widetilde{\delta}_u^{(\mathrm{RN})}\}_{u\in[0,T]}$ として定式化される。

$$\text{任意の } t\in[0,T] \text{ に対し、} P\left(\widetilde{\mathrm{PL}}_t^{(Z_T,p_t^{(\mathrm{RN})},\widetilde{\delta}^{(\mathrm{RN})})}=0\right)=1$$

すなわち、複製が可能な場合、デリバティブのペイオフに関する不確実性をヘッジ取引により打ち消すことで、満期 T 時点での損益を（ほとんど）確実に 0 にできる。このように、複製は、明示的にリスク尺度を仮定せずに、デリバティブのペイオフに関する損失リスクを除去する手法である。

デリバティブの具体的な複製手法を、伊藤解析を用いて示したのが、Black and Scholes [1973] である。彼らの導出アイディアは、近年の標準的な金融工学・数理ファイナン

[13]工学においては、キャリブレーション（測定器の出力が基準となる正しい値と一致するよう測定器を調整すること）の日本語訳として、「較正」が用いられる。本論文では、金融分野における慣例にならい、「キャリブレーション」という言葉を英語のまま用いる。

[14]確率過程論に基づいたリスク中立評価の厳密な定式化については、補論 1 のほか、先述の参考文献を参照されたい。

[15]離散時間モデルにおいては $\mathrm{PL}^{(Z_T,p_0,\delta)}$ は時刻 0 から T までに生じる満期時損益を表す。

スのアプローチとやや異なるが、ヘッジとキャリブレーションの関係を理解するうえで有用であることから、以下概略を述べる。原資産価格を $\widetilde{S}_t$ として、この原資産に関するヨーロピアン・オプションを考える。すなわち、満期 T での原資産価格 $\widetilde{S}_T$ と確定的なペイオフ関数 f を用いて、ペイオフ $Z_T = f\left(\widetilde{S}_T\right)$ と書ける場合を考える。また、このオプションの時刻 t での価格が p_t であるとする。原資産価格は、以下の確率微分方程式に従うとする。

$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 + \int_0^t \mu \widetilde{S}_u \, du + \int_0^t \sigma \widetilde{S}_u \, dW_u$$

ここで、W_t は P 上の標準ブラウン運動、dW_u は伊藤積分、μ と σ は定数のパラメータ（それぞれ、ドリフト、ボラティリティと呼ばれる）を表す。この確率過程は、幾何ブラウン運動と呼ばれており、各時点における原資産価格が対数正規分布に従うことが知られている。このとき、損益の確率過程は、

$$\widetilde{\mathrm{PL}}_t^{(Z_T, p_t, \widetilde{\delta})} = p_t - Z_T + \int_t^T \widetilde{\delta}_u \, d\widetilde{S}_u$$

と定式化される。

時刻 t でのオプションの価値を p_t とし、p_t は、t と $\widetilde{S}_t$ の関数として、

$$p_t = v(t, \widetilde{S}_t)$$

と書けると仮定する。このとき、$\widetilde{\mathrm{PL}}_t^{(Z_T, p_t, \widetilde{\delta})}$ の t に関する時間発展を考えると、伊藤の公式を用いることで、

$$\begin{aligned} d\widetilde{\mathrm{PL}}_t^{(Z_T, p_t, \widetilde{\delta})} &= \frac{\partial}{\partial t} v(t, \widetilde{S}_t) \, dt + \frac{\partial}{\partial x} v(t, \widetilde{S}_t) \, d\widetilde{S}_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t, \widetilde{S}_t) \, d\widetilde{S}_t \cdot d\widetilde{S}_t - \widetilde{\delta}_t \, d\widetilde{S}_t \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} v(t, \widetilde{S}_t) + \frac{\partial}{\partial x} v(t, \widetilde{S}_t) \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t, \widetilde{S}_t) \sigma^2 \widetilde{S}_t^2 - \widetilde{\delta}_t \mu \widetilde{S}_t \right) dt + \left(\frac{\partial}{\partial x} v(t, \tilde{S}_t) \sigma - \sigma \widetilde{\delta}_t \right) dW_t \end{aligned}$$

と変形される。ただし、$\frac{\partial}{\partial x}$ は、v の第二引数 S_t に関する偏微分を表す。この損益過程のリスクを消去する、すなわち、確率変動項を 0 にするための条件として、以下が得られる。

$$\widetilde{\delta}_t^{\mathrm{Del}} = \frac{\partial}{\partial x} v\left(t, \widetilde{S}_t\right)$$

これがデルタ・ヘッジと呼ばれるヘッジ戦略である。上式右辺は、原資産の価格変化に対するデリバティブ価格の感応度である。このため、デリバティブ 1 単位に対して、感応度（デルタ）に等しい量の原資産を保有し、価格変動をちょうど打ち消しあうことでヘッジを行うというのが、デルタ・ヘッジの直感的な考え方である。

さらに、(1) 安全資産が取引されていること、(2) 市場が無裁定であること、(3) 満期時損益が 0 になること（$\widetilde{\mathrm{PL}}_T^{(Z_T, p_T, \widetilde{\delta})} = 0$）のつの条件から、$v$ は以下のブラック＝ショールズの偏微分方程式を満たすことを示せる。ただし、r は安全資産の無リスク金利（連

続複利表示）である。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v(t,x) + rx \dfrac{\partial}{\partial x} v(t,x)\, d\widetilde{S}_t + \dfrac{\sigma^2}{2} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} v(t,x) = rv(t,x) \\ v(T,x) = f(x) \end{cases} \tag{3}$$

この偏微分方程式の解 v に対し、$p_t = v\left(t, \widetilde{S}_t\right)$ とすると、

$$\text{任意の } t \in [0,T] \text{ に対し、} P\left(\widetilde{\mathrm{PL}}_t^{(Z_T, p_t, \widetilde{\delta}^{\mathrm{Del}})} = 0\right) = 1$$

が成り立つ。

また、v は、ファインマン・カッツの公式を使って、次式のとおり、期待値で表現できる。

$$v(t, \widetilde{S}_t) = e^{-r(T-t)} E^Q \left[f(\widetilde{S}_T) \;\middle|\; \widetilde{S}_t \right] \tag{4}$$

ここで、確率測度 Q は、リスク中立確率測度と呼ばれるものである。この確率測度のもとでは、$\widetilde{S}_t$ は以下の確率微分方程式に従う。

$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 + \int_0^t r\widetilde{S}_u\, du + \int_0^t \sigma \widetilde{S}_u\, dW_u^Q$$

(4) は、オプションの価値 v が、リスク中立確率測度下でのペイオフの期待値を無リスク金利で割り引いた現在価値と等しいことを示している。この式に基づいてデリバティブ価格を求められることから、リスク中立評価の枠組みと呼ばれている。なお、より一般的なリスク中立評価の定式化については、補論を参照。

リスク中立評価に基づいてオプション価格を実際に計算する際には、確率測度 Q のもとでの $\widetilde{S}_t$ の変動を記述するパラメータである、r や σ の値を予め決定する必要がある。また、ブラック＝ショールズ・モデルよりもより複雑なモデルでは、多数のモデル・パラメータを決定する必要がある。このパラメータ決定を行うのが、次節で述べるキャリブレーションの問題である。

ロ　キャリブレーションの問題

リスク中立評価によるデリバティブの価格付けやヘッジ戦略の導出を行う際には、リスク中立確率測度 Q の下での原資産価格の変動を定めるパラメータ（上述のブラック＝ショールズ・モデルでは、r、σ）の値を定める必要がある。

本節の冒頭で述べたとおり、このパラメータの決定方法として現在のデリバティブ実務において一般的な考え方は、市場流動性が高い金融商品（キャリブレーション対象商品）の市場価格を正しいものとし、それらの市場価格にモデル理論価格をフィットさせるようにパラメータを設定するというものである。このように、デリバティブの価格付け理論における「モデル」のパラメータを調整することをキャリブレーションと呼ぶ。実務においては、このようにキャリブレーションされたモデルに基づいて、

複雑なデリバティブなどの市場価格が観測されない商品の価格（モデル価格）算出などに利用している。このような手順を踏むことで、流動性の高い商品との間に裁定が生じないという意味で、整合的により複雑なデリバティブの価格を設定することが可能となるため、キャリブレーションを正確かつ効率的に行うことは、デリバティブ実務やリスク管理上非常に重要である。

以下、キャリブレーションの問題を定式化する。まず、以下の 3 つのパラメータ群を想定する。

- モデル・パラメータ（原資産価格が従う確率微分方程式のパラメータ）：$\sigma \in \mathbb{R}^Q$
- 商品性を表すパラメータ（満期や権利行使価格など）：$\tau \in \mathbb{R}$
- 外的ファクター（無リスク金利など）：$\phi \in \mathbb{R}^m$

このもとで、ある商品性 τ を持つ金融商品の市場価格を $\mathrm{QP}(\tau)$、リスク中立評価によるモデル価格を $\mathrm{MP}(\sigma;\tau,\phi)$ と記載する。

このとき、R 個のキャリブレーション対象商品の市場価格 $\{\mathrm{QP}(\tau_i)\}_{i=1,\dots,R}$ が与えられたもとでのキャリブレーションの問題とは、以下の誤差最小化問題を解くことで、モデル・パラメータを求める問題である。

$$\sigma^* = \operatorname*{argmin}_{\sigma\in\mathbb{R}^Q} \mathrm{Error}\left(\sigma; \{\mathrm{QP}(\tau_i)\}_{i=1,\dots,R}, \phi\right) \tag{5}$$

ただし、Error は誤差関数、すなわち、市場価格 $\mathrm{QP}(\tau)$ とモデル価格 $\mathrm{MP}(\sigma;\tau,\phi)$ の誤差にペナルティを与える関数であり、たとえば、以下のような関数が用いられる。

$$\mathrm{Error}\left(\sigma; \{\mathrm{QP}(\tau_i)\}_{i=1,\dots,R}, \phi\right) = \sum_{i=1}^{R} \left(\mathrm{MP}(\sigma;\tau_i,\phi) - \mathrm{QP}(\tau_i)\right)^2$$

実務上では、数十から数百のキャリブレーション対象に対して 10 個程度のモデル・パラメータを調整することなどが問題となる。このような、高次元の誤差最小化問題では、ニュートン法などの最適化手法を用いるのが通例である[16]。しかし、このような最適化計算は、計算負荷が大きいほか、最適化計算が収束しない問題も起こりやすい。とくに、最適化計算が収束しない問題が起こった場合、その原因が最適化計算のアルゴリズムにあるのか、そもそも市場価格をモデル価格で表現することができない（誤差が一定水準以内に収まるモデル・パラメータが存在しない）のか、判別するのは困難である。そのため、キャリブレーションは、デリバティブの時価評価モデル開発において最も工夫が必要な工程の一つである。この最適化計算を深層学習により置き換えて、時価評価をする度に必要であった最適化計算を省き、高速化・安定化するのが、5 節で紹介するディープ・キャリブレーションである。

[16]たとえば、数十から数百個のスワップションをキャリブレーション対象とし、10 個程度のパラメータを持つハル＝ホワイト・モデルのボラティリティをキャリブレーションする問題などが、実務上よく取り扱われる。

3　深層学習

本節では、深層学習の概要を説明する。ニューラルネットワークでは、線形・非線形関数を交互に何度も合成した非常に多くのパラメータを持つ関数系を用いるが、この階層構造を深くした機械学習手法を深層学習と呼ぶ。深層学習は、実用上の多くの問題で非常に有効であることが経験的に知られてきたが、近年の研究の進展により、その理論的根拠が徐々に解明されてきている。

以下、(1) 節では、深層学習の概要や近年の研究動向を簡単にまとめる。(2) 節では、4 節以降の説明に用いる記法を導入する。機械学習や深層学習に関するより詳細な情報については、たとえば、岡谷 [2015]、斎藤 [2015]、斎藤 [2022]、岡野原 [2022a]、岡野原 [2022b] などを参照されたい。また、デリバティブの価格付けを中心としたファイナンス分野への深層学習の応用を紹介した書籍として、中山 [2022] も参考になる。

(1)　成功の背景

イ　機械学習の分類と深層学習の位置づけ

深層学習は、機械学習の一手法である。このため、深層学習の特徴や応用可能性を理解するうえでは、機械学習全体における深層学習の位置づけを把握することが有益と考えられる。以下では、機械学習手法の一般的な分類を整理しつつ、機械学習全体の中での深層学習の位置づけや特徴について整理する[17]。

機械学習は、データから機械学習モデルと呼ばれる統計モデルを学習させ、学習されたモデルを用いて、判定、分類、予測などの様々なタスクを行うことで問題解決する手法である。ここで、学習とは、入力データと出力データを結ぶ関数系（統計モデル）のパラメータを推計することを指す。一般に、機械学習は、大量のデータに基づいて柔軟な関数系の推計を行うことから、古典的な統計モデルに基づいた分析に比べ、より帰納的で高精度な形でデータ間の関係性を把握することが可能になるといわれている。

上記を踏まえると、いくつかの切り口から機械学習を分類することができる。第一の分類軸は、学習（すなわち、パラメータ推計）における最適化の目的関数の種類である。教師あり学習と呼ばれる機械学習手法では、正解が事前にわかっている出力データを与え、機械学習モデルがその正解を可能な限り再現するように学習を行う。たとえば、教師データとして犬の画像かどうかが分かっている画像データを与え、正答を返すように機械学習モデルを訓練することで、一般的な画像が犬かどうかを判定するモデルを学習する、というのが典型的な教師あり学習である。一方で、教師データを与えることなくデータの分類などを行う教師なし学習も存在している。また、強化学習と呼ばれる分類も存在する。強化学習では、逐次的に変わる環境と自身の行動に応

[17] なお、機械学習は、様々なモデルや学習アプローチ、応用対象などを含む、非常に広範な分野であるうえに、急速な発展が続いている分野であるため、必ずしも定義や分類が明確ではない用法・用語もみられる。本論文では、岡野原 [2022a] などの文献を参考に分類を行った。

じて定まる報酬を受け取るエージェントを考える。強化学習においては、エージェントが将来にわたり得られる報酬の最大化問題を解くことで、エージェントが与えられた環境に応じてどのような行動をとるかという方策（policy）を推計する。第二の分類軸は、機械学習モデルの利用目的である。たとえば、あるメールが迷惑メールかどうかを判定するモデル、手書きの数字を０から９までのどれかに分類するモデル、様々な特徴量から将来の株価や失業率などを予測するモデルなど、様々な用途の機械学習モデルが存在している。第三の分類軸は、使用する関数系による分類である。機械学習では、最適化の目的関数や機械学習の利用目的に応じて、特定の構造を持った関数系が使用されるのが通例である。たとえば、比較的簡単な現象の予測に使用されるロジスティック回帰や、分類や回帰に使用されるランダムフォレストや k 近傍法、より複雑な現象の記述に使用されるニューラルネットワーク（多層パーセプトロン）などが挙げられる。

深層学習とは、第三の分類軸による分類の一つで、線形・非線形関数を交互に何度も合成した非常に多くのパラメータを持つ関数系（ニューラルネットワークなど）を利用した機械学習の手法を指す。とくに、強化学習においてニューラルネットワークを用いる「深層強化学習」は、近年の多くの問題を解決し注目を集めている。

ロ　深層学習の歴史と現在

深層学習の歴史は 1950 年代に始まり、現在は三度目のブームの途中であるといわれている。第一次ブームは、ニューラルネットワークの原型ともいわれるパーセプトロンが Rosenblatt [1958] によって提唱されたことなどを背景として、1950 年代に起きた。パーセプトロンは、神経をモデル化したものであり、人工知能開発への期待が高まった。しかしながら、1960 年代終わりに、Minsky and Papert [1969] によって、単層パーセプトロンでは簡単な図形（線形分離可能な図形）すら判別できないことが指摘されたことを契機に、ブームは下火となったとされる。

第二次ブームは、1980 年代に Rumelhart et al. [1988] によって、誤差逆伝播法が提唱されたことに始まるとされる。詳細は後述するが、誤差逆伝播法は、多層ニューラルネットワークの学習において、パラメータの更新に必要な計算を効率的に行う手法である。この技術によって数層のニューラルネットワークの学習が可能となったことから、深層学習の研究は大きく進展した。もっとも、より多層のニューラルネットワークの学習の際に過剰適合（過学習）[18]やパラメータがうまく更新できないといった問題に直面したことなどから、再びブームは下火になったとされる。

2000 年代から現在まで続く第三次ブームは、Hinton et al. [2006] が、事前学習による多層ニューラルネットワークの学習に成功したことが契機となった。以降、多層ニューラルネットワークに注目が集まり、その後の大きな発展につながった。Alex net（Krizhevsky et al. [2017]）が画像分類のチャレンジコンテスト（ImageNet Large Scale Visual Recognition Challenge、ILSVRC）で高性能を示し、その後さらなる性能向上が

[18]訓練データにだけ適合した学習が過剰に進んでしまい、未知のデータに対する推定性能が下がってしまう現象。

続いたことがその一例である。さらに、深層強化学習に基づく方法により、AlphaGo（Silver et al. [2016]）が囲碁の世界チャンピオンに勝利したり、Goodfellow et al. [2020] が深層学習によりデータを生成する手法を示したりするなど、深層学習の活用が、予測や回帰といったタスクから制御や生成といったタスクへと広がりをみせている。

現在の第三次ブームで深層学習が成功した理由としては、複数の理由が指摘されている。まず、学習に用いられる技術・アルゴリズムの発展が挙げられる。上述のとおり、第二次ブームが下火となった原因は、過剰適合などの問題により多層ニューラルネットワークの学習が困難だったことである。第三次ブームでは、この点を克服するブレークスルー技術が開発されたことが重要な役割を果たしている。次に、深層学習の数値計算を支えるインフラの急速な発展である。グラフィックス・プロセシング・ユニット（GPU）などを用いたクラウド・コンピューティング、Python などのプログラミング言語におけるライブラリやパッケージ（PyTorch、TensorFlow など）など、ハード・ソフトの両面で大規模かつ高負荷な数値計算を手軽に実行できるインフラが整った点が現在のブームを大きく後押ししている。また、深層学習が多種多様な問題を解決してきたことが好循環を生んでいる点も挙げられる。すなわち、深層学習を活用した問題解決の経験則が蓄積されることで、新しい問題を深層学習で解決するための着想を得やすくなったことも指摘されている。ごく最近では、深層学習が実用面で成功を収めている理由を理論的に解明する研究も進展している。具体的には、3. (1) ニ節で後述するとおり、ニューラルネットワークは学習や関数の表現に関して理論的に望ましい自然性能を持っていることが明らかになりつつある。このような理論的根拠の存在から、深層学習はそれ以前からある機械学習手法とは一線を画する手法であると認識されつつある。

このような潮流のもと、深層学習を金融工学・数理ファイナンス分野へ応用する研究が盛んになっている。その主な理由として、金融工学・数理ファイナンスにおける問題特有の 3 つの性質が挙げられる。第一に、2 節で述べたとおり、デリバティブのヘッジの問題は、損益の不確実性を抑制するヘッジ戦略を求めるという点で制御の問題である。そのため、近年発展が著しい強化学習の経験則が役に立つ[19]。第二に、デリバティブの価格やヘッジ戦略などは、ペイオフ関数の非線形性などに起因して、非線形性を持つ関数で記述されることが多い。そのため、推定目的の関数に対する表現能力が高いニューラルネットワークと親和的である。第三に、デリバティブ分野における技術は金融工学・数理ファイナンスに裏打ちされたものであるため、これらの技術の活用にあたっては高い精度の数値計算や理論的保証が求められるのが通例である。4 節、5 節で後述するとおり、深層学習の実用にあたっては、精度に留意して検証などを行う必要はあるが、近年の深層学習の技術・インフラの発展により、デリバティブ分野での実用に耐えうる精度を得られつつある。

[19] 実際、4 節で紹介するディープ・ヘッジングは、強化学習の方策勾配法から着想を得たものである。

ハ　学習の技術

先述のとおり、機械学習は、データから機械学習モデルと呼ばれる統計モデルを学習させ、学習されたモデルを用いて様々なタスクを行う。ここで、学習とは、入力データ x と出力データ y をつなぐ関数系 $y = f(x;\theta)$ についてある最適化問題を解くことで、パラメータ θ を推計することを指す。

具体的には、損失関数と呼ばれる目的関数 J の最小化問題を解くことで θ が推計される。たとえば、訓練データ（入力データ x_i とそれに対応する出力データ y_i のペア、$\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,q}$）が与えられる教師あり学習では、モデルの出力と訓練データの誤差を損失と捉え、それを最小化するように定式化される。たとえば、損失関数 J が二乗誤差の場合、以下のとおり定式化される。

$$J(\theta) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} e\left(\omega_i;\theta\right), \quad e\left(\omega_i;\theta\right) = \left(y_i - f(x_i;\theta)\right)^2 \tag{6}$$

キャリブレーションやヘッジの問題など、個別の問題に関する機械学習モデルを学習する際には、それに応じた損失関数を設定する必要がある。

上記の最小化問題を解く基本的なアルゴリズムは、以下のとおり、反復的にパラメータを更新し、θ_i の更新幅が一定基準より小さくなった段階で反復を打ち切ることで、最適解 θ^* を探索するものである。具体的には

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \nabla J(\theta_i)$$

でパラメータの変化幅を定義する。ここで、$\nabla J(\theta)$ は勾配を表し、$\nabla J(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta^{(1)}}J(\theta),\ldots,\frac{\partial}{\partial\theta^{(K)}}J(\theta)\right)$ である（$\theta^{(k)}$ は、θ の k 番目の座標を表す）。すなわち、損失関数の勾配を計算し、損失関数が減少する方向へパラメータを更新するという、いわゆるニュートン法の考え方によるものである。

機械学習においては、θ は高次元（数千から数兆次元）となることが多いため、この反復的解法は困難を伴う。たとえば、勾配 $\nabla J(\theta)$ の計算負荷が高いほか、$J(\theta)$ が鞍点や局所解（図 1）にはまってしまい大域的最適解に収束しない問題（勾配消失問題）もしばしば発生する。

これに対し、様々な技術が提案され活用されている。主なものとして、以下の 3 つが挙げられる。

1. 学習率の設定 : $\nabla J(\theta)$ に適切な定数 ν_i を掛けることで、局所解にはまって更新できなくなることや 1 度の更新で更新しすぎてしまうことを防ぐ。

2. 確率的勾配降下法 : $\nabla J(\theta)$ を計算する際、全ての訓練データを用いるのではなく、確率的に抽出した一部の訓練データを用いて $\nabla J(\theta)$ を近似的に計算する方法[20]。

[20]訓練データの標本数が十分にある場合、一部の訓練データのみを用いることで、$\nabla J(\theta)$ の計算負荷を大幅に減らすことができる。また、確率的に訓練データを抽出することで、勾配消失問題が起こりにくくなる。

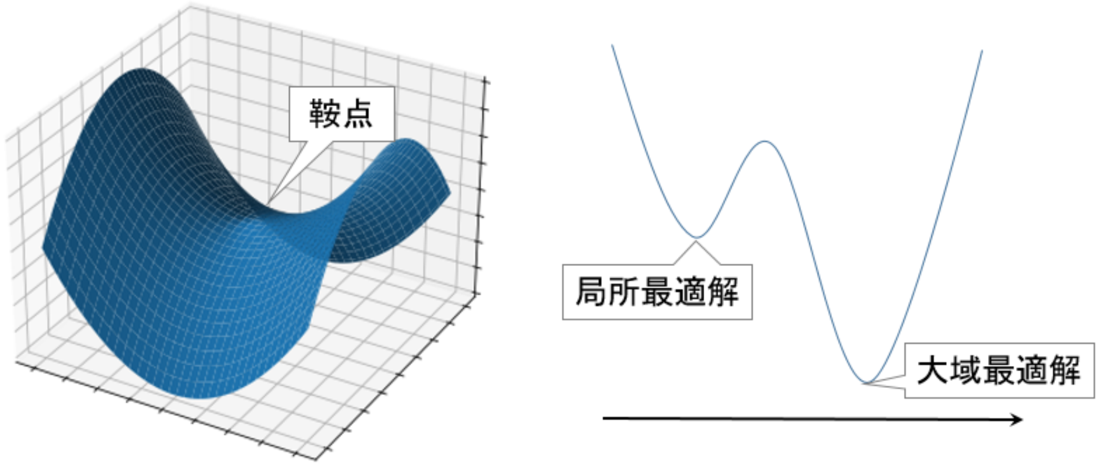

図 1: 鞍点、局所解

ここで、抽出した訓練データの数 q_B をバッチ数と呼ぶ。たとえば、損失関数が (6) の場合、$\left\{(x_{i(j)}, y_{i(j)})\right\}_{j=1,\ldots,q_B} \subset \{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,q}$ となるデータを確率的に q_B 個抽出し、

$$\nabla J(\theta) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} \nabla e\left(\omega_i;\theta\right) \approx \frac{1}{q_B}\sum_{j=1}^{q_B} \nabla e\left(\omega_{i(j)};\theta\right) \tag{7}$$

と近似する。この際、損失関数 $J(\theta)$ が、個々の訓練データのサンプルに関する誤差 $e\left(\omega_i;\theta\right)$ の和で書けるという性質を利用していることに注意する[21]。

3. 誤差逆伝播法 : ニューラルネットワークが層構造、すなわち合成関数となっていることを利用して、$\nabla J(\theta)$ を効率的に計算する手法。すなわち、合成関数の連鎖律を用いることで、出力側の層から入力側の層に向かう（入出力とは逆向きの）順番で各パラメータに関する偏微分係数を効率的に計算していくことができる。ここで、個別の訓練データのサンプルに関する誤差 $e\left(\omega_i;\theta\right)$ が、パラメータ θ に関して微分可能である（導関数の解析解が存在する）ことも重要である。

そのほか、大域解に収束しないことへの対応として、スキップ接続、モーメンタム法、学習率の自動調整の手法、正則化層、データオーグメント、ドロップ・アウトなどの様々な技術が導入されてきた[22]。とくに、Kingma and Ba [2015] にて提示された Adam 法（Adaptive Moment Estimation）は、現在最も使用される学習アルゴリズムの一つで、確率的勾配降下法を基本にモーメンタム法と RMSprop（Root Mean Squared Prop、学習率の自動調整）を組み合わせたものである。それぞれの詳細は、先述の書籍を参照されたい。

---

[21] 4. (1) ロ節で後述するとおり、リスク量を損失関数として学習させるディープ・ヘッジングにおいては、(6) 式のように、損失関数を訓練データのサンプルの和として表現することで、確率的勾配降下法と誤差逆伝播法などを適用して効率的な学習が可能となる。

[22] 詳細は、岡野原 [2022b] 第 1 章を参照。

3. (1) ロ節で述べたとおり、近年、ニューラルネットワークに関する理論研究が進んでおり、深層学習がうまく機能する理由が徐々に明らかになってきている。具体的には、ニューラルネットワークには、表現能力、最適化能力、汎化能力の 3 つの点で、望ましい性質を持っていることが明らかになってきているため、本節ではその概要を紹介する。詳細については、鈴木 [2018] や岡野原 [2022b] などを参照されたい。

まず、表現能力とは、ニューラルネットワークが近似したい関数をどれだけ良く近似できるかを意味する。表現能力に関する研究は古くからなされており、ニューラルネットワークの万能近似性能、すなわち、応用上重要な関数はおおむねニューラルネットワークによって近似できる、という性質が著名である。近年の研究では、ニューラルネットワークが「適応的近似」能力を持つため、パラメータ数に関する近似誤差の収束速度が最良であることが明らかとなっている（Suzuki [2018] など）。適応的近似を直感的に解釈すると、引数の場所ごとに解像度を変化させて近似できる（関数の変動が激しい場所では解像度を高めて近似できる）ため、効率的に関数を近似できる性質と理解できる。

次に、最適化能力とは、訓練データに対する予測力であり、パラメータの大域解 θ^* を探索する能力を意味する。先述のとおり、$J(\theta)$ は非常に高次元の関数であるため、最適化アルゴリズムが局所解や鞍点にはまり、大域解に到達しない可能性がある。しかし、ニューラルネットワークの場合、最適化の目的関数 $J(\theta)$ の形状がよい性質を持っており、このような問題が起こりにくいことが明らかになってきている。たとえば、Garipov et al. [2018] では、$J(\theta)$ の最適解の領域が繋がっている（連結である）ことが実験的に示されたほか、Kawaguchi [2016] では、活性化関数（ニューラルネットワークの関数系内で用いられる非線形関数）を線形関数に限定した場合、極所解はすべて最適解であることが理論的に示された。

最後に、汎化能力とは、未知のデータに対する予測力であり、学習に用いた訓練データに過剰適合（過学習）することがなく、問題の複雑さに応じて関数を適切に表現する能力を意味する。ニューラルネットワークは、問題の複雑さに応じて、モデルの複雑さを自動調整する「陰的正則化」能力を持っていることが明らかになっている。その具体例として、「ノルム最小化」（Hastie et al. [2022]）、「フラットな解」（Soudry et al. [2018]）、「宝くじ仮説」（Frankle and Carbin [2018]）などが知られている[23]。自動調整は、ニューラルネットワークを学習した際、パラメータ θ^*（ベクトル）の一部がゼロ近傍を取ることにより、一部の入力値が無効化されることなどで実現されるものである。

(2)　ニューラルネットワークの記法

定義 4 (ニューラルネットワーク)**.** $L \in \mathbb{N}$、$L \geq 2$ をニューラルネットワークの層の数とし、$N_0, N_1, \ldots, N_L \in \mathbb{N}$ を各中間層の次元とする。$W_l : \mathbb{R}^{N_{l-1}} \to \mathbb{R}^{N_l}$ をアフィン変換、す

[23]詳細は、岡野原 [2022b] 第 2 章を参照。

なわち、ある行列 $A^l \in \mathbb{R}^{N_l \times N_{l-1}}$ と $b^l \in \mathbb{R}^{N_l}$ を用いて、$W_l(x) = A^l x + b^l$ と書けるものとする。また、$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を活性化関数とする。

このとき、以下で定義される合成関数 $F^\theta : \mathbb{R}^{N_0} \to \mathbb{R}^{N_L}$ を、(順伝播型) ニューラルネットワークと呼ぶ。

$$F^\theta(x) = W_L \circ F_{L-1} \circ \cdots \circ F_1$$

ただし、$F_l = \eta \circ W_l$（η はベクトルの要素ごとに適用）である。また、θ はニューラルネットワークのパラメータの集合、すなわち、行列 A^l とベクトル $b^l (l = 1, \ldots, L)$ の各成分の集合を表す。

図 2 は、ニューラルネットワークの模式図である。各層はアフィン関数と非線形の活性化関数の合成となっており、その層を L 層積み重ねることで、入力データ x に対して線形変換と非線形変換を交互に繰り返し、出力データ y を与える関数となっている。

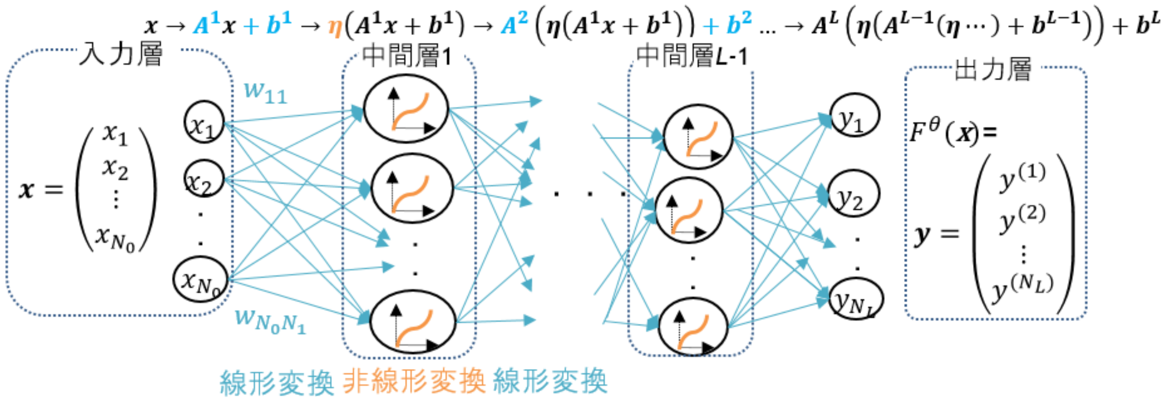

図 2: ニューラルネットワーク

以下、入力 x の次元が N_0、出力 $F(x)$ の次元が N_L、パラメータ θ の次元が M の順伝播型ニューラルネットワークの集合[24]を $\mathcal{NN}_{M;N_0,N_L}$、パラメータの集合を Θ_M と記載する。

[24] 行列 A^l とベクトル $b^l (l = 1, \ldots, L)$ の各成分の個数なので、$M = \sum_{i=1}^{L} N_{i-1} \times N_i + N_i$。

4　ディープ・ヘッジング

本節では、ディープ・ヘッジング（Buehler et al. [2019a]）を紹介する。ディープ・ヘッジングとは、凸リスク最小化問題を、深層学習により数値的に解く枠組みである。2 節で述べたとおり、リスク中立評価を経由せずに凸リスク最小化問題を直接解くことで、取引コストなどの市場摩擦の影響を定量化できるため、注目を集めている[25]。

以下、(1) 節では、Buehler et al. [2019a] で提示されたディープ・ヘッジングの枠組みを紹介する。そのうえで、(2) 節ではその後の研究の潮流を述べ、(3) 節では今後の展望をまとめる。

(1)　Buehler et al. [2019a] のアルゴリズム

ディープ・ヘッジングは、ヘッジ戦略をニューラルネットワークによりモデル化し、深層学習を用いて損失リスクを最小化するようにモデルを学習させ、学習結果を用いてヘッジ戦略を求めるという一連の工程である。以下、2 節で導入した記法を用いて、この工程を定式化する。ここでは、簡単のため、原資産（ヘッジ手段）の価格過程 $\{S_k\}_{k=0,\ldots,n-1}$ がマルコフ過程の場合、すなわち将来の価格が過去の価格によらずに現時点のみに依存して決まる場合を考える。

ヘッジ戦略のモデル化では、以下のとおり、ヘッジ戦略 $\left\{\hat{\delta}_k^{\theta}\right\}_{k=0,\ldots,n-1}$ をニューラルネットワークによる関数系で記述する。

$$\begin{cases} \hat{\delta}_0^{\theta} = F^{\theta_0}(0, S_0) \\ \hat{\delta}_k^{\theta} = F^{\theta_k}\left(\hat{\delta}_{k-1}^{\theta}, S_k\right) \quad (k = 1, \ldots, n-1) \end{cases} \tag{8}$$

ここで、$F^{\theta_k} \in \mathcal{NN}_{M;2,1}$（入力が $\hat{\delta}_{k-1}^{\theta}, S_k$ で 2 変数、出力が $\hat{\delta}_k^{\theta}$ で 1 変数）であり、F^{θ_k} は 2~3 層の浅いニューラルネットワークとするのが通例である。また、各期のヘッジ戦略を記述するニューラルネットワーク F^{θ_k} のパラメータ $\theta_k \in \Theta_M$ は、各期で異なるものとする。ニューラルネットの学習では、全期間のデータを用いてこれらを一度に学習する。さらに、満期までのヘッジ戦略全体を記述するニューラルネットワークのパラメータを $\theta = (\theta_0, \ldots \theta_{n-1}) \in \prod_{k=0}^{n-1} \Theta_M$ とする。すなわち、各期間それぞれのヘッジ戦略を、前期のヘッジ戦略と当期の原資産価格を入力とする浅い層のニューラルネットワークで記述し（図 3 の一つのブロック、図では 3 層）、期間を通じたヘッジ戦略を再帰的な深い層のニューラルネットワークとして記述する（図 3 全体）。以下のイ節では、ヘッジ戦略をこのようなニューラルネットワークによりモデル化して損失リスクを最小化することの妥当性（収束性）を述べる。

[25]業界専門誌 Risk Magazine によると、一部の外資系金融機関では、実際にディープ・ヘッジングを活用していると報じられている。Buehler et al. [2019a] の著者である Hans Buehler（XTX Markets）はこの業績により、Quant of the year 2022 を受賞した（Risk.net [2022]）。

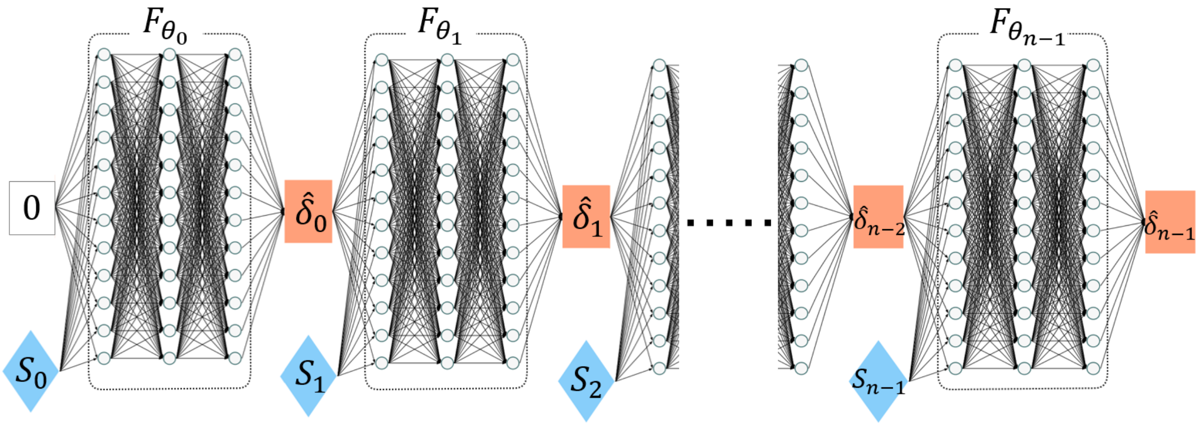

図 3: ディープ・ヘッジングにおけるヘッジ戦略のモデル化

次に、パラメータ θ の学習では、$\{S_k\}_{k=0,\ldots,n}$ の将来シナリオ（確率分布とその実現値）$\{S_k(\omega_i)\}_{\substack{k=0,\ldots,n\\ i=1,\ldots,q}}$ が与えられたもとで、各シナリオのもとでの損益 $\left\{\mathrm{PL}^{(Z_T,p_0,\delta^\theta)}(\omega_i)\right\}_{i=1,\ldots,q}$ を計算し、損失リスク $\rho\left(\left\{\mathrm{PL}^{(Z_T,p_0,\delta^\theta)}(\omega_i)\right\}_{i=1,\ldots,q}\right)$ を最小化する θ^* を求める。その際、3. (1) ハ節で紹介した深層学習の学習技術を用いるため、損失リスクの表現を工夫する。この点を以下のロ節で述べる。

ヘッジ戦略の実行においては、学習させたニューラルネットワーク $F^{\theta_k^*}$ に、実現した原資産価格 $\{S_k(\widetilde{\omega})\}_{k=0,\ldots,n}$ を逐次的に代入することで、ヘッジ戦略 $\left\{\hat{\delta}_k^{\theta^*}\right\}_{k=1,\ldots,n-1}$ 求めることができる。

$$\begin{cases} \hat{\delta}_0^{\theta^*} = F^{\theta_0^*}(0, S_0) \\ \hat{\delta}_k^{\theta^*} = F^{\theta_k^*}\left(\hat{\delta}_{k-1}^{\theta^*}, S_k(\widetilde{\omega})\right) \quad (k = 1, \ldots, n-1) \end{cases} \tag{9}$$

イ　近似定理

上記の枠組みでは、原資産価格 $\{S_k\}_{k=0,\ldots,n}$ が 1 次元のマルコフ過程に従う場合の工程を述べた。ここでは、Buehler et al. [2019a] に従って、より一般に $\{S_k\}_{k=0,\ldots,n-1}$ を $\mathcal{F}_k$-適合な $\mathbb{R}^d$-値確率過程として、ヘッジ戦略をニューラルネットワークでモデル化することの妥当性（近似定理）を述べる。

近似定理を述べるにあたり、追加の仮定と記法を準備する。まず、損益 $\mathrm{PL}^{(Z_T,p_0,\delta)}$（(1) 式）中の取引コストの関数 c_k は右半連続（$x \in \mathbb{R}$ に対し $\lim_{x \downarrow a} c_k(x) = c_k(a)$）とする。また、$\{I_k\}_{k=0,\ldots,n-1}$ を各時刻での市場情報を表す $\mathbb{R}^r$-値確率過程とし、I_k は $\mathcal{F}_k$ を生成するものとする[26]。さらに、選択可能なヘッジ戦略の集合 $\mathcal{H}$ を $\mathbb{R}^d$-値確率過程の空間の部分集合とする[27]。ニューラルネットワーク $\mathcal{NN}_{M;N_0,N_1}$ で表現可能なヘッジ戦略の集合 $\mathcal{H}^M$

[26] ここで、$\{S_k\}_{k=0,\ldots,n}$ は、市場情報の一部である（$\{S_k\}_{k=0,\ldots,n}$ が生成する σ-加法族が $\{\mathcal{F}_k\}$ の部分 σ-加法族である）としている。

[27] 取引制約等を加味して定義する。詳細は、Buehler et al. [2019a]§2.2 を参照。

を以下で定義する。

$$\mathcal{H}_M = \left\{ \left\{ \hat{\delta}_k^{\theta} \right\}_{k=0,\ldots,n-1} \mid \hat{\delta}_k^{\theta} = F^{\theta_k} \left(\delta_{k-1}, I_0, \ldots, I_k \right),\ \theta_k \in \Theta_M, F^{\theta_k} \in \mathcal{NN}_{M;r(k+1)+d,d} \right\}$$

とする。このとき、$\{S_k\}_{k=0,1,\ldots,n}$ がマルコフ過程の場合、(9) 式の定義と一致することに注意する。ここで、X を $\mathcal{F}_n$-可測な確率変数とし、

$$\pi(X) = \inf_{\delta \in \mathcal{H}} \rho \left(\mathrm{PL}^{(X,0,\delta)} \right)$$

とし

$$\pi_M(X) = \inf_{\delta \in \mathcal{H}_M} \rho \left(\mathrm{PL}^{(X,0,\delta)} \right)$$

とする。すなわち、ペイオフ X を持つデリバティブのヘッジについて、$\pi(X)$ は、選択可能なすべてのヘッジ戦略の集合から最適なヘッジ戦略を選んだ場合のリスク量であり、$\pi_M(X)$ は、ニューラルネットワークで表現可能なヘッジ戦略の集合から最適なヘッジ戦略を選んだ場合のリスク量である。

定理 1. 近似定理

$$\lim_{M \to \infty} \pi_M(X) = \pi(X)$$

定理 1 は、c_k の右半連続性などの仮定のもと、ニューラルネットワークの普遍近似定理を利用することで証明できる。詳細については、Buehler et al. [2019a] Proposition 4.2 を参照されたい。ただし、この定理は、収束を保証するのみで、収束の精度や速度については解析が困難であることに注意されたい。

定理 1 は、ニューラルネットワークで近似されたヘッジ戦略 $\mathcal{H}_M$ の中で最小化されたリスク量 $\pi_M(X)$ は、パラメータ数 M（1 期間のヘッジ戦略を記述するニューラルネットワークのパラメータ数）を増やせば、選択可能なヘッジ戦略 $\mathcal{H}$ の中で最小化されたリスク量 $\pi(X)$ に収束することを示している。この事実により、ヘッジ戦略をニューラルネットワークによりモデル化して損失リスクを最小化することが、一つの方法であると考えられる[28]。

ロ　ニューラルネットワークの重みパラメータの学習における工夫

損失関数 $J(\theta)$ を最小化する θ^* を効率的に学習するため、3 節で紹介した確率的勾配降下法や誤差逆伝播法などを用いる。その際、損失関数 $J(\theta)$ が、1 つの訓練データのサンプルに関する誤差の和となっていることや θ について微分可能であることが望ましい。このため、ディープ・ヘッジングにおいては、$J(\theta) = \rho \left(\left\{ \mathrm{PL}^{(Z_T, p_0, \delta^\theta)}(\omega_i) \right\}_{i=1,\ldots,q} \right)$ を確率変数の期待値として表現することが可能なリスク尺度のクラスを考える[29]。

[28] Buehler et al. [2019a] では、モデル化されたヘッジ戦略 $\{\hat{\delta}_k^{\theta}\}_{k=0,\ldots,n-1}$ が、凸リスク最小化問題の解 δ^* に収束することを直接述べていない。その理由は、注意 1 で述べたとおり、リスクを最小化するヘッジ戦略の存在の議論を避けるためであると考えられる。

[29] バリュー・アット・リスクは、期待値として表現できないことが知られている。

期待ショートフォールなどのリスク尺度を期待値として表現する研究は、Rockafellar et al. [2000] に始まり、Ben-Tal and Teboulle [2007] が最適化確実性等価（Optimized certainty equivalence）[30]と呼ばれる概念を導入することで整理された。最適化確実性等価は以下の通り定式化される。$l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を、連続、非減少、凸な関数とし、実数値確率変数 X に対し、

$$\kappa(X) = \inf_{w\in\mathbb{R}} \{w + E[l(-X-w)]\}$$

とすると、κ は凸リスク尺度の定義を満たす。この表現ができるリスク尺度を、最適化確実性等価を持つと呼ぶ。たとえば、期待ショートフォールは、$l(x) = (1/(1-\alpha))\max\{x,0\}$ として、以下のとおり期待値で表現できることから、確実性等価を持つ。

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = \inf_{w\in\mathbb{R}} \left\{w + E\left[\frac{1}{1-\alpha}\max\{-X-w,0\}\right]\right\}$$

以下のとおり、最適化確実性等価を持つリスク尺度は、効率的な学習が可能となる。すなわち、最適化確実性等価による表現を用いて、最小化問題の変数を θ から $\theta\times w$ の 2 変数に変換する。

$$\begin{aligned}\inf_\theta \rho\left(\mathrm{PL}^{\left(Z_T,p_0,\hat{\delta}^\theta\right)}\right) = &\inf_\theta \inf_{w\in\mathbb{R}} \left\{w + E\left[l\left(\mathrm{PL}^{\left(Z_T,p_0,\hat{\delta}^\theta\right)} - w\right)\right]\right\} \\ = &\inf_{\bar{\theta}=\theta\times w} \left\{w + E\left[l\left(\mathrm{PL}^{\left(Z_T,p_0,\hat{\delta}^\theta\right)} - w\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

このように変換し、学習における損失関数を

$$J\left(\bar{\theta}\right) = \left\{w + \sum_{i=1}^{q} \left[l\left(\mathrm{PL}^{\left(Z_T,p_0,\hat{\delta}^\theta\right)}(\omega_i) - w\right)\right] P(\omega_i)\right\}$$

と設定する。3. (1) ハ節で述べたとおり、このように損失関数を訓練データのサンプルに関する和として表現することで、確率的勾配降下法が利用可能となる。また、右辺の $\bar{\theta}$ に関する導関数が解析的に得られる場合、それを利用して誤差逆伝播法を高速化できる（Buehler et al. [2019a] Proposition 4.6 参照）。

---

[30] 意思決定論において、確実性等価を発展させる形で、導入された概念。

ハ　数値計算結果

Buehler et al. [2019a]§5 では、数値実験を通じて、学習結果の妥当性が実験的に示された。以下、その概要を紹介する。

設定

- ヘッジ対象商品: ヨーロピアン・コール・オプション（満期 1 ヵ月、アット・ザ・マネー・ストライク）
  $Z_T = \max\left\{S_T^{(1)} - K, 0\right\},\ \ T = \frac{30}{365}$
- ヘッジ手段が従う確率分布：ヘストン・モデル（Heston [1993]）

$$\begin{cases} d\widetilde{S}_t^{(1)} = \sqrt{\widetilde{S}_t^{(2)}}\widetilde{S}_t^{(1)} dW_t^{(1)} \\ d\widetilde{S}_t^{(2)} = \alpha\left(b - \widetilde{S}_t^{(2)}\right)dt + \sigma\sqrt{\widetilde{S}_t^{(2)}}\left(\rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^{(2)}\right) \\ \left(\widetilde{S}_0^{(1)}, \widetilde{S}_0^{(2)}\right) = \left(s_0^{(1)}, s_0^{(2)}\right) \end{cases} \tag{10}$$

  各パラメータの値は、$\alpha = 1$、$b = 0.04$、$\rho = -0.7$、$\sigma = 2$、$s_0^{(1)} = 100$、$s_0^{(2)} = 0.04$
- 日次でヘッジを行う： $t_k = k/365,\ n = 30$
- リスク尺度: 期待ショートフォール
- ヘッジ手段の将来シナリオの生成
  (10) 式を離散化してモンテカルロシミュレーションにより、q 個の将来シナリオ $\left\{\left(S_i^{(1)}(\omega_j), S_i^{(2)}(\omega_j)\right)\right\}_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,q}}$ を生成。
- ニューラルネットワークの重みパラメータの学習
  学習率 $\nu_i = 0.0005$、バッチ数 $q_B = 256$ とし、Adam 法により $\rho\left(\left\{\mathrm{PL}^{(Z_T, p_0, \delta^\theta)}(\omega_i)\right\}_{i=1,\ldots,q}\right)$ を最小化する θ^* を計算。

結果

1. ディープ・ヘッジングとデルタ・ヘッジの比較（取引コストがない場合）
   Buehler et al. [2019a] Figure 2 は、取引コストがない（取引コストの関数 $c_k(x) = 0$）設定のもと、ディープ・ヘッジング（リスク尺度を 50%-期待ショートフォールと設定）とデルタ・ヘッジの実現損益の度数分布[31]を示している。このグラフから、ディープ・ヘッジングによる実現損益の挙動がデルタ・ヘッジと近い形状となっていることがわかる[32]。このほか、グリークスも同様の形状となることが確

[31] サンプル数 $q' = 10^6$ のアウトオブサンプルテストから得られる度数分布。すなわち、学習に用いたシナリオとは別のシナリオ $\{S_k(\widetilde{\omega}_i)\}_{\substack{k=0,\ldots,n \\ i=1,\ldots,q'}}$ のもとで、学習結果のヘッジ戦略を適用した場合の損益 $\left\{\mathrm{PL}^{(Z_T, p_0, \delta^{\theta^*})}(\omega_i)\right\}_{i=1,\ldots,q'}$ の度数分布。

[32] このグラフの横軸は、原資産 1 単位に対する%表示のヘッジ誤差である（上記のとおり、原資産の現在価格 $s_0^{(1)} = 100$ と設定しているため）。

認されている[33]。これらの事実から、取引コストがない場合、ディープ・ヘッジングの学習結果は妥当であることが示唆される[34]。

2. リスク尺度のパラメータ設定がヘッジ戦略の学習結果に与える影響

   Buehler et al. [2019a] Figure 7 は、リスク尺度を、50%-期待ショートフォールに設定した場合と 99%-期待ショートフォールに設定した場合のディープ・ヘッジングの実現損益の度数分布を示している。この図上部のグラフから、リスク尺度を 50%-期待ショートフォールに設定した場合、実現損益の分布は中央値付近で高くなる（平均以下の損失を避けるようなヘッジ戦略が学習されている）ことがわかる。また、この図下部の表から、リスク尺度を 99%-期待ショートフォールに設定した場合、実現損益の分布の裾が 50%-期待ショートフォールに設定した場合に比べ小さくなっている（大きな損失を避けるようなヘッジ戦略が学習されている）ことがわかる。これらの事実から、リスク尺度のパラータ設定によってディープ・ヘッジングの学習結果が想定どおり変化することが示唆される。

3. 取引コストの効用無差別価格への影響

   Buehler et al. [2019a] Figure 11 は、取引コストを $c_k(\delta_k - \delta_{k-1}) = \varepsilon \sum_{i=1}^{2} \left|\delta_k^{(i)} - \delta_{k-1}^{(i)}\right| S_k^{(i)}$ として、ε を変化させたときの効用無差別価格 p_ε を示している。このグラフから、

$$p_\varepsilon - p_0 = O\left(\varepsilon^{0.71}\right)$$

   となることがわかる。これは、ブラック＝ショールズ・モデルなど原資産の価格過程が 1 次元の拡散過程に従う場合に、理論的に解析された結果（Whalley and Wilmott [1997]、Rogers [2004]）と整合的である。この事実から、ディープ・ヘッジングを通じて算出した効用無差別価格は、取引コストに対し理論通り変化することがわかり、ディープ・ヘッジングのヘッジエラーは相応の精度で収束していることが示唆される。

(2) 研究の潮流

イ　将来シナリオの生成

4. (1) 節では、原資産（ヘッジ手段）の将来シナリオは、予め与えられているものとして議論した[35]。しかしながら、ディープ・ヘッジングの実用においては、現実的な将来シナリオを生成することが必要であるため、その後の研究の中心的論点となっている。

なかでも、深層学習の生成モデルを用いた手法が、盛んに研究されている。たとえば、Wiese et al. [2019] では、ヘッジ手段となりうるようなバニラ・オプション[36]の価

[33] Buehler et al. [2019a] Figure 3 参照。

[34] 2 節で述べたとおり、取引コストがない場合、デルタ・ヘッジは複製を通じヘッジ誤差を 0 とすることができる。ただし、僅少ながら数値計算誤差などによりヘッジ誤差が生じるため、デルタ・ヘッジの実現損益の度数分布もわずかに広がりを持つ。

[35] Buehler et al. [2019a] では、ある固定パラメータの確率微分方程式を用いて、将来シナリオを生成している。

[36] ヨーロピアン・オプション等の基本的なデリバティブ。

格の将来シナリオを、敵対的生成ネットワーク（Generative Adversarial Network）[37]を用いて生成する手法が示された。そのうえで、準最尤推定法（Quasi-maximum likelihood method）やベクトル自己回帰モデル（Vector autoregressive model）と比較して、敵対的生成ネットワークにより生成されたデータの方が、過去データの特徴をよりよく捉えていることを複数の指標により確認した。また、Buehler et al. [2020, 2021a] では、少ない市場データから、将来シナリオを生成することを主眼に、深層学習の生成モデルである変分オートエンコーダー（Variational Autoencoder）と、シグナチャーと呼ばれる特徴量[38]を用いる手法が提案されている。

ここで、将来シナリオのサンプル数を増やした際に期待リターンが真に正となるヘッジ戦略（統計的裁定戦略）が存在する場合、学習結果が統計的裁定戦略に大きく影響され、偏ったヘッジ戦略（特定の資産の保有量を単調に増やすなど）を示唆する傾向があることが知られている。Buehler et al. [2022a, 2021b] では、取引コストが存在する場合にリスク中立評価の考え方を拡張して、将来シナリオから統計的裁定を除去する手法（すなわち、期待リターンが真に正となるヘッジ戦略が存在しないよう、与えられた将来シナリオを変換する手法）を提示した。さらに、この手法により将来シナリオから統計的裁定を除去することで、ディープ・ヘッジングにより学習させたヘッジ戦略が改善する（ヘッジ誤差が小さくなる）ことを数値的に示している。

このほか、実証的な研究として、Zhang and Huang [2021] や Mikkilä and Kanniainen [2021] では、将来シナリオにオプション価格の過去データを用いた数値実験が報告されている。また、Horvath et al. [2021b] では、将来シナリオが、ラフ・ボラティリティ・モデル（Gatheral et al. [2018]）と呼ばれるマルコフ性を持たない確率過程に従う場合を論じている。さらに、Lütkebohmert et al. [2021] では、将来シナリオが、係数に不確実性がある確率微分方程式に従う場合を論じている。

ロ　異なる問題設定におけるディープ・ヘッジングの検証

本論文では、Buehler et al. [2019a] の設定に合わせ、ヘッジの問題を、満期時損益を凸リスク尺度で測ったリスク量を最小化する問題として定式化し、効用無差別価格で価格付けする手法を述べた。実務上は、状況や目的に応じて、ヘッジの問題の定式化を変更・拡張する必要がある。

リスク量の計測において、Kolm and Ritter [2019] や Cao et al. [2021] は、凸リスク尺度の代わりに、満期時損益の平均・分散を用いてリスク量を定式化し最適化の目的関数としている。また、Carbonneau [2021] においても、凸リスク尺度を用いずに、ヘッジ誤差を最適化の目的関数としている。また、デリバティブがヘッジ対象の場合、時間の経過とともに満期が短くなるなど、毎営業日ヘッジ対象の商品の条件が変化する。Buehler et al. [2022b] では、この点を考慮するため、ヘッジの問題をベルマン方程式に

[37] Goodfellow et al. [2020] で提案された、深層学習の生成モデル。ニューラルネットワークを用いて、入力データと同じ特徴を持った別の擬似的なデータセットを生成する手法。生成と識別の 2 つのネットワークを競わせて学習を深めていくことで、質の高いデータセットが生成可能。

[38] 多資産の価格間の高次相関構造を一般化した特徴量。

より定式化し、それを強化学習のアクター・クリティック（Actor-Critic）法により解く枠組みを提示した。

また、Carbonneau and Godin [2021] では、効用無差別価格付け（定義 3）の代わりに、リスク均等価格付け（Equal risk pricing）[39]を議論している。

なお、Buehler et al. [2019a] 以前にも、取引コストが存在しないなどの特別な設定下ではあるものの、深層学習や強化学習を用いてヘッジ戦略を導出する研究が行われていた。たとえば、Halperin [2017] では、取引コストが存在しない設定で、ブラック＝ショールズ・モデル下でのヘッジ戦略を、Q 学習[40]の枠組みで導出する手法が提示された。具体的には、ポートフォリオを調整して複製を達成するというブラック＝ショールズ・モデルの基本的な考え方を、時間を離散化したうえで強化学習のマルコフ決定過程により記述し、最適なヘッジ戦略を解析的に求めたり、動的最適化問題の解として定式化したりする方法が提示された。さらに、Halperin [2019] では、この手法の数値計算が試みられている。このほか、Q 学習による定式化を採用した研究として、Mikkilä and Kanniainen [2021] や Buehler et al. [2019b] などが挙げられる。

ハ　より複雑なデリバティブでの数値実験

Buehler et al. [2019a] では比較的満期の短いデリバティブを対象に数値実験が行われたのに対し、より複雑なデリバティブを対象とした研究も多い。たとえば、Carbonneau and Godin [2021] や Imaki et al. [2021] はルックバックオプションやアジアンオプションなどのエキゾチックデリバティブを扱っている。また、Carbonneau [2021] は満期の長いデリバティブを扱っている。Shi et al. [2021] は、凸リスク最小化問題を解くアルゴリズムとして、Buehler et al. [2019a] の手法と前進後退確率微分方程式の数値的解法（Weinan et al. [2017]）を経由する手法を比較し、Buehler et al. [2019a] の手法が長期の最適化問題に対しても有効であることを確認されている。

ニ　ヘッジ戦略のモデル化の変更

Buehler et al. [2019a] では、順伝播型ニューラルネットワークによりヘッジ戦略をモデル化する方法（(9) 式）が提示された。4. (2) ハ節で述べたとおり、特定の問題においてはこのモデル化によりヘッジ戦略が適切に学習可能であることが示唆される。しかし、より複雑な問題に対し効率的にヘッジ戦略を求める必要がある場合、ヘッジ戦略のモデル化の方法を変更することが有効である。

Zhang and Huang [2021] では、長・短期記憶リカレントニューラルネットワーク（Long Short Term Memory Recurrent Neural Network）を用いて、過去のヘッジ戦略の履歴を引数にして、次の期のヘッジ戦略を決定するモデルを提示した。数値実験では、Leland [1985]

---

[39]Guo and Zhu [2017] で定式化された、デリバティブの売り手のリスク量と買い手のリスク量が等しくなる価格。一般に効用無差別価格は売り手側の価格と買い手側の価格が異なるが、リスク均等価格は売り手側と買い手側の価格が等しくなる。

[40]Q 学習とは、強化学習の手法の一つで、将来の渡る報酬を、その時の環境の状態と行動を引数とする関数として表現して、その関数を推計する手法である。

等の古典的な手法と比較し、損益のヘッジ誤差が改善することを確認した。Carbonneau [2021] でも、長・短期記憶リカレントニューラルネットワークを採用し、原資産価格過程にジャンプが含まれる設定下で、長期のデリバティブのヘッジについて論じている。

また、Tawada and Sugimura [2020] では、ヘッジ戦略のモデル化において、ニューラルネットワークの代わりに、ガウス過程回帰（Gaussian process regression）を用いる手法を提案した。ガウス過程回帰は、学習させたパラメータの解釈可能性が高く、学習結果で得られるヘッジ戦略も解釈しやすいことが特長である。この特長を活かし、学習に用いたシナリオと実際に実現したシナリオが大きく乖離する場合には、別のヘッジ手法（リスク中立評価に基づくヘッジ等）に推移させていく手法を提示している。Imaki et al. [2021] では、ヘッジ戦略のモデル化において、取引量が一定の水準以下の場合は取引をしないという仮定を置き、その水準を深層学習により推定する手法を示した。このモデルによる近似をしても、ヘッジ戦略が最適解となることが理論的に示されたのみならず、ヘッジ戦略の学習に要する計算コストが劇的に削減されることが数値実験により示された。また、Son and Kim [2021] でも、様々な深層学習のモデル（回帰型ニューラルネットワークや畳み込みニューラルネットワークなど）を用いた数値実験が行われている。

ホ　様々なリスク管理への応用

凸リスク最小化問題は、一般に損益とリスク量が与えられたもとでの最適化問題であり、デリバティブのヘッジに限らずリスク管理の様々な問題を記述可能である。そのため、ディープ・ヘッジングの枠組みをリスク管理に応用する議論がみられ始めている。たとえば、銀行のバンキング部門のリスク管理への応用が Krabichler and Teichmann [2020] で、保険会社のリスク管理への応用が Fernandez-Arjona and Filipović [2022] で、それぞれ論じられている。また、清水 [1998] では、ストレステストにおけるフィードバック効果を勘案するため、教師あり学習の枠組みでニューラルネットワークを用いている。ディープ・ヘッジングを用いて、こうしたストレステストの分析を行うことも可能と考えられる。

(3)　今後の展望

イ　発展可能性

ディープ・ヘッジングは、損益のリスク量が与えれたもとで最適な取引戦略を求める枠組みであるため、デリバティブのヘッジの問題やリスク管理の問題をはじめ、幅広い問題に対して柔軟に応用することが可能であることから、様々な発展が展望される。以下、デリバティブ分野とその他の分野に分け、発展可能性を整理する。

デリバティブ分野では、ヘッジ戦略の精緻化と自動化が期待される。ヘッジ戦略の精緻化については、ヘッジ戦略に取引コストなどの市場摩擦を加味できるほか、ヘッジ手段の将来シナリオ生成時に金融市場で観測される情報以外の情報（たとえば、ニュース

など）を加味することで、それらの情報をヘッジ戦略に反映させることが可能となる。また、デリバティブをヘッジする主体のリスク選好に合わせてリスク尺度を設定することで、リスク選好に合わせたヘッジ戦略が導出可能となる。これらは、デリバティブのリスク管理において新しい分析手法となりうる。さらに、ヘッジ戦略の精緻化により、ヘッジ操作の自動化も可能になると考えられる。2. (1) ロ節で述べたとおり、リスク中立評価に基づくヘッジでは、実際には誤差が生じることで複製を達成できないため、追加的なコスト・チャージ等の価格調整が加えられるのが通例である。とくに、これらの価格調整は取引者の経験等の定性的な判断に基づき行われることが多いことため、ヘッジ操作の自動化は困難であった。ディープ・ヘッジングにより、市場摩擦を直接考慮したヘッジ戦略の導出が可能となることで、定性的な判断に基づく価格調整が不要になれば、ヘッジ操作の自動化が容易になる。また、将来シナリオの生成にも深層学習の生成モデルを用いることで、ヘッジ戦略の学習と将来シナリオの生成を繰り返し行うことが可能となり、モデルに依存せず真にデータのみからヘッジ戦略を算出することが可能となることが期待される。

デリバティブ分野以外については、4. (2) ホ節で述べたとおり、リスク管理への応用が展望されるほか、企業の経営戦略等のより幅広い意思決定問題をデータに基づき行うことが可能となりうる。ただし、リスク管理への応用やより幅広い意思決定問題は、その定式化や戦略の学習結果の妥当性確認がデリバティブのヘッジ問題に比べ難しい。そのため、まずはデリバティブ分野でディープ・ヘッジングを活用する技術を成熟させることが肝要であると考えられる。

ロ　実用上の留意点

ここまで述べたとおり、ディープ・ヘッジングは新しい分析手法であり、多くの課題が議論されている。以下、ディープ・ヘッジングの問題設定に起因する点と深層学習の技術的性質に起因する点に分け、実用上の留意点を整理する。

4. (2) ロ節で述べたとおり、ディープ・ヘッジング実用にあたっては、状況や目的に応じて問題設定を拡張・変更する必要がある。とくに、リスク尺度などのパラメータを設定する方法として確立された方法は現時点では存在しないため、外生的に与えざるを得ない。そのため、ディープ・ヘッジングの実務上の主な活用方法としては、複数のリスク尺度のもとで学習させた結果を比較しつつリスク管理において参考にするといった方法が考えられる。また、ディープ・ヘッジングによりデリバティブ価格を算出する際（とくに、対顧取引や公正価値算定などを目的とする場合）には、外生パラメータ（リスク尺度などのパラメータ）が、価格が大きく影響する可能性に注意が必要である。

4. (2) ロ節で述べた問題設定の拡張・変更以外にも、実務上求められる問題設定がある。たとえば、デリバティブの満期 T 時点のリスク量だけではなく、途中時点 $t \in [0, T]$ でのリスク量も含めた最適化は、実務上は必須であると考えられる。また、2007~08年の金融危機以降のデリバティブ実務で重要性が増した、xVA と呼ばれる価値調整を、ディープ・ヘッジングの枠組みに組み入れることも重要な課題である。また、運用上

は、一度学習したヘッジ戦略を、その後どのように見直していくか（たとえば自らが保有するポートフォリオや市場環境がどの程度変わった場合にヘッジ戦略を見直すか）という点も重要な論点である。

深層学習の技術については、3 節で述べたとおり、既存の金融工学の基盤技術であるモンテカルロ法などと比較して、学習精度などの数値的挙動に関する理論的な保証が必ずしも確立していないため、実用に際して注意が必要となる。また、他分野で深層学習を活用する際と同様に、学習の高速化や安定化、学習結果の解釈性などは課題となる。

このように、ディープ・ヘッジングは、様々な発展可能性が展望されるものの、課題も多い。そのため、既に活用されているリスク中立評価に基づくヘッジと比較しながら、ディープ・ヘッジングの活用方法を探ることが重要であると考えられる。とくに、何らかのモデルを活用する際には、その元データや算出原理を明確に認識したうえで、モデルが算出した数字を慎重に利用する必要がある。ここまで述べた、ディープ・ヘッジングとリスク中立評価に基づくヘッジの関係を表 1 にまとめた。

	ディープ・ヘッジング	リスク中立評価に基づくヘッジ
原理	凸リスク最小化（非完備市場理論） — 実確率	複製、無裁定（リスク中立評価） — リスク中立確率
主な 元データ	1. 将来の市場環境のシナリオ 2. リスク選好度（リスク尺度）	現時点の市場環境の情報 （流動性の高い商品の市場価格）

表 1: ディープ・ヘッジングとリスク中立評価に基づくヘッジの関係

5　ディープ・キャリブレーション

本節では、ディープ・キャリブレーション（Hernandez [2017]、Horvath et al. [2021a] など）を紹介する。2. (3) 節で述べたとおり、キャリブレーションの工程は、計算負荷が高く、最適化計算の収束などの問題が起こりやすい。ディープ・キャリブレーションは、予めモデル・パラメータとモデル価格の関係をニューラルネットワークにより学習させ、価格付け計算（リスク中立評価）の一工程であるモデル・パラメータの最適化計算を置き換える手法である。これにより、価格付け計算の高速化・安定化が期待されている。

以下、(1) 節では、Hernandez [2017] に沿ってディープ・キャリブレーションのアルゴリズムを紹介する。そのうえで、(2) 節でその後の研究の潮流を述べ、(3) で実務上の利点と留意点をまとめる。

(1)　Hernandez [2017] のアルゴリズム

ディープ・キャリブレーションは、以下の二段階で実行される。まず、予めキャリブレーション対象商品のモデル価格を入力、モデル・パラメータを出力とする関数をニューラルネットワークにより学習させる。そのうえで、日々の価格付けの際に、学習したニューラルネットワークにキャリブレーション対象商品の市場価格を入力して、モデル・パラメータを近似的に求める（図 4）。以下、2. (3) 節の記法を用いて、このアルゴリズムを定式化する。なお、このアルゴリズムは、3. (1) イ節の分類では教師あり学習に属する。

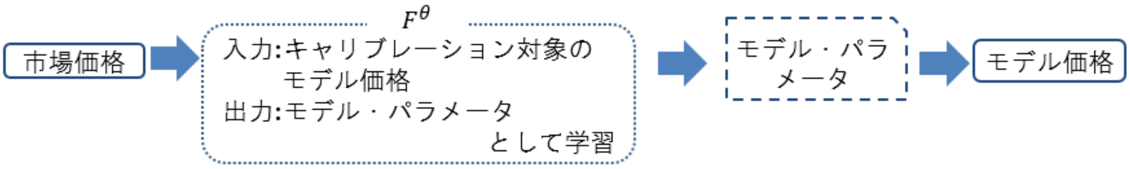

図 4: ディープ・キャリブレーションによる価格計算工程

R 個のキャリブレーション対象商品の市場価格 $\{\mathrm{QP}(\tau_i)\}_{i=1,\ldots,R}$ が与えられたもとで、モデル・パラメータ $\sigma \in \mathbb{R}^Q$ を決定する問題を考える。

1. 訓練データ生成
   外的ファクター $\hat{\phi}_j \in \mathbb{R}^m$ とモデル・パラメータ $\hat{\sigma}_j \in \mathbb{R}^Q$ をランダムに発生させる[41]。次に、モデル価格 $\left\{\mathrm{MP}\left(\hat{\sigma}_j;\tau_i,\hat{\phi}_j\right)\right\}_{i=1,\ldots,R}$ を計算する。これを q 回繰り返すことで、訓練データ $\left\{\hat{\sigma}_j,\hat{\phi}_j,\mathrm{MP}\left(\hat{\sigma}_j;\tau_i,\hat{\phi}_j\right)\right\}_{\substack{i=1,\ldots,R\\ j=1,\ldots,q}}$ を生成する。

[41] 外的ファクターとモデル・パラメータをランダムに発生させる際の上限や下限は、過去データなどを参照して決定する。

2. 学習
$\left(\hat{\phi}_j, \left\{\mathrm{MP}\left(\hat{\sigma}_j; \tau_i, \hat{\phi}_j\right)\right\}_{i=1,\ldots,R}\right) \in \mathbb{R}^{m+R}$ を入力、$\hat{\sigma}_j$ を出力とする $K^\theta \in \mathcal{NN}^\theta_{M;m+R,Q}$ を学習させる。たとえば、損失関数を

$$J(\theta) = \sum_{j=1}^{q} \left(\hat{\sigma}_j - K^\theta\left(\hat{\phi}_j, \mathrm{MP}\left(\hat{\sigma}_j; \tau_i, \hat{\phi}_j\right)\right)\right)^2$$

として、$J(\theta)$ を最小化する θ^* を求める。

3. 活用
日々のデリバティブの時価計算において、キャリブレーション対象商品の市場価格 $\{\mathrm{QP}_i\}_{i=1,\ldots,R}$ と外的ファクター $\phi \in \mathbb{R}^m$ が与えられたもとで、$K^{\theta^*}\left(\phi, \{\mathrm{QP}_i\}_{i=1,\ldots,R}\right)$ をモデル・パラメータとして使用する。

Hernandez [2017] では、上記アルゴリズムを、ハル＝ホワイト・モデル（キャリレーション対象：スワップション）に適用し、過去データを用いて従来のキャリブレーション手法と比較し検証している。この数値実験の設定は、表 2 を参照されたい。なお、上記アルゴリズム中で、$\hat{\phi}_j, \hat{\sigma}_j$ の組をランダムに発生させる部分については、過去データを用いてモデル・パラメータと外的ファクターの相関を考慮すると計算が安定化することが、Hernandez [2017] で論じられている。

文献	モデル	キャリブレーション対象	ニューラルネットワークの設定	高速化の効果[42]
Hernandez [2017]	ハル＝ホワイト – パラメータ数 $Q = 2$	スワップション・6M-Libor – 商品数 $R = 200$	層数 $L = 5$（中間層 4 つ） 中間層の次元 $N_l = 64$ 訓練データ数 $q = 150{,}000$	約 225 倍
Horvath et al. [2021a]	（ラフ）ベルゴミ – パラメータ数 $Q = 8$	ボラティリティ・サーフェス – 商品数 $R = 88$	層数 $L = 5$（中間層 4 つ） 中間層の次元 $N_l = 30$ 訓練データ数 $q = 68{,}000$	約 9,000 ~16,000 倍

表 2: ディープ・キャリブレーションの数値実験例

(2) 研究の潮流

イ アルゴリズムの発展

Horvath et al. [2021a]; Bayer et al. [2019] や Liu et al. [2019a] は、Hernandez [2017] のアルゴリズムの高速・安定化を目的として、二段階法 (Two step method) と呼ばれる手法を提示した。この手法は、モデル価格の順関数 $\mathrm{MP}(\cdot; \tau_i, \phi)$ をニューラルネットワークにより学習させたうえで、通常の最適化手法を用いてモデル・パラメータをキャリ

[42] 詳細は、各文献を参照。

ブレーションする手法である。Horvath et al. [2021a]; Bayer et al. [2019] などでは、二段階法の主な利点として、ニューラルネットワークにより学習させるのが、モデル価格の順関数であるため、逆関数を学習させた場合に比べ、学習結果の検証や解釈がしやすいことが挙げている[43]。

その後、Itkin [2020] は、Hernandez [2017] のアルゴリズムを一部変更し、訓練データ生成をモデル価格の順関数（二段階法と同様に学習させる）を用いる手法を提示した。Itkin [2020] は、この手法の利点として、価格関数の順関数の学習において、関数が無裁定条件を保ちグリークスが滑らかになるような手法を用いると、安定的かつ高速なキャリブレーションが可能になることを挙げている。

また、Horvath et al. [2021a]; Bayer et al. [2019] では、キャリブレーション対象商品が、スワップションや為替のボラティリティなど、複数の満期・ストライクに渡る場合（キャリブレーション対象商品がマトリックスになっている場合）に、誤差関数 Error を工夫して、金利などのグリッドごとの誤差を最小化する手法を提示している。

ロ　様々なモデルへの拡張

これらのアルゴリズムを実務で活用することを目指し、様々な数値実験が行われている。とりわけ、Horvath et al. [2021a] では、2 段階法を用いたラフ・ボラティリティ・モデルのキャリブレーション手法が論じられており、ラフ・ボラティリティ・モデルの実務活用における大きな課題を解決しうる手法として期待されている。Horvath et al. [2021a] の数値実験の設定は、表 2 を参照されたい。

ほかにも、Dimitroff et al. [2018] ではヘストン・モデル、Lokvancic [2020] では SABR モデル、Büchel et al. [2021] や Sabbioni et al. [2021] では金利モデル、Benth et al. [2020] では一般の HJM モデルのキャリブレーション問題が論じられている。また、Liu et al. [2019b] では、ブラック＝ショールズ、ヘストン・モデル下におけるディープ・キャリブレーションの訓練データの生成に関する議論がされている。さらに、Brigo et al. [2021] では、ヘストン・モデルでのディープ・キャリブレーションの解釈可能性が論じられている。

(3)　実務上の利点と留意点

ディープ・キャリブレーションの技術は、以下のとおり、実務運用上望ましい特長を持っている。まず、ディープ・キャリブレーションは教師あり学習の枠組みに該当し、モデル・パラメータをランダムに生成し対応するモデル価格を計算することで、訓練データおよび検証用データを生成してデータ数を増やすことが可能であり、学習の安

[43] なお、モデル価格をニューラルネットで学習させることに関する研究は、Hutchinson et al. [1994] に始まり、多数の研究がされてきた。とくに、Garcia and Gençay [2000]; Dugas et al. [2009] では、無裁定条件などのファイナンスの議論上重要な条件を制約条件として加味してニューラルネットでモデル価格を学習させる手法を提示している。また、これらの研究のまとめた論文として、Ruf and Wang [2020] が参考になる。

定化や検証がしやすい点が挙げられる。また、深層学習の応用としては、比較的小規模な計算のみで十分な精度で学習ができることが、複数の論文で報告されている。さらに、学習結果の関数を検証することで、キャリブレーション可能な市場価格の範囲やグリークスの挙動を日々の時価計算に先立ち確認可能なため、既存の最適化計算に比べ、時価評価の頑健性を高めうる[44]と考えられる。

ただし、ディープ・キャリブレーションで学習させた結果は定期的な検証が必要である。とくに、市場環境が大きく変わり、モデル・パラメータと外的ファクターの相関構造が大きく変わった場合、学習させた関数の形状も大きく変わりうるため、早急な検証や既存の最適化手法への切替えが必要となると考えられる。

6　おわりに

本論文は、深層学習をファイナンスに応用したディープ・ヘッジングとディープ・キャリブレーションに関する研究に焦点を当て、実務面と学術面双方の観点から概要と研究動向を整理した。ディープ・ヘッジングは、深層学習により凸リスク最小化問題を解くことで、これまで定量的な分析ができなかった、取引コストなどの市場摩擦がデリバティブの価格付けやヘッジ戦略に与える影響を分析可能とするものである。キャリブレーションについては、リスク中立評価の枠組みにおける時価計算の一部工程を高速化・安定化しうるものである。このように、深層学習は、ファイナンスにおける様々な問題に、短期的・長期的に発展をもたらす可能性を孕んでいる。

本論文で扱ったヘッジやキャリブレーション以外にも、深層学習のファイナンスへの応用可能性が幅広く議論されている。ファイナンス分野では、ヘッジの問題をはじめとして、所与の制約条件の中で最適な行動を見つける「制御問題」として定式化される問題が多い。制御問題は、強化学習と相性が良いことから、強化学習を活用することで、ポートフォリオ最適化（Jiang et al. [2017]）、最適執行問題（Ning et al. [2021]）、マーケット・メイキング（Spooner et al. [2018]）、アルゴリズム・トレード（Deng et al. [2016]）などの問題を解決する手法が多く議論されている。このほかにも、資産価格の予測（Patel et al. [2015]）、Generative Adversarial Network（敵対的生成ネットワーク）を用いた金融時系列データの生成（Wiese et al. [2020]）などの研究も進められている。また、より一般的な数値計算問題に対する深層学習を応用した研究として、前進後退確率微分方程式への応用（Weinan et al. [2017]）や最適停止問題への応用（Becker et al. [2019]）が知られている。このうち前者は、デリバティブの信用調整額（CVA）や当初証拠金の計算への応用（Henry-Labordère [2020]）や、xVA 計算への応用（Gnoatto et al. [2020]）など、ファイナンス分野への直接的な応用が議論されている。このほか、機械学習・深層学習のファイナンス分野への応用研究をサーベイした論文も多く、たとえば、Hambly et al. [2021]、Ruf and Wang [2020]、Emerson et al. [2019]、Warin [2021]、Mashrur et al. [2020] などが挙げられる。

[44]たとえば、時価計算で異常値などが検出された場合、原因を特定しやすい。

深層学習、ファイナンス分野ともに、発展が早い分野であることから、今後もその最先端の議論にキャッチアップしていく必要があると考えられる。

参考文献

Andersen, L. B. and Piterbarg, V. V., *Interest Rate Modeling 1: Foundations and Vanilla Models*, Atlantic Financial Press, 2010.

Barles, G. and Soner, H. M., "Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation", *Finance and Stochastics*, 2(4), pp.369–397, 1998.

Baxter, M., Rennie, A., and Rennie, A. J., *Financial calculus: an introduction to derivative pricing*, Cambridge university press, 1996.

Bayer, C., Horvath, B., Muguruza, A., Stemper, B., and Tomas, M., "On deep calibration of (rough) stochastic volatility models", *arXiv preprint arXiv:1908.08806*, 2019.

Becker, S., Cheridito, P., and Jentzen, A., "Deep optimal stopping", *The Journal of Machine Learning Research*, 20(1), pp.2712–2736, 2019.

Ben-Tal, A. and Teboulle, M., "An old-new concept of convex risk measures: the optimized certainty equivalent", *Mathematical Finance*, 17(3), pp.449–476, 2007.

Benth, F. E., Detering, N., and Lavagnini, S., "Accuracy of deep learning in calibrating HJM forward curves", *arXiv preprint arXiv:2006.01911*, 2020.

Björk, T., *Arbitrage theory in continuous time*, Oxford university press, 2009.

Black, F. and Scholes, M., "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of political economy*, 81(3), pp.637–654, 1973.

Brigo, D., Huang, X., Pallavicini, A., and Borde, H. S. d. O., "Interpretability in deep learning for finance: a case study for the Heston model", *arXiv preprint arXiv:2104.09476*, 2021.

Büchel, P., Kratochwil, M., Nagl, M., and Rösch, D., "Deep calibration of financial models: turning theory into practice", *Review of Derivatives Research*, pp. 1–28, 2021.

Buehler, H., Gonon, L., Teichmann, J., and Wood, B., "Deep hedging", *Quantitative Finance*, 19(8), pp.1271–1291, 2019a.

Buehler, H., Gonon, L., Teichmann, J., Wood, B., Mohan, B., and Kochems, J., "Deep Hedging: Hedging Derivatives Under Generic Market Frictions Using Reinforcement Learning", *Risk Management & Analysis in Financial Institutions eJournal*, 2019b.

Buehler, H., Horvath, B., Lyons, T., Arribas, I. P., and Wood, B., "A data-driven market simulator for small data environments", *arXiv preprint arXiv:2006.14498*, 2020.

Buehler, H., Horvath, B., Lyons, T., Perez Arribas, I., and Wood, B., "Generating financial markets with signatures", *Risk.net cutting edge*, 2021a.

Buehler, H., Murray, P., Pakkanen, M., and Wood, B., "Deep hedging:learning to remove drift", *Risk.net, cutting edge*, 2022a.

Buehler, H., Murray, P., Pakkanen, M. S., and Wood, B., "Deep Hedging: Learning Risk-Neutral Implied Volatility Dynamics", *arXiv preprint arXiv:2103.11948*, 2021b.

Buehler, H., Murray, P., and Wood, B., "Deep Bellman Hedging", *arXiv preprint arXiv:2207.00932*, 2022b.

Cao, J., Chen, J., Hull, J., and Poulos, Z., "Deep hedging of derivatives using reinforcement learning", *The Journal of Financial Data Science*, 3(1), pp.10–27, 2021.

Carbonneau, A., "Deep hedging of long-term financial derivatives", *Insurance: Mathematics and Economics*, 99, pp.327–340, 2021.

Carbonneau, A. and Godin, F., "Equal risk pricing of derivatives with deep hedging", *Quantitative Finance*, 21(4), pp.593–608, 2021.

Cochrane, J. H., "Presidential address: Discount rates", *The Journal of finance*, 66(4), pp.1047–1108, 2011.

Davis, M. H., Panas, V. G., and Zariphopoulou, T., "European option pricing with transaction costs", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31(2), pp.470–493, 1993.

Deng, Y., Bao, F., Kong, Y., Ren, Z., and Dai, Q., "Deep direct reinforcement learning for financial signal representation and trading", *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 28(3), pp.653–664, 2016.

Dimitroff, G., Roeder, D., and Fries, C. P., "Volatility model calibration with convolutional neural networks", *Available at SSRN 3252432*, 2018.

Dugas, C., Bengio, Y., Bélisle, F., Nadeau, C., and Garcia, R., "Incorporating Functional Knowledge in Neural Networks.", *Journal of Machine Learning Research*, 10(6), 2009.

Emerson, S., Kennedy, R., O'Shea, L., and O'Brien, J., "Trends and applications of machine learning in quantitative finance", In *8th international conference on economics and finance research (ICEFR 2019)*, 2019.

Fernandez-Arjona, L. and Filipović, D., "A machine learning approach to portfolio pricing and risk management for high-dimensional problems", *Mathematical Finance*, 32(4), pp.982–1019, 2022.

Föllmer, H. and Kabanov, Y. M., "Optional decomposition and Lagrange multipliers", *Finance and Stochastics*, 2(1), pp.69–81, 1997.

Föllmer, H. and Leukert, P., "Efficient hedging: cost versus shortfall risk", *Finance and Stochastics*, 4(2), pp.117–146, 2000.

Föllmer, H. and Schied, A., "Convex measures of risk and trading constraints", *Finance and stochastics*, 6(4), pp.429–447, 2002.

Föllmer, H. and Schied, A., "Stochastic finance", In *Stochastic Finance*, de Gruyter, 2016.

Föllmer, H. and Schweizer, M., *Hedging of contingent claims under incomplete information*, volume 5, pp. 19–31, 1991.

Frankle, J. and Carbin, M., "The lottery ticket hypothesis: Finding sparse, trainable neural networks", *arXiv preprint arXiv:1803.03635*, 2018.

Garcia, R. and Gençay, R., "Pricing and hedging derivative securities with neural networks and a homogeneity hint", *Journal of Econometrics*, 94(1), pp.93–115, 2000.

Garipov, T., Izmailov, P., Podoprikhin, D., Vetrov, D. P., and Wilson, A. G., "Loss Surfaces, Mode Connectivity, and Fast Ensembling of DNNs", *Advances in neural information processing systems*, 31, 2018.

Gatheral, J., Jaisson, T., and Rosenbaum, M., "Volatility is rough", *Quantitative finance*, 18(6), pp.933–949, 2018.

Gnoatto, A., Picarelli, A., and Reisinger, C., "Deep xVA solver–A neural network based counterparty credit risk management framework", *arXiv preprint arXiv:2005.02633*, 2020.

Godin, F., "Minimizing CVaR in global dynamic hedging with transaction costs", *Quantitative Finance*, 16(3), pp.461–475, 2016.

Goodfellow, I., Pouget-Abadie, J., Mirza, M., Xu, B., Warde-Farley, D., Ozair, S., Courville, A., and Bengio, Y., "Generative adversarial networks", *Communications of the ACM*, 63(11), pp.139–144, 2020.

Guo, I. and Zhu, S.-P., "Equal risk pricing under convex trading constraints", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 76, pp.136–151, 2017.

Halperin, I., "QLBS: Q-Learner in the Black-Scholes(-Merton) Worlds", *arXiv*, 2017.

Halperin, I., “The QLBS Q-Learner goes NuQLear: fitted Q iteration, inverse RL, and option portfolios”, *Quantitative Finance*, 19(9), pp.1543–1553, 2019.

Hambly, B., Xu, R., and Yang, H., “Recent advances in reinforcement learning in finance”, *arXiv preprint arXiv:2112.04553*, 2021.

Harrison, J. M. and Kreps, D. M., “Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets”, *Journal of Economic theory*, 20(3), pp.381–408, 1979.

Harrison, J. M. and Pliska, S. R., “Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading”, *Stochastic processes and their applications*, 11(3), pp.215–260, 1981.

Hastie, T., Montanari, A., Rosset, S., and Tibshirani, R. J., “Surprises in high-dimensional ridgeless least squares interpolation”, *The Annals of Statistics*, 50(2), pp.949–986, 2022.

Henry-Labordère, P., “CVA and IM: welcome to the machine”, *Risk.net, cutting edge*, 2020.

Hernandez, A., “Model calibration with neural networks”, *Risk.net*, 2017.

Heston, S. L., “A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options”, *The review of financial studies*, 6(2), pp.327–343, 1993.

Hinton, G. E., Osindero, S., and Teh, Y.-W., “A fast learning algorithm for deep belief nets”, *Neural computation*, 18(7), pp.1527–1554, 2006.

Hodges, S. and Neuberger, A., “Optimal replication of contingent claims under transaction costs”, *Review Futures Market*, 8, pp.222–239, 1989.

Horvath, B., Muguruza, A., and Tomas, M., “Deep learning volatility: a deep neural network perspective on pricing and calibration in (rough) volatility models”, *Quantitative Finance*, 21(1), pp.11–27, 2021a.

Horvath, B., Teichmann, J., and Žurič, Ž., “Deep hedging under rough volatility”, *Risks*, 9(7), pp.138, 2021b.

Hutchinson, J. M., Lo, A. W., and Poggio, T., “A nonparametric approach to pricing and hedging derivative securities via learning networks”, *The journal of Finance*, 49(3), pp.851–889, 1994.

Ilhan, A., Jonsson, M., and Sircar, R., “Optimal static-dynamic hedges for exotic options under convex risk measures”, *Stochastic Processes and their Applications*, 119(10), pp.3608–3632, 2009.

Imaki, S., Imajo, K., Ito, K., Minami, K., and Nakagawa, K., “No-transaction band network: A neural network architecture for efficient deep hedging”, *Available at SSRN 3797564*, 2021.

Itkin, A., "Deep learning calibration of option pricing models: some pitfalls and solutions", *Risk.net*, 2020.

Jiang, Z., Xu, D., and Liang, J., "A deep reinforcement learning framework for the financial portfolio management problem", *arXiv preprint arXiv:1706.10059*, 2017.

Kawaguchi, K., "Deep learning without poor local minima", *Advances in neural information processing systems*, 29, 2016.

Kingma, D. P. and Ba, J., "Adam: A Method for Stochastic Optimization", In *ICLR*, 2015.

Kolm, P. N. and Ritter, G., "Dynamic replication and hedging: A reinforcement learning approach", *The Journal of Financial Data Science*, 1(1), pp.159–171, 2019.

Krabichler, T. and Teichmann, J., 2020, "Deep Replication of a Runoff Portfolio".

Kramkov, D. O., "Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets", *Probability theory and related fields*, 105(4), pp.459–479, 1996.

Krizhevsky, A., Sutskever, I., and Hinton, G. E., "Imagenet classification with deep convolutional neural networks", *Communications of the ACM*, 60(6), pp.84–90, 2017.

Leland, H. E., "Option pricing and replication with transactions costs", *The journal of finance*, 40(5), pp.1283–1301, 1985.

Lintner, J., "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *The Review of Economics and Statistics*, pp. 13–37, 1965.

Liu, S., Borovykh, A., Grzelak, L. A., and Oosterlee, C. W., "A neural network-based framework for financial model calibration", *Journal of Mathematics in Industry*, 9(1), pp.1–28, 2019a.

Liu, S., Oosterlee, C. W., and Bohte, S. M., "Pricing options and computing implied volatilities using neural networks", *Risks*, 7(1), pp.16, 2019b.

Lokvancic, M., "Machine learning SABR model of stochastic volatility with lookup table", *Available at SSRN 3589367*, 2020.

Lütkebohmert, E., Schmidt, T., and Sester, J., "Robust deep hedging", *Available at SSRN 3869616*, 2021.

Markowitz, H., "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, 7(1), pp.77–91, 1952.

Martin, I., "What is the Expected Return on the Market?*", *The Quarterly Journal of Economics*, 132(1), pp.367–433, 2016.

Mashrur, A., Luo, W., Zaidi, N. A., and Robles-Kelly, A., "Machine Learning for Financial Risk Management: A Survey", *IEEE Access*, 8, pp.203203–203223, 2020.

Mikkilä, O. and Kanniainen, J., "Empirical Deep Hedging", *Derivatives eJournal*, 2021.

Minsky, M. and Papert, S., "An introduction to computational geometry", *Cambridge tiass., HIT*, 479, pp.480, 1969.

Miyahara, Y., "Model and Related Estimation Problems", *Asia-Pacific Financial Markets*, 8, pp.45–60, 2001.

Mossin, J., "Equilibrium in a capital asset market", *Econometrica: Journal of the econometric society*, pp. 768–783, 1966.

Muhle-Karbe, J., Reppen, M., and Soner, H. M., "A primer on portfolio choice with small transaction costs", *Annual Review of Financial Economics*, 9, pp.301–331, 2017.

Ning, B., Lin, F. H. T., and Jaimungal, S., "Double deep q-learning for optimal execution", *Applied Mathematical Finance*, 28(4), pp.361–380, 2021.

Patel, J., Shah, S., Thakkar, P., and Kotecha, K., "Predicting stock market index using fusion of machine learning techniques", *Expert Systems with Applications*, 42(4), pp.2162–2172, 2015.

Risk.net, "Quant of the year: Hans Buehler", *Risk.net*, 2022.

Rockafellar, R. T., Uryasev, S., et al., "Optimization of conditional value-at-risk", *Journal of risk*, 2, pp.21–42, 2000.

Rogers, L., *Why is the effect of proportional transaction costs* $O(\delta^{2/3})$*?*, pp. 303–308, American Mathematical Society, 2004.

Rosenblatt, F., "The perceptron: a probabilistic model for information storage and organization in the brain.", *Psychological review*, 65(6), pp.386, 1958.

Ruf, J. and Wang, W., "Neural networks for option pricing and hedging: a literature review", *Journal of Computational Finance*, 2020.

Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., Group, P. R., et al., *Parallel distributed processing*, volume 1, IEEE New York, 1988.

Sabbioni, L., Restelli, M., and Prampolini, A., "Fast Direct Calibration of Interest Rate Derivatives Pricing Models", In *Proceedings of the First ACM International Conference on AI in Finance*, ICAIF '20 New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2021.

Sharpe, W. F., "Capital Asset Prices: A Theory Of Market Equilibrium Under Conditions Of Risk", *Journal of Finance*, 19(3), pp.425–442, 1964.

Shi, X., Xu, D., and Zhang, Z., "Deep Learning Algorithms for Hedging with Frictions", *arXiv preprint arXiv:2111.01931*, 2021.

Shreve, S. E., "Liquidity premium for capital asset pricing with transaction costs", *Institute for Mathematics and Its Applications*, 65, pp.117, 1995.

Shreve, S. E. et al., *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*, volume 11, Springer, 2004.

Silver, D., Huang, A., Maddison, C. J., Guez, A., Sifre, L., Van Den Driessche, G., Schrittwieser, J., Antonoglou, I., Panneershelvam, V., Lanctot, M., et al., "Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search", *nature*, 529(7587), pp.484–489, 2016.

Son, G. and Kim, J., "Neural Networks for Delta Hedging", *arXiv preprint arXiv:2112.10084*, 2021.

Soudry, D., Hoffer, E., Nacson, M. S., Gunasekar, S., and Srebro, N., "The implicit bias of gradient descent on separable data", *The Journal of Machine Learning Research*, 19(1), pp.2822–2878, 2018.

Spooner, T., Fearnley, J., Savani, R., and Koukorinis, A., 2018, "Market Making via Reinforcement Learning".

Suzuki, T., "Adaptivity of deep ReLU network for learning in Besov and mixed smooth Besov spaces: optimal rate and curse of dimensionality", In *International Conference on Learning Representations*, 2018.

Tawada, Y. and Sugimura, T., "Machine learning hedge strategy with deep Gaussian process regression", *Risk.net, cutting edge*, 2020.

Warin, X., "Deep learning for efficient frontier calculation in finance", *arXiv preprint arXiv:2101.02044*, 2021.

Weinan, E., Han, J., and Jentzen, A., "Deep Learning-Based Numerical Methods for High-Dimensional Parabolic Partial Differential Equations and Backward Stochastic Differential Equations", *Communications in Mathematics and Statistics*, 4(5), pp.349–380, 2017.

Whalley, A. E. and Wilmott, P., "An asymptotic analysis of an optimal hedging model for option pricing with transaction costs", *Mathematical Finance*, 7(3), pp.307–324, 1997.

Wiese, M., Bai, L., Wood, B., and Buehler, H., "Deep hedging: learning to simulate equity option markets", *Available at SSRN 3470756*, 2019.

Wiese, M., Knobloch, R., Korn, R., and Kretschmer, P., "Quant gans: Deep generation of financial time series", *Quantitative Finance*, 20(9), pp.1419–1440, 2020.

Xu, M., "Risk measure pricing and hedging in incomplete markets", *Annals of Finance*, 2(1), pp.51–71, 2006.

Zhang, J. and Huang, W., "Option hedging using LSTM-RNN: an empirical analysis", *Quantitative Finance*, 21(10), pp.1753–1772, 2021.

ジョン ハル（三菱ＵＦＪモルガン・スタンレー証券市場商品本部 訳）、『フィナンシャルエンジニアリング（第 9 版）』、金融財政事情研究会、2016 年

井上 昭彦・中野 張・福田 敬、『ファイナンスと保険の数理 (岩波数学叢書)』、岩波書店、2014 年

岡谷 貴之、『深層学習 (機械学習プロフェッショナルシリーズ)』、講談社、2015 年

岡野原 大輔、『ディープラーニングを支える技術 1 –「正解」を導くメカニズム』、技術評論社、2022 年 a

岡野原 大輔、『ディープラーニングを支える技術 2 –ニューラルネットワーク最大の謎』、技術評論社、2022 年 b

関根 順、『数理ファイナンス (確率論教程シリーズ)』、培風館、2007 年

斎藤 康毅、『ゼロから作る Deep Learning 1 –Python で学ぶディープラーニングの理論と実装』、オライリージャパン、2015 年

斎藤 康毅、『ゼロから作る Deep Learning 4 –強化学習編』、オライリージャパン、2022 年

清水 季子、「フィードバック効果を考慮した動態的なマクロ・ストレステスト」、『金融研究所ディスカッション・ペーパー』No.1998-J-1、1998 年

中山 季之、『Python とファイナンス事例で学ぶ機械学習』、金融財政事情研究会、2022 年

鈴木 大慈、「統計的学習理論とその深層学習への応用」、『応用数理』、28(4), pp.28–33、2018 年

補論　リスク中立評価

2. (3) イ節で述べたリスク中立評価の枠組みに関し、より一般の場合に拡張して各概念の定式化を述べる（証明などの詳細は、関根 [2007]　3.4 節を参照）。

2 節と同様に、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、$W_t = \left(W_t^{(1)}, \ldots, W_t^{(d)}\right)$ を d 次元標準ブラウン運動とする。n 次元の i 乗可積分な確率過程の集合を以下のとおり定義する。

$$\mathcal{L}_{i,T}^{Loc,n} = \left\{ \{f_t\}_{t\in[0,T]} \mid n \text{ 次元の } \mathcal{F}_t - \text{発展的可測}, \int_0^T |f_t|^i \ dt < \infty \right\}$$

<u>市場の設定</u>：価格付け対象のあるデリバティブの原資産と安全資産（銀行預金など）のみが取引される市場で、以下を仮定する。

1. 原資産の数と、確率変動のファクター数が等しい。すなわち、原資産の価格過程 $\left\{S_t^{(i)}\right\}_{\substack{i=1,\ldots,d \\ t\geq 0}}$ は、以下の伊藤過程とする。$\mu = \left\{\mu_t^{(i)}\right\}_{i=1,\ldots,d} \in \mathcal{L}_{1,T}^{Loc,d}, \sigma_t = \left\{\sigma_t^{(i,j)}\right\}_{i,j=1,\ldots,d} \in \mathcal{L}_{2,T}^{Loc,d\times d}$、$\sigma_t$ は、任意の $t \in [0, T]$ でほとんど確実に可逆と仮定する。

$$dS_t^{(i)} = S_t^{(i)} \left[\sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{(i,j)} \ dW_t^{(j)} + \mu_t^{(i)} \ dt \right], \quad S_0^{(i)} > 0$$

   また、安全資産（預金など）の価格過程 B_t を、$r_t \in L_{1,T}^{Loc,1}$ として

$$dB_t = B_t r_t \ dt, \quad B_0 = 1$$

   で表されるものとする。

2. 理想的な市場を考える。すなわち、原資産には配当等なく、任意の時刻で市場価格がついておりその価格で、何単位でも売ることも買うこともできると仮定する。また、安全資産も任意の時刻で任意の金額を買うことも売ることもできる。売買には取引コストはかからないと仮定する。そのため、原資産と安全資産のみを保有して、取引コスト等の外部からの資金の流出・流入のないポートフォリオ（資金自己調達的戦略）の価値 $X_t^{x,\delta}$ は、以下で表せる。すなわち、x は時刻 0 でのポートフォリオ価値、$\delta \in \mathcal{L}_{2,T}^{Loc,d}$ を原資産の保有量とすると、$X_t^{x,\delta}$ は、

$$X_t^{x,\delta} = x + \int_0^t \delta_u^\top \ dS_u + \int_0^t \left(X_u^{x,\delta} - \delta_u^\top S_u\right) r_u \ du$$

   と表せる。

定義 5 (複製可能)**.** $\mathcal{F}_T$-可測な確率変数 H が複製可能であるとは、初期費用 $x^H \in \mathbb{R}$ と複製戦略 $\delta^H \in \mathcal{L}_{2,T}^{Loc,d}$ が存在して、資金自己調達的戦略 $\left\{X_t^{x^H,\delta^H}\right\}_{t\in[0,T]}$ により、

$$H = X_T^{x^H,\delta^H}$$

が満たされることである。

定義 6 (完備市場)**.** 完備市場とは、任意の確率変数 $H \in L^2(\Omega)$ が複製可能である市場設定である。

定義 7 (無裁定)**.** 資金自己調達的戦略 $\left\{X_t^{x,\delta}\right\}_{t\in[0,T]}$ が、裁定取引であるとは、

$$X_0^{x,\delta} = 0, P\left(X_T^{x,\delta} > 0\right) > 0, P\left(X_T^{x,\delta} \geq 0\right) = 1$$

が満たされることである。

定義 8 (リスク中立確率測度)**.** $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の別の確率測度 Q が、以下を満たすとき、リスク中立確率測度と呼ばれる。

1. P と Q は、同値な測度

2. 確率過程 $\left\{\frac{S_t}{B_t}\right\}$ が、測度 Q のもとで、局所マルチンゲールになる。

定理 2 (リスク中立価格公式)**.**

1. リスク中立確率測度は、一意に存在し、以下のように書ける：

$$\lambda_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t\mathbf{1}),$$

とし（ここで、$\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^d$）、

$$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}\left(-\int \lambda^\top dW\right)_t$$

ここで、$\mathcal{E}(Y)_t$ は確率的指数と呼ばれる確率過程で、確率過程 Y_t に対し、$\langle Y\rangle_t$ を *2* 次変分過程としたときに以下のとおり定義される。

$$\mathcal{E}(Y)_t = \exp\left(Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t\right)$$

2. $\mathcal{F}_T$-可測な確率変数 $H = f(S_T)$ に対し、$H = X_T^{x^H,\delta^H}$ を満たす δ_t^H と $x^H = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right]$ が一意に存在する。

3. x^F は、複製ポートフォリオを構成するのに必要な初期費用、かつ、唯一の無裁定価格である。

さらに、「市場が無裁定であることと、リスク中立確率測度の存在が同値[45]である」（数理ファイナンスの第一基本定理）や、「市場が無裁定である場合、市場が完備であることとリスク中立確率測度の一意性が同値である」（数理ファイナンスの第二基本定理）等が成り立つことが知られている。

命題 1 (デルタ・ヘッジ)**.** S_t がマルコフ過程の場合、すなわち、確定的な関数 $\sigma(\cdot)$ を用いて、

$$S_u^{(t,x)} = x + \int_0^u \operatorname{diag}\left(S_v^{(t,x)}\right)\left\{\sigma(t+v, S_v^{(t,x)})\, dW_v^Q + \int_0^u r_{t+v}\mathbf{1}dv\right\}$$

[45]必要条件については、無裁定よりやや広い設定で成立する「No Free lunch with Vanishing Risk」と呼ばれる条件で成立する。

と表せて（W_t^Q は測度 Q のもとでの標準ブラウン運動）、$H = f(S_T)$ と表せる場合（ヨーロピアン・オプションの場合）を考える。

　このとき、$V(t,x) = E^Q\left[e^{-\int_0^{T-t} r_{t+u}} f\left(S_{T-t}^{(t,x)}\right)\right]$ とすると、複製戦略は、

$$\delta_t^H = \nabla V(t,x)$$

と表せる（∇ は、x に関する微分を表す）。