

# IMES DISCUSSION PAPER SERIES

## マイナス金利を考慮したフォワードレート・モデルと 市場の金利見通し

すがぬまけんじ やまだてつや  
菅沼健司・山田哲也

Discussion Paper No. 2017-J-18

# IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

## マイナス金利を考慮したフォワードレート・モデルと市場の金利見通し

すがめけんじ やまだてつや  
菅沼健司\*・山田哲也\*\*

## 要 旨

近年、先進国を中心とした低金利環境、とりわけマイナス金利政策の導入に伴い、金融実務においてもマイナス金利を考慮したフォワードレート・モデルが提案されている。本研究では、こうした一連のモデル群の特徴を整理するとともに、金利オプションのデータにフィットさせることで、マイナス金利政策、イールドカーブ・コントロール政策、指値オペといったイベントの前後で、投資家が予測する金利の将来分布がどのように変化したかを分析する。その結果、日本では、マイナス金利政策が導入される半年前からマイナス金利が意識され始めていたこと、マイナス金利政策導入後も、Brexit 直後の政策決定会合を含め複数にわたり追加緩和期待が確認されたこと、イールドカーブ・コントロール政策導入後は、先行き 1~2 年程度にわたって投資家による金利水準に対する見方のばらつきが一定水準の近辺に収斂するなどの現象が観測されたこと等がわかった。加えて、トランプ・ショック後の指値オペでは、一時的に増幅した先行きの金利上昇観測をある程度牽制していたことも確認された。

キーワード：マイナス金利、イールドカーブ・コントロール、インプライド分布、Shifted SABR、Free boundary SABR

JEL classification: E43、E58、G12、G13

\* 日本銀行金融研究所企画役補佐

(現 企画局企画役補佐、E-mail: kenji.suganuma@boj.or.jp)

\*\* 日本銀行金融研究所企画役 (現 金融機構局企画役、E-mail: tetsuya.yamada@boj.or.jp)

本稿の作成に当たっては、Alexandre Antonov 氏 (Numerix 社)、楠岡成雄名誉教授 (東京大学)、森平爽一郎名誉教授 (慶應義塾大学)、沖本竜義准教授 (オーストラリア国立大学)、塚原尚彦氏 (野村證券)、大屋健二郎氏 (野村證券)、水口啓氏 (野村證券)、第 45 回日本金融・証券計量・工学学会大会、第 25 回日本ファイナンス学会、慶應義塾大学計量経済学ワークショップ、10th Annual Workshop of the Asian Research Networks、日本銀行金融研究所主催ファイナンス・ワークショップの参加者ならびに日本銀行スタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

## 目 次

1. はじめに.....	1
2. インプライド分布とノンパラメトリック法.....	3
(1) インプライド分布.....	3
(2) ノンパラメトリック法とその限界.....	4
3. マイナス金利に対応したフォワードレート・モデル.....	4
(1) SABR モデル.....	5
(2) Shifted SABR モデル.....	6
(3) Free boundary SABR モデル.....	7
4. 実証分析—キャリブレーション—.....	8
(1) 市場データ.....	8
(2) キャリブレーション手法.....	9
(3) キャリブレーション結果①（マイナス金利導入前）.....	11
(4) キャリブレーション結果②（マイナス金利導入後）.....	12
(5) キャリブレーション結果の頑健性.....	12
5. ケース・スタディ.....	13
(1) 概観：インプライド分布の推移.....	13
(2) マイナス金利政策の導入.....	15
(3) イールドカーブ・コントロール政策の導入.....	16
(4) 2回の指値オペ.....	17
6. おわりに.....	18
参考文献.....	20
補論1. インプライド分布：欧州のケース.....	23
補論2. SABR モデル、Free boundary SABR モデルのキャリブレーション式...	23

## 1. はじめに

近年、先進国を中心とした低金利環境、とりわけ欧州や日本におけるマイナス金利政策の導入に伴って、投資家が予想する金利の将来分布には大きな変化が生じている。実際、日本の金利オプション市場の価格を確認しても、マイナス金利政策が導入される半年前から、金利がマイナスとなることを想定したオプション（ストライクがマイナス金利）が既に値付けされ始めていた（図表1）。

こうした中で、金融実務においては、金利がマイナス領域に入ることを想定しないフォワードレート・モデル、具体的には Black モデル<sup>1</sup>や SABR (Stochastic Alpha Beta Rho) モデルが主流であったため、これらを用いることが困難となった。例えば、金利オプションの取引では、Black モデルを用いて市場価格をインプライド・ボラティリティに換算して取引することが慣例であったが、こうした基本的な実務にも変更が必要となる等、金融機関にとってはマイナス金利環境に適合したモデルの開発が急務であった（詳細は、Beinker and Stapper [2012]、Carver [2012]、Balland and Quan [2013]を参照）。

こうした状況に対し、近年、低金利環境やマイナス金利環境に対応したフォワードレート・モデルが開発されてきている。具体的には、マイナス金利環境に対応可能な Lee and Wang [2012] の Shifted Black (Shifted log normal) モデルに始まり、低金利環境でのフィットを良くした Hagan *et al.* [2014]の Arbitrage Free SABR モデルや Andreasen and Huge [2011]、Caspers [2013]の ZABR モデルが提案された。そして近年、Antonov, Konikov, and Spector [2015]等が提唱し、Kienitz [2015]や Le Floc'h and Kennedy [2015]で改良が試みられている Free boundary SABR モデルへと変遷を遂げている<sup>2</sup>。

他方、金利オプションは金利に対する市場の見方を理解するうえで有益なツールであり、上述の問題は中央銀行にとっても無関係とは言えない。オプションは原資産価格の将来分布を反映して価格付けされるが、これとは逆に、オプション価格から原資産価格の将来分布を復元する「インプライド分布」が Breeden and Litzenberger [1978]によって提案されており、以降、中央銀行では、株、為替、金利に関するインプライド分布の研究が進められている（例えば、Söderlind and Svensson[1997]、小田・吉羽 [1998]、白塚・中村 [1998]、Shiratsuka [2001]、Malz [2014]等）。

---

<sup>1</sup> いわゆる Black Scholes モデルを金利オプションに拡張したモデル (Black [1976])。

<sup>2</sup> このほか、Free boundary SABR モデルを基礎としつつ、一定の確率でパラメータが異なる2つの Free boundary SABR モデルを遷移するとした Mixing SABR が Antonov, Konikov, and Spector [2017]で提案されている。

中央銀行等がインプライド分布を算出する際には、スプライン補間等のノンパラメトリック法を用いることが多いが、この手法は、低金利環境において確率がマイナスに計算される傾向がある等の問題が生じやすい側面がある。こうしたことから、最近の研究では、金利水準が相対的に高い中長期の金利や、低金利環境となる以前の期間を分析の対象としているものが大半である<sup>3</sup>。

本稿では、こうしたノンパラメトリック法の問題を回避するために、マイナス金利に対応したフォワードレート・モデルである Shifted SABR モデルと Free boundary SABR モデルを用いてインプライド分布を推計する。本稿で示すようにフォワードレート・モデルを使うことでインプライド分布の期間構造——1年後、2年後、3年後といった先行きに対する投資家の金利見通し——を観測することも容易となる。そのうえで、マイナス金利政策、イールドカーブ・コントロール政策、指値オペといったイベントの前後で、投資家の金利に対する見通しがどのように変化したか確認する。インプライド分布の期間構造が分析可能となることで、投資家が予想するマイナス金利の継続期間やイールドカーブが中央銀行によってコントロールされる可能性のある期間など時間軸の分析を行うことが可能となるほか、マイナス金利がどの程度まで深掘りされうるか、といった分析も可能となる。

このほか、インプライド分布の期間構造は、金融実務における金利のストレシナリオを作成する際にも有効である。近年、金融政策の枠組みが大きく変わる中で、金利の先行きを見通す際に、金利の過去データが必ずしも参考にならない場合もある。他方で、インプライド分布の推計は、過去データを必要とせず、現時点のデータから先行きの見通しを推計可能であるため、こうした際のシナリオ作成にも有効と考えられる。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、インプライド分布の概念と導出方法について説明する。そのうえで、低金利環境におけるノンパラメトリック法の限界を述べ、次節への導入とする。3節では、マイナス金利環境に対応した2つのフォワードレート・モデル（Shifted SABR モデル、Free boundary SABR モデル）について説明し、それぞれの特徴を整理する。4節では、この2つのモデルを金利オプションのデータにフィットさせ、両者の長所と短所を比較する。5節では、ケース・スタディとして、マイナス金利政策、イールドカーブ・コントロール政策、指値オペといったイベントの前後で、投資家が予測する金利の将来分布がどのように変化したかを分析する。6節は結論である。

---

<sup>3</sup> 例えば、Breedon and Litzenberger [2014]、Hull, Sokol, and White [2014]、Ivanova and Gutiérrez [2014]、Malz [2014]、Sihvonen and Vähämaa [2014]、Hattori, Schrimpf, and Sushuko [2016]等。

## 2. インプライド分布とノンパラメトリック法

### (1) インプライド分布

オプションの価格は、原資産価格の将来分布を反映して価格付けされている。すなわち、原資産価格の将来分布を $f^Q(x, T)$ とすると、満期を $T$ 、ストライクを $K$ としたコールオプションの価格 $C(K, T)$ は以下のようにブラック＝ショールズの公式を用いて算出されることは良く知られている。

$$C(K, T) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (x - K)_+ f^Q(x, T) dx. \quad (1)$$

これとは逆に、様々なストライク $K$ に対応するオプション価格 $C(K, T)$ から、原資産価格の将来分布 $f^Q(K, T)$ を推計することが可能であることが Breeden and Litzenberger [1978]により示されており、インプライド分布と呼ばれている。このインプライド分布は、(1)式の両辺をストライク $K$ で2階微分することによって、以下の(2)式のように求められることが示されている<sup>4</sup>。

$$f^Q(K, T) = e^{rT} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(K, T). \quad (2)$$

オプション価格を $K$ で2階微分してインプライド分布を推計するためには、相応数のストライクに対応するオプション価格が値付けされている必要がある。もっとも、実際のスワップション市場ではオプションのストライクは離散的にしか取引されておらず、例えば、日本のスワップション市場では、データの取得が可能な点は、ATM<sup>5</sup> (At the Money) および、そこから $\pm 25\text{bps}$ 、 $\pm 50\text{bps}$ 、 $\pm 100\text{bps}$ 、 $\pm 200\text{bps}$  乖離した計9つのみである。したがって、(2)式のようにストライクで2階微分するためには、何らかの手法を用いてデータを補間する必要がある。これには、スプライン補間を代表とするノンパラメトリック法と、本研究で示すようなフォワードレート・モデルを用いた手法がある。以下、2(2)節でノンパラメトリック法による推計方法とその限界を説明したうえで、次の3節において、フォワードレート・モデルを用いた手法を説明する。

<sup>4</sup> 導出の詳細については、Malz [2014]を参照。

<sup>5</sup> ストライクの水準がスワップのフォワードレート (スワップションの満期を基準としたフォワードレート) となるオプション。

## (2) ノンパラメトリック法とその限界

ノンパラメトリック法のうち、インプライド分布の推計に多用されるものとしてスプライン補間の方法がある。この手法は、各ストライクにおけるオプションの価格を、スプライン関数と呼ばれる 3 次多項式を繋ぎ合わせた関数により補間し、(2)式を適用する手法である。実際のオプション市場では、オプションの価格ではなくインプライド・ボラティリティの形で取引されているため、ボラティリティの形でスプライン補間したうえで、コールオプションの価格に変換する方法が採られる。この手法は、特定のモデルを仮定する必要がないことや、手法がシンプルであること等から、中央銀行を始めとしたインプライド分布の研究にしばしば用いられている。

もっとも、この方法にはいくつかの問題が存在する。まず、補間した曲線は、市場で価格が付いている全ての点を通るため、実際の市場データにフィットさせた場合に、関数が曲がりすぎるいわゆるオーバーフィッティングの問題が指摘されている（図表 2）。それによって、インプライド確率が本来取るはずのない負の値を取ることがある（図表 3・左）<sup>6</sup>。こうした問題は、例えば、流動性の違いから、各ストライクにおけるボラティリティの値が極端に凸凹している場合や、低金利環境においてゼロ金利制約の壁が存在する際に、インプライド・ボラティリティの水準がプラス領域とマイナス領域で極端な段差となっている場合等に典型的に表れる問題である（図表 3・左）。

加えて、ノンパラメトリック法は、ストライクの端点を超えて外挿できないという問題がある（図表 3・右）。こうした問題は、オプションの満期が長い場合、すなわち、かなり先の将来のインプライド分布を推計する際に典型的に生じる問題である。したがって、本稿で分析するような、インプライド分布の期間構造（投資家の金利の先行き見通し）を分析する際にも生じる問題である。

## 3. マイナス金利に対応したフォワードレート・モデル

2 節で述べたように、ノンパラメトリック法、とりわけスプライン補間は便利な手法ではあるものの、分布全体の形状を描くうえでは時として問題が生じる。本節では、ノンパラメトリック法の欠点を補うフォワードレート・モデルのうち、金融実務で最も標準的な手法として使われている SABR モデルについて概説する。そのうえで、近年、マイナス金利に対応するために開発された Shifted

---

<sup>6</sup> オーバーフィッティングの問題は、更に精緻なノンパラメトリック法であるスムージングスプライン法やカーネル法などを用いれば、完全ではないものの、ある程度は緩和または回避できる。

SABR モデルと Free boundary SABR モデルについて、それぞれ説明する。

### (1) SABR モデル

まず、金利デリバティブに使用される代表的なフォワードレート・モデルとして SABR (Stochastic Alpha Beta Rho) モデルについて説明する。このモデルは、Hagan *et al.* [2002]によって開発されたものであり、以下に述べるように正規モデルと対数正規モデル (Black モデル) の中間的な性質を持ちつつ、ボラティリティも確率変動させることで、より表現力を高めている点が特徴である。SABR モデルの定式化は以下の(3)式で示される<sup>7</sup>。

$$\begin{aligned} dF_t &= \sigma_t F_t^\beta dW_t \quad (0 \leq \beta \leq 1), \\ d\sigma_t &= \nu \sigma_t dB_t, \quad \sigma_0 = \alpha, \quad \langle dW_t, dB_t \rangle = \rho dt. \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、 $F_t$  は時点  $t$  における先行きの金利 (フォワードレート) の水準、 $\sigma_t$  はそのボラティリティである。 $W_t$  と  $B_t$  は標準ブラウン運動であり、その相関は  $\rho$  となる。パラメータについて、 $\alpha$  は初期時点 ( $t = 0$ ) における金利のボラティリティ、 $\nu$  はボラティリティのボラティリティとなる。また  $\beta$  は 0 と 1 の間の値を取るが<sup>8</sup>、具体的にはモデルが正規モデルと対数正規モデルのいずれに近いのかを示している<sup>9</sup>。極端な例として、 $\beta = 0$  (かつ  $\nu = 0$ ) の時には、SABR モデル(3)式の第一式は以下の正規モデル

<sup>7</sup> SABR モデルを始めとするフォワードレート・モデルでは、先物等を基準財とするフォワードメジャー (スワップの場合はアニュイティメジャーと呼ぶ) で計測しているため、トレンド項が除去されている。これを金利のスポットレート (バンクアカウント) を基準財としたスポットメジャーに変換すれば、スポットレート・モデルと同様に金利のトレンド項が生じる。これらのメジャー変換を駆使して SABR モデルを扱うモデルとして、LMM (Libor Market Model) -SABR と呼ばれるものがあるが、一般的にはエキゾチックなオプション等を扱わない限り必要とせず、本研究でもそこまで必要としない。

<sup>8</sup>  $\beta < 0$  の場合は、 $F_t^\beta$  が分数の分母側になり、 $F_t$  がゼロに近づくとき発散してしまうため  $\beta \geq 0$  と仮定している。 $\beta > 1$  の場合は、マルチンゲール性が成立せず、裁定取引が発生しうることが数学的に知られているため、 $\beta \leq 1$  と仮定している。

<sup>9</sup> これ以外のパラメータの意味は以下の通り。まず  $\rho$  は、金利の水準と金利のボラティリティの相関であり、将来分布の歪み (スキュー) に関係している。すなわち、 $\rho$  が正であると、金利の水準が高いほどボラティリティが高く、金利が低いほどボラティリティが低いことを意味する。これは、インプライド分布の言葉で言うと、金利が高いほどボラティリティが高く金利のパスが大きく動くため、分布が金利上昇方向にファットテールになる。一方、金利が低いほどボラティリティが低く金利のパスがあまり動かないので、金利の低い方向に将来パスが滞留することを意味する (相関が負の場合はこれの逆)。次に  $\nu$  は、ボラティリティのボラティリティであるため、これが大きいと、時間経過とともにボラティリティが大きくなって行くことを意味するほか、2次モーメントの2次モーメントという意味で4次モーメントである分布の尖りとも関係する。

$$dF_t = \sigma dW_t \quad (4)$$

となり、 $\beta = 1$ （かつ $\nu = 0$ ）の時には、以下の対数正規モデル（Black モデル）

$$dF_t = \sigma F_t dW_t \quad (5)$$

となる。ここで、(4)式の正規モデルは負の値を取りうるが、(5)式の対数正規モデルは非負制約があることに注意する必要がある（図表 4）。

この SABR モデルの特徴点として、 $\beta$ がある程度大きな値を取る（ $1/2 < \beta \leq 1$ ）時には、対数正規分布に近づくことから金利がマイナスの値を取らないが、 $\beta$ が小さい値を取る（ $0 \leq \beta \leq 1/2$ ）時には、正規分布に近づくことから金利がゼロ、あるいはマイナスの値を取りうることにある。ただし、 $F_t^\beta$ というべき乗の関数式を含むことから、モデル上の金利がマイナスになることは許容されず、後述する境界条件により強制的にゼロ以上とする作業が必要である。代表的な境界条件としては、図表 5 で表されるような、吸収壁（absorbed boundary）と反射壁（reflected boundary）がある。吸収壁は、金利のパスがひとたびゼロにヒットした場合には、その後はずっとゼロの値を取り続けるよう要請したものである。一方反射壁は、ゼロ線を軸として金利パスを線対称に反射させ、パスをプラスの領域に戻すことを要請する。いずれについても一定の仮定を置いたうえでのもとなるが、通常の SABR モデルには吸収壁が用いられることが多い。

このように、SABR モデルは正規分布と対数正規分布の双方の特徴を兼ね備えた、非常に便利なモデルではあるが、金利が負の値を取ることを許容しないため、マイナス金利には対応していない。こうしたことから、最近では、以下で述べるような、Shifted SABR モデルや Free boundary SABR モデルといった、マイナス金利下における確率分布の取り扱いを可能にしたモデルが開発されてきている。

## （2）Shifted SABR モデル

Shifted SABR モデルは、3(1)節の SABR モデルの金利  $F_t$  を、単純に  $F_t + s$  に置き換えたモデルである（ $s$  はシフト幅）。

$$\begin{aligned} d(F_t + s) &= \sigma_t (F_t + s)^\beta dW_t \quad (0 \leq \beta \leq 1), \\ d\sigma_t &= \nu \sigma_t dB_t, \quad \sigma_0 = \alpha, \quad \langle dW_t, dB_t \rangle = \rho dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Shifted SABR モデルが描く金利の将来パスは、直観的には図表 6 のようにして得られる。まず、フォワードレートの初期値  $F_0$  をシフト幅  $s$  だけ上方シフト

させて、金利パスの出発点を  $F_0+s$  に持ち上げる。次に、通常の SABR モデルに従って金利の将来パスを描く。この際、この出発点を持ち上げた金利のパスは負の値を取らないことに注意する。最後に、生成した金利パスをシフト幅 ( $-s$ ) だけ下方に平行移動して戻す。これが元の金利水準  $F_0$  を出発点とした金利の将来パスとなる。この際、モデルの金利パスは負の値を取ることとなるが、作り方から明らかなように、シフト幅 ( $-s$ ) が金利パスの下限となり、これを下回ることはない。

Shifted SABR の長所は、既存の SABR モデルの簡単な修正であるため、キャリブレーション（市場データからパラメータ推計すること。4 節を参照。）において、従来の SABR モデルの数学的手法を大きく変更することなく、そのまま転用することが可能な点である。一方、短所としては、上述したようにシフト幅がマイナス幅の下限となるため、分布を適切に表現するようなシフト幅をその都度、事前に選択する必要がある。ただし、シフト幅を変更すると、推計されるパラメータの値も変わるため、継続的に実務を行う観点からは不便である。なお、シフト幅を非常に大きな値とすることで、こうした下限の問題は緩和されるが、パスの起点が実際の値から乖離することによって、モデルの推計精度が低下するといった問題が生じる。こうしたシフト幅とモデルのフィッティングの問題は、次の 4 節で説明する。

### (3) Free boundary SABR モデル

Free boundary SABR モデルは、3(2)節の SABR モデルにおいて、金利が負の値を取りうるようなパラメータの領域 ( $0 \leq \beta < 1/2$ ) の性質を利用したものである。上述したように、SABR モデルはこの領域において  $F_t^\beta$  が複素数 ( $F_t$  が負) とならないように、強制的に境界条件を設ける必要があったが、Free boundary SABR モデルは、以下の(7)式のように、 $F_t^\beta$  を  $|F_t|^\beta$  に置き換えることによって、この問題の解決を図っている。

$$\begin{aligned} dF_t &= \sigma_t |F_t|^\beta dW_t \quad (0 \leq \beta < 1/2), \\ d\sigma_t &= \nu \sigma_t dB_t, \quad \sigma_0 = \alpha, \quad \langle dW_t, dB_t \rangle = \rho dt. \end{aligned} \tag{7}$$

絶対値を付けることによって、金利のパスのうち水準ゼロで反射したものについて、水準ゼロを軸として対称に折り返したものとなるため、金利水準が負の値を自然に取ることが可能となる（図表 7）。Free boundary SABR の利点は、Shifted SABR のようにシフト幅を決める必要がないため、どのような状況下においても、同じモデルを適用することが可能な点である。一方で、絶対値を付けることで、関数の数学的な扱いは難しくなり、確率密度も原点周辺の一部で

スパイクすることがある<sup>10</sup>。

Free boundary SABR をより理解するために、パラメータ  $\beta$  が 0.1、0.4、0.6 である時の金利パスの動きを比較する（図表 8）。 $\beta=0.1$  の時は、金利のパスはゼロ金利の壁を越えて自由に負の領域へ入って行く姿が確認される。他方、 $\beta=0.4$  の時も、金利のパスは同様に負の領域へ入って行くが、そのパスはゼロ金利を下回った後、マイナスの領域に深くは入り込まず、ゼロ近傍に留まることが確認される。 $\beta=0.6$  の時は、金利パスはそもそも負の値を取らないので（3(1)節参照）、金利パスは通常の SABR モデルと同様の形状となる。

#### 4. 実証分析—キャリブレーション—

本節では、3 節で紹介した 2 つのフォワードレート・モデル（Shifted SABR、Free boundary SABR）を、実際の市場データにフィットさせ、その適合性と特徴を比較する。特に、マイナス金利政策導入前後で、金利の先行きに対する市場の見方は大きく変化したため、両局面でモデルの適合性がどのように変化したか 2 時点比較を行う。なお、キャリブレーションを行う際には、同日のオプション価格のみを参照するため、以降の実証結果については遡及改正されることがないことに注意しておく。

##### （1）市場データ

本稿では、2 節で述べたように、日本におけるスワップション（スワップ金利を原資産としたオプション）のデータを分析に用いる<sup>11</sup>。具体的には、原資産となるスワップ金利（1 年、2 年、3 年、5 年、7 年、10 年、20 年）、ストライク（ATM、ATM $\pm$ 25bps、ATM $\pm$ 50bps、ATM $\pm$ 100bps、ATM $\pm$ 200bps）、オプションの満期（3 か月、6 か月、1 年、2 年、5 年、7 年、10 年、15 年、20 年）のそれぞれの軸に対応するインプライド・ボラティリティを、2015 年 1 月以降の日次データで使用する<sup>12</sup>。3 つの軸があるため、ボラティリティ・キューブ（Volatility cube）とも呼ばれる。

---

<sup>10</sup> スパイクについて、原論文（Antonov, Konikov, and Spector [2015]）では「ごく一部であり、価格には影響しない」と述べられている。分布関数を考える場合には、このスパイクがあくまで一部にとどまり、その幅も小さい限りは許容されうるが、実務的には、特に原点周りに ATM やストライクが位置するような場合においては、問題が生じる。

<sup>11</sup> 本研究では個別の業者がクオートしたデータではなく、Bloomberg 社が提供する複数業者のクオート値から作成した INDEX を使用している。これにより、クオート値に欠損値が生じるなど店頭市場に現れやすい流動性の問題を一定程度は回避している。

<sup>12</sup> 正規モデルから導出されたノーマル・ボラティリティ。

市場で観測されるインプライド・ボラティリティは図表 9 のとおりである。このように、各ストライクと各オプション満期に対してインプライド・ボラティリティを表示したものをボラティリティ・サーフェイス (Volatility surface) と呼ぶ。原資産となるスワップ金利ごとにボラティリティ・サーフェイスを描くことができる。

マイナス金利導入直前 (2016 年 1 月 28 日) のボラティリティ・サーフェイスをみると、マイナス金利のストライクに対応するボラティリティが極めて低かったことが確認される。これは直観的には、仮に金利のパスがマイナスの領域に入ったとしても、ボラティリティが低いことから金利が殆ど動かず、マイナスの領域に深く侵入しないというゼロ金利制約の壁を表しているものと解釈できる。実際、後に推計されるインプライド分布ではそのような分布形状が確認される。一方、マイナス金利導入以降 (同年 2 月 22 日) では、全ての満期、および全てのストライクについて、ボラティリティの水準がフラットになっており、ゼロ金利制約の壁が取り払われていることが推察される。

## (2) キャリブレーション手法<sup>13</sup>

SABR モデルのキャリブレーションについては、以下のボラティリティ公式(8)を用いるのが通常である。現在の金利水準  $f$  のほか、ストライク  $K$  と満期  $T$  をインプットするとインプライド・ボラティリティ  $\sigma_N(f, K, T)$  が算出されるというボラティリティ・サーフェイスを理論的に表す関数となっている。また、ボラティリティ公式は SABR モデルのパラメータ ( $\alpha, \beta, \rho, \nu$ ) も含んでいるため、これを変化させると理論的なボラティリティ・サーフェイスも変化することとなる。実際に市場で観測されるボラティリティ・サーフェイスにフィットするようにパラメータ ( $\alpha, \beta, \rho, \nu$ ) を最小二乗誤差法で求める (キャリブレーション)<sup>14,15</sup>。

<sup>13</sup> キャリブレーションの詳細については、補論 2 で述べる。

<sup>14</sup> 数値計算で最小値を求める際に、極小値に陥らないようランダムに初期パラメータを複数与えて最小値を検索するマルチスタート法を採用している。

<sup>15</sup> 実務では、本研究のようにモデルをボラティリティ・サーフェイスにフィットさせる、すなわち、ストライク方向と満期方向を同時にモデルで補間するのではなく、それぞれの満期ごとにストライク方向を補間してより表現力を上げることも多いが、そうした方法は相対的に流動性の問題を受けやすいため、本研究では、ストライクと満期を同時にフィットさせる方法を採用した。

$$\begin{aligned} & \sigma_N(f, K, T) \\ &= \frac{\alpha}{\frac{\int_K^f C(g)^{-1} dg}{f-K}} \left( \frac{z}{\chi(z)} \right) \left[ 1 + \left( G\alpha^2 + \frac{\rho v \alpha C(f) - C(K)}{4(f-K)} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right) T \right], \quad (8) \end{aligned}$$

where  $C(g) \equiv g^\beta$ .

Shifted SABR モデルのボラティリティ公式は、(8)式においてストライク  $K$  と金利の初期値  $f$  を、(9)式のように  $f_s$  分だけシフトさせることで簡単に求められる。

$$\sigma_{N,S}(f, K, T) = \sigma_N(f + f_s, K + f_s, T) \quad (9)$$

このシンプルさが 3 節で述べた Shifted SABR モデルの利点である。

これに対し、Free boundary SABR モデルのボラティリティ公式は以下の(10)式で与えられる<sup>16</sup>。

$$\begin{aligned} & \sigma_{N,FB}(f, K, T) \\ &= \frac{\alpha}{\frac{\int_K^f C(g)^{-1} dg}{f-K}} \left( \frac{z}{\chi(z)} \right) \left[ 1 + \left( G\alpha^2 + \frac{\rho v \alpha C(f) - C(K)}{4(f-K)} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right) T \right], \quad (10) \end{aligned}$$

where  $C(g) \equiv |g|^\beta$ .

この公式は、積分式の中に絶対値が含まれているため、いくつかの場合分けを必要とする関数となるが、SABR モデルのボラティリティ公式と似た形となっている。なお、Free boundary SABR の原論文である Antonov, Konikov, and Spector [2015]では、ボラティリティ公式を導出しておらず、オプションのプレミアムの近似解からキャリブレーションを行っている。この方法では計算負荷が高いほか、従来の SABR モデルと手法が大きく異なるため、その後、Kienitz [2015]や Le Floc'h and Kennedy [2015]によって上記のようなボラティリティ公式が提示された。この公式を使えば、通常の SABR モデルと殆ど変らない手順でキャリブレーションを行うことが可能である。

次の 4 (3)、4 (4) 節では、これらの手法を用いて、マイナス金利政策導入前

<sup>16</sup> ただし、 $f < 0$  の場合は、 $-f \rightarrow f$ ,  $-K \rightarrow K$ ,  $-v \rightarrow v$ と置き換える。

(2016年1月28日)と導入後(同年2月22日)の2時点におけるキャリブレーションを行う。

### (3) キャリブレーション結果①(マイナス金利導入前)

図表10は、マイナス金利政策導入直前(2016年1月28日)におけるキャリブレーション結果である。1年金利のキャリブレーション結果を、市場データと比較すると、Free boundary SABRのボラティリティ・サーフェイスの形状は、図表9の市場データに近く、当てはまりが良いことが確認される。一方、Shifted SABRについては、シフト幅が小さい場合には多少当てはまりも良くなるが、全体としてみると、必ずしもボラティリティ・サーフェイスの形状を的確に表しているとは言えない。特に、図中の青で示された、短い満期(3か月~2年程度)におけるマイナスのストライクの分布は、Shifted SABRではうまく描くことができていない。一方で、10年金利については、Free boundary SABRのみならず、Shifted SABRについても、当てはまりは良くなっている。

以上の結果を、金利年限別に1グリッドあたりの推計誤差でみたものが図表11である。ゼロ金利制約の壁があるもとでは、①Free boundary SABRの方がShifted SABRに比べて市場データに対するフィットが高いこと、②ただし、Shifted SABRに関しても、ゼロ金利制約の強くない長期金利の方が相対的にフィットが良くなること、③Shifted SABRについては、シフト幅が小さいほどフィットが良くなることが示される。

キャリブレーションにおいて、推計されたパラメータを示したものが図表12である。このうち、確率分布の形状を決めるパラメータである $\beta$ をみると、いずれのモデルについても上限(Shifted SABRは1、Free boundary SABRは0.5)に近い値を取ることから、分布の形状は対数正規分布に近い、すなわち、マイナスの値を取らないか、もしくはマイナスの領域に入ってもさほどマイナス幅は拡大しない形となっていることが確認される。

最後に、図表13は、各モデルから推計されたインプライド分布を示したものである。ノンパラメトリック法と比較すると、Shifted SABR、Free boundary SABRいずれも、確率がマイナスの値を取らないという意味で、分布の形状が改善している。ただし、短期金利におけるゼロ金利制約の「壁」については、Free boundary SABRの方が上手く表すことができている一方、Shifted SABRは壁がさほど見られず、このことが両者の推計誤差の違いであると考えられる。中長期の金利については、ゼロ金利制約から遠ざかるため、Shifted SABRでも同様の分布が描かれている。

#### (4) キャリブレーション結果② (マイナス金利導入後)

図表 14 は、マイナス金利政策導入後 (2016 年 2 月 22 日) におけるキャリブレーションの結果である。ボラティリティ・サーフェイスは 4 (1) 節で指摘したように、ゼロ金利制約の壁が解消されフラットなものとなっているが、これをフォワードレート・モデルで表した場合には、短期金利、長期金利によらず、Shifted SABR、Free boundary SABR のいずれも当てはまりが良く、かつ Shifted SABR については、シフト幅によらず当てはまりが良いことがみてとれる。キャリブレーションの推計誤差 (図表 15) でみても、マイナス金利政策導入以前と比べると、いずれのモデルについても誤差の水準は同程度であり、特に Shifted SABR については、短期のゾーンにおいては Free boundary SABR の誤差をも若干下回る当てはまりの良さを示している<sup>17</sup>。

図表 16 は推計されたパラメータを示したものである。パラメータ  $\beta$  をみるといずれも 0 に近い値となっており、マイナス金利政策導入以前とは異なり、分布が対数正規分布より正規分布に近い状態になっていることが確認できる。実際、図表 17 のインプライド分布をみても、Shifted SABR、Free boundary SABR のいずれも、確率分布が的確な形で描けており、マイナス金利政策導入後、市場の見方が、ゼロ金利制約が外れる形でマイナス金利の領域へと拡大した様子を捉えることができる。また、ノンパラメトリック法と比較しても、オプション取引のない確率分布の端の方まで外挿が自然な形でできていることが確認される。

#### (5) キャリブレーション結果の頑健性

4 (3) 節、4 (4) 節では、マイナス金利政策の導入前後の 2 時点でキャリブレーション結果を比較した。最後に、これら結果の頑健性の確認として、Shifted SABR と Free boundary SABR の推計誤差を時系列で比較する。

図表 18 は、金利の年限ごと (1 年、5 年、10 年) に 2 つのモデルの推計誤差の推移を確認したものである。これをみると、短期金利については、マイナス金利政策導入以前は Free boundary SABR の方が誤差が小さく、明確に当てはまりが良かったが、導入後は Shifted SABR のフィットも良くなっており、わずかながら上回っている時期もある。一方、長期金利では、マイナス金利政策導入前においては同様に Free boundary SABR の方が当てはまりが良いものの、その

<sup>17</sup> なお、マイナス金利導入後の Shifted SABR については、シフト幅によらず推計誤差がほぼ一定となっている。これは、パラメータ  $\beta$  が極めて 0 に近い時には、モデルの式から明らかかなように、シフト幅  $s$  の影響を受けなくなるほか、Free boundary SABR とも一致する。

差は小さいほか、導入後は両者の差はほぼゼロとなっている。これらの結果は、2時点比較の結果と整合的なものであり、上述した結果は、観測期間を通じて頑健であることが確認された。なお、推計されたパラメータの推移を図表 19 に示した。

このように、どちらのモデルともに市場データに対して相応のフィットが確認されたが、特に、Free boundary SABR モデルは、さまざまな金利環境に対応が可能という意味で、政策の変更前後も含めて時系列的に分析する際に有効であると考えられる。5 節では、Free boundary SABR モデルを用いて、投資家が予想する金利の分布がどのように変化したかを確認する。

## 5. ケース・スタディ

本節では、ケース・スタディとして、マイナス金利政策、イールドカーブ・コントロール政策、指値オペといったイベントの前後で、投資家が予測する金利の将来分布がどのように変化したかを分析する。基本的には、政策金利に近い短期金利（1 年金利）を分析対象とするが、イールドカーブ・コントロール政策導入後は、10 年金利も含めた他の年限の金利も分析に加えている<sup>18</sup>。なお、前述のとおり、キャリブレーションを行う際には、同日のオプション価格のみを参照しているため、ケース・スタディの結果は遡及改正されることがないことに注意しておく。

### （1）概観：インプライド分布の推移

まず、1 年金利の 1 年後のインプライド分布がどのように推移したか概観する。図表 20 は、現時点の金利水準 ( $f_0$ ) および 1 年後のインプライド分布の分位点（10%、25%、50%、75%、90%点）と期待値（mean）の推移を示したものである。これをみると、マイナス金利政策が導入された 2016 年 1 月 29 日のおよそ半年前頃（2015 年 9 月）から、分布の 75%点、90%点がマイナスの領域に入る等、市場参加者の間でマイナス金利政策の導入が少しずつ意識されていたことが確認される。また、マイナス金利政策が導入された後は、追加緩和（マイナス金利の深掘り）が次の焦点となり、①マイナス金利が銀行収益を圧迫するとの批判が高まった 2016 年 3 月には深掘り予想が一旦後退しているが、②同年 4 月後半には、日銀の成長基盤融資にマイナス金利を適用するとの憶測から追加

<sup>18</sup> 金利はスワップションの原資産であるスワップ金利を用いている。国債金利と比較すると、ある程度の裁定は働いているため時系列でみた変動は概ね同様の動きをするものの、スワップ金利の方が水準が多少高めである点に注意が必要。

緩和期待が高まったこと、③BrexIt（同年6月23日）直後の同年7月にも、追加緩和期待が高まっていたことが確認される。さらに、イールドカーブ・コントロール政策導入直後は、インプライド分布が閉じており、マイナス金利政策下において先行きの金利に対する見方が分かっていた時期と比較して、金利水準に対する見方が収斂するなどの現象が確認される。この点、「ゼロ金利制約の壁」が働いていたマイナス金利政策導入以前の時期と比較しても相応に分布が収斂している。その後の米大統領選（トランプ・ショック）においてインプライド分布は幾分広がったものの、2度の指値オペを通じて同分布は再び少しずつ閉じて行く傾向がみられる。

イールドカーブ・コントロール政策導入後の動きに関しては、図表21の10年金利のインプライド分布（1年後）をみても、マイナス金利政策下において中長期金利まで次々とマイナス化するなど先行きの金利水準に不確実性があった時期と比較して、分布が閉じるなど、先行きの金利に対する見方が収斂したことが確認される。この点、マイナス金利政策導入以前の時期と比較しても、概して先行きの見方が収斂していることが確認される。

図表22は、これらのイベント前後における実際のインプライド分布の動きを示したものであるが、追加緩和期待が高まるもとでは、分布が左方（マイナス方向）にシフトしていることが見てとれる。

インプライド分布を分析するうえでの留意点としては、インプライド分布は投資家のリスクプレミアムを含んだリスク中立確率に基づくものであることが挙げられる。近年、リスク中立確率のインプライド分布からリスクプレミアムを取り除いた、実確率でのインプライド分布を推計する方法が提案されている（Liu *et al.* [2007]、Hull, Sokol, and White [2014]、Ross [2015]）。その中で、中央銀行や多くの研究者（Humpherys and Noss [2012]、Ivanova and Gutiérrez [2014]）によって実践されている Liu *et al.* [2007]の手法を用いて、実確率のインプライド分布を推計したものが、図表23である。これをみると、各年限の金利に共通して、リスク中立確率が実確率よりも分布が右側（金利上昇側）に寄っており、リスク中立確率は金利上昇リスクのプレミアムを相応に含んでいることが確認される。もっとも、1年金利は、上昇リスクプレミアムだけでなく金利低下プレミアムも含まれていることが確認できる（2年金利、3年金利もわずかながら同様の傾向がみられる）。短期金利は中央銀行による政策変更を相対的に受けやすいため、利下げに対応したリスクプレミアムである「金利低下プレミアム」も僅かに含まれていることが一つの解釈として考えられる。

以上では、1年後のインプライド分布について概観した。5（2）節以降では、

2年後、3年後といった、さらに将来のインプライド分布がどう変化していくかという、インプライド分布の期間構造（投資家の先行きの金利見通し）を、ファンチャートの形で分析する。

## （2）マイナス金利政策の導入

図表 24 は、マイナス金利政策導入後の半月（2016年1月下旬～2月中旬）において、投資家の金利見通しがどのように変化していったかを示したものである。各図表とも1年金利の1年後から10年後までのインプライド分布をファンチャート形式（分位点<5%、10%、25%、50%、75%、90%、95%>）を表示で示したものである。これを確認すると、マイナス金利政策導入前日（2016年1月28日）には、先行きの金利がマイナスになることは若干意識されている程度であったが、マイナス金利政策導入当日（1月29日）から翌営業日（2月1日）にかけては、先行き2～3年後まではマイナス金利が継続するという予想が形成されていったことが確認される。一方でこの時点では、3～4年以降は相対的にゼロ金利制約が強い見通しとなっており、短い期間のオプション市場と長い期間のオプション市場で見方が分断されていたことがわかる。その後、日を追うにつれて（2月4日～2月10日）、ゼロ金利制約の壁が少しずつ長めの期間においても弱まっており、長い期間のオプション市場にも波及していったことが確認される。このように投資家は、マイナス金利政策の導入に際して、周辺の投資家の見方を参考にしながら、少しずつ自身の金利見通しに織り込んでいったと考えられる。

次に、図表 25 では、追加緩和期待が高まった2つの時期（2016年4月27日、2016年7月11日）に、短期金利のマイナス幅がどの程度まで深掘りされるとみていたかを、同様にファンチャートで確認したものである。リスク中立確率のほか実確率の両方で示している。これをみると、リスク中立確率、実確率ともに、中心的な見方である25%～75%分位点の先行きの金利見通しは、概ね▲0.5%以上で推移している。現金シフトを回避できるという観点からのマイナス金利の下限は▲0.5%～▲2.0%程度と言われているが、少なくとも投資家の見通しにおいては、基本的にはこの水準を上回って推移するとみられていたことが確認できる<sup>19</sup>。

<sup>19</sup> Bean [2013]、Schmiedel, Kostova, and Ruttenberg [2012]は、現金保有コストから現金シフトを回避できるマイナス金利の下限を、それぞれ▲0.5%、▲2.0%と推計している。

### (3) イールドカーブ・コントロール政策の導入

図表 26 は、イールドカーブ・コントロール政策導入前後（導入前：2016 年 9 月 16 日、導入後：同年 10 月 17 日）で、投資家の金利見通しがどのように変化したか示したものである。イールドカーブ・コントロール政策が導入された後では、将来にわたって全体的に分布の幅が閉じている姿が見てとれるが、その中でも特に、先行き 1～2 年の分布が閉じていることが特徴的である。すなわち、先行き 1～2 年は中央銀行によって金利がコントロールされる可能性があるとの見方がされた一方で、それより長い期間では、相応の分布の広がりに戻っていく姿が確認される。加えて、分布の中央値をみると、先行き数年間はあまり動かないとの見方となっており、イールドカーブがコントロールされる可能性があるという市場の見方が確認される。もっとも、10 年金利の中央値は、2 年先以降は少しずつ上昇していく姿となっており、長期金利は相対的にコントロールが難しいとの見方も窺える。

各年限の金利の見通しの中央値を用いて、イールドカーブの先行きの見通しの中央値を示したものが図表 27 である。これをみると、イールドカーブ・コントロール政策導入後の 2016 年 10 月 17 日（図表 27・上段左図）においては、先行き 1～2 年は現在のイールドの形状が維持されるという姿となっている。長期のイールドは、相対的にコントロールが難しいとの見方を反映してリスクプレミアムが要求されていると考えられるため、これを除いた実確率で確認すると（図表 27・上段右図）、10 年金利まで含めてイールドカーブがコントロールされる可能性があるとの見方となっている。すなわち、リスク中立確率の下で 10 年金利がほかの金利と比較して少しずつ上昇してしまったのはリスクプレミアムの要因であったことが改めて確認される（図表 27・上段右図）。なお、マイナス金利政策下で追加緩和期待の高まった時期（2016 年 7 月 11 日）におけるイールドカーブの先行きの見通しをみると（図表 27・下段右図）、先行き 4 年程度はイールドカーブがマイナス領域に沈む姿が確認されており、この時点と比較すれば、イールドカーブ・コントロール政策の導入によって、金融機関の収益環境は相応に改善方向に向かったことが確認できる。

他方、イールドカーブ・コントロール政策の導入によって、特に先行き 1～2 年のインプライド分布が閉じた背景について、市場データに遡って確認したものが図表 28 である。図表 28 は、各年限のスワップションの ATM（＝分布の中心部）のインプライド・ボラティリティを、オプションの満期別に見たものである（インプライド・ボラティリティの期間構造）。これを確認すると、各年限の金利ともに短期のボラティリティ（3 か月、6 か月、1 年、2 年）が相対的に大きく低下している一方、それと比較すると長い満期のボラティリティはそれ

ほど低下していないことが確認される。このことが、先行き1~2年のインプライド分布が特に閉じた背景である。

図表29は、以上のような金利の見方の収斂についてその後の推移について確認したものである。ATMインプライド・ボラティリティの期間構造の変化を示したものである。短期金利（1年、2年）のボラティリティをみると、イールドカーブ・コントロール政策の導入に伴って、短い期間（3か月、6か月、1年、2年）のボラティリティが大幅に低下していることが再確認できる。その後、トランプ・ショック等によって、これらの短期金利のボラティリティは一旦元の水準に戻りかけていたが、2016年11月17日の指値オペによって、特に1年以内において顕著に、再び低下したことが確認できる。他方、長期金利（5年、10年）については、トランプ・ショック後に上昇したボラティリティが11月17日の指値オペにより一旦低下したものの、その後は横ばい傾向にあった。しかし、2017年2月3日の指値オペによって、短期金利同様、1年以内のボラティリティが再び低下する形となっている。このように、2回の指値オペを経て、1年以内のボラティリティは上昇しない、すなわち、少なくとも先行き1年程度は、中央銀行が長期金利をコントロールする可能性があるといった、市場の期待が形成されていったと解釈できる。

#### （4）2回の指値オペ

最後に、日本銀行が指値オペを実施することによって、市場での金利上昇リスク認識がどの程度抑えられたかを、インプライド分布から確認する。図表30は、イールドカーブ・コントロール政策導入後のインプライド分布（1年後の分布）の推移を、各年限別の金利に対して示したものである。このうち、金利上昇リスクは、分布の上側分位点（10%点および25%点）で捉えられる。これらの推移をみると、トランプ・ショック後に急激に上昇した金利上昇リスク（2つの上側分位点の上昇）が、指値オペを実施したことによって低下していることがわかる。特に、3年、5年、10年金利に関しては、指値オペを実施した当日は上側分位点のみが低下しており、指値オペが金利上昇リスクを抑制していた姿がより鮮明となっている。

この点に関して、図表31、32は、日本銀行が2回の指値オペを実施した際の、金利見通しの変化を示したグラフである。○印の凡例が付いている線が指値オペ後の金利見通し、凡例が付いていない線が指値オペの前の金利見通しである。上述したように、金利上昇リスクを示す上側分位点を中心に、分布が低下しており、金利上昇リスクの認識が抑制されていたことが確認される。

## 6. おわりに

本研究では、近年、金融実務において注目を集めているマイナス金利を考慮したフォワードレート・モデルについて、その特徴を整理したうえで、金利オプションのデータにフィットさせることで、マイナス金利政策およびイールドカーブ・コントロール政策下において投資家が予測する金利の将来分布を推計した。

本稿で得られた主要な結論は以下のとおりである。まず、近年開発されたマイナス金利を考慮したフォワードレート・モデル（Shifted SABR モデル、Free boundary SABR モデル）は、いずれもマイナス金利環境下で相応の当てはまりの良さがみられることが確認され、特に、Free boundary SABR モデルは、日本のようにゼロ金利制約の壁が存在した際にも、高い説明力が示された。このため、マイナス金利政策導入の前後も含めた時系列分析の際に有効である。

この Free boundary SABR モデルを用いて、マイナス金利政策、イールドカーブ・コントロール政策下における市場参加者の金利の期待形成（将来に対する予想分布）について観測したところ、以下のことが確認された。

まず、マイナス金利政策導入の半年前から、少しずつマイナス金利政策導入の可能性が観測されていたほか、実際に政策が導入された後も、Brexit 後の局面を含めて、複数にわたり追加緩和期待が観測された。

マイナス金利政策導入直後の状況を仔細にみると、まずは先行き 2~3 年に対してゼロ金利制約が解消し、その後、少しずつ長期のゾーンまでゼロ金利制約が解消されていく姿が観測された。また、追加緩和観測期待が高まった時期をみると、短期金利のメインシナリオとしては、現金シフトが回避可能な▲0.5%程度が下限となっているが、一部のテールシナリオとして、現金シフトが指摘される▲0.5%~▲2.0%の水準も含まれていたことが確認された。

最後に、イールドカーブ・コントロール政策導入後は、先行き 1~2 年程度にわたって投資家による金利見通しのばらつきが収斂するなど、中央銀行が 1~2 年程度はイールドカーブをコントロールする可能性があるとの期待形成が観測された。その後、トランプ・ショック等によってこの期間は変動しているが、2 回の指値オペ等を経て概ね安定してきている。加えて、トランプ・ショック後の指値オペでは、一時的に増幅した先行きの金利上昇リスク認識をある程度抑えていたことも確認された。

今後の課題は以下のとおりである。第一に、日本のスワップション市場は、

満期やストライクや観測時期によっては、必ずしも流動性が高くない場合もあり、キャリブレーションを行う際には注意が必要である。本研究では、複数業者の値付けから平均的に算出した INDEX をデータとして用いているほか、キャリブレーションの際にも、ストライク方向と満期方向をフォワードレート・モデルで同時にキャリブレーションすることで、流動性の問題をある程度回避している。今後、これに加えて West [2005]で示されるような、流動性の低い市場に対する SABR モデルのキャリブレーション方法を検討することが考えられる。

第二に、SABR モデルに平均回帰性のパラメータを取り入れ、平均回帰して行くスピード等を推計することで、金融政策に対する市場参加者の見方を把握できないかという点である。SABR モデルに平均回帰パラメータを導入したモデルとしては、Henry-Labordère [2005]による  $\lambda$ -SABR モデルと呼ばれるものが知られている。このモデルは、キャリブレーションの公式が極めて複雑であるため、現時点であまり実用化されていないが、今後、こうしたモデルを用いて上記のような分析を行うことは興味深い研究である。

## 参考文献

- 小田信之・吉羽要直、「デリバティブ商品価格から導出可能な市場情報を利用したマーケット分析方法」、『金融研究』第 17 巻第 2 号、日本銀行金融研究所、1998 年、1～34 頁
- 白塚重典・中村 恒、「金融市場における期待形成の変化 — オプション取引価格の情報変数としての有用性に関する一考察 —」、『金融研究』第 17 巻第 4 号、日本銀行金融研究所、1998 年、129～172 頁
- Andreasen, Jesper, and Brian Norsk Høge, “ZABR – Expansion for the Masses,” available at SSRN: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1980726](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1980726), 2011.
- Antonov, Alexandre, Michael Konikov, and Michael Spector, “The Free Boundary SABR: Natural Extension to Negative Rates,” *Risk Magazine*, 28(9), 2015, pp. 68–73.
- , ———, and ———, “Mixing SABR Models for Negative Rates,” *Risk Magazine*, 30(4), 2017, pp. 86–91.
- Balland, Philippe, and Tran Quan, “SABR Goes Normal,” *Risk magazine*, 26(6), 2013, pp. 72–77.
- Bean, Charles, “Note on Negative Interest Rates for Treasury Committee,” Bank of England, May 16, 2013.
- Beinker, Mark, and Georg Stapper, “New Volatility Conventions in Negative Interest Environment,” Working paper, 2012.
- Black, Fischer, “The Pricing of Commodity Contracts,” *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 1976, pp.167–179.
- Breeden, Douglas T., and Robert H. Litzenberger, “Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices,” *Journal of Business*, 51(4), 1978, pp. 621–651.
- , and ———, “Central Bank Policy Impacts on the Distribution of Future Interest Rates,” available at SSRN: [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2642363](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2642363), 2014.
- Carver, Laurie, “Going Negative,” *Risk Magazine*, 25(11), 2012, pp. 22–24.
- Caspers, Peter, “Implementation of the ZABR model,” available at SSRN: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2692048](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2692048), 2013.
- Frankena, Luuk Hendrik, “Pricing and Hedging Options in a Negative Interest Rate

- Environment,” Master of Science in Applied Mathematics, Delft University of Technology, 2016.
- Gulisashvili, Archil, Blanka Horvath, and Antoine Jacquier, “Mass at Zero Small-Strike Implied Volatility Expansion in the SABR Model,” Working paper, 2015.
- Hagan, Patrick S., Deep Kumar, Andrew S. Lesniewski, and Diana E. Woodward, “Managing Smile Risk,” *Wilmott Magazine*, September 2002, pp. 84–108.
- , ———, ———, and ———, “Arbitrage Free SABR,” *Wilmott Magazine*, January 2014, pp.60–75.
- Hattori, Masazumi, Andreas Schrimpf, and Vladyslav Sushko, “The Response of Tail Risk Perceptions to Unconventional Monetary Policy,” *American Economic Journal: Macroeconomics*, 8(2), 2016, pp. 111–136.
- Hull, John, Alexander Sokol, and Alan White, “Short-Rate Joint-Measure Models,” *Risk Magazine*, 27(10), 2014, pp. 59–63.
- Henry-Labordère, Pierre, “A General Asymptotic Implied Volatility for Stochastic Volatility Models,” available at arXiv:cond-mat/0504317, 2005.
- Humphery, Rupert, and Joseph Noss, “Estimating Probability Distributions of Future Asset Prices: Empirical Transformations from Option-Implied Risk-Neutral to Real-World Density Functions,” Bank of England Working Paper No.455, June 2012.
- Ivanova, Vesela, and Josep Maria Puigvert Gutiérrez, “Interest Rate Forecasts, State Price Densities and Risk Premium from Euribor Options,” *Journal of Banking and Finance*, 48, 2014, pp. 210–223.
- Kienitz, Jörg, “Negative Rates, SABR PDE and Approximation,” Quantlib, 2015.
- Lee, Roger, and Dan Wang, “Displaced Lognormal Volatility Skews: Analysis and Applications to Stochastic Volatility Simulations,” *Annals of Finance*, 8(2), 2012, pp. 159–181.
- Le Floc’h, Fabien, and Gary J. Kennedy, “Finite Difference Techniques for Arbitrage Free SABR,” available at SSRN: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2402001](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2402001), 2015.
- Liu, Xiaoquan, Mark B. Shackleton, Stephen J. Taylor, and Xinzhong Xu, “Closed-Form Transformations from Risk-Neutral to Real-World Distributions,” *Journal of Banking and Finance*, 31(5), 2007, pp. 1501–1520.
- Malz, Allan M., “A Simple and Reliable Way to Compute Option-Based Risk-Neutral

Distributions,” Federal Reserve Bank of New York Staff Reports No.677, June 2014.

Ross, Steve, “The Recovery Theorem,” *Journal of Finance*, 70(2), 2015, pp. 615–648.

Schmiedel, Heiko, Gergana Kostova, and Wiebe Ruttenberg, “The Social and Private Costs of Retail Payment Instruments: A European perspective,” Occasional Paper Series No.137, European Central Bank, September 2012.

Shiratsuka, Shigenori, “Information Content of Implied Probability Distributions: Empirical Studies of Japanese Stock Price Index Options,” *Monetary and Economic Studies*, 19(3), Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2001, pp. 143–170.

Sihvonen, Jukka, and Sami Vähämaa, “Forward-Looking Monetary Policy Rules and Option-Implied Interest Rate Expectations,” *Journal of Futures Markets*, 34(4), 2014, pp. 346–373.

Söderlind, Paul, and Lars E. O. Svensson, “New Techniques to Extract Market Expectations from Financial Instruments,” *Journal of Monetary Economics*, 40(2), 1997, pp.383–429.

West, Graeme, “Calibration of the SABR model in Illiquid Markets,” *Applied Mathematical Finance*, 12(4), 2005, pp. 371–385.

## 補論 1. インプライド分布：欧州のケース

この補論では、日本に先駆けてマイナス金利政策を導入したユーロエリアにおける、金利のインプライド分布をみたものである。図表 A-1 は、2 年金利の 1 年後のインプライド分布の推移を確認したものである。現時点の金利水準 ( $f_0$ ) および 1 年後のインプライド分布の分位点 (10%、25%、50%、75%、90%点) と期待値 (インプライド・フォワードレートに一致) の推移を示している。

これをみると、ユーロエリアにおいては、わずかながらではあるが、マイナス金利政策を導入する 1 年以上前から、2 年金利がマイナス金利となる予想をする動きが始まっていたことが確認される。加えて、マイナス金利政策導入後も、実際に追加緩和 (マイナス金利幅の拡大) を行った政策決定会合の前には、はっきりした追加緩和予測が確認されており、追加緩和の地ならしが行われていた姿が窺える。ただし、欧州においては、日本の場合と異なり、マイナス金利政策導入後も、市場金利が即座にマイナス転化したわけではなく、マイナス転化したのは 2 回目の深掘り ( $-0.2\% \rightarrow -0.3\%$ ) 以降である。このため、インプライド分布の推移からみて、ゼロ金利制約の壁が明確に無くなったのはこれ以降であり、この時期においては、日本の場合ほどではないにせよ、先行きに対する金利の見方が分かれている。図表 A-2 は、追加緩和が行われた決定会合に向けて、インプライド分布がどのように変化し、追加緩和が織り込まれていったかを改めて確認したグラフである。

## 補論 2. SABR モデル、Free boundary SABR モデルのキャリブレーション式

### (1) SABR モデル

Normal Volatility に対するボラティリティ公式は、以下のように表される (Hagan *et al.*[2014])。

$$\sigma_N(f, K, T) = \frac{\alpha}{\frac{\int_K^f C(g)^{-1} dg}{f - K}} \left( \frac{z}{\chi(z)} \right) \left[ 1 + \left( G\alpha^2 + \frac{\rho v \alpha C(f) - C(K)}{4(f - K)} + \frac{2 - 3\rho^2}{24} v^2 \right) T \right], \quad (\text{A-1})$$

where  $C(g) \equiv g^\beta$ .

ただし、

$$z = \frac{v}{\alpha} \int_K^f C(g)^{-1} dg, \quad (\text{A-2})$$

$$\chi(z) = \ln \left( \frac{\sqrt{1 - 2\rho z + z^2} + z - \rho}{1 - \rho} \right), \quad (\text{A-3})$$

$$G = \ln \left( \frac{\sqrt{C(f)C(K)} \int_K^f C(g)^{-1} dg}{f - K} \right) / \left( \int_K^f C(g)^{-1} dg \right)^2, \quad (\text{A-4})$$

である。

ここで、以上の公式に含まれる以下の積分式は、

$$I \equiv \int_K^f C(g)^{-1} dg = \int_K^f g^{-\beta} dg = \frac{f^{1-\beta} - K^{1-\beta}}{1-\beta} \quad (\text{A-5})$$

と計算されるので、ボラティリティ公式は以下のように導出される。

$$\begin{aligned} \sigma_N(f, K, T) &= \frac{\alpha(1-\beta)}{f^{1-\beta} - K^{1-\beta}} \left( \frac{z}{\chi(z)} \right) \left[ 1 + \left( G\alpha^2 + \frac{\rho v \alpha f^\beta - K^\beta}{4(f-K)} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right) T \right] \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

ただし

$$z = \frac{v}{\alpha} \frac{f^{1-\beta} - K^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad (\text{A-7})$$

$$G = \ln \left( \frac{f^{\frac{\beta}{2}} K^{\frac{\beta}{2}} \frac{f^{1-\beta} - K^{1-\beta}}{1-\beta}}{f - K} \right) / \left( \frac{f^{1-\beta} - K^{1-\beta}}{1-\beta} \right)^2, \quad (\text{A-8})$$

である。

## (2) Free boundary SABR モデル

以上に示した通常の SABR モデルと Free boundary SABR モデルとの違いは、積分形において  $C(g) \equiv |g|^\beta$  とする点にある。この際、 $C(g)$  に関する積分を含む

$I$  は、 $f > 0$  の時、以下のように場合分けして計算することができる。

$$I \equiv \int_K^f C(g)^{-1} dg = \int_K^f |g|^{-\beta} dg = \begin{cases} \frac{f^{1-\beta} - K^{1-\beta}}{1-\beta}, & K > 0, f > 0 \\ \frac{f^{1-\beta} + (-K)^{1-\beta}}{1-\beta}, & K < 0, f > 0 \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

したがって、ボラティリティ公式は以下のように導出される。

$$\begin{aligned} \sigma_{N,FB}(f, K, T) \\ = \frac{\alpha}{\frac{I}{f-K}} \left( \frac{z}{\chi(z)} \right) \left[ 1 + \left( G\alpha^2 + \frac{\rho v \alpha}{4} \frac{|f|^\beta - |K|^\beta}{f-K} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right) T \right] \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

ここで、

$$z = \frac{v}{\alpha} I, \quad (\text{A-11})$$

$$\chi(z) = \ln \left( \frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1-\rho} \right), \quad (\text{A-12})$$

$$G = \ln \left( \frac{\sqrt{|f|^\beta |K|^\beta} I}{f-K} \right) / I^2, \quad (\text{A-13})$$

である。

なお、 $f < 0$  の時は、以上の  $f > 0$  における公式の各変数を以下のように置き換えることで導出される。

$$f \rightarrow -f (> 0), \quad K \rightarrow -K, \quad \rho \rightarrow -\rho \quad (\text{A-14})$$

したがって、 $f < 0$  の時のボラティリティ公式は以下のように導出される。

$$\begin{aligned} \sigma_{N,FB}(f, K, T) \\ = \frac{\alpha}{\frac{I_-}{(-f) - (-K)}} \left( \frac{z}{\chi(z)} \right) \left[ 1 + \left( G\alpha^2 + \frac{(-\rho)v\alpha}{4} \frac{|f|^\beta - |K|^\beta}{(-f) - (-K)} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right) T \right] \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

ここで、

$$z = \frac{v}{\alpha} I_-, \quad (\text{A-16})$$

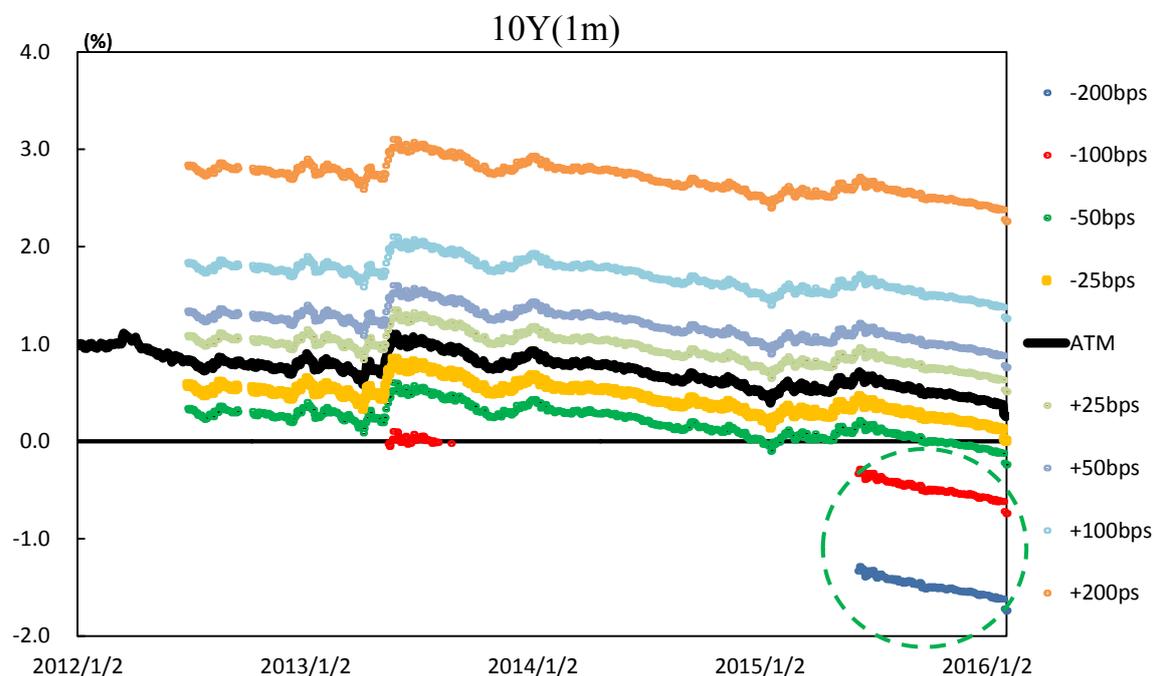
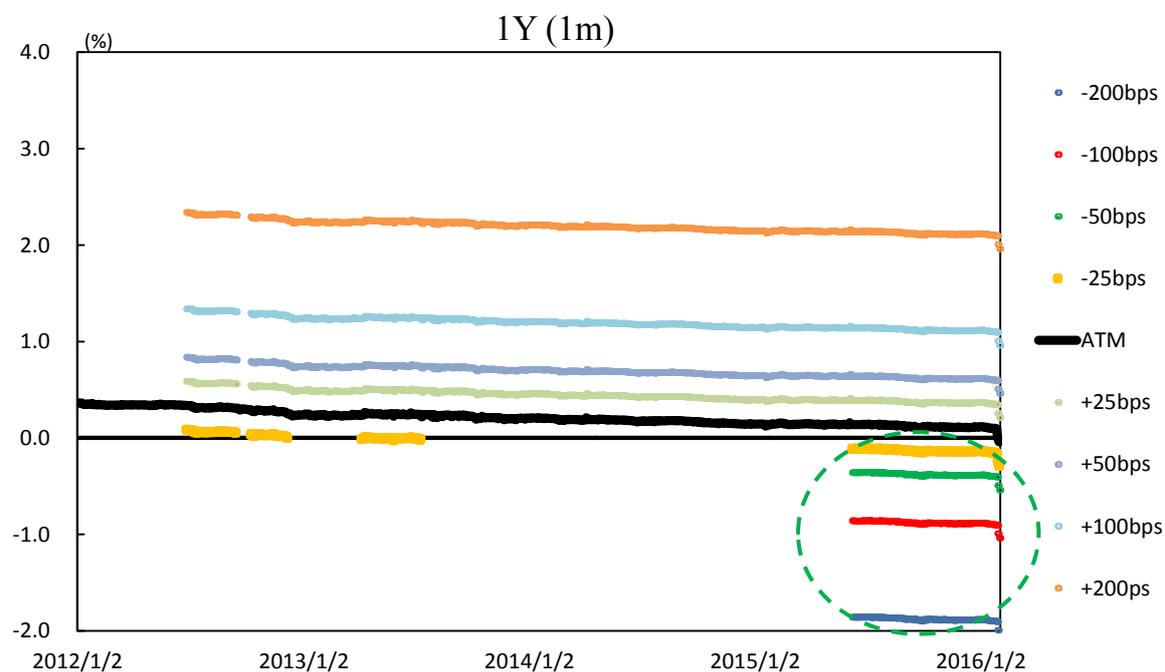
$$I_- \equiv \begin{cases} \frac{(-f)^{1-\beta} - (-K)^{1-\beta}}{1-\beta}, & -K > 0, -f > 0 \\ \frac{(-f)^{1-\beta} + (K)^{1-\beta}}{1-\beta}, & -K < 0, -f > 0 \end{cases} \quad (\text{A-17})$$

$$\chi(z) = \ln \left( \frac{\sqrt{1 - 2(-\rho)z + z^2} + z - (-\rho)}{1 - (-\rho)} \right), \quad (\text{A-18})$$

$$G = \ln \left( \frac{\sqrt{|f|^\beta |K|^\beta} I_-}{(-f) - (-K)} \right) / (I_-)^2, \quad (\text{A-19})$$

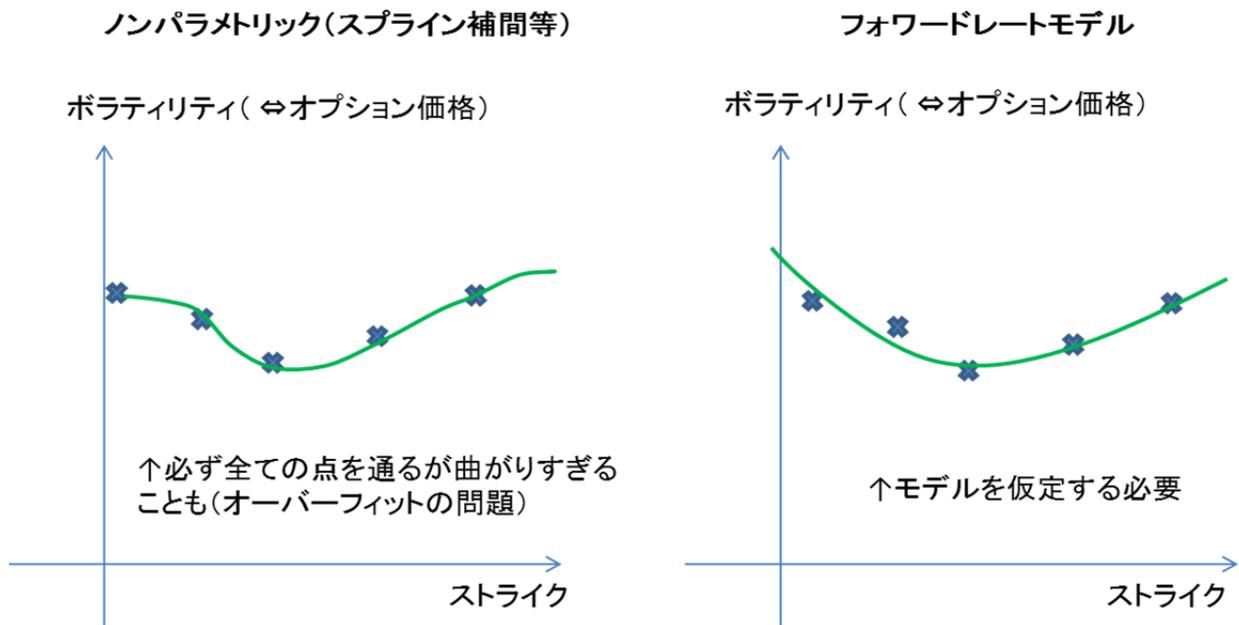
である。

図表1 スワップション市場において値付けされるストライクの例



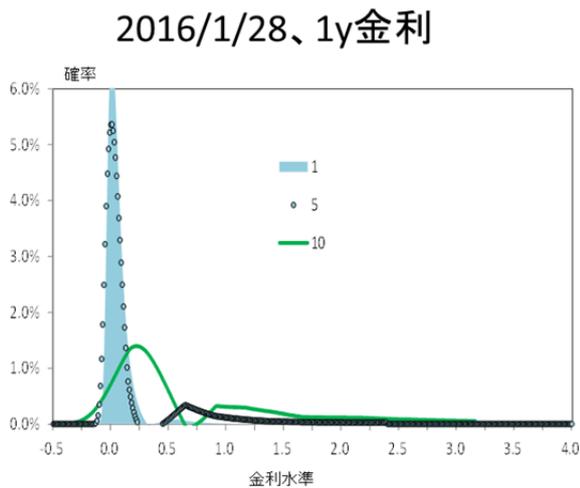
(注) それぞれ1年スワップ、10年スワップを原資産とする満期1か月スワップションのストライクをプロットしたもの。

図表2 ノンパラメトリック法とフォワードレート・モデル

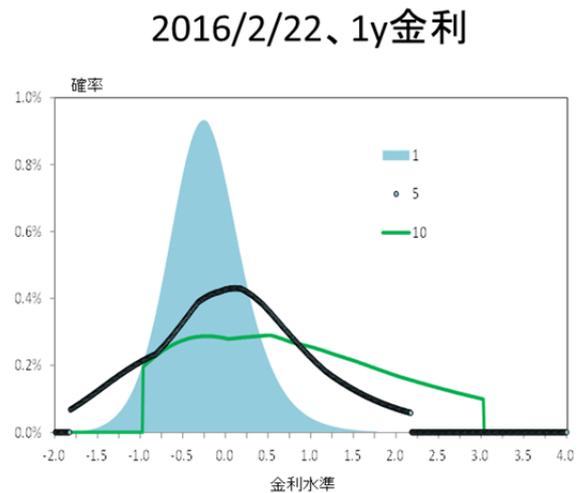


図表3 ノンパラメトリック法の限界

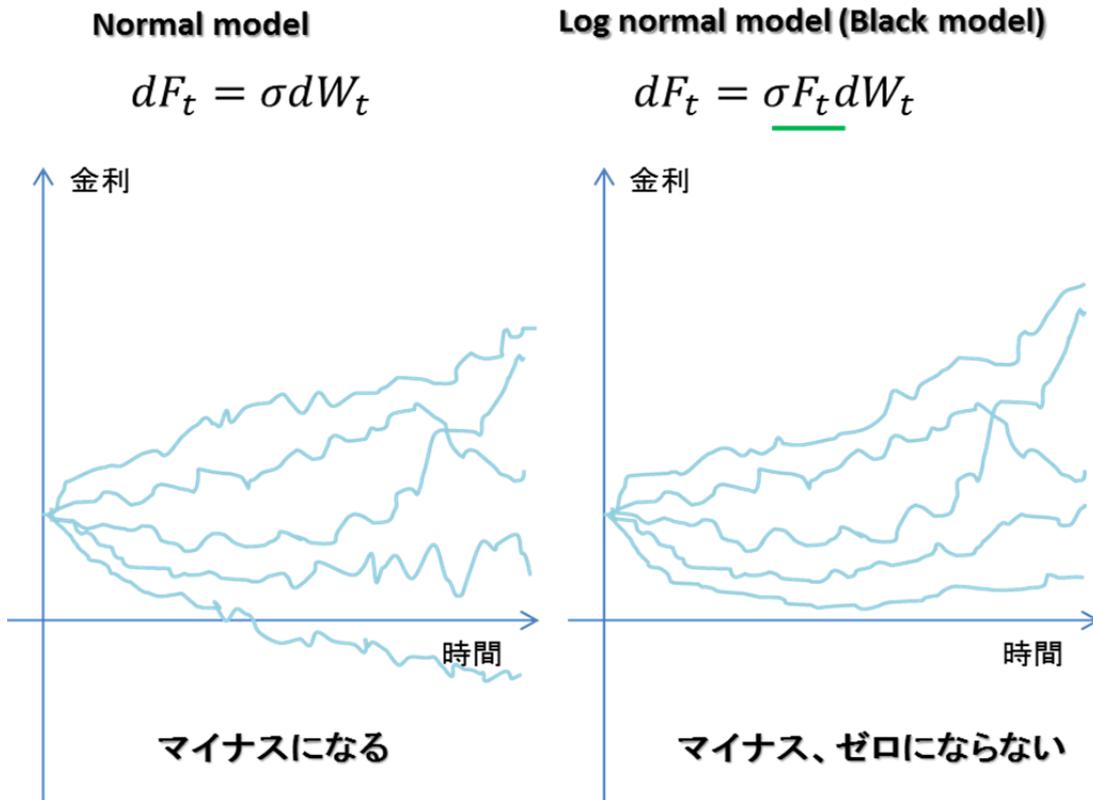
分布が凸凹し確率がマイナスになることも(オーバーフィットの問題)。



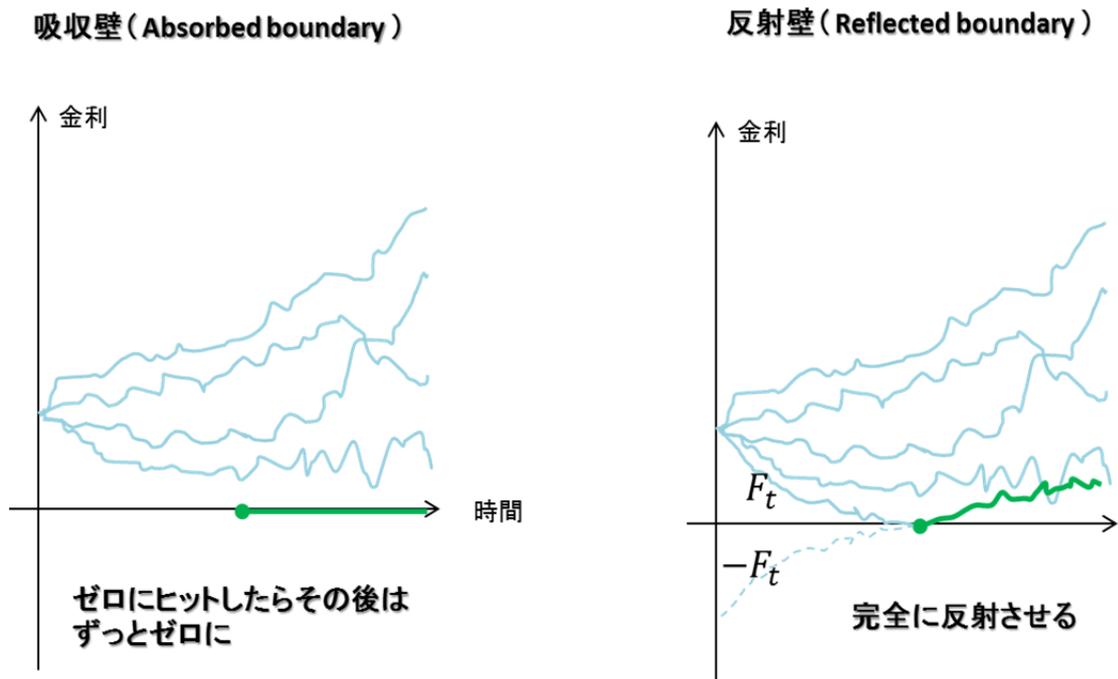
分布が途中で切れる(外挿が難しい)



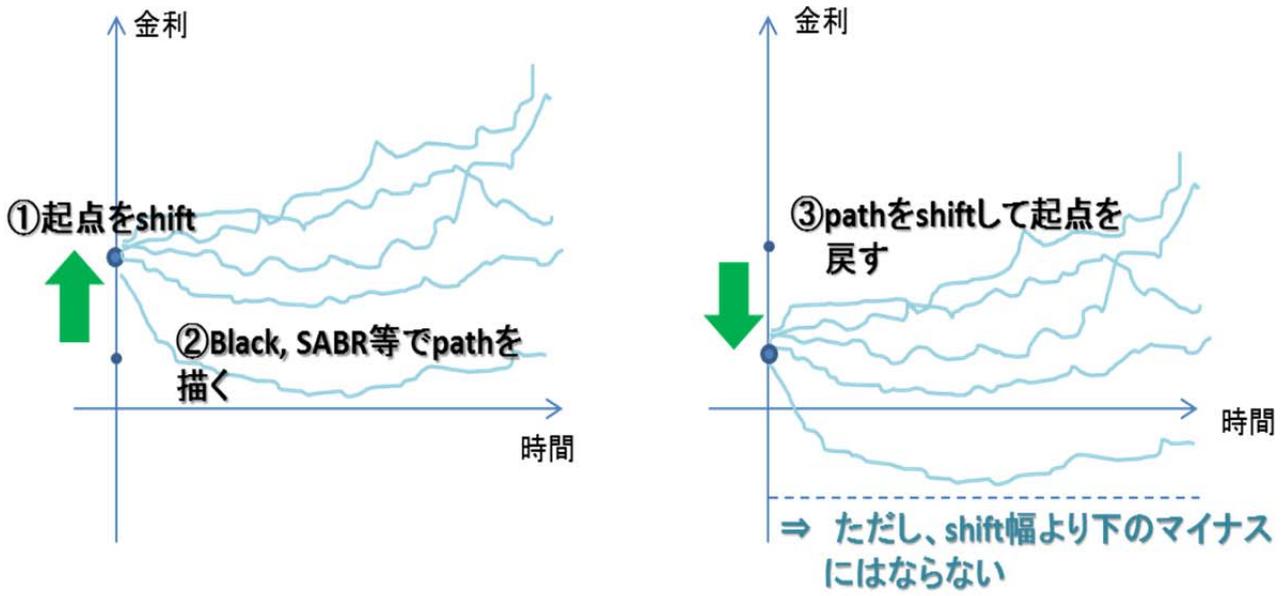
図表4 正規モデルと対数正規モデル



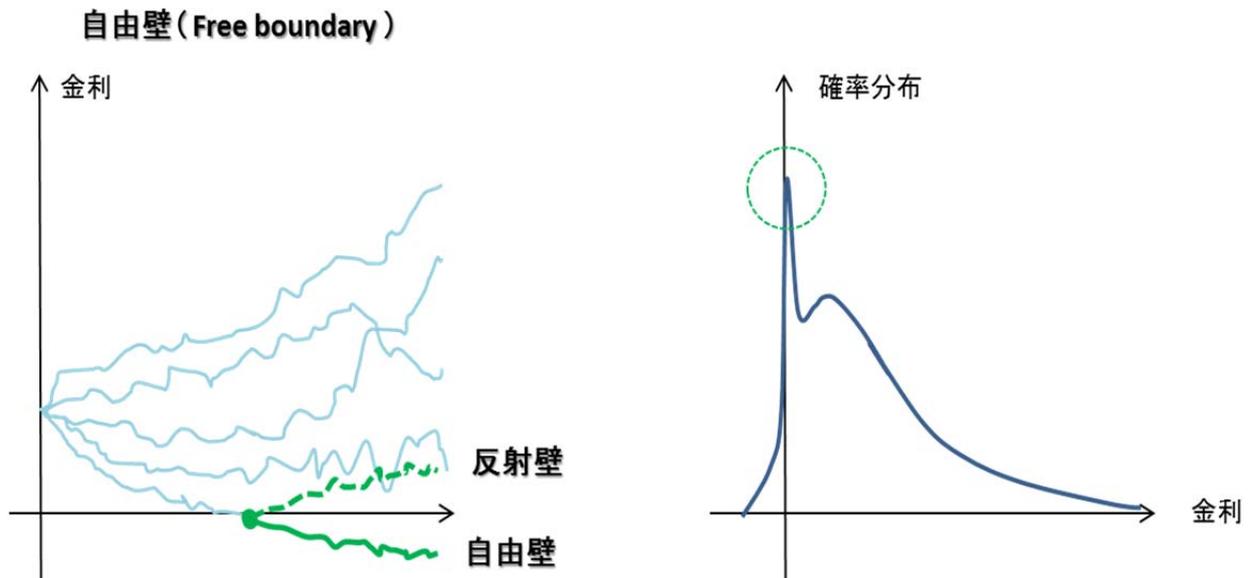
図表5 吸収壁と反射壁



図表 6 Shifted SABR



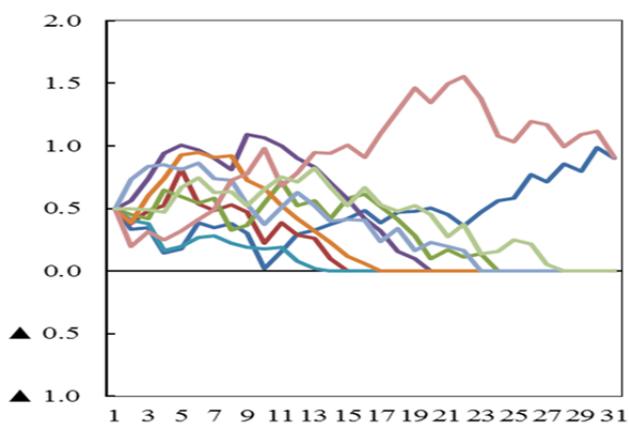
図表 7 Free Boundary SABR



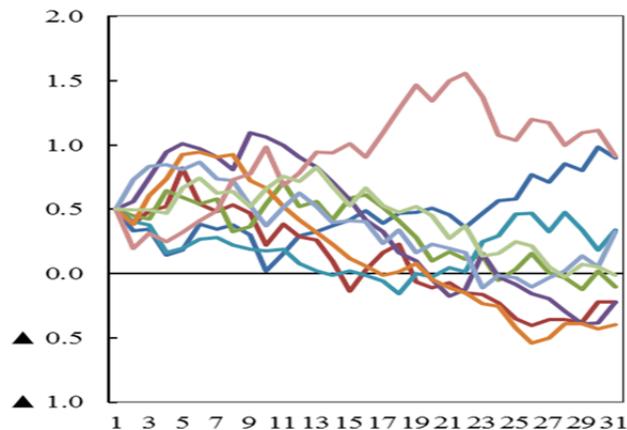
図表 8 Free Boundary SABR のシミュレーション ( $\beta$ によるパスの違い)

(1)  $\beta=0.1$  (正規分布に近い)

SABR (Absorbed Boundary)

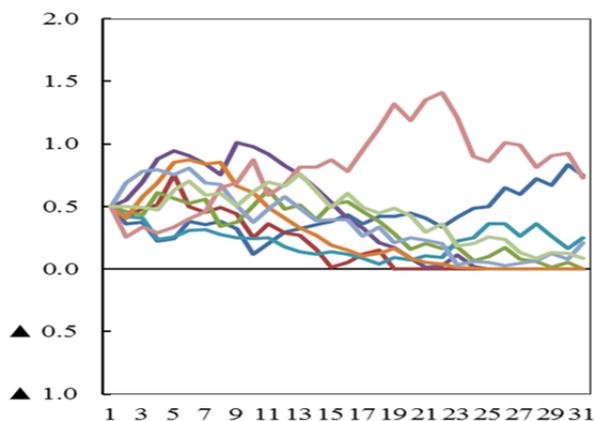


Free Boundary SABR

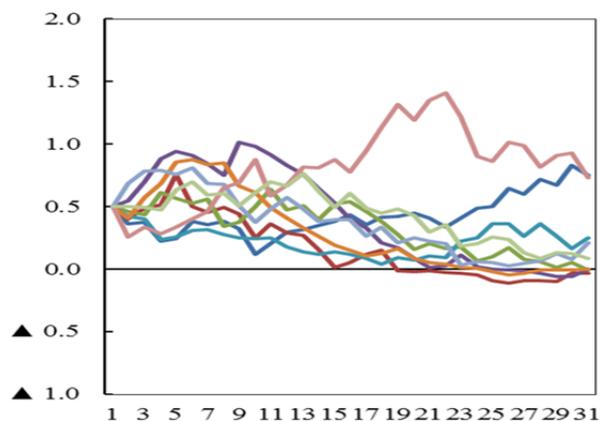


(2)  $\beta=0.4$  (対数正規分布に近い)

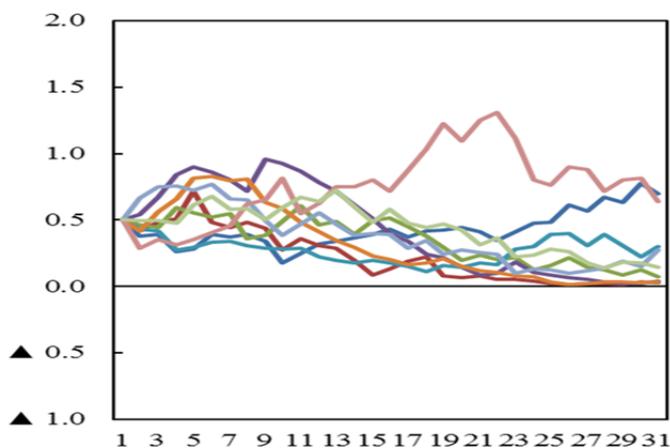
SABR (Absorbed Boundary)



Free Boundary SABR

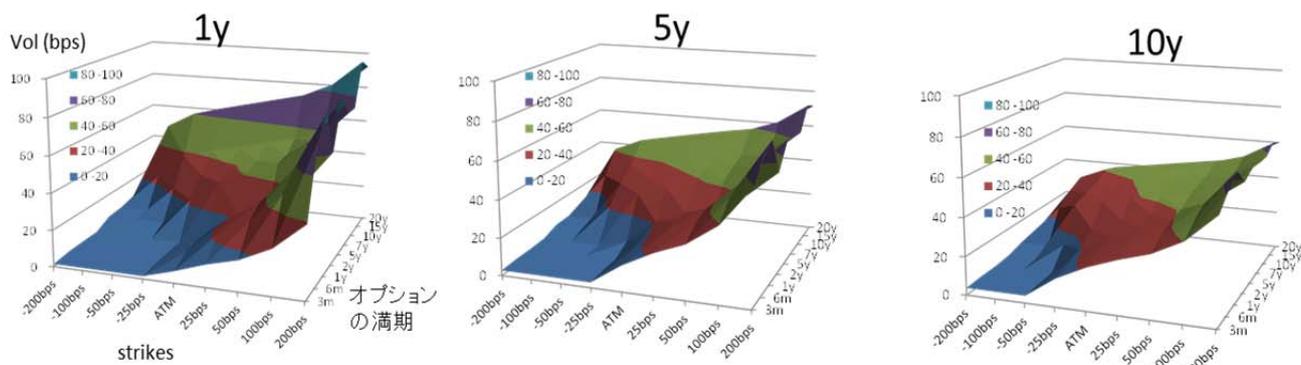


(3)  $\beta=0.6$  (通常の SABR と同じく、負の値を取らない)

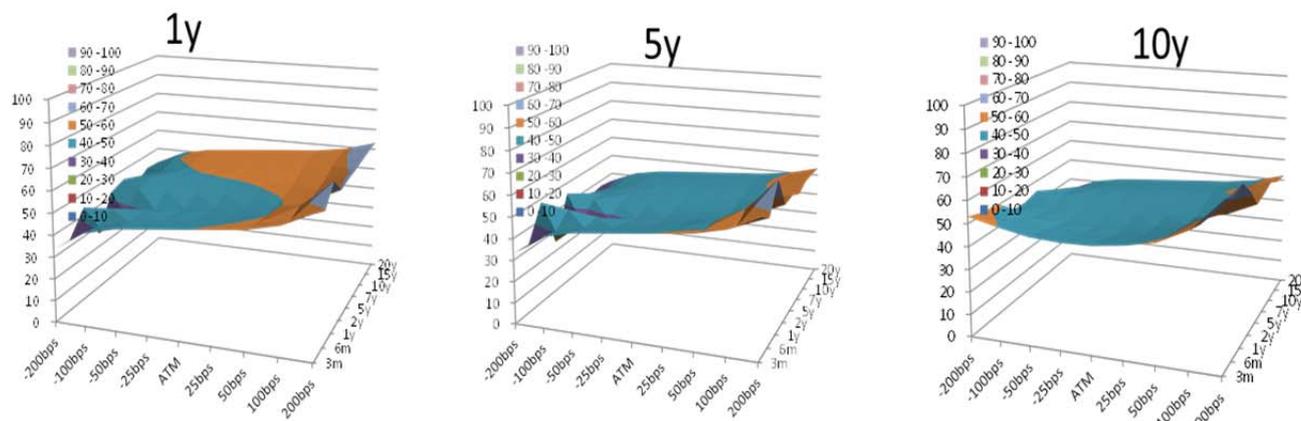


図表9 市場データ：スワップションのインプライド・ボラティリティ

(1) マイナス金利導入前 (1月28日)

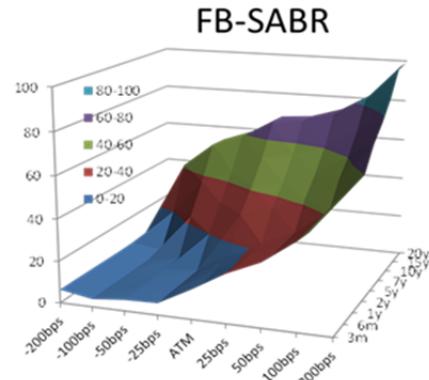
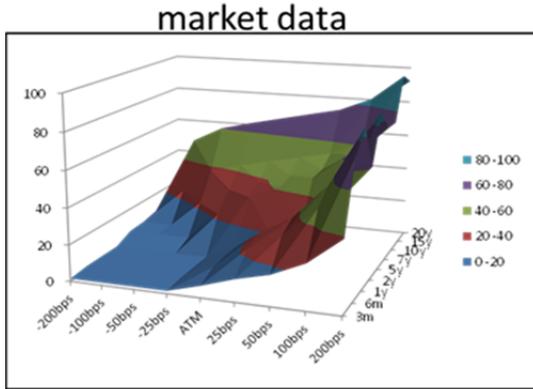


(2) マイナス金利導入後 (2月22日)

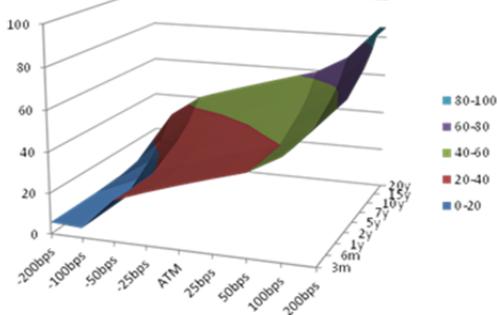


図表 10 キャリブレーション結果（マイナス金利導入前<1月28日>）

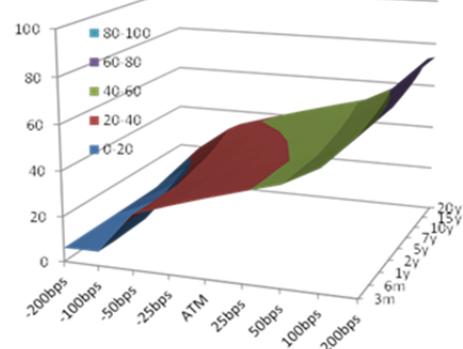
(1) 1年金利



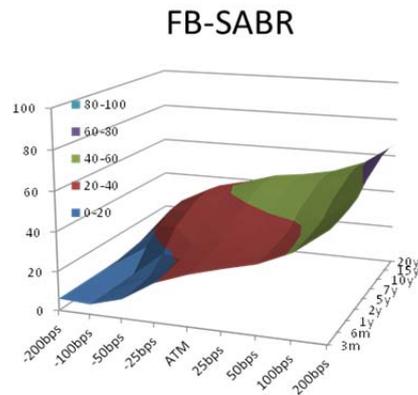
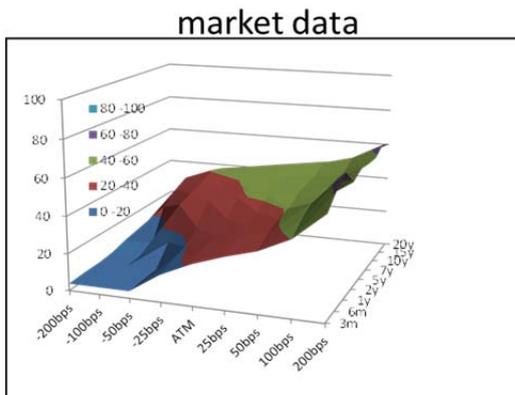
Shifted SABR (シフト幅210bps)



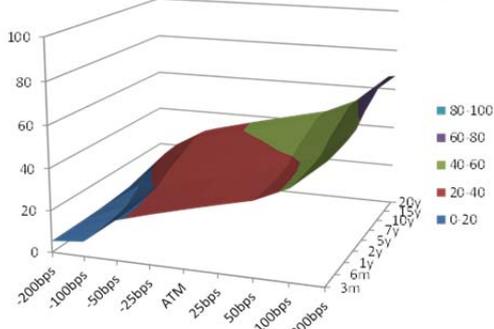
Shifted SABR (同500bps)



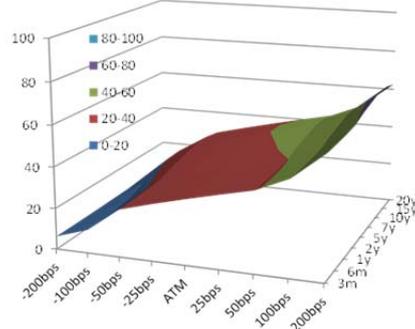
(2) 10年金利



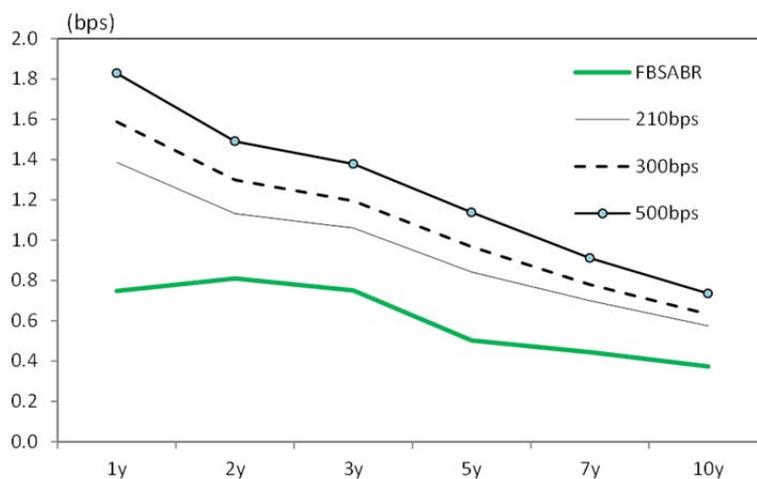
Shifted SABR (シフト幅210bps)



Shifted SABR (同500bps)



図表 11 推計誤差（マイナス金利導入前<1月28日>）



(注) 誤差は1グリッドあたり。

図表 12 推計パラメータ（マイナス金利導入前<1月28日>）

Shifted-SABR  
(シフト幅210bps)

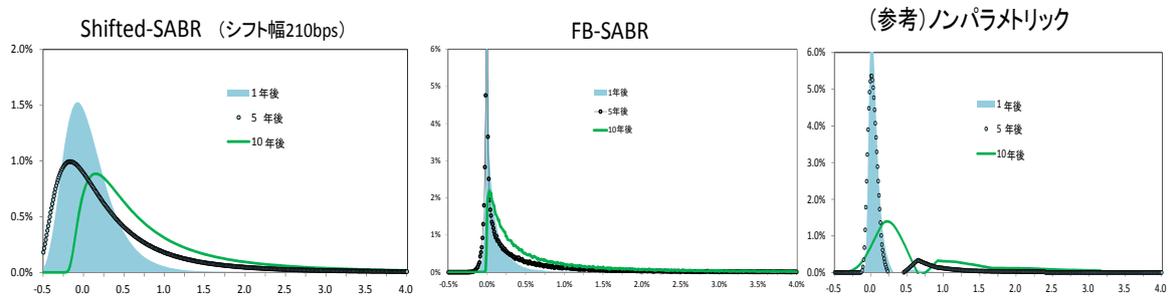
	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\nu$
1y	0.140	1.000	0.999	0.252
2y	0.138	1.000	0.999	0.316
3y	0.129	1.000	0.999	0.279
5y	0.119	1.000	0.998	0.241
7y	0.114	1.000	0.998	0.229
10y	0.110	1.000	0.998	0.208

FB-SABR

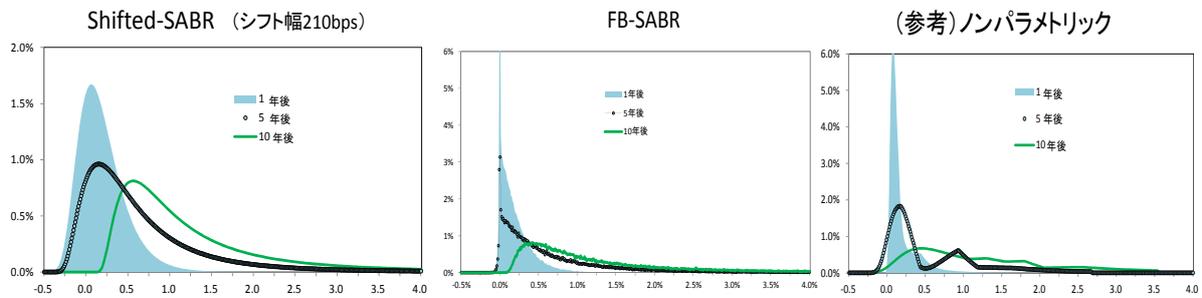
	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\nu$
1y	0.039	0.471	0.999	0.238
2y	0.024	0.370	1.000	0.314
3y	0.023	0.370	1.000	0.267
5y	0.022	0.384	0.999	0.218
7y	0.018	0.341	0.998	0.211
10y	0.017	0.345	0.998	0.185

図表 13 インプライド分布の推計結果（マイナス金利導入前<1月28日>）

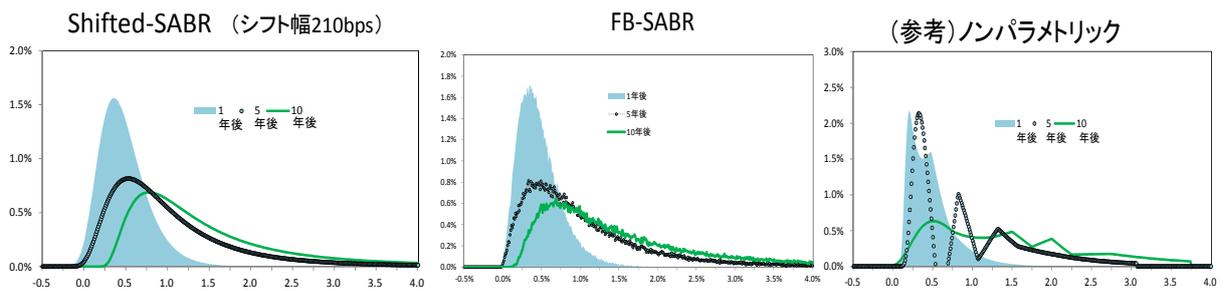
**1y**



**5y**

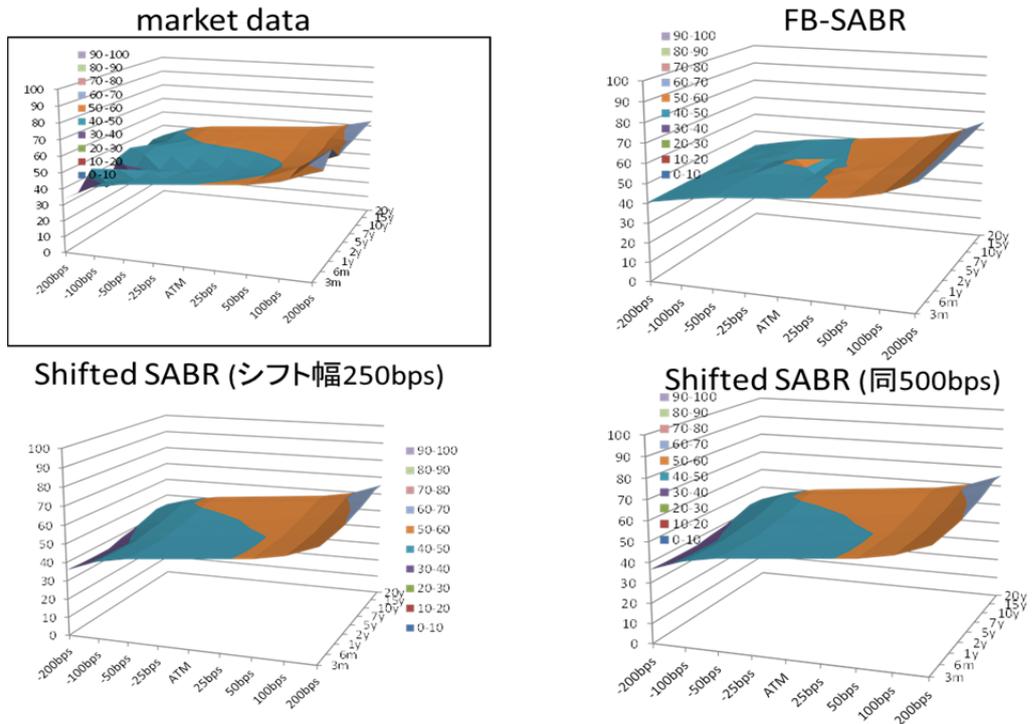


**10y**

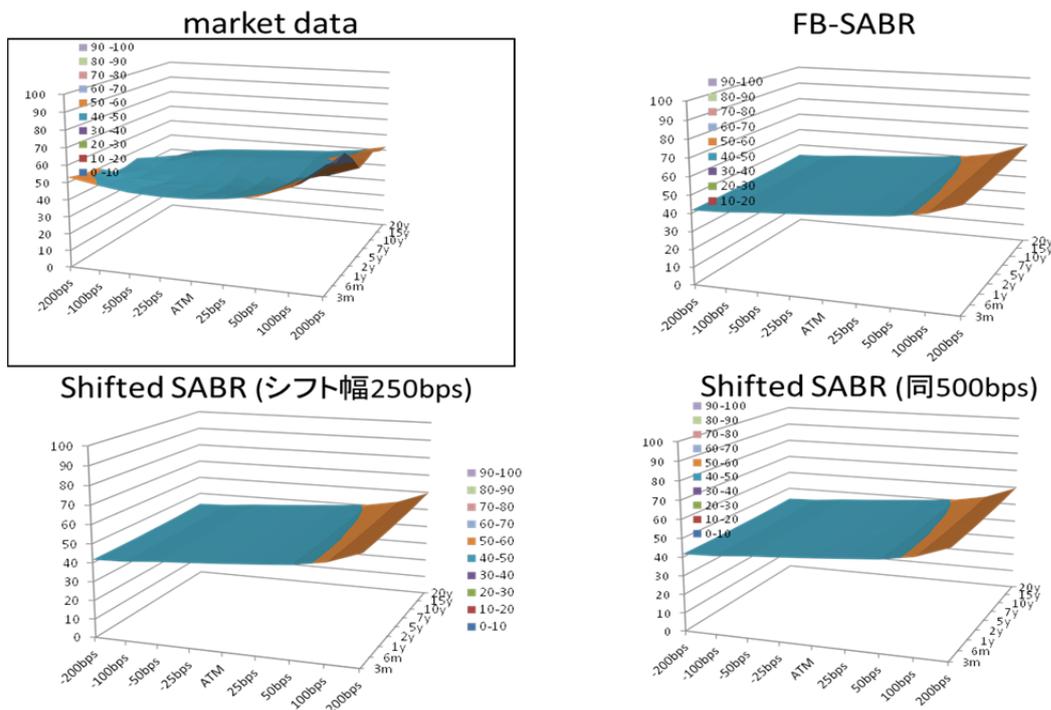


図表 14 キャリブレーション結果（マイナス金利導入後<2月22日>）

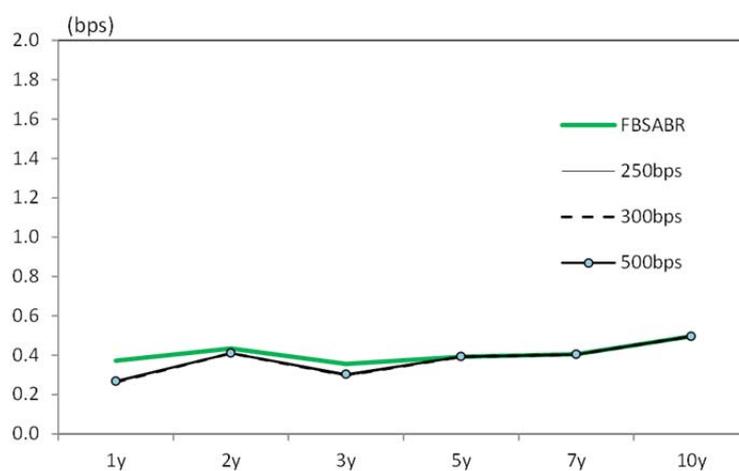
(1) 1年金利



(2) 10年金利



図表 15 推計誤差（マイナス金利導入後<2月22日>）



(注) 誤差は1グリッドあたり。

図表 16 推計パラメータ（マイナス金利導入後<2月22日>）

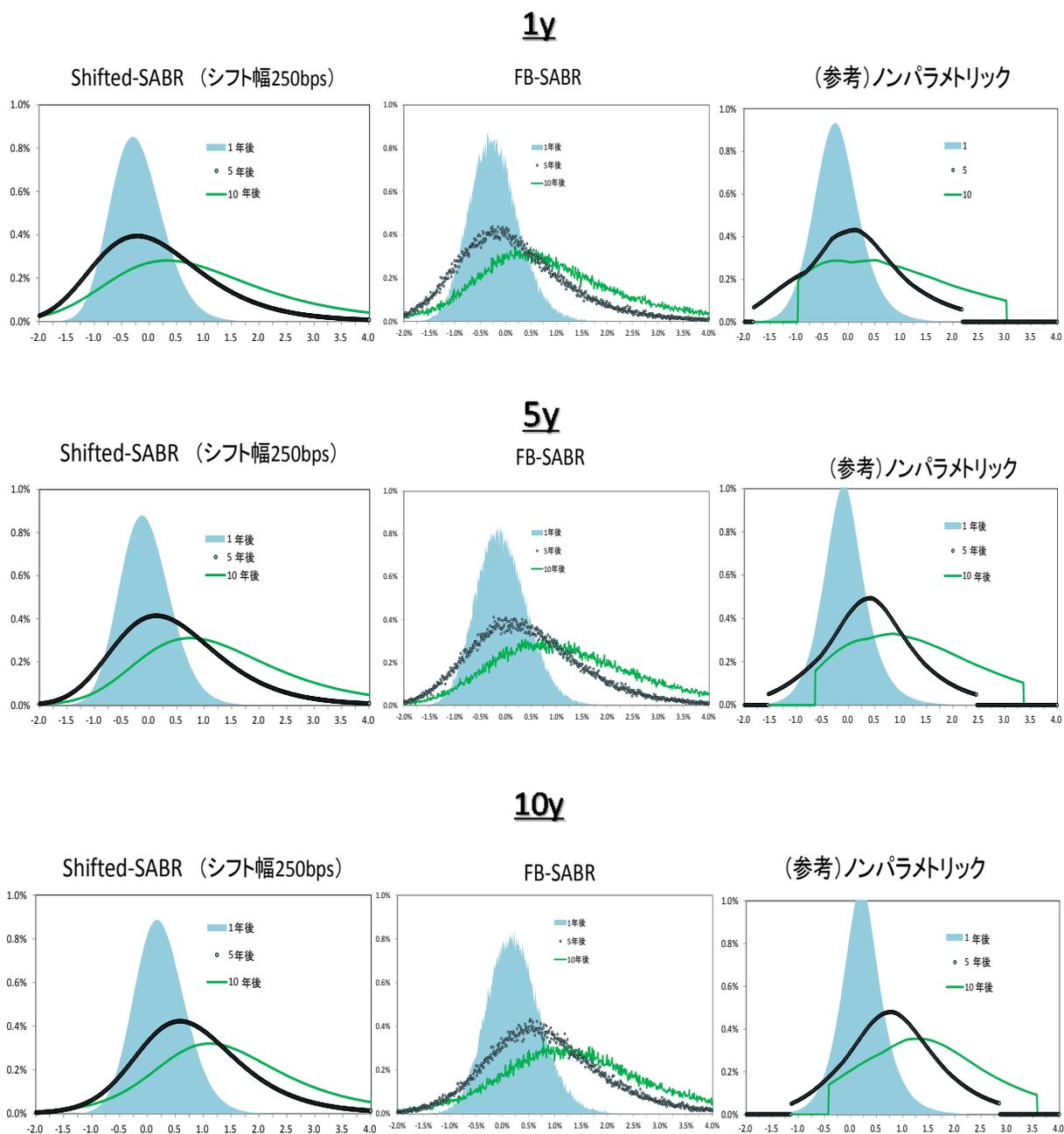
Shifted-SABR（シフト幅250bps）

	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\nu$
1y	0.010	0.189	0.608	0.139
2y	0.007	0.108	0.584	0.162
3y	0.008	0.150	1.000	0.082
5y	0.005	0.000	0.755	0.139
7y	0.005	0.000	0.750	0.133
10y	0.005	0.000	0.479	0.197

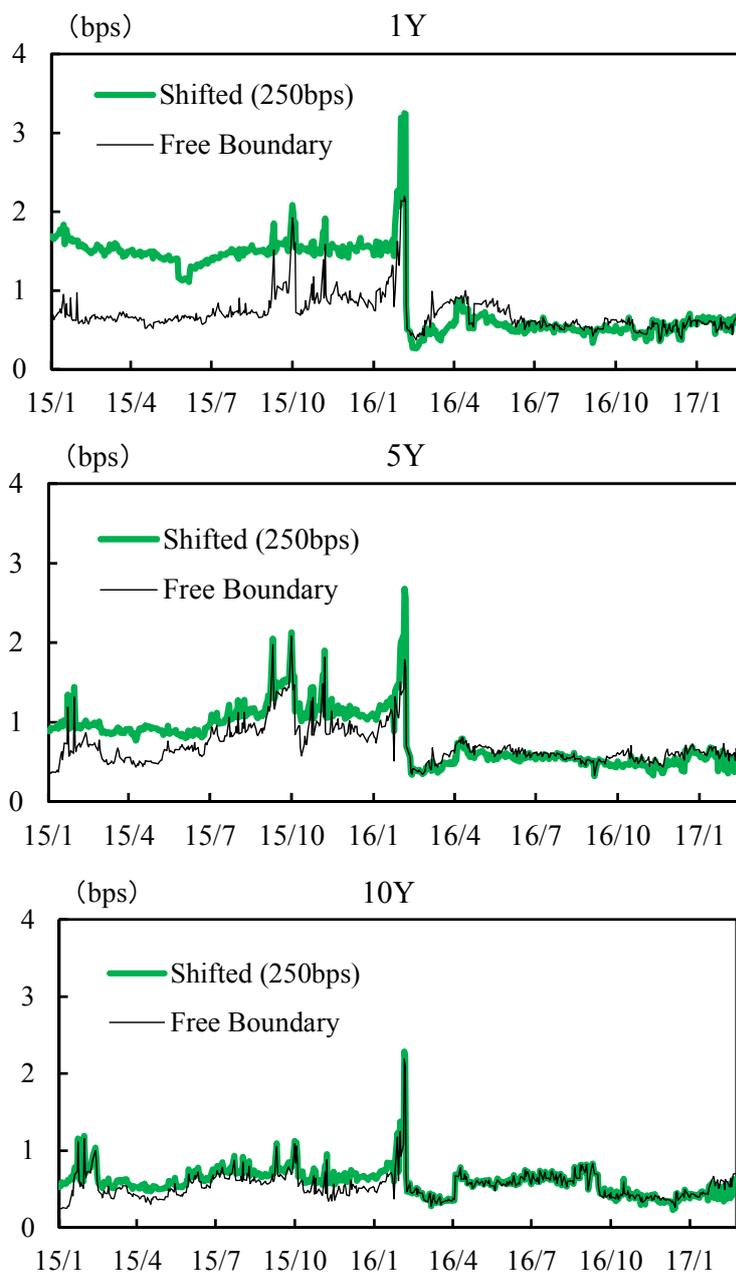
FB-SABR

	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\nu$
1y	0.005	0.006	0.644	0.195
2y	0.005	0.006	0.628	0.184
3y	0.005	0.011	0.935	0.115
5y	0.005	0.000	0.755	0.138
7y	0.005	0.000	0.750	0.133
10y	0.005	0.000	0.479	0.197

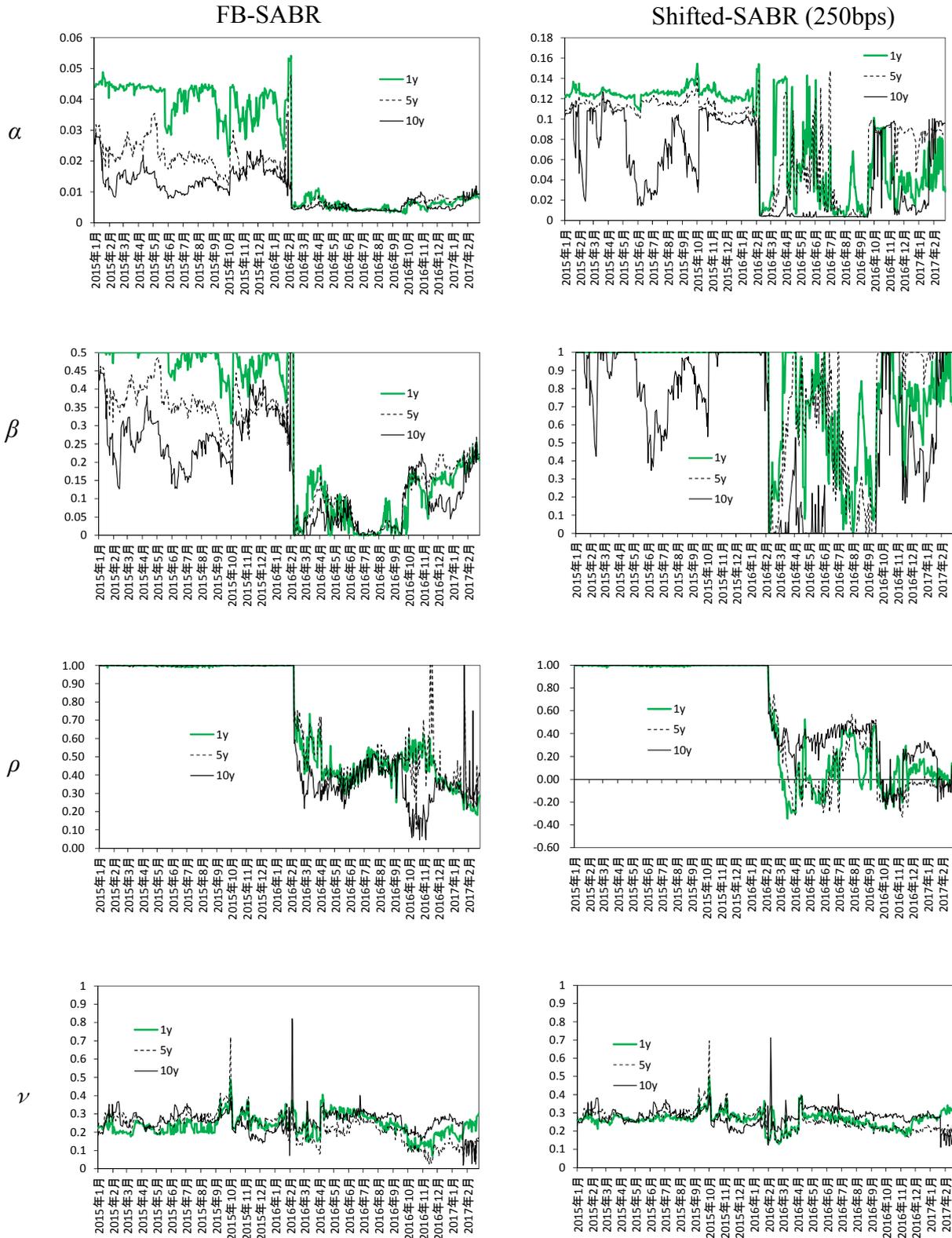
図表 17 インプライド分布の推計結果（マイナス金利導入後<2月22日>）



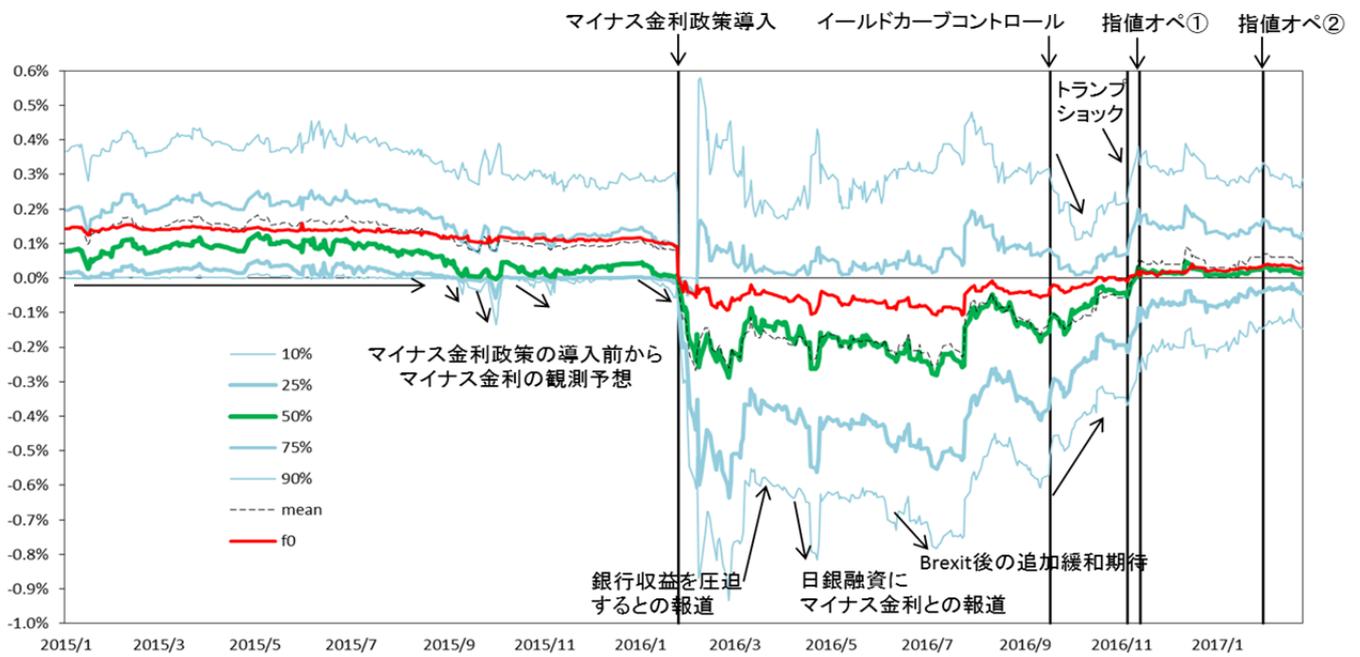
図表 18 推計誤差の比較 (時系列)



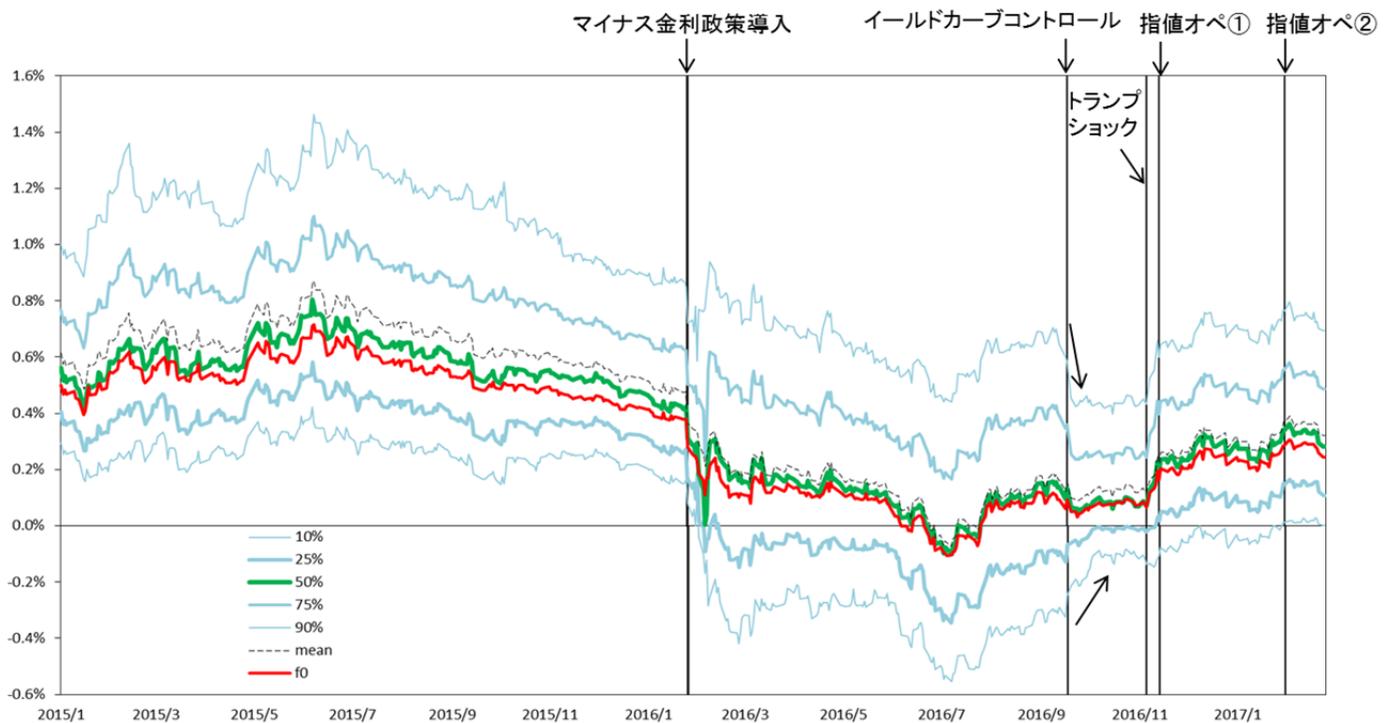
図表 19 推計パラメータの推移



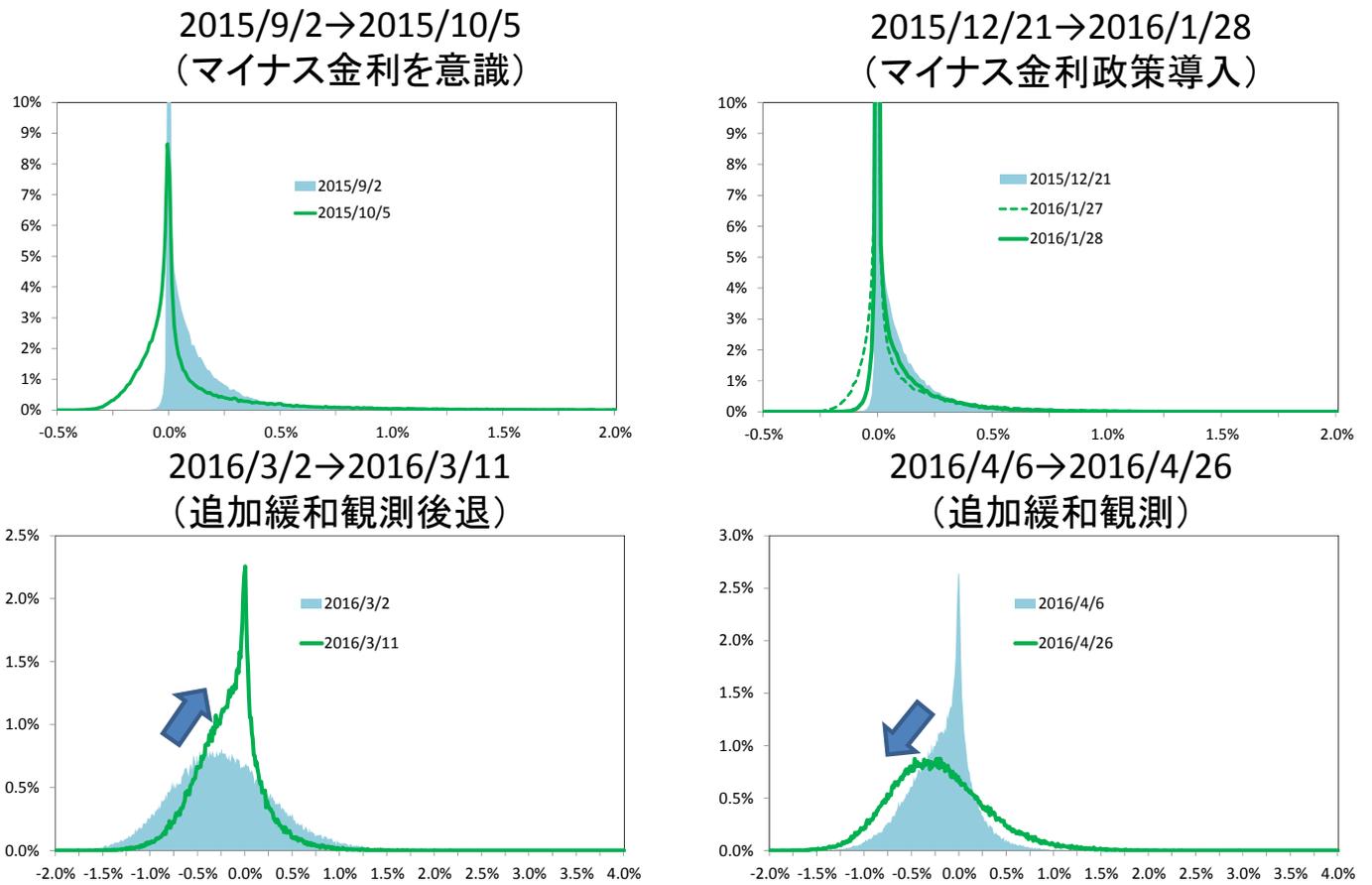
図表 20 インプライド分布の推移：1y 金利（1年後）



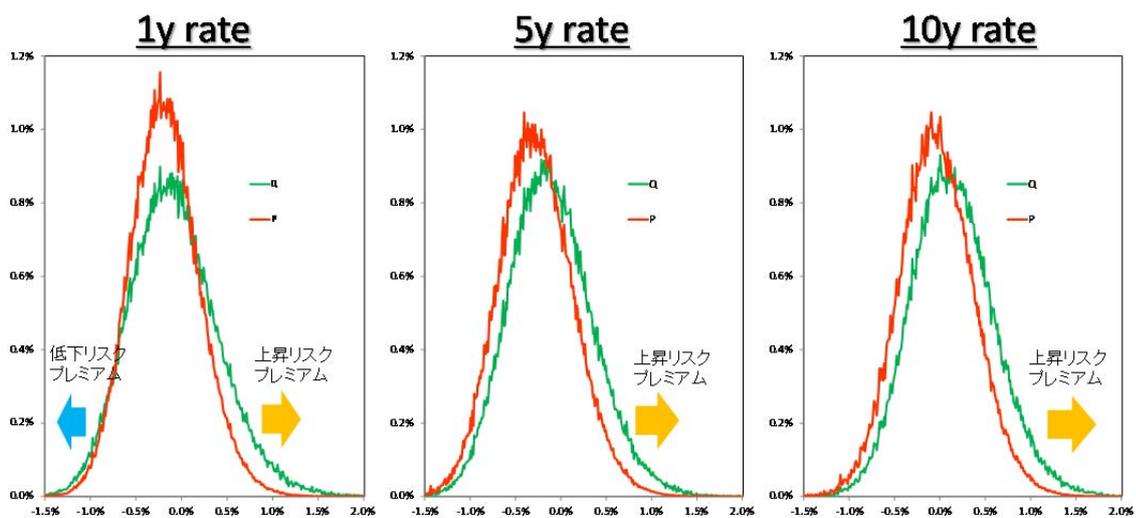
図表 21 インプライド分布の推移：10y 金利（1年後）



図表 22 インプライド分布の変化：1y 金利（1年後）

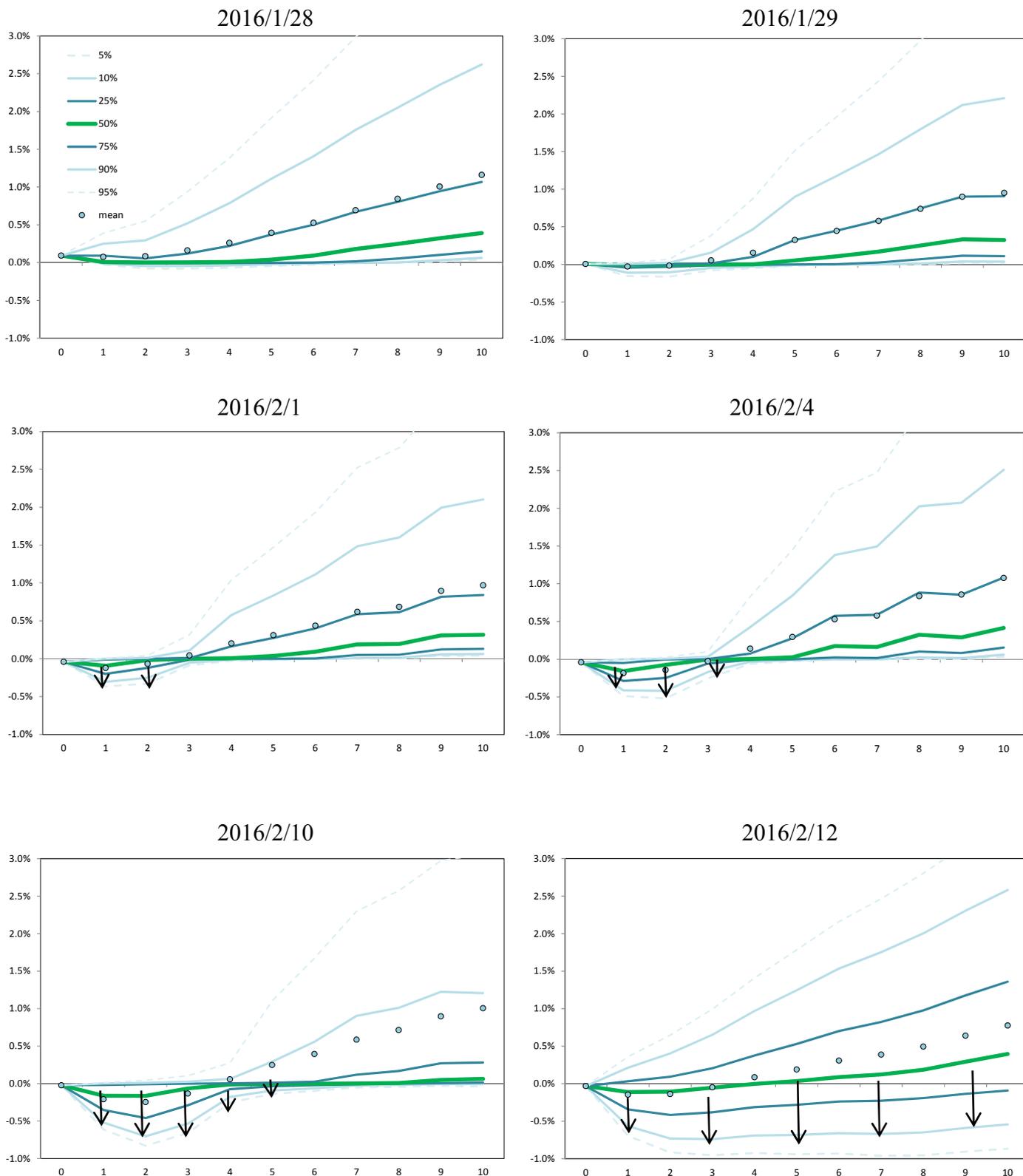


図表 23 インプライド分布の留意点：リスク中立確率と実確率



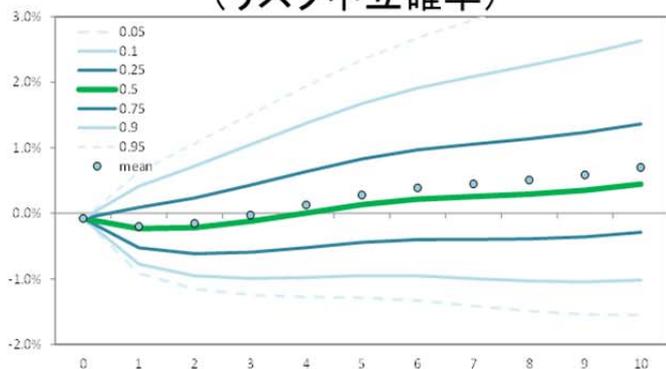
(注) 日本の2016/2/22の例。1年後の分布。Q=リスク中立確率、P=実確率

図表 24 マイナス金利政策導入後の金利見通しの変化：1年金利

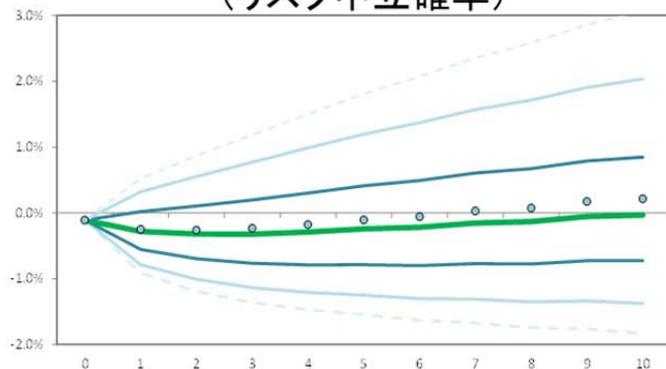


図表 25 追加緩和観測：1年金利

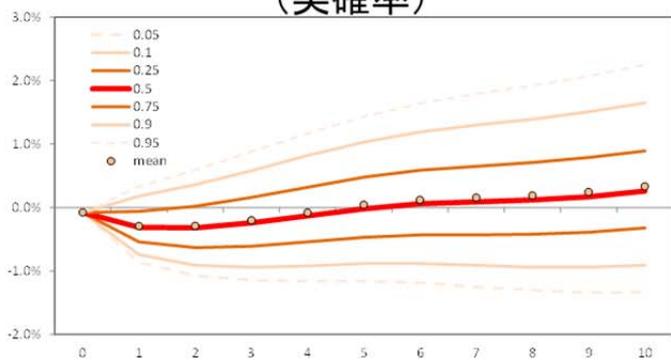
**2016/4/27**  
(リスク中立確率)



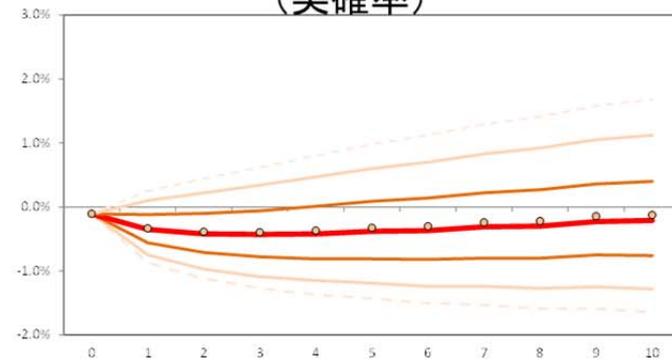
**2016/7/11**  
(リスク中立確率)



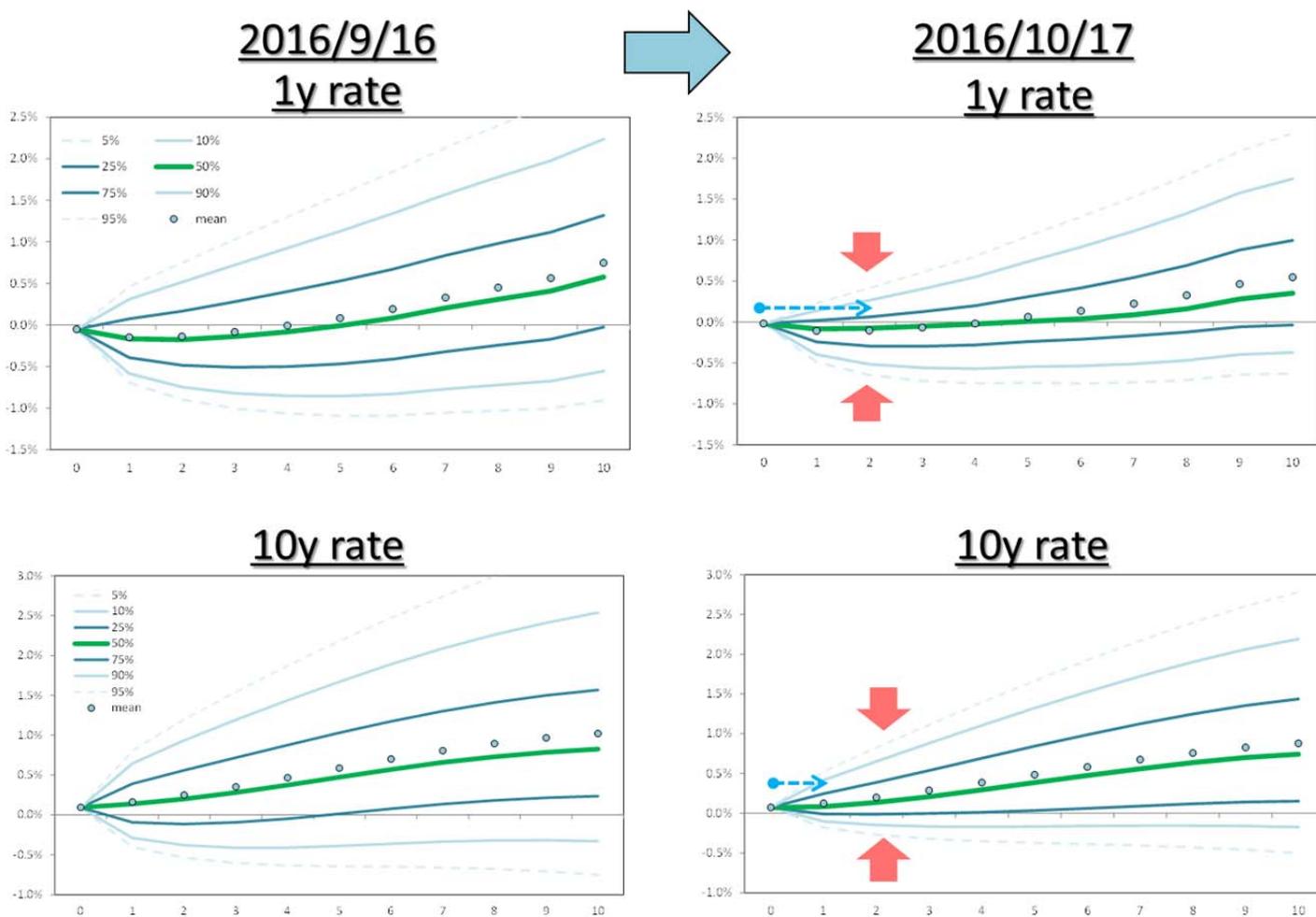
(実確率)



(実確率)



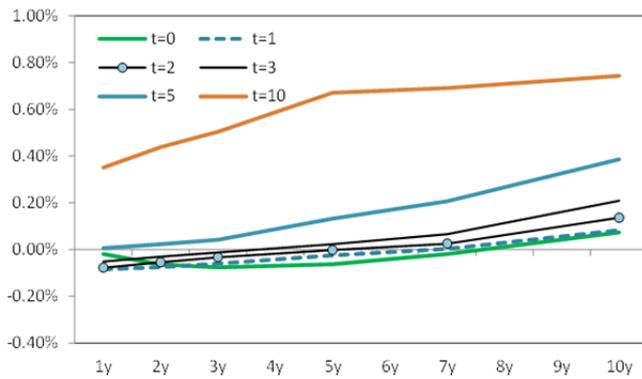
図表 26 イールドカーブ・コントロール後の金利見通しの変化



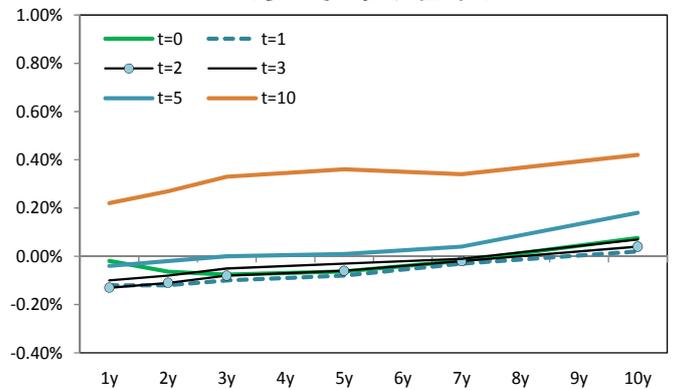
図表 27 先行きのイールドカーブ（インプライド分布の中央値）

**2016/10/17**

イールドカーブコントロール

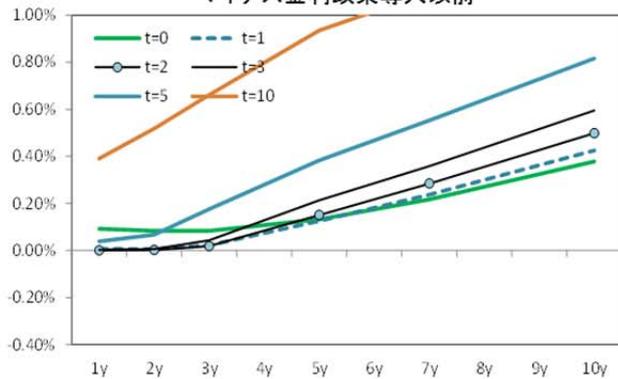


(参考:実確率)



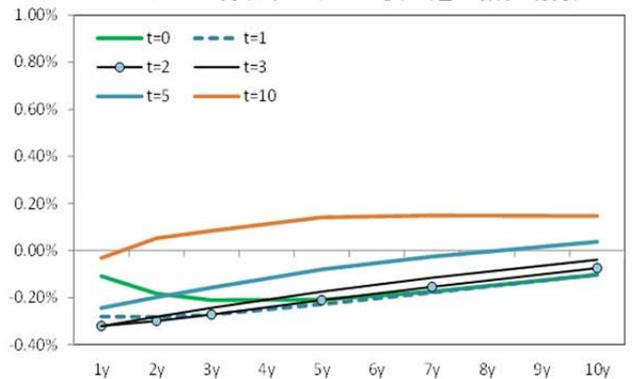
**2016/1/28**

マイナス金利政策導入以前

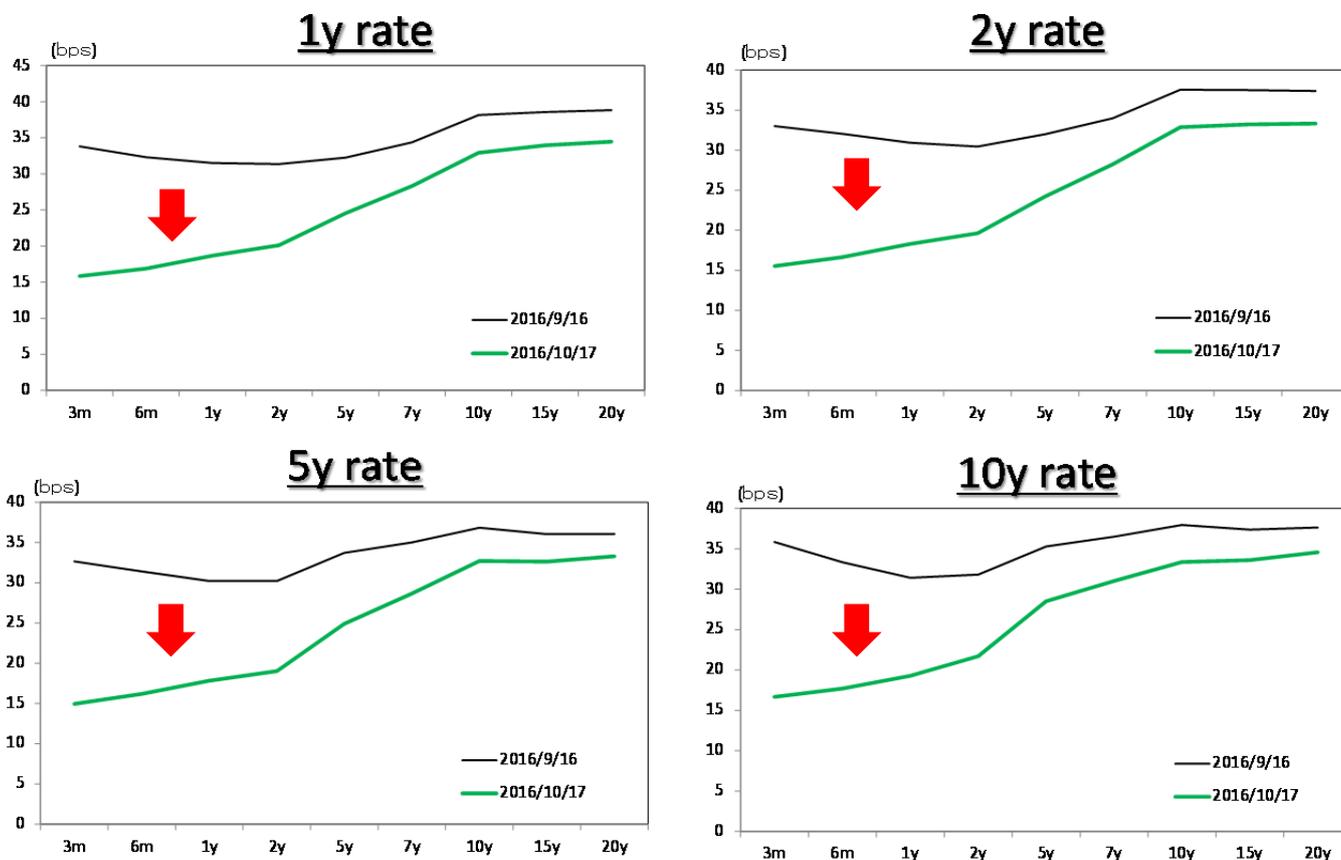


**2016/7/11**

マイナス金利政策下 (Brexit後の追加緩和期待)

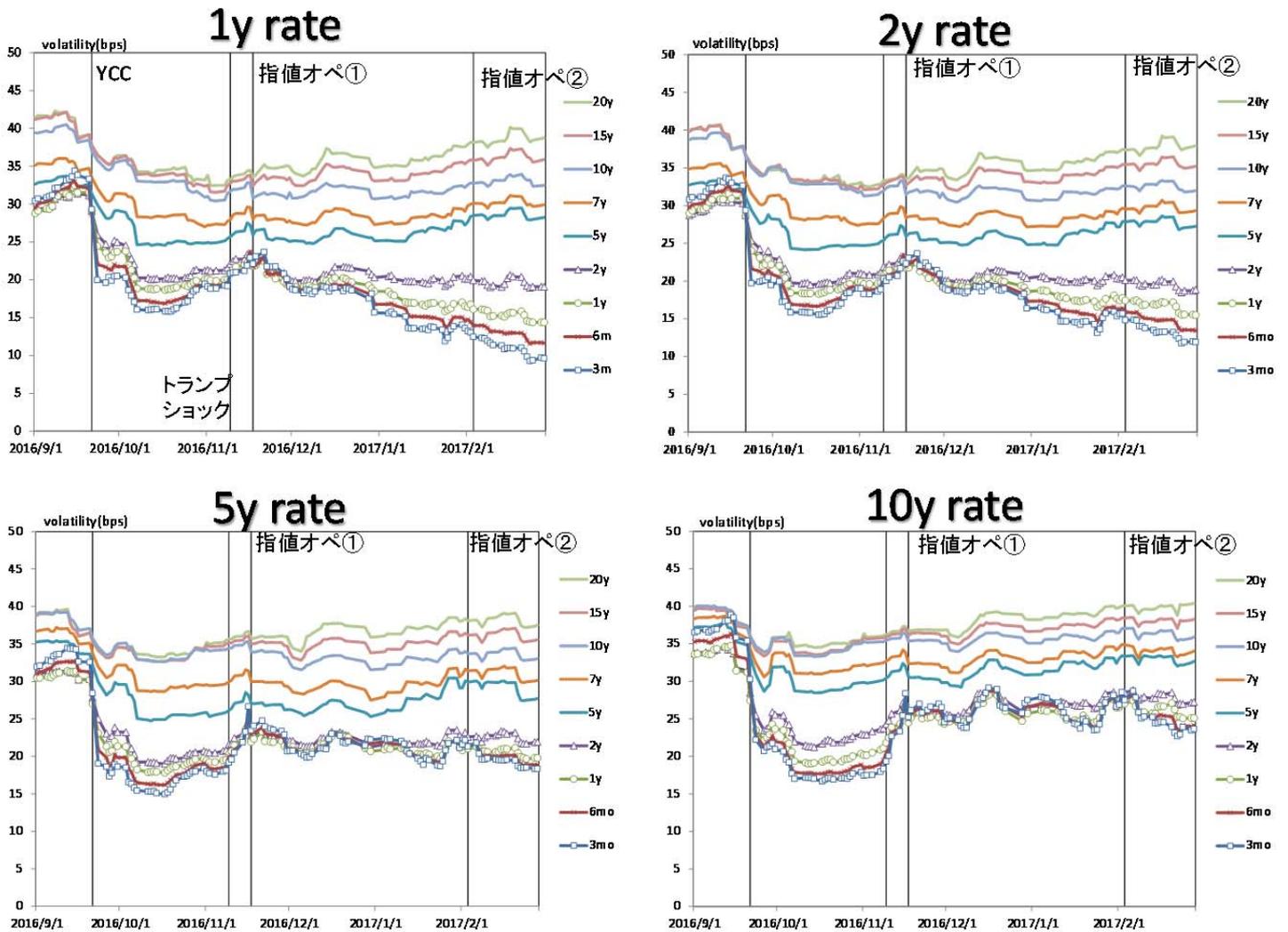


図表 28 イールドカーブ・コントロール後のボラティリティの期間構造の変化



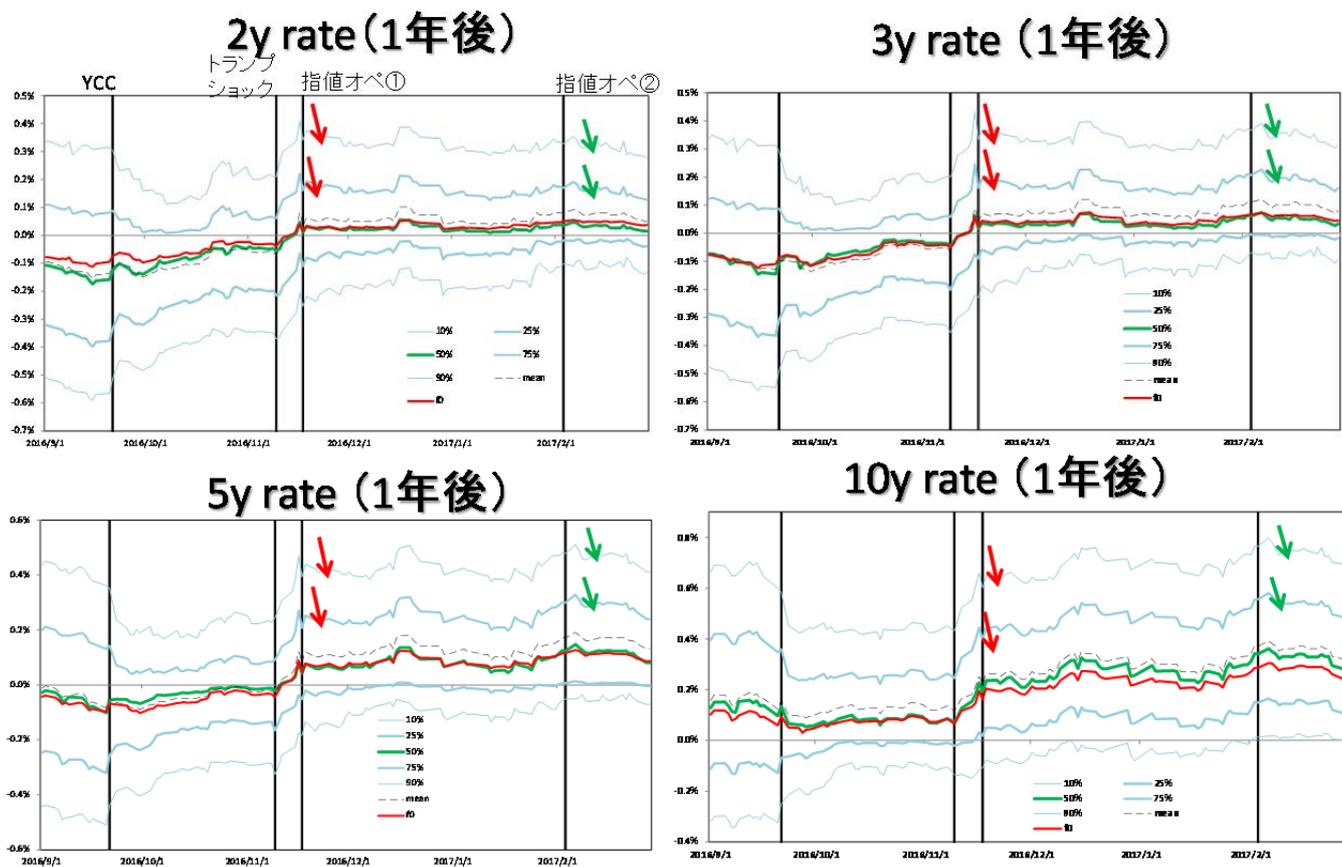
(注)スワップションのATMのボラティリティ

図表 29 イールドカーブ・コントロール後のボラティリティの期間構造の変化

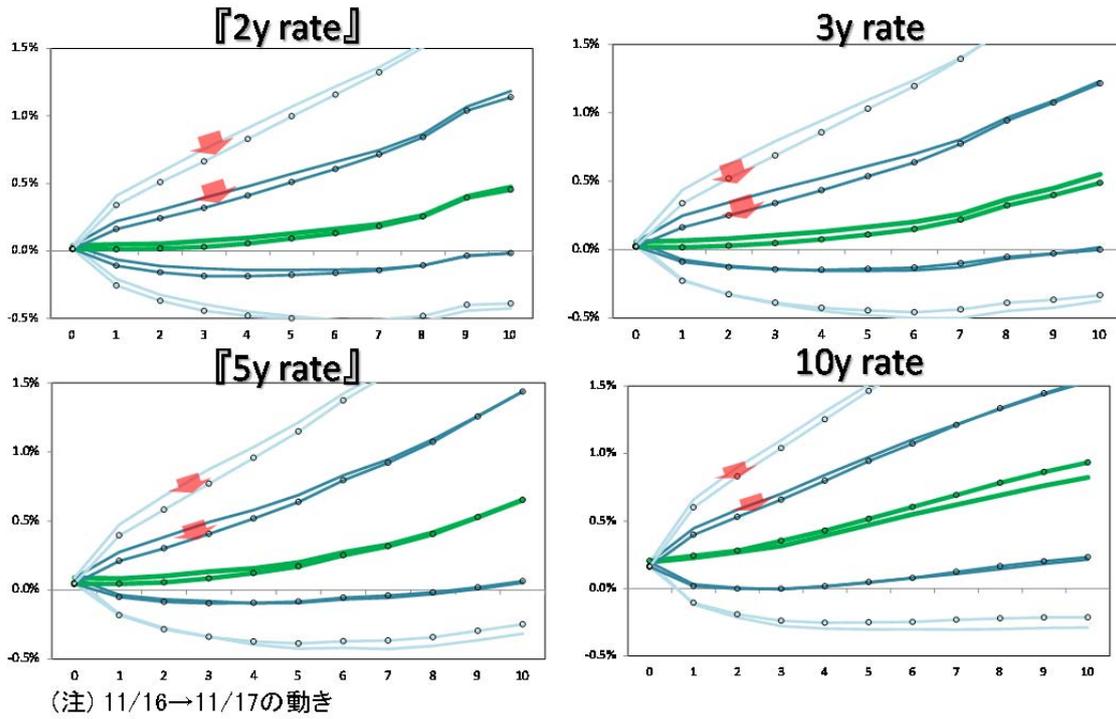


(注) スワップションのATMのボラティリティ

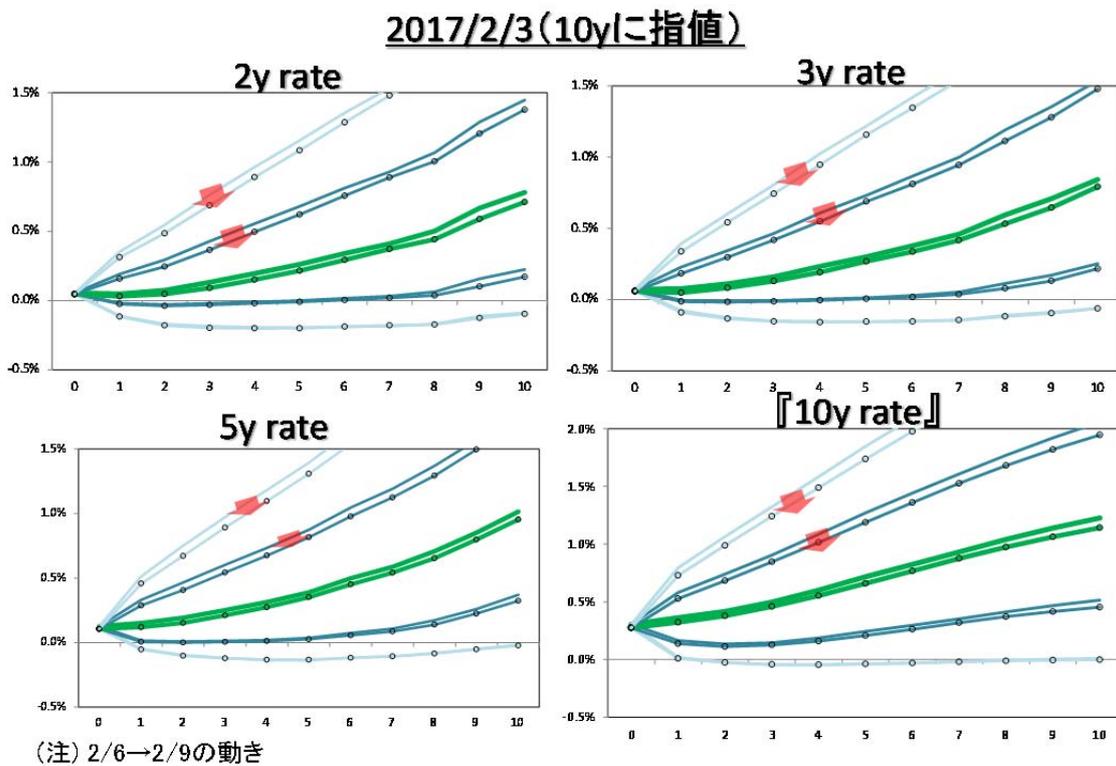
図表 30 イールドカーブ・コントロール後のインプライド分布の変化



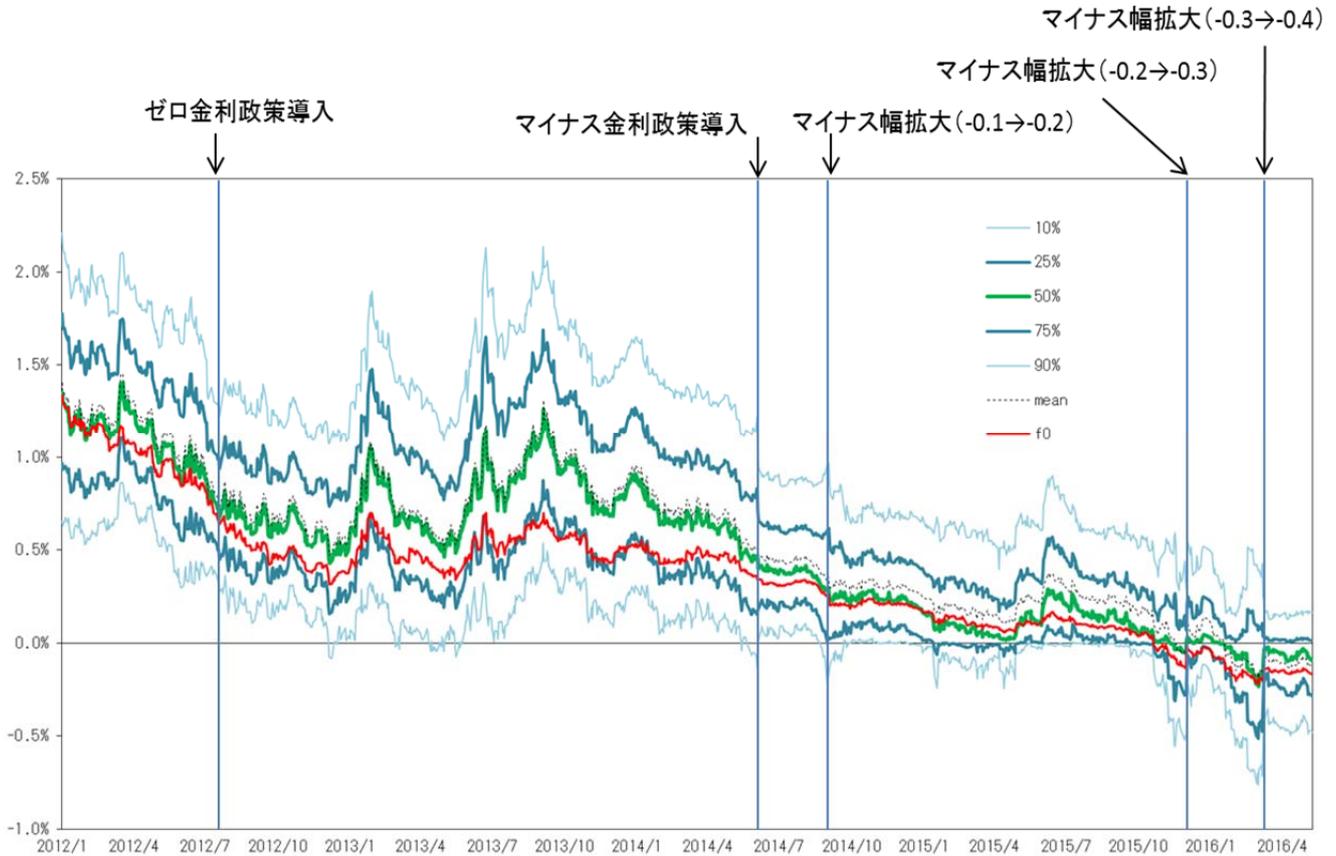
図表 31 指値オペ直後の金利見通しの変化①



図表 32 指値オペ直後の金利見通しの変化②



図表 A-1 インプライド分布の推移 (欧州、2年金利<1年後>)



図表 A-2 インプライド分布の変化 (欧州、2年金利<1年後>)

