

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

超低金利環境下でのイールドカーブ変動の再検証： 動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの応用

おいひろゆき しらつかしげのり
大井博之・白塚重典

Discussion Paper No. 2021-J-3

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<https://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

超低金利環境下でのイールドカーブ変動の再検証： 動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの応用

おおひろゆき^{*} しらつかしげのり^{**}
大井博之^{*}・白塚重典^{**}

要 旨

本稿では、動学的ネルソン＝シーゲル・モデルを使って、わが国の低金利環境におけるイールドカーブ変動を計測し、金融緩和効果を的確に捕捉するための指標構築を試みる。実証結果を踏まえると、超低金利環境でのイールドカーブ変動を捕捉するためには、水準、傾き、曲率というイールドカーブの変動要因に加えて、長期水準への収束速度をコントロールするローディングパラメータも時変化することが有効である。また、金融政策指標の推計結果は、イールドカーブが極端に低下した金融環境のもとであっても、非伝統的金融政策によって、超長期ゾーンを中心としたイールドカーブの押し下げにより金融緩和効果が引き出されていることを示している。ただし、マイナス金利政策の導入以降についてみると、超長期ゾーンのイールドカーブ押し下げによる金融緩和効果の評価は、モデルの推計パラメータの微妙な識別に依存していることも確認される。

キーワード：イールドカーブ、動学的ネルソン＝シーゲル・モデル、
ローディングパラメータ、非伝統的金融政策

JEL classification: E31、E43、E44、E52、G12

* 日本銀行金融研究所 (E-mail: hiroyuki.ooi@boj.or.jp)

** 慶應義塾大学 (E-mail: shigenori.shiratsuka@keio.jp)

本稿の作成に当たっては、小枝淳子、新谷元嗣、関根篤史、渡部敏明の各氏ならびに日本銀行スタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。また、白塚は、本研究について、慶應義塾学事振興資金および村田学術振興財団からの助成を受けている。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

1. はじめに

本稿では、低金利環境下、特に長期金利が低下し、イールドカーブ全体が極端にフラット化した状況におけるイールドカーブ変動を推計し、金融緩和効果を的確に捕捉するための金融政策指標の構築を試みる。

Nelson and Siegel (1987)によって考案されたイールドカーブ・モデルは、イールドカーブの変動を水準 (level)、傾き (slope)、曲率 (curvature) の3つの変動要因に分解する。これらの3つの要因は、イールドカーブの変動を規定する主要な要因として従来から実証分析で広く指摘されている。また、ネルソン＝シーゲル・モデルは、単純かつ簡便、スムーズな関数形であると同時に、金融政策を分析するために必要なイールドカーブの形状変化を柔軟に捕捉できる利点を有している。近年、Diebold and Li (2006)、Diebold, Rudebusch, and Aruoba (2006)などを嚆矢としてネルソン＝シーゲル・モデルを動学的に拡張した分析枠組みが複数考案されている。特に、Diebold, Rudebusch, and Aruoba (2006)は、水準、傾き、曲率の3つの変動要因を観察不可能な動学過程として捉える状態空間モデル (state space model) として定式化している。さらに、Koopman, Mallee, and Van der Wel (2010)は、ネルソン＝シーゲル・モデルのローディングパラメータを追加的に時変化したうえで、金利の分散項に GARCH 過程を仮定する拡張を図っている¹。

振り返ってみると、日本銀行は、1995年に政策金利であるオーバーナイト物無担保コールレートを0.5%に引き下げた。そしてそれ以降、日本経済は25年以上の長期にわたって、名目金利の実効下限制約 (ELB: effective lower bound) に直面し続けている (1990年代半ば以降の主要な政策イベントについては表1を参照)。

本稿では、わが国の長期にわたる ELB 制約下のイールドカーブデータを使い、Koopman, Mallee, and Van der Wel (2010)の分析枠組みを推計することで、動学的ネルソン＝シーゲル・モデルによって、超低金利環境下でのイールドカーブ変動

¹ 動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの中でも、例えば Christensen, Diebold, and Rudebusch (2011)のように、無裁定条件を考慮した経済理論との整合性を考慮した分析もみられる。また、Christensen and Rudebusch (2015)や Krippner (2016)は、動学的ネルソン＝シーゲル・モデルに名目金利の実効下限制約 (ELB: effective lower bound) を取り込んだ拡張を行っている。ただし、無裁定条件を考慮するためには、ローディングパラメータが一定であることを仮定する必要がある。

を的確に捉えることができるかを検証する。その上で、Okina and Shiratsuka (2004)、Krippner (2015)などで提案されているネルソン＝シーゲル・モデルの推計結果を使った金融政策指標を一部修正した指標を構築する。

大規模資産買入（LSAP : large-scale asset purchase）に代表される非伝統的金融政策の効果を包括的に捉える指標は現時点では確立されていない。これは、伝統的金融政策においては、テイラールールのような形で、政策評価に必要な情報が短期の政策金利に集約されていると考えることとは対照的である。このため、非伝統的金融政策の有効性をイールドカーブ変動という視点を通じて、伝統的金融政策と整合的な形で評価していく枠組みを構築することは極めて重要かつ有用と考えられる²。

そのために、イールドカーブ・モデルの推計においては、推計精度と理論的整合性のトレードオフが論点となることに留意する必要がある。マクロファイナンスにおいては、無裁定条件を考慮した理論モデルについて研究が蓄積されているが、推計精度という観点からは限界も指摘されている。ネルソン＝シーゲル・モデルは、クロスセクション方向のイールドカーブ変動に注目し、推計精度向上を図る統計的なモデルである。動学的ネルソン＝シーゲル・モデルは、さらに、クロスセクション方向に加え、時系列方向のイールドカーブ変動も記述できるよう拡張が図られている。

特に、イールドカーブが極端に低下しフラット化している金利環境の下で金融政策効果を定量的に評価していく上では、推計精度の高いイールドカーブ・モデルを適用していく必要がある。この場合、イールドカーブ・モデルの選択において、推計精度と理論的整合性のトレードオフはより鮮明となる。本稿では、ローディングパラメータを時変化した動学的ネルソン＝シーゲル・モデルは、超低金利環境下でのイールドカーブ変動を通じた金融政策効果の定量的評価に適していることを示す。

実際、本稿で示されるように、動学的なネルソン＝シーゲル・モデルを推計すると、無裁定条件を仮定するための前提となるローディングパラメータが一定

² 名目金利の ELB 制約の非正統的金融政策の評価のためには、Krippner (2015)、Wu and Xia (2016)で試みられているように、潜在金利 (shadow interest rate) を推計することも考えられる。この場合、名目金利の ELB 制約を明示的に考慮した上で、ELB 制約が存在しないと仮定した状態における政策金利の推計することになる。わが国への応用については、Ichiue and Ueno (2015, 2018)、Ueno (2017)などいくつかの先行研究がみられている。

であるという仮定は、実証的に棄却される。これは、長期金利が大きく低下した金利環境のもとで、ネルソン＝シーゲル・モデルを使ってイールドカーブの動学的な変動を捉える場合、非線形な関数形のパラメータ、特に水準とローディングパラメータをどう識別するかが極めて難しくなることに起因している³。この点を踏まえ、本稿では、わが国の1990年代半ば以降の金利データを使い、低金利環境のもとでできるだけ推計精度の高い統計的なイールドカーブ・モデルを推計することに注力する。精度の高い推計結果は、金融政策効果を検証するより頑健な基盤となると考えられる。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、ネルソン＝シーゲル・モデルの基本形とその動学的な拡張について簡単に整理する。3節では、低金利環境下でネルソン＝シーゲル・モデルを推計するうえでの課題を整理したうえで、複数の定式化による動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの推計結果を比較検証する。また、推計パフォーマンスの高かった定式化について、推計期間の変更に関する頑健性を確認する。4節では、動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの推計結果をもとに、いくつかの金融政策指標を構築し、その評価を試みる。最後に、5節で本稿の結論をまとめる。なお、補論1および2では、動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの推計手法の詳細について整理する。

2. ネルソン＝シーゲル・モデルとその動学的な拡張

本節では、Nelson and Siegel (1987)によって提示され、イールドカーブ分析に広く利用されているネルソン＝シーゲル・モデルについて、まず基本形を簡単に整理した上で、その動学的な拡張について説明する。

(1) ネルソン＝シーゲル・モデルの基本形

まず、動学的ネルソン＝シーゲル・モデルを説明する準備作業として、静学的なネルソン＝シーゲル・モデルの基本形について簡潔に説明する。ネルソン＝シ

³ Koeda and Sekine (2021)も同様の問題意識のもと、ローディングパラメータを固定したイールドカーブ・モデルの問題を、わが国のデータを使い、実証的に検証している。

ーゲル・モデルでは、イールドカーブの形状を水準、傾き、曲率の3つの要素によって近似するものである。

いま、 t 時点で観測された m 時点に決済時点を迎える瞬間フォワードレート・カーブ（IFR カーブ：instantaneous forward rate curve）を $r_t(m)$ とすると、Nelson and Siegel (1987) によるオリジナルな定式化は次式のとおり示される⁴。

$$r_t(m) = L_t + S_t e^{-\lambda m} + C_t \lambda m e^{-\lambda m}, \quad (1)$$

ただし、 L_t 、 S_t 、 C_t および λ は、データから推計される推計値で、 L_t 、 λ はプラスの符号条件が期待される。

この IFR カーブの3つの項はそれぞれイールドカーブの3つの変動要素である水準、傾き、曲率を捉えている。また、 λ はローディングパラメータと呼ばれ、イールドカーブの長期水準への収束速度をコントロールしている。このモデルは、単純かつ簡便、スムーズな関数形である一方、金融政策を分析するうえで必要な範囲でイールドカーブの一般的な形状を柔軟に捕捉できるという利点を持っていると評価できる。

また、ネルソン＝シーゲル・モデルは、IFR カーブの満期ゼロと満期無限大の両端点についての極限值がそれぞれ $L_t + S_t$ および L_t となるとの特徴を有している。推計の際には、この特徴を使いオーバーナイト金利が $L_t + S_t$ に一致するとの制約を課すことで、名目金利の実効下限制約の影響を回避しつつ、短期ゾーンの推計精度を向上させることが期待できる。また、 L_t は長期フォワードレートを意味し、金融政策の有効性を捉える指標を構築するうえで重要な役割を果たす⁵。

ここで、 t 時点で観測される満期 m のスポットレート $R_t(m)$ は、(1) 式をゼロから m まで積分し、 m で除すことによって得られる。

$$R_t(m) = \frac{1}{m} \int_{s=0}^m r_t(s) ds. \quad (2)$$

⁴ Söderlind and Svensson (1997) は、オリジナルのネルソン＝シーゲル・モデルに対し、追加的な曲率項を考慮することで、より複雑なイールドカーブの形状変化を捉えることを可能としている。

⁵ ネルソン＝シーゲル・モデルの日本への応用例としては、Fujiki and Shiratsuka (2002)、Okina and Shiratsuka (2004) など、ゼロ金利制約下での金融政策コミットメント効果について、イールドカーブ変動を通じて検証した一連の研究がある。

この定式化を使うと、ネルソン＝シーゲル・モデルのスポットレートは、以下のとおり示される。

$$R_t(m) = L_t + S_t \cdot \frac{(1-e^{-\lambda m})}{\lambda m} + C_t \left(\frac{1-e^{-\lambda m}}{\lambda m} - e^{-\lambda m} \right). \quad (3)$$

なお、推計作業には、(3)式を国債市場で観察されるスポットレートに適用するが、イールドカーブの形状分析には(1)式で示される IFR カーブを利用する。これは、IFR が将来にわたる短期金利の経路を表しており、金融政策の先行きの運営について市場の見方を捉えるうえで重要な情報を提供するためである。また、本稿では、複数の定式化による動学的なネルソン＝シーゲル・モデルの推計結果を評価するうえでのベンチマークとして利用していく。

(2) 動学的な拡張

次に、ネルソン＝シーゲル・モデルの基本形に対して動学的な拡張を加える。動学的なネルソン＝シーゲル・モデルでは、上述した(1)式で表されるモデルの推計パラメータについて、多変量自己回帰 (VAR: vector autoregressive) 過程、ランダムウォーク (RW: random walk) 過程の2通りの動学過程を仮定することで、横断面方向のデータのみではなく、推計パラメータの時系列方向のデータも利用して推計する。

具体的には、VAR 過程は、

$$\beta_{t+1} = (I_3 - F)\mu + F\beta_t + \eta_t, \quad (4)$$

$$\beta_t = \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \end{pmatrix}, \eta_t = \begin{pmatrix} \eta_t^1 \\ \eta_t^2 \\ \eta_t^3 \end{pmatrix}. \quad \begin{bmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} \sim \text{NID} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_\eta' \Sigma_\eta & 0 \\ 0 & \Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon \end{pmatrix} \right].$$

$$\Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \delta_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_N^2 \end{pmatrix}, \Sigma_\eta' = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

であり、RW 過程では

$$\beta_{t+1} = \beta_t + \eta_t, \quad (5)$$

$$\beta_t = \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix}, \quad \eta_t = \begin{pmatrix} \eta_t^1 \\ \eta_t^2 \\ \eta_t^3 \end{pmatrix}. \quad [\eta_t] \sim \text{NID} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_\eta' \Sigma_\eta & 0 \\ 0 & \Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon \end{pmatrix} \right].$$

$$\Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \delta_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_N^2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_\eta' = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

となる。

静学モデルでは横断面 1 時点のデータのみを用いて推計するため、少なくとも 10 個以上の満期のデータが必要なのに対し、動学モデルでは時系列全体の情報も併せて利用して推計するため、横断面のデータが少なくても済む。また、元々、ネルソン＝シーゲル・モデルは、他のイールドカーブ・モデルと比べ、オーバーフィッティングの問題は小さいと考えられるが、動学モデルでは、この問題が生じるリスクを静学モデルよりも一段と低下させることが可能となる⁶。ただし、静学モデルでは、每期、ローディングパラメータを推計できるのに対し、動学モデルでは、ローディングパラメータが時間を通じて固定されているため、モデルの当てはまりが悪化する問題が生じる可能性が考えられる。

この問題に対処するため、さらにローディングパラメータ λ を時変とすることが考えられる。この場合、IFR は次式のように表せる。

$$r_t(m) = L_t + S_t e^{-\lambda_t m} + C_t \lambda_t m e^{-\lambda_t m}. \quad (6)$$

以上より、ネルソン＝シーゲル・モデルの各定式化の推計に当たっては、(1)式もしくは(6)式の IFR カーブを、(2)式を用いてスポットレートに変換して推計する。また、推計データには、スポットレートに相当する割引債の最終利回り（ゼロクーポンイールド）を使用する。

3. 推計結果の比較検討

本節では、まず、低金利環境下におけるネルソン＝シーゲル・モデルを使ったイールドカーブ・モデルの推計におけるパラメータ推計上の問題を整理する。そ

⁶ 本稿では、静学モデルにおいても、オーバーフィッティングの問題が生じにくいよう、推計に際して「 $L_t + S_t =$ オーバーナイト物金利」という制約を課している。

の上で、複数の動学的ネルソン＝シーゲル・モデルを推計し、推計パフォーマンスの比較検討を行う。

(1) 低金利環境下でのパラメータ推定の問題

長期金利が大きく低下した金利環境のもとで、ネルソン＝シーゲル・モデルを使ってイールドカーブの動学的な変動を捉えようとする場合、非線形な関数形のパラメータをどう識別するかが重要な問題となる。

この点を、図 1 の静学的なネルソン＝シーゲル・モデルを使った仮説例で確認しておこう。ここでは、実際に金融市場で観察され、推計作業に用いるスポットレートについて、(1)式で定式化されるネルソン・シーゲル＝モデルを使って、Spec-1～3 の 3 種類のパラメータセットを用いて、イールドカーブを描いている。Spec-1 は、オーバーナイト金利を 0%、長期フォワードレートを 2.5% と仮定した標準的なイールドカーブの形状を示すパラメータである。Spec-2 と Spec-3 は、イールドカーブの低下とフラット化を捉えるために、ローディングパラメータ λ 、もしくは水準 L 、傾き S 、曲率 C のパラメータを変化させている。この点を若干敷衍すると、Spec-2 では、 L 、 S 、 C は不変としたうえで、 λ (ローディングパラメータ) のみを低下 ($0.75 \rightarrow 0.12$) させ、長期フォワードレートへの収束を遅らせることで、イールドカーブ全体を右方向に引き伸ばしている。これに対して、Spec-3 では、 λ を不変とする一方で、 L (長期フォワードレート) を低下 ($2.5 \rightarrow 1.5$) させるとともに、 C (曲率) も低下 ($-1.0 \rightarrow -1.8$) させ、イールドカーブ全体を押し下げている⁷。

図に示されたイールドカーブをみると、Spec-2 と Spec-3 は 20 年程度までの満期まではほぼ同じような動きを示していることがわかる。しかしながら、両者の推計結果は、イールドカーブが長期的に収斂する長期フォワードレート的水準が大きく異なり、その結果、イールドカーブ変動を通じて計測される金融緩和効果も大幅に異なることになる。すなわち、Spec-2 では、長期フォワードレートが高く保たれているため、イールドカーブがフラット化することでもたらされる

⁷ S は、 $L = -C$ との制約から自動的に上昇する。

将来の金融緩和の前借り効果が大きい⁸。他方、Spec-3 では、長期フォワードレートが低下しているため、将来の金融緩和の前借り効果は大幅に低下する。

すなわち、イールドカーブが低下するとともに、フラット化した場合、こうしたイールドカーブの動きを、これを説明する水準、傾き、曲率と長期水準への収束速度をコントロールするローディングパラメータの組み合わせで、どう分解するかを推定することが難しくなる。特に、動学的ネルソン＝シーゲル・モデルで、ローディングパラメータを固定した推計を行う場合には、イールドカーブのフラット化が水準低下要因として吸収されやすくなり、イールドカーブ・モデル全体としての推計精度低下が懸念される。

(2) 推計パフォーマンスの比較

上述した推計上の問題意識を踏まえ、以下では、静学的なネルソン＝シーゲル・モデル（以下、ONS と略記）をベンチマークとしたうえで、6 種類の動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの推計パフォーマンスを比較検証する⁹。

- ① DNS-VAR : L, S, C は時変かつ多変量自己回帰 (VAR: vector autoregressive) 過程に従う一方、 λ は一定と仮定して同時推計
- ② DNS-RW : L, S, C は時変かつランダムウォーク (RW: random walk) 過程に従う一方、 λ は一定と仮定して同時推計
- ③ DNS-TVL-VAR : L, S, C, λ はすべて時変かつ VAR 過程に従うと仮定して同時推計

⁸ ELB 制約下における政策コミットメントを巡る議論の理論的基礎については、例えば、Eggertsson and Woodford (2003)、Jung, Teranishi, and Watanabe (2005)などを参照。Fujiki, Okina, and Shiratsuka (2001)で議論されているように、日本銀行は ELB 制約下での政策コミットメントを主要先進国中央銀行の中で初めて 1999 年に導入している。この政策枠みは、当初、「時間軸効果 (policy duration effect)」と呼ばれていたが、2008 年のグローバル金融危機以降、「フォワードガイダンス (forward guidance)」と呼ばれるようになっている。

⁹ これら 6 種類の動学的ネルソン＝シーゲル・モデルのほかに、Dijk *et al.* (2014)、Buitenhuis (2017)で提案されているように、DNS-TVL-VAR、DNS-TVL-VAR-GARCH について、VAR(1)で表現される状態方程式の定数項を可変とした推計も実施したが、推計パフォーマンスが改善しなかったため、本稿では分析対象外とした。

- ④ DNS-TVL-VAR-GARCH : DNS-TVL-VAR に対して、誤差項が GARCH 過程に従うことを追加的に仮定
- ⑤ DNS-TVL-RW : L 、 S 、 C 、 λ はすべて時変かつ RW 過程に従うと仮定して同時推計
- ⑥ DNS-TVL-RW-GARCH : DNS-TVL-RW に対して、誤差項が GARCH 過程に従うことを追加的に仮定

なお、これらの動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの推計には、満期が 3 ヶ月、6 ヶ月、1、2、3、5、7、10、30 年の 9 系列の Bloomberg 算出のゼロクーポンイールドのデータを利用している。一方、ベンチマーク推計に用いている静学モデルの推計には、満期がオーバーナイト、3 ヶ月、6 ヶ月、1～10 年、15 年、20 年、30 年の 16 系列のデータを使用している¹⁰。また、いずれの推計においても、サンプル期間は、1995 年 1 月から 2020 年 6 月である。

6 種類の動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの推計結果は表 2 に整理したとおりである（推計方法の詳細については、補論 1、2 を参照）。これらの推計結果について、まず、各モデルの推計パフォーマンスを赤池情報量基準 (AIC: Akaike's information criterion) およびベイズ情報量基準 (BIC: Bayesian information criterion) の情報量基準により比較すると (表 3)、DNS-TVL-VAR-GARCH、DNS-TVL-VAR、DNS-TVL-RW-GARCH、DNS-TVL-RW、DNS-VAR、DNS-RW の順で推計パフォーマンスが高いことがわかる。

この結果を踏まえると、ネルソン＝シーゲル・モデルの動学化について、次の 3 点を指摘できる。第 1 に、パラメータの動学過程は、ランダムウォークよりも VAR を仮定した方が推計パフォーマンスの改善効果が大きい。第 2 に、ローディングパラメータを含めて時変化することで、推計パフォーマンスは大きく改善する。第 3 に、誤差項について GARCH 過程を仮定することも推計パフォー

¹⁰ なお、2016 年 1 月のマイナス金利政策導入の決定以降については、オーバーナイト物無担保コールレートと誘導目標が恒常的に乖離しているため、オーバーナイト金利が $L+S$ に一致するとの制約をかけずに推計を行なっている。

マンス改善に貢献するが、ローディングパラメータの時変化に比べると改善効果は限定的である¹¹。

次に、満期ごとにスポットレートの推計値と観測値の平方平均自乗誤差（RMSE： root mean squared error）を計算すると（表 4）、DNS-RW の満期 10、30 年、DNS-VAR の 30 年を除き、いずれの推計モデルでも RMSE は比較的小さくフィットが良好である。この結果からも、ローディングパラメータを時変とすることが推計パフォーマンス改善に寄与していることを確認できる。ただし、情報量基準に基づく評価と異なり、パラメータの動学過程の仮定の違いでは、RMSE に大きな差は生じていない。むしろ、全般的な推計フィットは、DNS-TVL-RW-GARCH がもっとも良好である。

なお、30 年の金利について、推計値と観測値の時系列データをプロットしてみると（図 2）、ローディングパラメータを時変とした推計値は、ほぼ観測値と一致して推移しているのに対し、ローディングパラメータを固定した推計値は、長期金利が低下傾向を辿る中、乖離が目立つ結果となっている。特に、DNS-RW は推計期間全体を通じて、ほぼ一貫して下方に乖離していることが確認される。また、DNS-VAR も、2007 年ごろから長期金利が極端に低下しゼロに近付いていく局面で、乖離が大きくなっていることがわかる。

こうした推計結果からは、3（1）で指摘したように、イールドカーブが極端に低下し、フラット化した環境のもとでは、ローディングパラメータを固定して推計を行うと、イールドカーブの水準が低下したと識別されやすく、特に長い満期でのフィットが低下している可能性が考えられる。

（3）推計パラメータの推移

次に、6 種類の動学的ネルソン＝シーゲル・モデルとベンチマークとなる静学的な ONS モデルの推計パラメータについて、時系列的な推移を比較する。図 3 には、水準 L 、傾き S 、曲率 L とローディングパラメータ λ について、ONS の推計値とその 95% 信頼区間、および 6 種類の動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの推計値をプロットしている。

¹¹ なお、推計結果の残差について、ARCH 効果の検定を行うと、誤差項について GARCH 過程を追加的に仮定した DNS-TVL-VAR-GARCH および DNS-TVL-RW-GARCH の推計結果であっても、完全には ARCH 効果が除去できていない点には留意を要する。

まず、ローディングパラメータを固定とした推計値（DNS-VAR および DNS-RW）は、時変とした推計値とかなり異なる推移を示していることがわかる。推計されたローディングパラメータの水準は、DNS-VAR では ONS のほぼサンプル期間を通じた平均値、DNS-RW は推計始期の水準に近い。この水準が ONS の推計値と比べて相対的に低い場合は水準 L が高めに、逆に相対的に高い場合は水準 L が低めに推計される傾向がみられる。この結果、DNS-RW はローディングパラメータが推計期間始期の水準に近く、水準 L の推計値は全般に低めとなっている。

特に、マイナス金利政策が開始された 2016 年以降に注目すると、水準 L がゼロ近傍で推移しているだけでなく、傾き S と曲率 C もゼロ近傍に収斂している。これは、極めてフラット化したイールドカーブの形状に対して、やや大きめのローディングパラメータを前提にネルソン＝シーゲル・モデルをフィッティングさせると、イールドカーブ全体がほぼゼロの水準で水平になっている状態として推計パラメータが識別されることを意味している。実際のイールドカーブでは、満期 10 年を超えるゾーンでは、幾分なりとも右上がりの形状となっており、この点を捉え切れずにいることになる。

次に、ローディングパラメータを時変にした推計値を比べると、マイナス金利政策が開始されるまでの間は、全般に ONS に近い推計結果となっており、概ね ONS 推計値の信頼区間内で推移している。しかしながら、それ以降の期間については、DNS-TVL-RW-GARCH は、相対的に ONS に追随して推移している一方、それ以外の推計値は、相対的に水準が高め、ローディングパラメータが低めで推移し、ONS との乖離が拡大している。

これらの推計結果のいずれがより適切であるかを明確に断定することは難しい。ただ、パラメータの動学過程としてランダムウォークを仮定することで、DNS-TVL-RW-GARCH は、より最近時点のデータの影響を強く反映し、日々のデータのみを使って推計を行う ONS に近い動きを再現できているとの解釈も可能であるように思われる¹²。

¹² もちろん、この場合であっても、誤差項について GARCH 過程を仮定するかどうかで、なぜ相応に異なる推計結果が得られるのかという点について、さらに詳細な検討が必要と考えられる。

以上の結果を総合してみると、ローディングパラメータを固定した推計は、ローディングパラメータの固定された推計値がこれを時変とした推計値から乖離するに連れて、水準 L の推計値に歪みが生じる傾向が確認される。この点は、低金利環境だけでなく、金利水準が相対的に高い水準にあった 1990 年代後半においても観察される。ただし、たとえローディングパラメータを時変として推計しても、マイナス金利政策開始後の超低金利環境においては、推計パラメータの動学過程や誤差項に関する仮定によって、推計結果にバラツキがみられる点には注意が必要である。

この点は、ローディングパラメータを時変とした DNS モデルの推計結果の頑健性という点に懸念が残るため、以下、推計期間を変更した推計を通じて、より掘り下げた検討を行う。

(4) 推計期間の影響

最後に、推計結果の頑健性を吟味するために、上述した ONS、DNS-TVL-RW-GARCH と DNS-TVL-VAR-GARCH の推計結果の乖離、特にマイナス金利政策導入以降の乖離拡大について追加的な推計を行う。具体的には、DNS-TVL-VAR-GARCH、DNS-TVL-RW-GARCH について、データ始期を 1995 年 1 月に固定したうえで、データ終期を 2012 年 1 月から 1 ヶ月ずつ延長して推計した場合に、水準とローディングパラメータの推計値の信頼区間がどのような影響を受けるかを確認した (図 4、図 5)。これらの図には、フルサンプル期間 (2020 年 6 月が終期) における推計値と信頼区間 (赤線およびライトブルーのシャドー)、および 2012 年 1 月から推計期間を 1 ヶ月ずつ延長したサブサンプル期間における推計終期の推計値および信頼区間 (丸印と青の点線) をプロットした。

これらの推計結果をみると、DNS-TVL-VAR-GARCH、DNS-TVL-RW-GARCH のいずれの推計モデルについても、水準、ローディングパラメータともに、サブサンプル期間終期の推計値は、フルサンプルでの推計値と概ね平行に推移している。ただし、やや子細にみると、DNS-TVL-RW-GARCH の方が推計期間を 1 ヶ月延長するだけで、推計終期のパラメータがジャンプする傾向がみられる。この点は、前述したように、パラメータの動学過程としてランダムウォークを仮定することで、DNS-TVL-RW-GARCH は、より最近時点のデータの影響を強く反映し、日々のデータのみを使って推計を行う ONS に近い動きを再現できているとの解釈とも整合的であると思われる。

ただし、ここまでの推計結果を踏まえると、低金利環境のもとで、水準とローディングパラメータの識別が困難となり、推計精度が全般に低下している状況においては、どのような定式化のネルソン＝シーゲル・モデルの推計結果の信頼度が高いかは、必ずしも明確な結論は得られない。この点については、今後の検討課題である。

4. 金融政策指標の検討

次にネルソン＝シーゲル・モデルの推計結果を使って、いくつかの金融政策指標を推計し、モデルの定式化の違いによって、金融政策効果がどのように評価されるかを確認する。

(1) 金融政策効果指標の定式化

以下では、Okina and Shiratsuka (2004)、Krippner (2015)などで考案されている金融政策指標を参考として、次の3つの金融政策指標を定義する。

第1の指標は、長期フォワードレート (LFR : long-term forward rate) で、イールドカーブの水準を捉える L_t に相当する (単位は百分比)。

$$LFR_t = L_t. \quad (7)$$

LFR_t は、定常状態の名目金利水準を捉えており、イールドカーブが長期的に収束する水準となる。フィッシャー方程式を使うと、 LFR_t は定常状態における実質金利と長期インフレ予想率、タームプレミアムに分解できる。このため、この指標は、長期的な経済パフォーマンスの予想を反映していると考えられる。

第2の指標は、時間軸 (PD : policy duration) で、ローディングパラメータ λ_t の逆数となる (単位は年)¹³。

$$PD_t = 1/\lambda_t. \quad (8)$$

この指標は、(1)式で示されるネルソン＝シーゲル・モデルの第3項を最小化する満期で、イールドカーブ上では、曲率要因によるイールドカーブ押し下げ効果

¹³ ローディングパラメータの逆数を時間軸 (policy duration) と定義した結果、QQE 開始以降、信頼区間が大幅に拡大している点には留意が必要である。

が最大となる時点に相当する。また、この指標は、イールドカーブが長期均衡水準である LFR_t に収束していく速度に相当し、金融市場で緩和的な金融環境がどの程度継続するとみているかを捉えていると解釈できる。

第3の指標は、Krippner (2015)で提案されている実効金融緩和度 (EMS: effective monetary stimulus) を若干修正したもので、イールドカーブが LFR の水準からどの程度押し下げられているかを定量化している (単位は百分比)。

$$EMS(\tau) = -\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (S_t + C_t \lambda_t m) e^{-\lambda_t m} dm. \quad (9)$$

数式上は、(1)式で示したネルソン＝シーゲル・モデルの第2項、第3項のある満期 τ までの積分値にマイナスを乗じた値を満期で除したものになる¹⁴。この値は、瞬間フォワードレート・カーブがある満期 τ までの期間に、 LFR_t の水準から平均的にどの程度押し下げられているかを示している。なお、この指標の計算にあたっては、Krippner (2015)にしたがって τ を30年と仮定した。

ただし、Krippner (2015)の考案した指標から次の2つの修正を加えている。第1は、イールドカーブがマイナスになっている領域についても積分対象に加えたことである。マイナス金利政策によって、ELB 制約の水準が若干ではあるがマイナスとなっていることを踏まえると、マイナス金利の領域も含めて、イールドカーブ押し下げ効果を捉える必要があると考えるためである。また第2に、指標の構築にあたって、面積を τ で除すことによって、スポットレートに換算した押し下げ効果を示す形にしたことである。これによって、指標の定量的な意味がより明確になると考えられる。

(2) 金融政策指標の推計結果

では、ONS とローディングパラメータを時変とした DNS のうち推計精度が相対的に高い DNS-TVL-VAR-GARCH と DNS-TVL-RW-GARCH の推計結果に基づく金融政策指標の推移を比較してみよう (図6)。この図では、引き続き ONS の

¹⁴ 実効金融緩和指標の考案者である Krippner (2015)は、満期で除していない定式化を採用している。ただ、この積分値自体は、どれくらい先の満期まで積分するかによって変化するため、本論文では、満期で除し、基準化することとした。また、満期で除すことにより、異なる満期の EMS を比較することも可能となるといったメリットも期待できる。

推計値とその 95%信頼区間、および 2 種類の動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの推計値をプロットしている。

マイナス金利政策導入後の期間に注目して、3 種類の金融政策指標の動きを比較してみると、ONS および DNS-TVL-RW-GARCH は、*LFR* と *PD* がともに低下しており、イールドカーブの長期水準が低下するとともに、低金利環境の継続期間の予想も短縮していることがわかる。この結果、イールドカーブ全体を押し下げる度合いとなる *EMS* も低下している。これに対して、DNS-TVL-VAR-GARCH は、*LFR* がマイナス金利政策導入以前に近い水準を維持し、*PD* が上昇傾向をたどっているため、*EMS* も若干上昇している。

以上の結果から明らかなように、イールドカーブ変動を通じた金融緩和効果を評価するうえでは、イールドカーブの長期均衡水準である *LFR* の推計値が極めて重要な役割を果たす。この点、たとえば、低金利継続を公約するフォワードガイダンスは、将来的に回帰していく *LFR* の水準が高ければ高いほど、より大きな緩和効果を引き出すことができる¹⁵。ただし、この点は、DNS-TVL-VAR-GARCH と DNS-TVL-RW-GARCH のいずれの推計結果をもとに金融政策指標を算出するかによって結論が大きく異なるが、いずれの推計モデルがよりの確にイールドカーブ変動を捉えているかの判断は難しい点には留意を要する。

(3) 実効金融緩和度の評価

最後に、上記の点を考える材料として、DNS-TVL-VAR-GARCH と DNS-TVL-RW-GARCH の推計結果に基づく *EMS* の変動を満期別に要因分解してみる（図 7）。ここでは、満期を大きく 0～3 年、3～10 年、10～30 年の 3 つの期間に分割している。

この図について、30 年までの満期全体としてみると、*EMS* によって計測されたイールドカーブ押し下げ効果は、DNS-TVL-VAR-GARCH と DNS-TVL-RW-GARCH の推計結果で、マイナス金利政策導入以降、対照的な動きとなっているが、設備投資等の有効需要と関係が強いと考えられる満期 3 年以下までに注目

¹⁵ Okina and Shiratsuka (2004)は、わが国の *LFR* の水準がすでに低水準にあったことから、将来にわたって政策金利を低水準に維持する政策コミットメントによっても、十分な緩和効果を引き出すことができず、政策金利を ELB 制約に封じ込める結果となっていることを指摘している。

すると、両者の違いはかなり限定的である。特に、満期3年以下まで寄与度は、いずれの推計モデルであっても、推計期間を通じて0.3~0.5%ポイント程度で、それほど大きく変化していないことがわかる。追加的な緩和策による緩和効果は、ZIRP、QEからCEまでは、満期3~10年のイールドカーブ押し下げによって実現されているが、QQE開始後は、主として満期10~30年のイールドカーブの超長期部分の押し下げが中心的な要因となっている。そして、マイナス金利政策導入後は、この部分の評価がDNS-TVL-VAR-GARCHとDNS-TVL-RW-GARCHの推計結果で対照的なものとなっていることも確認できる。

以上を要約すると、イールドカーブの超長期ゾーンまで、名目金利のELB制約に抵触している超流動性の罠（ultra-liquidity trap）の状況にある中で、追加的な金融緩和効果の評価は、イールドカーブ・モデルの推計において、超長期ゾーン（満期10~30年）のフラット化を長期的な均衡水準への収束スピードが低下したと推計するか、それとも長期的な均衡水準そのものの低下と推計するかという推計パラメータの微妙な識別に依存していることが確認できる。

5. 結び

本稿では、低金利環境下、特に長期金利が低下し、イールドカーブ全体が極端にフラット化した状況におけるイールドカーブ変動を推計し、金融緩和効果を的確に捕捉するための金融政策指標の構築を試みた。

長期金利が大きく低下した金利環境のもとで、金融政策分析に広範に利用されるネルソン＝シーゲル・モデルを推計する場合、非線形な関数形のパラメータ、特に水準とローディングパラメータをどう識別するかという極めて困難な課題に直面する。この点を踏まえ、本稿では、わが国の1990年代半ば以降の金利データを使い、低金利環境のもとでできるだけ推計精度の頑健性の高い統計的なイールドカーブ・モデルを推計することに注力した。推計結果からは、ネルソン＝シーゲル・モデルを動学化するうえで、水準、傾き、曲率の3つの変動要因を捉えるパラメータに加え、長期水準への収束速度をコントロールするローディングパラメータも含めて時変とすることの有効性が確認された。

その上で、推計結果をもとに、イールドカーブの変動を通じた金融緩和効果を定量的に評価するために、長期フォワードレート、時間軸、実効金融緩和度の3つの金融政策指標を構築した。これらの指標の推計結果は、マイナス金利政策導

入以降、動学的ネルソン＝シーゲル・モデルのパラメータの動学過程や誤差項に関する仮定に異なるどのような推計モデルを利用するかによって、やや対照的な結果が得られた。ただし、その結果をより子細に観察すると、イールドカーブ押し下げによる金融緩和の度合いは、満期 3 年以下まで寄与度は、いずれの推計モデルであっても、推計期間を通じて 0.3～0.5%ポイント程度で、それほど大きく変化していない。追加的な金融緩和策の効果は、ZIRP、QE から CE までは、満期 3～10 年のイールドカーブ押し下げによって実現されているが、QQE 開始後は、主として満期 10～30 年のイールドカーブの超長期部分の押し下げが中心的な要因となっている。そして、マイナス金利政策導入後は、この部分の評価が DNS-TVL-VAR-GARCH と DNS-TVL-RW-GARCH の推計結果で対照的なものとなっている。

本稿での推計結果を整理すると、イールドカーブの超長期ゾーンまで、名目金利の ELB 制約に抵触している超流動性の罠 (ultra-liquidity trap) の状況にある中で、追加的な金融緩和効果の評価は、イールドカーブ・モデルの推計において、超長期ゾーン (満期 10～30 年) のフラット化を長期的な均衡水準への収束スピードが低下したと推計するか、それとも長期的な均衡水準そのものの低下と推計するかという推計パラメータの微妙な識別に依存していることになる。

補論 1：推計モデルの詳細

補論 1 では、本稿で使用したネルソン＝シーゲル・モデルについてやや詳しく説明する。まず静学的なネルソン＝シーゲル・モデル (ONS) と、動学的なネルソン＝シーゲル・モデルの中で最も基本的な DNS の違いを整理する。次に、ローディングパラメータを時変とした DNS-TVL、さらに誤差項が GARCH 過程に従うことも考慮した DNS-TVL-GARCH について、順を追って見ていく。

(1) ONS モデルと DNS モデルの関係

まず、ONS と DNS について簡潔に説明する。ONS は、ある t 時点 (横断面) のイールドカーブの形状を 3 つの要素に関するパラメータ (L_t , S_t , C_t) を推計する

ことにより近似する手法である。各ファクターの係数は、ファクターローディング ($\Lambda(\lambda)$) と呼ばれる。スポットレート $R_t(m)$ は以下のように表せる。

$$R_t(m) = L_t + \left(\frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m} \right) S_t + \left[\left(\frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m} \right) - e^{-\lambda m} \right] C_t + \varepsilon_t \quad (\text{A-1})$$

(A-1)式の行列の成分は以下のように表せる。

$$\begin{pmatrix} R_t(m_1) \\ R_t(m_2) \\ \vdots \\ R_t(m_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\lambda m_1}}{\lambda m_1} & \left(\frac{1 - e^{-\lambda m_1}}{\lambda m_1} \right) - e^{-\lambda m_1} \\ 1 & \frac{1 - e^{-\lambda m_2}}{\lambda m_2} & \left(\frac{1 - e^{-\lambda m_2}}{\lambda m_2} \right) - e^{-\lambda m_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1 - e^{-\lambda m_N}}{\lambda m_N} & \left(\frac{1 - e^{-\lambda m_N}}{\lambda m_N} \right) - e^{-\lambda m_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t(m_1) \\ \varepsilon_t(m_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(m_N) \end{pmatrix} \quad (\text{A-2})$$

DNS は、この横断面に加え、時系列の情報も利用する。具体的には、DNS は、ONS と同一の構造を持つ横断面を表す観測方程式である(A-1)式と、ファクターの時系列の関係を表す状態方程式から成るカルマンフィルタを用いることで表現できる。状態方程式は、(A-3)式のように、VAR(1)モデルで定式化される。

$$\beta_{t+1} = (I_3 - F)\mu + F\beta_t + \eta_t, \quad (\text{A-3})$$

$$\beta_t = \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \end{pmatrix}, \eta_t = \begin{pmatrix} \eta_t^1 \\ \eta_t^2 \\ \eta_t^3 \end{pmatrix}.$$

DNS の誤差項の分布は、以下のように表現される。

$$\begin{bmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} \sim \text{NID} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_\eta' \Sigma_\eta & 0 \\ 0 & \Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{A-4})$$

$$\Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \delta_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_N^2 \end{pmatrix}, \Sigma_\eta' = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

ここで、 $\Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon$ は対角行列、 Σ_η' は下三角行列となる。

(2) DNS-TVL-VAR モデル

DNS-TVL-VAR は、DNS を拡張し、これまで時間を通じて一定としてきたローディングパラメータ λ を時変にしたもので、 $\lambda_t > 0$ である。この制約を満たす

ように、 $\tilde{\lambda}_t = \exp(\lambda_t)$ とすると、観測方程式は、(A-5)式のように表せる。(A-5)式は非線形であるため、線形近似を行う拡張カルマンフィルタを用いる必要がある。

$$R_t(m) = L_t + \left(\frac{1 - e^{-\tilde{\lambda}m}}{\tilde{\lambda}m} \right) S_t + \left[\left(\frac{1 - e^{-\tilde{\lambda}m}}{\tilde{\lambda}m} \right) - e^{-\tilde{\lambda}m} \right] C_t + \varepsilon_t \quad (\text{A-5})$$

$$= z(\beta_t, \psi) + \varepsilon_t.$$

ここで、 ψ はモデルパラメータを指す。

$z(\beta_t, \psi)$ を、カルマンフィルタの予測ステップから得られる最適予測値 $\beta_{t|t-1}$ のまわりで1次のテイラー展開を行い、線形近似すると、

$$z(\beta_t, \psi) \approx z(\beta_{t|t-1}, \psi) + \left. \frac{\partial z(\beta_t, \psi)}{\partial \beta_t} \right|_{\beta_t = \beta_{t|t-1}} (\beta_t - \beta_{t|t-1})$$

$$= \left[z(\beta_{t|t-1}, \psi) - \left. \frac{\partial z(\beta_t, \psi)}{\partial \beta_t} \right|_{\beta_t = \beta_{t|t-1}} \beta_{t|t-1} \right] + \left. \frac{\partial z(\beta_t, \psi)}{\partial \beta_t} \right|_{\beta_t = \beta_{t|t-1}} \beta_t \quad (\text{A-6})$$

$$= a_t(\psi) + \dot{z}_t(\psi) \beta_t,$$

$$a_t(\psi) = \left[z(\beta_{t|t-1}, \psi) - \left. \frac{\partial z(\beta_t, \psi)}{\partial \beta_t} \right|_{\beta_t = \beta_{t|t-1}} (\beta_{t|t-1}) \right]$$

$$\dot{z}_t(\psi) = \left. \frac{\partial z(\beta_t, \psi)}{\partial \beta_t} \right|_{\beta_t = \beta_{t|t-1}}$$

と表せ、 $R_t(m)$ は β_t の線形関数で表現できることがわかる。この時、ファクターローディング $\dot{z}_t(\psi)$ は、以下のとおりである。

$$\dot{z}_t(\psi) = \left[1, \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{t|t-1}m}}{\lambda_{t|t-1}m} \right), \left[\left(\frac{1 - e^{-\lambda_{t|t-1}m}}{\lambda_{t|t-1}m} \right) - e^{-\lambda_{t|t-1}m} \right], \frac{\partial z(\beta_{t|t-1})}{\partial \lambda_{t|t-1}} \lambda_{t|t-1} \right]. \quad (\text{A-7})$$

ローディングの最後の要素は、 $\lambda_t = \ln(\tilde{\lambda}_t)$ より、以下のように計算できる。

$$\left. \frac{\partial z(\beta_t)}{\partial \ln(\tilde{\lambda}_t)} \right|_{\ln(\tilde{\lambda}_t) = \ln(\tilde{\lambda}_{t|t-1})} = \left. \frac{\partial z(\beta_t)}{\partial \lambda_t} \right|_{\lambda_t = \lambda_{t|t-1}} \lambda_{t|t-1}$$

$$= \beta_{t|t-1}^1 \left(\frac{e^{-\lambda_{t|t-1}m} [\lambda_{t|t-1}m + 1] - 1}{\lambda_{t|t-1}m} \right) \quad (\text{A-8})$$

$$+ \beta_{t|t-1}^2 \left(\frac{e^{-\lambda_{t|t-1}m} [\lambda_{t|t-1}m + 1] - 1}{\lambda_{t|t-1}m} + m \lambda_{t|t-1} e^{-\lambda_{t|t-1}m} \right).$$

状態方程式は、以下のように表せる。

$$\beta_{t+1} = (I_4 - F)\mu + F\beta_t + \eta_t, \quad (\text{A-9})$$

$$\beta_t = \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \\ \lambda_t \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \\ \mu^4 \end{pmatrix}, \eta_t = \begin{pmatrix} \eta_t^1 \\ \eta_t^2 \\ \eta_t^3 \\ \eta_t^4 \end{pmatrix}.$$

DNS-TVL モデルの誤差項の分布は、以下のように表現される。

$$\begin{bmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} \sim \text{NID} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_\eta' \Sigma_\eta & 0 \\ 0 & \Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{A-10})$$

ここで、 Σ_ε' Σ_ε は対角行列、 Σ_η' は下三角行列であるとする。

$$\Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \delta_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_N^2 \end{pmatrix}, \Sigma_\eta' = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 0 \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{pmatrix}.$$

(3) DNS-TVL-GARCH

次に、DNS-TVL-GARCH モデルについて説明する。(A-5)式の誤差項 ε_t を以下のように拡張する。

$$\varepsilon_t = \Gamma_\varepsilon \varepsilon_t^* + \varepsilon_t^+. \quad (\text{A-11})$$

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t(m_1) \\ \varepsilon_t(m_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(m_N) \end{pmatrix}, \Gamma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \Gamma_t^1 \\ \Gamma_t^2 \\ \vdots \\ \Gamma_t^N \end{pmatrix}, \varepsilon_t^+ = \begin{pmatrix} \varepsilon_t^+(m_1) \\ \varepsilon_t^+(m_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_t^+(m_N) \end{pmatrix}.$$

ここで、 Γ_ε 、 ε_t^+ は $(N \times 1)$ のベクトルで、 ε_t^+ は各年限固有の誤差項を表す。 ε_t^* はスカラーで、各年限に共通の誤差項であり、 Γ_ε はその年限固有の感応度である。 ε_t^+ は $\text{NID}(0, \Sigma_\varepsilon^+ \Sigma_\varepsilon^+)$ 、 ε_t^* は $\text{NID}(0, h_t)$ に従い、 ε_t^* の分散 h_t は以下のような GARCH(1,1)過程に従うと仮定する。

$$h_t = \gamma_0 + \gamma_1 (\varepsilon_{t-1}^*)^2 + \gamma_2 h_{t-1}. \quad (\text{A-12})$$

ただし、 $\gamma_0 > 0$ 、 $0 < \gamma_1 < 1$ 、 $0 < \gamma_2 < 1$ 、 $h_1 = \gamma_0 (1 - \gamma_1 - \gamma_2)^{-1}$ である。 ε_t^* の分散 h_t が GARCH(1,1)過程に従うことから、 ε_t の分散共分散行列 $\Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon$ も時変となり、以下のように表せる。

$$\Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon(h_t) = h_t \Gamma_\varepsilon \Gamma_\varepsilon' + \Sigma_\varepsilon^+ \Sigma_\varepsilon^+. \quad (\text{A-13})$$

ここで、 $\Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon(h_t)$ が $(N \times N)$ の対角行列であることに留意が必要である。

Γ_ε を識別する方法として、「 $\Gamma_\varepsilon' \Gamma_\varepsilon = 1$ 」と正規化することが考えられるが、(A-12)式のように表現できる場合、この正規化の制約を、「 γ_0 を既知の定数に固定する」としても、代用可能である。これを踏まえ、Koopman, Mallee, and Van der Wel (2010) は、 γ_0 を 0.0001 と小さな値に固定することを提案している。そこで、本稿でも Koopman, Mallee, and Van der Wel (2010) に倣い、 γ_0 を 0.0001 と固定する。(A-11)式を(A-5)式に代入することで、DNS-TVL-GARCH の観測方程式は、

$$\begin{aligned} R_t(m) &= \beta_t^1 + \left(\frac{1 - e^{-\tilde{\lambda}m}}{\tilde{\lambda}m} \right) \beta_t^2 + \left[\left(\frac{1 - e^{-\tilde{\lambda}m}}{\tilde{\lambda}m} \right) - e^{-\tilde{\lambda}m} \right] \beta_t^3 + \varepsilon_t \\ &= z(\beta_t, \psi) + \varepsilon_t = z(\beta_t, \psi) + \Gamma_\varepsilon \varepsilon_t^* + \varepsilon_t^+. \end{aligned} \quad (\text{A-14})$$

と表せる。ここで、 $w(\tilde{\beta}_t, \psi) = \Lambda(\tilde{\lambda}_t) \beta_t + \Gamma_\varepsilon \varepsilon_t^*$ とし、(A-6)式同様に、 $w(\tilde{\beta}_t, \psi)$ も $\tilde{\beta}_{t|t-1}$ のまわりで1次のテイラー展開を行い、線形近似すると、以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} R_t(m) &= [\Lambda(\tilde{\lambda}_t) \quad \Gamma_\varepsilon] \begin{pmatrix} \beta_t \\ \varepsilon_t^* \end{pmatrix} + \varepsilon_t^+ = w(\tilde{\beta}_t, \psi) + \varepsilon_t^+ \\ &= d_t(\psi) + \dot{w}_t(\psi) \tilde{\beta}_t + \varepsilon_t^+, \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

$$\beta_t = \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \\ \lambda_t \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta}_t = \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \\ \lambda_t \\ \varepsilon_t^* \end{pmatrix},$$

$$d_t(\psi) = \left[w(\tilde{\beta}_{t|t-1}, \psi) - \frac{\partial w(\tilde{\beta}_t, \psi)}{\partial \tilde{\beta}_t} \Big|_{\tilde{\beta}_t = \tilde{\beta}_{t|t-1}} (\tilde{\beta}_{t|t-1}) \right],$$

$$\dot{w}_t(\psi) = \frac{\partial w(\tilde{\beta}_t, \psi)}{\partial \tilde{\beta}_t} \Big|_{\tilde{\beta}_t = \tilde{\beta}_{t|t-1}}.$$

ここで、ファクターローディング $\dot{w}_t(\psi)$ は、

$$\begin{aligned} \dot{w}_t(\psi) &= \left[1, \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{t|t-1}m}}{\lambda_{t|t-1}m} \right), \left[\left(\frac{1 - e^{-\lambda_{t|t-1}m}}{\lambda_{t|t-1}m} \right) - e^{-\lambda_{t|t-1}m} \right], \frac{\partial z(\beta_{t|t-1})}{\partial \lambda_{t|t-1}} \lambda_{t|t-1}, \Gamma_\varepsilon \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

と表せる。

DNS-TVL-GARCH モデルの観測方程式、誤差項の分布は、以下のように表現できる。

$$\tilde{\beta}_{t+1|t} = \begin{pmatrix} \beta_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_4 - F)\mu \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_t \\ \varepsilon_t^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_{t+1}^* \end{pmatrix}, \quad (\text{A-17})$$

$$\beta_t = \begin{pmatrix} \beta_t^1 \\ \beta_t^2 \\ \beta_t^3 \\ \lambda_t \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \\ \mu^4 \end{pmatrix}, \eta_t = \begin{pmatrix} \eta_t^1 \\ \eta_t^2 \\ \eta_t^3 \\ \eta_t^4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_{t+1}^* \end{bmatrix} \sim \text{NID} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_\eta' \Sigma_\eta & 0 \\ 0 & h_{t+1} \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{A-18})$$

以上より、DNS-TVL-GARCH モデルは、(A-9)式の代わりに、状態変数に ε_t^* を加えた(A-17)式の状態方程式、(A-6)式の $\dot{z}(\psi)$ の代わりに、(A-16)式の $\dot{w}(\psi)$ を用いて線形近似した(A-15)式の観測方程式を用いて、 β_t を $\tilde{\beta}_t$ に置き換え、拡張カルマンフィルタを利用すればよいことがわかる。

(4) VAR モデルと RW モデル

(A-3)式、(A-9)式、(A-17)式のいずれの観測方程式も VAR(1)モデルで定式化されていることから、VAR モデルと呼ばれる。一方、これらの各モデルの状態方程式に「係数 F が単位行列」、「定数項 μ が 0」、「分散共分散行列 $\Sigma_\eta' \Sigma_\eta$ が対角」であるとの制約を課すことで、VAR モデルの特殊形として、RW モデルが定式化される。

(A-3)式を用い、両モデルを比較すると、以下のように表せる。

VAR モデル

$$\beta_{t+1} = (I_3 - F)\mu + F\beta_t + \eta_t, \quad (\text{A-19})$$

$$\beta_t = \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \end{pmatrix}, \eta_t = \begin{pmatrix} \eta_t^1 \\ \eta_t^2 \\ \eta_t^3 \end{pmatrix}. \quad \begin{bmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} \sim \text{NID} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_\eta' \Sigma_\eta & 0 \\ 0 & \Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon \end{pmatrix} \right].$$

$$\Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \delta_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_N^2 \end{pmatrix}, \Sigma_\eta' = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

RW モデル

$$\beta_{t+1} = \beta_t + \eta_t, \quad (\text{A-19})'$$

$$\beta_t = \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix}, \quad \eta_t = \begin{pmatrix} \eta_t^1 \\ \eta_t^2 \\ \eta_t^3 \end{pmatrix}. \quad [\eta_t] \sim \text{NID} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_\eta' \Sigma_\eta & 0 \\ 0 & \Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon \end{pmatrix} \right].$$

$$\Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \delta_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_N^2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_\eta' = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

RW モデルは、例えば、Kim and Nelson (1999) の時変パラメータ回帰モデル (TVPM: time-varying parameter model) や、係数が RW 過程に従う時変パラメータ VAR (TVP-VAR) モデル等で頻繁に用いられている。本稿の RW モデルでは、観測方程式のファクターがランダムウォークする。ただし、これは、ファクターが、過去のファクターの変化の影響（及びその背後にある経済の基礎的諸条件）と関係なく酔歩することを意味するのではなく、政策予想、外的なショック等、あらゆる過去の情報が観測方程式に速やかに反映されることを意味する。従って、RW モデルでは、VAR モデルと比べ、ファクターの調整速度が速くなる点が特徴である。

補論 2 : 推計方法の詳細

補論 2 では、動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの中でもローディングパラメータを時変とした DNS-TVL、DNS-TVL-GARCH の推計方法について説明する。いずれのモデルも非線形であるため、拡張カルマンフィルタを使用する。線形である DNS、DNS-GARCH で使用する通常のカルマンフィルタとの違いは、補論 1 でみたように、非線形な観測方程式を 1 次のテイラー展開で線形近似する点である。

(1) 拡張カルマンフィルタ

以上を踏まえ、拡張カルマンフィルタについて説明する。拡張カルマンフィルタは、観測方程式、状態方程式を用い、以下の 2 つのステップ（更新ステップ、

予測ステップ) から構成される。推定値を所与とすると、例えば DNS-TVL モデルでは、

更新ステップ :

$$\begin{aligned}\beta_{t|t} &= \beta_{t|t-1} + P_{t|t-1} \dot{z}'_t f_t^{-1} v_t \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} \dot{z}'_t f_t^{-1} \dot{z}_t P_{t|t-1},\end{aligned}\tag{A-20}$$

$$\begin{aligned}v_t &= R_t - z(\beta_{t|t-1}, \psi), \\ f_t &= \dot{z}_t P_{t|t-1} \dot{z}'_t + \Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon.\end{aligned}\tag{A-21}$$

予測ステップ :

$$\begin{aligned}\beta_{t+1|t} &= (I - F)\mu + F\beta_{t|t} \\ P_{t+1|t} &= FP_{t|t}F' + \Sigma_\eta' \Sigma_\eta.\end{aligned}\tag{A-22}$$

対数尤度関数 :

$$\ln L = -\frac{N}{2} \sum_{t=1}^T \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln|f_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T v_t' f_t^{-1} v_t,\tag{A-23}$$

と表せる。この更新ステップと予測ステップを逐次的に計算し、対数尤度関数を最大化するようなパラメータ ψ を推定する。未知パラメータ ψ は F : 16 個 (4×4)、 μ : 4 個 (4×1)、 Σ_η : 10 個 ($=4+3+2+1$)、 Σ_ε : 9 個 ($=$ 満期) の計 39 個である。

$$\begin{aligned}F &= \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \\ \mu^4 \end{pmatrix}, \Sigma_\varepsilon' \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \delta_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_N^2 \end{pmatrix}, \\ \Sigma_\eta' &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 0 \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

DNS-TVL-GARCH では、 \dot{z}_t の代わりに \dot{w}_t 、 β_t の代わりに $\tilde{\beta}_t$ を用いればよい。未知パラメータ ψ は、DNS-TVL の 39 個に、 Γ_ε : 9 個、 γ_1, γ_2 の 2 個を加えた計 50 個である。

(2) フィルタリングとスムージング

フィルタリングは t 期の観測値が得られた下で、 t 期の状態変数(ファクター)を求めているのに対し、スムージングは終期 T までの観測値全てが得られた下で、各 t 期の状態変数を求めている。従って、スムージングを行うことで、より多くの観測値の情報を用いて状態変数を推定するため、精度を向上させることができる。一方、新しいデータが得られる度に、過去の推計値も更新されることになる。

本稿では、過去のトレンドを正確に推計するよりも、現在のトレンドをリアルタイムで推計することに重点を置き、スムージングは行わず、新しいデータが得られる度にフィルタリングを行い、現時点の観測変数を推計する。この点、本稿でベンチマークモデルとして使用するONSは、推計に横断面方向の情報のみを使用するため、計算がより簡便で、遡及する必要もなく、イールドカーブの形状を把握する上で重要な基盤を提供すると考えられる。

参考文献

- Buitenhuis, Jos, “Time-Varying Parameters in the Dynamic Nelson-Siegel Model,” Master’s thesis 2017.
- Christensen, Jens H. E. and Glenn Rudebusch, “Estimating Shadow-Rate Term Structure Models with Near-Zero Yields,” *Journal of Financial Econometrics*, 2015, 13 (2), 226–259.
- _____, Francis X. Diebold, and Glenn D. Rudebusch, “The Affine Arbitrage-free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models,” *Journal of Econometrics*, 2011, 164 (1), 4–20.
- Diebold, Francis X. and Canlin Li, “Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields,” *Journal of Econometrics*, 2006, 130 (2), 337–364.
- _____, Glenn D. Rudebusch, and S. Boragan Aruoba, “The Macroeconomy and the Yield Curve: a Dynamic Latent Factor Approach,” *Journal of Econometrics*, 2006, 131 (1), 309–338.

- Eggertsson, Gauti B. and Michael Woodford, “The Zero Bound on Interest Rates and Optimal Monetary Policy,” *Brookings Papers on Economic Activity*, 2003, 34 (1), 139–235.
- Fujiki, Hiroshi and Shigenori Shiratsuka, “Policy Duration Effect under the Zero Interest Rate Policy in 1999-2000: Evidence from Japan’s Money Market Data,” *Monetary and Economic Studies*, January 2002, 20 (1), 1–31.
- _____, Kunio Okina, and Shigenori Shiratsuka, “Monetary Policy under Zero Interest Rate: Viewpoints of Central Bank Economists,” *Monetary and Economic Studies*, February 2001, 19 (1), 89–130.
- Ichiue, Hibiki and Yoichi Ueno, “Monetary Policy and the Yield Curve at Zero Interest,” *Journal of the Japanese and International Economies*, 2015, 38, 1–12.
- _____, and _____, “A Survey-based Shadow Rate and Unconventional Monetary Policy Effects,” IMES Discussion Paper Series No. 18-E-05 2018.
- Jung, Taehun, Yuki Teranishi, and Tsutomu Watanabe, “Optimal Monetary Policy at the Zero-Interest-Rate Bound,” *Journal of Money, Credit and Banking*, October 2005, 37 (5), 813–835.
- Kim, Chang-Jin and Charles R. Nelson, *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, Vol. 1 of MIT Press Books, The MIT Press, 1999.
- Koeda, Junko and Atushi Sekine, “Nelson-Siegel Decay Factor and Term Premia in Japan,” Working Papers 2106, Waseda University, Faculty of Political Science and Economics April 2021.
- Koopman, Siem Jan, Max I. P. Mallee, and Michel Van der Wel, “Analyzing the Term Structure of Interest Rates Using the Dynamic Nelson-Siegel Model With Time-Varying Parameters,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 2010, 28 (3), 329–343.
- Krippner, Leo, *Zero Lower Bound Term Structure Modeling: A Practitioner’s Guide* 2015.
- _____, “Documentation for Measures of Monetary Policy,” 2016.
- Nelson, Charles R. and Andrew F. Siegel, “Parsimonious Modeling of Yield Curves,” *The Journal of Business*, 1987, 60 (4), 473–489.

- Okina, Kunio and Shigenori Shiratsuka, “Policy Commitment and Expectation Formation: Japan’s Experience under Zero Interest Rates,” *The North American Journal of Economics and Finance*, 2004, 15 (1), 75–100.
- Söderlind, Paul and Lars Svensson, “New Techniques to Extract Market Expectations from Financial Instruments,” *Journal of Monetary Economics*, 1997, 40 (2), 383–429.
- Ueno, Yoichi, “Term Structure Models with Negative Interest Rates,” IMES Discussion Paper Series 17-E-01, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan March 2017.
- van Dijk, Dick, Siem Jan Koopman, Michel van der Wel, and Jonathan H. Wright, “Forecasting Interest Rates with Shifting Endpoints,” *Journal of Applied Econometrics*, 2014, 29 (5), 693–712.
- Wu, Jing Cynthia and Fan Dora Xia, “Measuring the Macroeconomic Impact of Monetary Policy at the Zero Lower Bound,” *Journal of Money, Credit and Banking*, March 2016, 48 (2-3), 253–291.

表 1：金融政策イベント

	日付	政策イベント
①	19950908	利下げ（公定歩合を0.5%に引下げ）
②	19980909	利下げ（ONレートを0.25%前後に）
③	19990212	ゼロ金利政策開始
④	19990413	ゼロ金利継続のコミットメント
⑤	20000811	ゼロ金利解除
⑥	20010319	量的緩和開始
⑦	20010814	当座預金残高目標値引上げ（6兆円程度に）
	20011219	当座預金残高目標値引上げ（10から15兆円程度に）
	20021030	当座預金残高目標値引上げ（15から20兆円程度に）
	20030325	当座預金残高目標値引上げ（17から22兆円程度に）
⑧	20030430	当座預金残高目標値引上げ（22から27兆円程度に）
	20030520	当座預金残高目標値引上げ（27から30兆円程度に）
⑨	20031010	量的緩和継続のコミットメント明確化
⑩	20060309	量的緩和解除
⑪	20060714	ゼロ金利解除
⑫	20070221	利上げ（ONレートを0.5%前後に）
*	20080915	リーマンショック
	20081031	利下げ（ONレートを0.3%前後に）
⑬	20081219	利下げ（ONレートを0.1%前後に）
⑭	20101005	包括緩和
⑮	20130122	物価安定目標導入
⑯	20130404	QQE
⑰	20141031	QQE拡大
⑱	20160129	マイナス金利付QQE
⑲	20160921	長短金利操作付き量的・質的金融緩和
⑳	20180731	長短金利操作付き量的・質的金融緩和の持続性強化

表 2：動学的ネルソン＝シーゲル・モデルの推計結果

	DNS-VAR		DNS-RW		DNS-TVL-VAR		DNS-TVL-VAR-GARCH		DNS-TVL-RW		DNS-TVL-RW-GARCH	
	Coef.	S.E.	Coef.	S.E.	Coef.	S.E.	Coef.	S.E.	Coef.	S.E.	Coef.	S.E.
Likelihood	15542.6		13939.1		16251.4		16557.2		15613.5		15776.1	
kappa11	0.9357	0.1294	1.0000	—	0.9668	0.07745	1.0078	0.1932	1.0000	—	1.0000	—
kappa12	-0.0873	0.1858	0.0000	—	-0.0371	0.10942	0.0046	0.0259	0.0000	—	0.0000	—
kappa13	0.0450	0.0531	0.0000	—	0.0395	0.00362	0.0457	0.0376	0.0000	—	0.0000	—
kappa14					0.0002	0.00019	-0.0003	0.0082	0.0000	—	0.0000	—
kappa21	-0.0291	0.1369	0.0000	—	-0.0551	0.04605	-0.0584	0.0737	0.0000	—	0.0000	—
kappa22	0.9567	0.1967	1.0000	—	0.8590	0.08659	0.8707	0.0366	1.0000	—	1.0000	—
kappa23	-0.0105	0.0532	0.0000	—	0.0029	0.00805	0.0013	0.0199	0.0000	—	0.0000	—
kappa24					0.0000	0.00021	0.0003	0.0029	0.0000	—	0.0000	—
kappa31	0.1859	0.1424	0.0000	—	-0.0112	0.01894	0.0813	0.0473	0.0000	—	0.0000	—
kappa32	0.2566	0.1964	0.0000	—	-0.0888	0.05298	0.0723	0.2080	0.0000	—	0.0000	—
kappa33	0.9062	0.0504	1.0000	—	0.9416	0.02373	0.9311	0.0486	1.0000	—	1.0000	—
kappa34					-0.0003	0.00031	-0.0002	0.0042	0.0000	—	0.0000	—
kappa41					2.1111	1.61765	-0.4745	0.0960	0.0000	—	0.0000	—
kappa42					4.6530	4.80540	0.2061	0.6477	0.0000	—	0.0000	—
kappa43					0.4210	1.48151	0.9701	0.0386	0.0000	—	0.0000	—
kappa44					0.9970	0.02046	0.9993	0.0323	1.0000	—	1.0000	—
theta1	0.0724	0.00456	0.0000	—	0.0635	0.00299	0.0576	0.00368	0.0000	—	0.0000	—
theta2	-0.0539	0.00465	0.0000	—	-0.0424	0.00307	-0.0374	0.00361	0.0000	—	0.0000	—
theta3	-0.0082	0.00842	0.0000	—	-0.0242	0.00617	-0.0125	0.00754	0.0000	—	0.0000	—
theta4					0.2054	0.08255	0.0020	0.01236	0.0000	—	0.0000	—
sigma11	0.0029	0.00024	0.0027	0.00012	0.0018	0.00013	0.0019	0.00013	0.0029	0.00012	0.0029	0.00013
sigma22	0.0006	0.00003	0.0023	0.00010	0.0005	0.00003	0.0006	0.00004	0.0023	0.00011	0.0023	0.00011
sigma33	0.0045	0.00022	0.0037	0.00021	0.0034	0.00025	0.0036	0.00029	0.0041	0.00023	0.0034	0.00018
sigma44					0.0811	0.00795	0.0685	0.00791	0.0707	0.00666	0.1040	0.00959
sigma21	-0.0028	0.00023	0.0000	—	-0.0017	0.00013	-0.0018	0.00014	0.0000	—	0.0000	—
sigma31	-0.0036	0.00057	0.0000	—	-0.0021	0.00031	-0.0022	0.00035	0.0000	—	0.0000	—
sigma32	-0.0004	0.00035	0.0000	—	0.0008	0.00029	0.0003	0.00023	0.0000	—	0.0000	—
sigma41					0.0000	0.01009	-0.0001	0.01383	0.0000	—	0.0000	—
sigma42					-0.0215	0.00982	-0.0203	0.00965	0.0000	—	0.0000	—
sigma43					0.0246	0.00919	0.0230	0.01143	0.0000	—	0.0000	—
sig1	3.39E-04	2.23E-05	7.41E-04	4.77E-05	3.24E-04	1.93E-05	3.07E-04	2.47E-05	3.23E-04	2.27E-05	3.13E-04	2.26E-05
sig2	1.88E-04	2.23E-05	1.47E-10	9.49E-05	1.80E-04	2.05E-05	1.69E-04	2.77E-05	1.58E-04	2.62E-05	1.36E-04	3.04E-05
sig3	4.37E-04	1.97E-05	6.24E-04	3.18E-05	4.79E-04	2.32E-05	4.37E-04	2.19E-05	4.64E-04	2.20E-05	4.70E-04	2.21E-05
sig4	2.45E-04	2.08E-05	2.84E-11	1.17E-04	3.26E-04	1.96E-05	2.63E-04	2.60E-05	3.13E-04	1.99E-05	3.27E-04	1.66E-05
sig5	3.20E-04	2.11E-05	6.76E-04	3.25E-05	4.50E-04	2.24E-05	2.86E-04	3.66E-05	4.48E-04	2.32E-05	4.92E-04	2.20E-05
sig6	4.25E-04	2.04E-05	3.98E-04	3.87E-05	1.84E-04	4.12E-05	3.05E-04	2.47E-05	2.52E-04	3.12E-05	4.62E-10	2.18E-05
sig7	2.17E-04	6.51E-05	1.54E-03	8.42E-05	6.75E-04	3.24E-05	6.94E-12	3.96E-05	6.63E-04	3.61E-05	5.72E-04	2.33E-05
sig8	1.90E-03	8.20E-05	3.88E-03	1.85E-04	1.02E-03	5.70E-05	8.58E-04	3.58E-05	9.51E-04	5.43E-05	8.25E-11	2.81E-05
sig9	7.61E-03	3.28E-04	1.11E-02	4.72E-04	6.45E-04	9.97E-05	2.12E-10	9.04E-05	1.07E-03	0.000102	7.51E-04	5.27E-05
λ	0.3820		1									
gam1							0.497	0.126			0.389	0.049
gam2							0.499	0.127			0.610	0.050
mgamma							0.0019	0.0016			0.0040	0.0026
							0.0015	0.0018			0.0039	0.0026
							0.0007	0.0021			0.0030	0.0023
							0.0005	0.0030			0.0016	0.0020
							0.0000	0.0036			0.0004	0.0018
							0.0068	0.0051			0.0000	0.0017
							0.0150	0.0071			0.0020	0.0022
							0.0107	0.0060			0.0060	0.0035
							0.0000	0.0030			0.0019	0.0020

表 3 : 推計モデルのフィットの比較

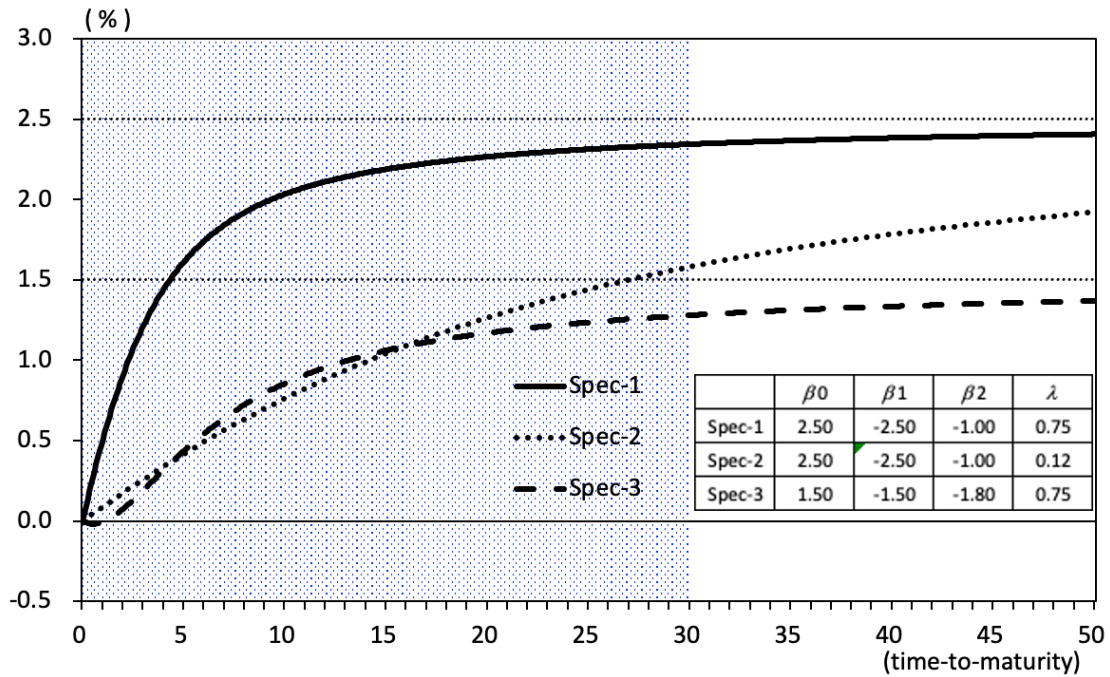
	Likelihood	# Param.	AIC	BIC
DNS-VAR	15542.6	28	-101.4	-101.1
DNS-RW	13939.1	13	-91.0	-90.9
DNS-TVL-VAR	16251.4	39	-106.0	-105.5
DNS-TVL-VAR-GARCH	16557.2	50	-107.9	-107.3
DNS-TVL-RW	15613.5	13	-102.0	-101.8
DNS-TVL-RW-GARCH	15776.1	24	-103.0	-102.7

表 4 : スポットレートの推計値と観測値の乖離

Maturity	1-yr	5-yr	10-yr	30-yr	All
ONS	0.0565	0.0402	0.0513	0.0962	0.0610
DNS-VAR	0.0423	0.0395	0.1882	0.7578	0.2569
DNS-RW	0.0624	0.0266	0.3831	1.1025	0.3936
DNS-TVL-VAR	0.0473	0.0127	0.1003	0.0367	0.0493
DNS-TVL-VAR-GARCH	0.0436	0.0307	0.0860	0.0066	0.0417
DNS-TVL-RW	0.0440	0.0179	0.0868	0.0779	0.0566
DNS-TVL-RW-GARCH	0.0451	0.0094	0.0077	0.0549	0.0293

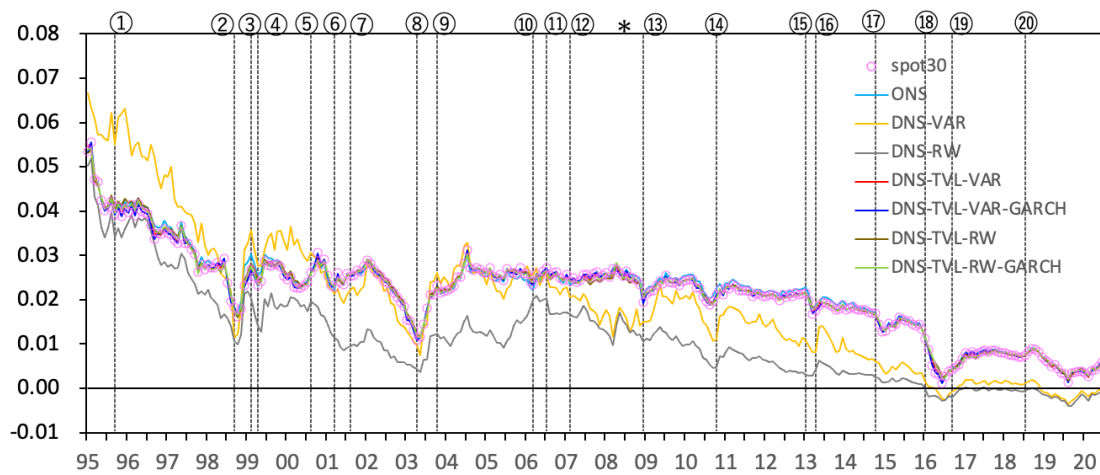
備考：表中の計数は、各推計手法による各年限のスポットレートの推計値の平方平均自乗誤差。

図1：ネルソン＝シーゲル・モデルのパラメータ識別



備考：図中にプロットした計数は、ONS モデルに Spec-1～3 のパラメータを適用して算出したスポットレート。

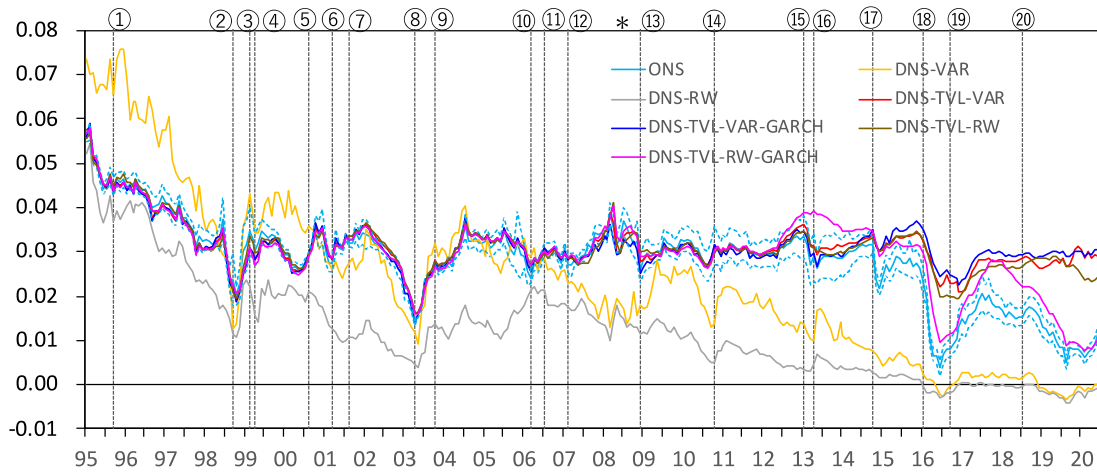
図2：スポットレート（30年）の推計値の比較



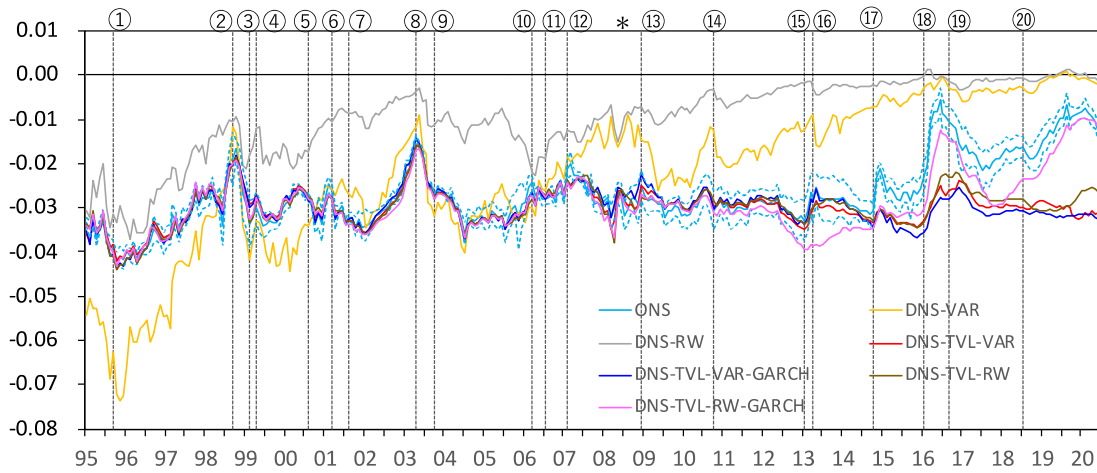
備考：図中の丸数字は、表1に整理した政策イベントを示す。以下の図表はすべて同様。

図 3 : 推計パラメータの比較

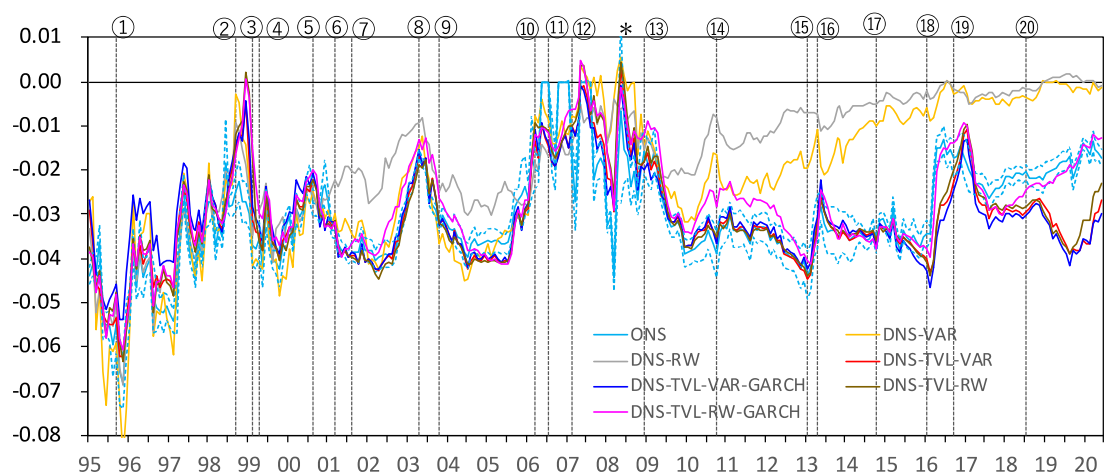
(1) 水準 L の推計値



(2) 傾き S の推計値



(3) 曲率 C の推計値



(4) ローディングパラメータ λ の推計値

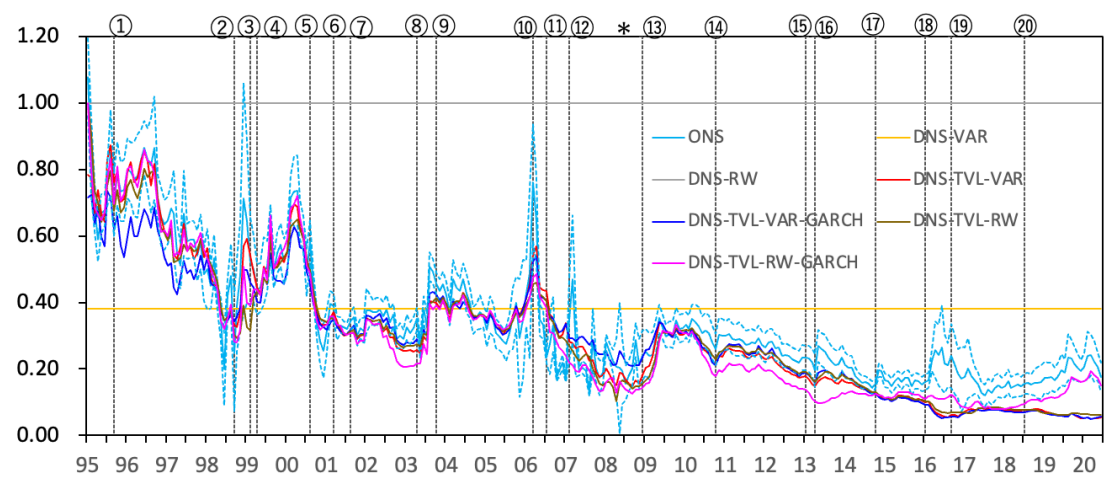
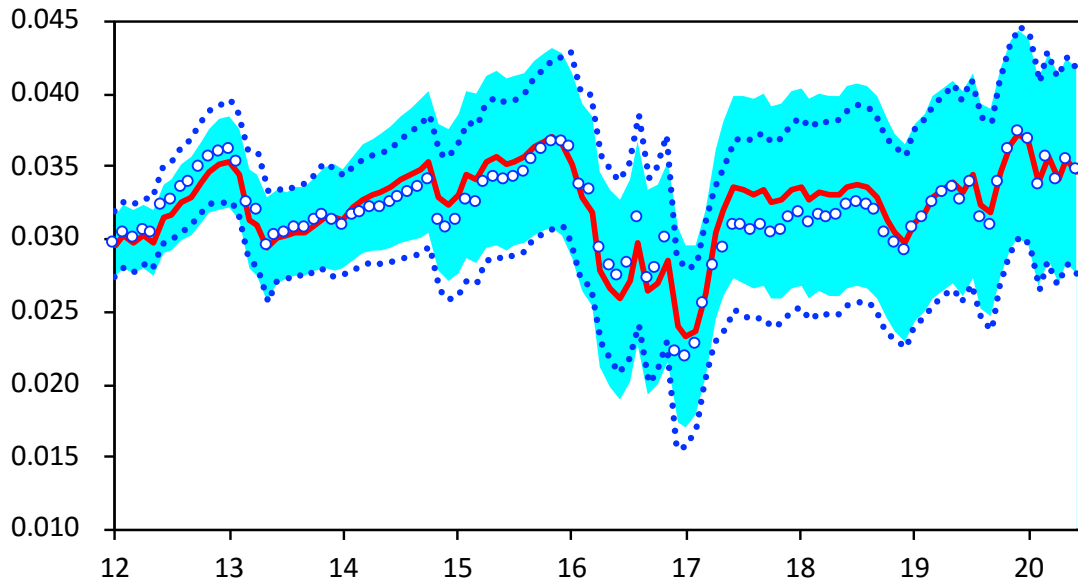
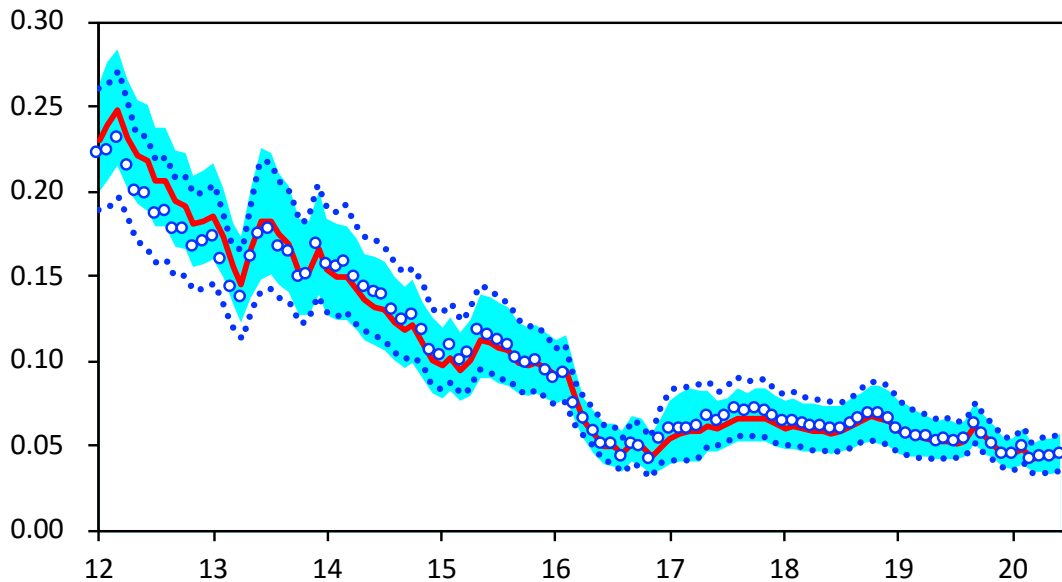


図 4：推計期間を短縮化した場合の影響(1)：
DNS-TVL-VAR-GARCH による推計

(1) 水準



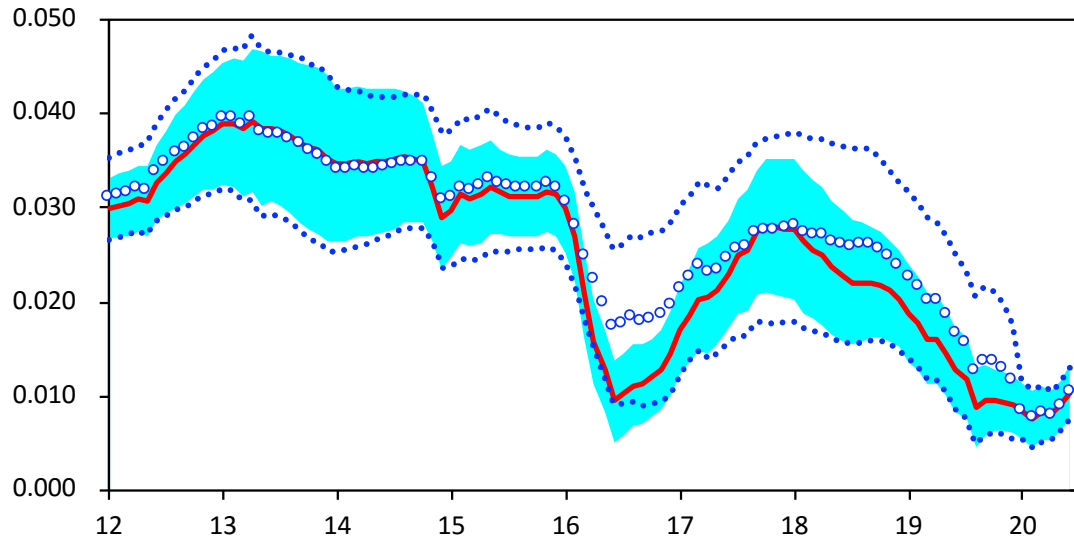
(2) ローディングパラメータ



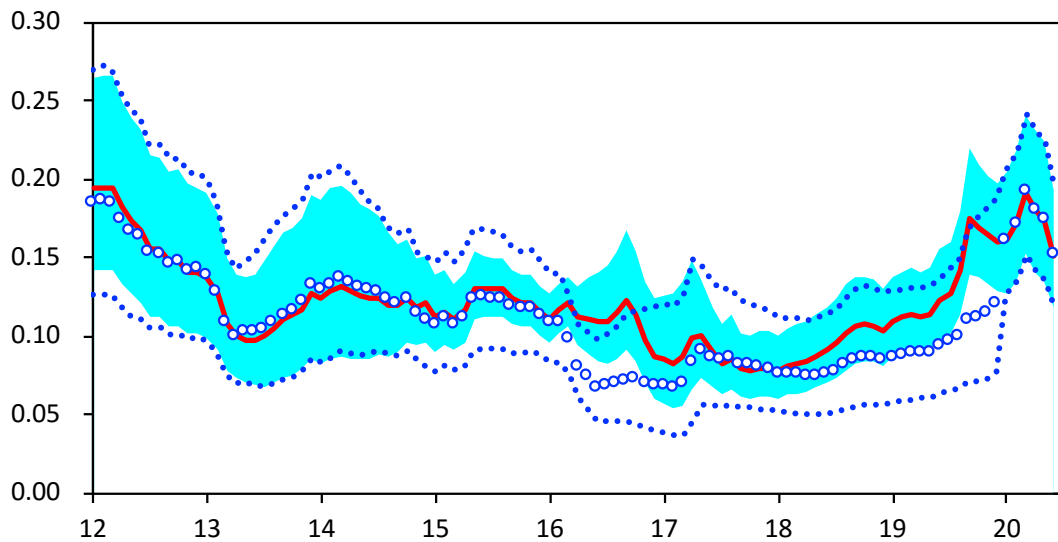
備考：図中の赤線およびライトブルーのシャドーは、それぞれフルサンプル期間での推計値および 95%信頼区間。丸印および青の点線は、各時点を終期としたサブサンプルでの推計値および 95%信頼区間。

図 5：推計期間を短縮化した場合の影響(2)：
DNS-TVL-RW-GARCH による推計

(1) 水準



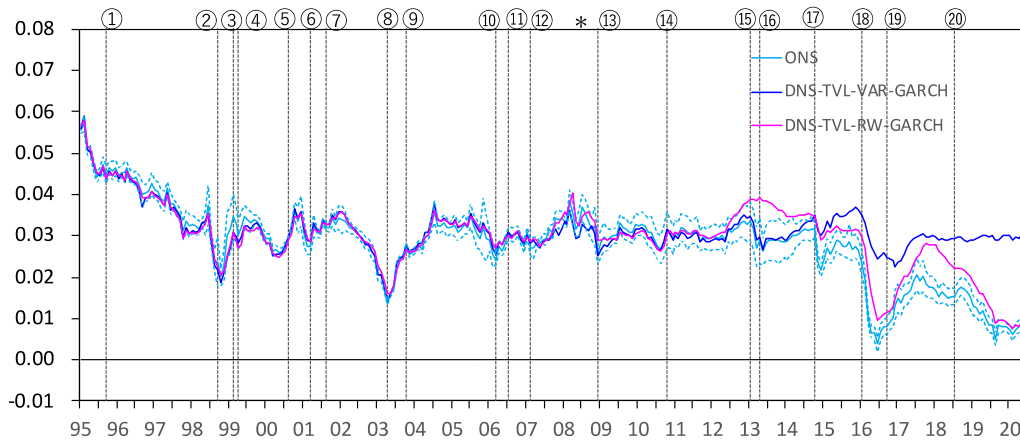
(2) ローディングパラメータ



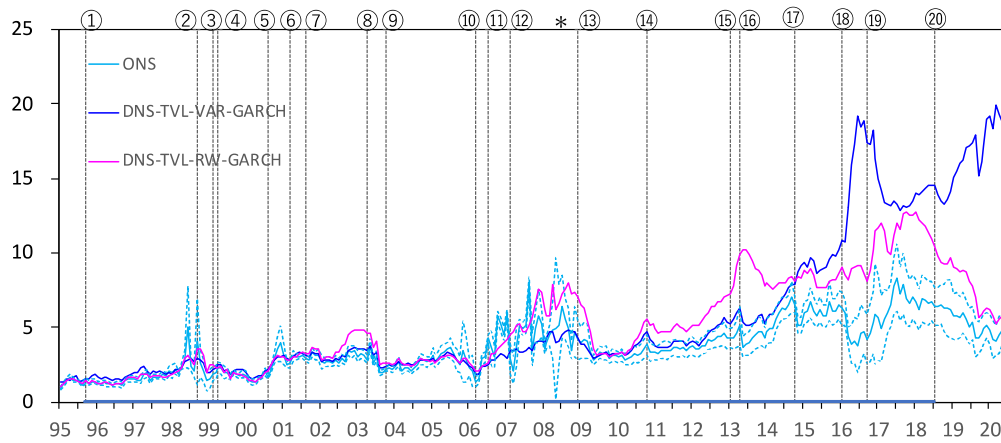
備考：図中の赤線およびライトブルーのシャドーは、それぞれフルサンプル期間での推計値および 95%信頼区間。丸印および青の点線は、各時点を終期としたサブサンプルでの推計値および 95%信頼区間。

図 6：金融政策指標の推移

(1) 長期フォワードレート (LFR)



(2) 時間軸の長さ (PD)



(3) 実効金融緩和度 (EMS)

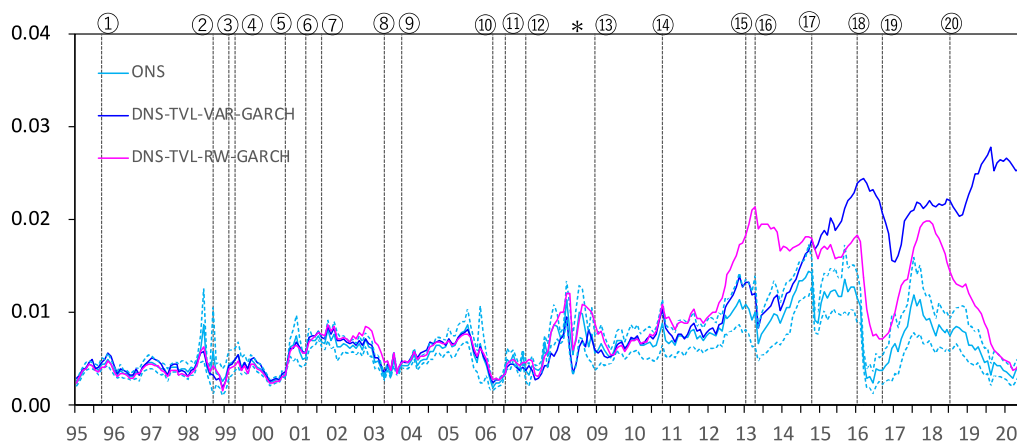
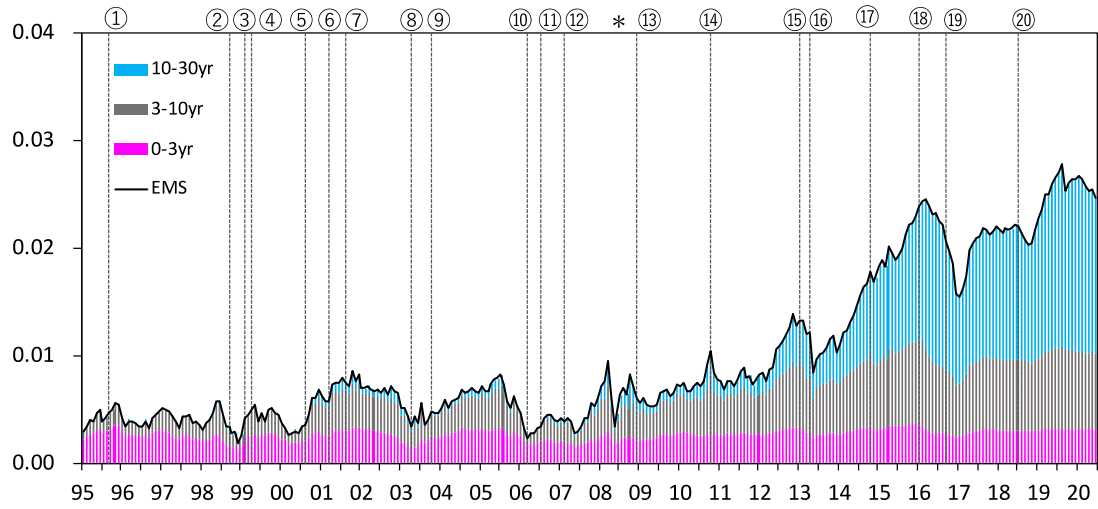


図 7：実効金融緩和度の期間別分解

(1) DNS-TVL-VAR-GARCH



(2) DNS-TVL-RW-GARCH

