

# IMES DISCUSSION PAPER SERIES

## CVA逆問題の確率的求解の汎用化 — インタラクティング・パーティクル法の活用 —

はらみいし まさひろ  
孕石 匡弘

Discussion Paper No. 2013-J-12

# IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

CVA逆問題の確率的求解の汎用化  
— インタラクティング・パーティクル法の活用 —

はらみいし まさひろ  
孕石 匡弘\*

要 旨

本稿では、CVA を考慮したデリバティブの価格付けに関する問題のうち、逆問題と呼ばれる問題に対する効率的な確率的求解手法を提案する。

本稿で提案する手法は、孕石[2013]の手法が利用したマーク付き分枝拡散過程を、Fujii and Takahashi[2012]によって提案されたインタラクティング・パーティクル法と呼ばれる手法に置き換えたものである。この置き換えにより、孕石[2013]の手法が適用できない、デリバティブのペイオフ関数が有界でない場合や、デフォルト時の清算価格の基準としてCVA を含まない価格を用いる場合にも適用することが可能となる。

キーワード : CVA、デリバティブ評価における逆問題、インタラクティング・パーティクル法、ロビンス=モンロー・アルゴリズム

JEL classification: C63、G13

\*日本銀行金融研究所（現 三菱東京UFJ 銀行、E-mail: masahiro\_haramiishi@mufg.jp）

本稿の作成に当たり、高橋明彦教授（東京大学）ならびに日本銀行金融研究所のスタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

# 目次

1	はじめに	1
2	逆問題の定義と CVA の定式化	2
3	逆問題の求解法	4
	(1) ロビンソン=モンロー・アルゴリズムと解法のアウトライン	4
	(2) インタラクティング・パーティクル法	6
	(3) 適用のための十分条件	9
4	数値計算	14
	(1) デジタル・オプション	14
	(2) 分散減少法の適用	16
5	おわりに	21
	参考文献	23
	補論1 清算時 CVA なしの場合	25
	補論2 漸近展開を用いた近似価格の単調性	26
	補論3 サンプル・パスの生成コストを考慮した計算量	27
	補論4 数値計算結果	31

# 1 はじめに

近年、OTC デリバティブにおけるカウンターパーティ・リスクを管理する手法として、信用評価調整 (Credit Valuation Adjustment ; 以下、CVA) の活用が広がりを見せている。しかし、CVA の算出には多くの計算資源を必要とするため、少ない計算量で CVA を算出できる効率的な計算方法の開発は実務上の課題と言える。

孕石 [2013] では、CVA を考慮したうえで、デリバティブ評価に関する問題のうち逆問題と分類したタイプの問題を効率的に求解する手法として、Henry-Labordère [2012] によるマーク付き分枝拡散過程の方法とロビンズ=モンロー・アルゴリズム (Robbins-Monro Algorithm) を組み合わせた方法を提案した。しかし、この手法はペイオフが非有界である場合には無条件に適用することができず、有界なペイオフ関数を発見的な方法で規格化したうえで求解し、この解と目的とする非有界ペイオフ関数に対する解の誤差を評価するという間接的な正当化が必要であった。

本稿では CVA を考慮した逆問題を求解する別の手法を提案する。本稿で提案する手法は、孕石 [2013] が用いた Henry-Labordère [2012] の手法を Fujii and Takahashi [2012] で提案された方法に置き換えたものである。この置き換えにより、孕石 [2013] の手法が適用できない非有界ペイオフ関数の場合でも、特別な対応を加えることなく適用することが可能となる。もっとも、本稿の手法にも、モデルやペイオフ関数に応じて漸近展開公式を導出したうえでプログラムに反映させる必要があるなど、孕石 [2013] の手法にはない技術的問題がある。こうしたことから、本稿の手法と孕石 [2013] の手法は、どちらか一方が優れた手法というわけではなく、対象とする商品などに応じて、適宜使い分けることが望ましいと考えられる。

本稿の構成は以下の通りである。2 節では、まずデリバティブ評価における逆問題について簡単に紹介する<sup>1</sup>。3 節では、Fujii and Takahashi [2012] の方法を用いた場合について、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムを用いた求解手続きを具体的に構築し、この手法が適用可能となるための十分条件についても確認する。4 節では具体例を用いた数値計算により、提案する手法が実際に機能することを確認する。また、分散減少法を援用することによって、求解精度が向上することも確認する。ここでは、数値計算に用いる設定パラメータについても、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムを用いて逐次的に最適化する。5 節はまとめである。また、補論 1 では、本文では扱っていない清算時 CVA なし<sup>2</sup>の場合を

<sup>1</sup>デリバティブ評価における逆問題の詳細については孕石 [2013] を参照。

<sup>2</sup>清算時 CVA の有無に関しては 2 節を参照。

簡単に解説する。補論2では、漸近展開を適用して導出される近似価格の単調性について考察する。補論3では、分散減少法適用の際に原資産のサンプル・パス生成コストを考慮した場合の計算量の変化について考察する。補論4では、本文に掲載していない数値計算結果の詳細を示す。

## 2 逆問題の定義とCVAの定式化

金融機関におけるデリバティブ評価実務は多岐に亘るが、孕石 [2013] ではこれらを2つの問題に分類し、順問題・逆問題と呼んでいる。順問題とは、キャッシュフロー（約定条件）を所与としたうえでデリバティブ評価（価格）を求めるもので、通常のプライシングに相当する。一方、逆問題とは、価格を所与とした後に、これを実現する約定条件を求めるものである<sup>3</sup>。

次に、CVAの定式化を行うために、フィルター付き確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, Q)$  の上で原資産価格やデリバティブ価格を定義する。ここで、 $\{\mathcal{F}_t\}$  は  $q$  次元標準ウィーナー過程  $W_t$  から生成されるフィルトレーション<sup>4</sup>とし、 $Q$  はリスク中立確率とする。

銀行とカウンターパーティが取引時点  $0$ 、満期  $T$ 、ペイオフ  $g(S_T)$  のヨーロッパ型デリバティブ契約を取引するとする。ここで、 $S_t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) はデリバティブの原資産を含めたマーケットの変動を表す  $p$  ( $\in \mathbb{N}$ ) 次元確率過程であり、 $S_t$  は  $Q$  の下で、

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \quad S_0 = s_0,$$

という確率微分方程式に従うものとする<sup>5</sup>。

このデリバティブ契約に対するCVAを含めたデリバティブ価格を  $V_t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) と表す。簡単のため、本稿ではカウンターパーティのデフォルト・リスクのみを考慮する<sup>6</sup>。また、無リスク金利を  $r \geq 0$ 、カウンターパーティがデフォルトした際の回収率を  $R \in [0, 1]$ 、カウンターパーティが発行するゼロ・リカバリー割引社債の利回りを  $h \geq 0$  と表し、 $\beta = (1 - R)h$  と表すことにする<sup>7</sup>。  $r, R, h$  については確率変動してもよい。確率変動する場合は、 $\{\mathcal{F}_t\}$ -

<sup>3</sup>例えばブレイクイーブン・スワップレートの計算、フォワード・プレミアムの計算、あるいは、デリバティブ販売時に計上したい目標収益が決まっており、その目標収益を確保できるよう約定条件を決定する計算などが該当する。これらはいずれも、約定条件  $\theta$  の下でのデリバティブ価格を  $PV(\theta)$  と表したとき、 $\theta$  に関する方程式  $PV(\theta) = \alpha$  を求解する問題として定式化できる。詳しくは孕石 [2013] を参照。

<sup>4</sup>フィルトレーションの定め方は孕石 [2013] と同じである。

<sup>5</sup> $\mu(t, x)$  は  $p$  次元、 $\sigma(t, x)$  は  $p \times q$  次元のボレル可測関数である。

<sup>6</sup>これは一方向CVAと呼ばれる。

<sup>7</sup>この  $\beta$  は、いわゆるクレジット・スプレッドに相当する。

発展的・可測で、時間  $t$  とマーケット  $S_t$  を引数とする適当な有界ボレル可測関数によって表現できることを仮定すればよい。

CVA を含むデリバティブ価格は、Burgard and Kjaer [2010] が導出した偏微分方程式 (Partial Differential Equation ; 以下、PDE) により計算されるとする<sup>8</sup>。この定式化は、デフォルトによる清算の際に、基準価格として CVA を含めた価格を用いる (以下、清算時 CVA ありと呼ぶ) か、CVA を含めない価格を用いる (以下、清算時 CVA なしと呼ぶ) かによって異なる。清算時 CVA ありの場合は、適当な関数  $v$  によって  $V_t = v(t, S_t)$  と表すことができるのとすると、この  $v$  は次の PDE

$$(\partial_t + \mathcal{L})v - rv - \beta v^+ = 0, \quad v(T, x) = g(x), \quad (1)$$

の解となる。清算時 CVA なしの場合には、(1) 式の代わりに

$$\begin{cases} (\partial_t + \mathcal{L})v + h(Rm^+ + m^- - v) - rv = 0, & v(T, x) = g(x), \\ (\partial_t + \mathcal{L})m - rm = 0, & m(T, x) = g(x), \end{cases}$$

として  $v$  を求めればよい<sup>9</sup>。なお、 $\mathcal{L}$  は  $S_t$  の生成作用素である。

以下では、清算時 CVA ありの場合について議論する。清算時 CVA なしの場合については補論 1 を参照。この場合も同様の結果が成立する。

また、(1) 式を解くことと次の後退確率微分方程式 (Backward Stochastic Differential Equation ; 以下、BSDE) <sup>10</sup>を  $V_t$  について解くことは同値であることが知られている<sup>11</sup>。

$$dV_t = r_t V_t dt + \beta_t V_t^+ dt + Z_t dW_t, \quad V_T = g(S_T). \quad (2)$$

以下では、デリバティブが約定条件  $\theta$  でパラメータ付けられていることを明示する場合には、その価格を  $V_t^\theta$  と表すことにする。本稿で考察の対象とする逆問題は、予め与えられた価格  $\alpha$  に対し、取引時点 0 におけるデリバティブ価格が  $V_0^\theta = \alpha$  を満たすための約定条件  $\theta$  を求めるものである。また、これを効率的に求解する手法を提案することが本稿の目的である。

<sup>8</sup>Burgard and Kjaer [2011] では、双方向のカウンターパーティ・リスクに加え、ファンディング・コストも考慮して PDE を導出しているが、ここでは本稿の設定に合わせて一方 CVA とし、ファンディング・コストを加味しない場合に導出される PDE を示している。

<sup>9</sup>本稿では、 $x^+ = \max\{x, 0\}$ ,  $x^- = \min\{x, 0\}$  と定義する。

<sup>10</sup>本稿で必要な BSDE の性質については、孕石 [2013] を参照されたい。

<sup>11</sup>ファインマン=カッツの定理により正当化される。

### 3 逆問題の求解法

#### (1) ロビンズ=モンロー・アルゴリズムと解法のアウトライン

孕石 [2013] では、CVA を考慮した逆問題を効率的に解くために、Henry-Labordère [2012] が導入したマーク付き分枝拡散過程にロビンズ=モンロー・アルゴリズムと呼ばれる手続きを組み合わせた手法を提案した。本稿で提案する手法でもロビンズ=モンロー・アルゴリズムを用いる。以下でロビンズ=モンロー・アルゴリズムを概説するが、詳細については孕石 [2013] や Dufflo [1997] を参考されたい。

ロビンズ=モンロー・アルゴリズムは、 $\theta \in \mathbb{R}^d$  でパラメータ付けられた  $\mathbb{R}^d$  値確率変数  $X^\theta$  の期待値に関する方程式  $E[X^\theta] = \alpha$  を求解するアルゴリズムで、適当な初期値から始まる逐次更新を通じて真の解  $\theta^*$  を推定する。このアルゴリズムが特徴的なのは、期待値計算そのものを行うことなく、期待値に関する方程式を求解する点である。

以下、 $X^\theta$  はボレル集合族付きの距離空間  $(\Xi, \mathcal{X})$  に値を取る確率変数  $Z$  と、 $\Xi \times \mathbb{R}^d$  から  $\mathbb{R}^d$  へのボレル可測関数  $H$  によって、

$$X^\theta = H(Z, \theta),$$

と表されているとする。また、一般性を失うことなく  $\alpha = 0$  とすることができる。このとき、 $Z$  の独立観測  $z_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を用いて表される次の更新式、

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \gamma_n H(z_n, \theta_{n-1}), \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3)$$

をロビンズ=モンローの更新式と呼ぶ。 $\gamma_n$  は更新の程度を定める正の実数列であり、確定的でも確率的でもよい。 $\gamma_n$  を確率的に定める場合には  $\mathcal{G}_n := \sigma(Z_i; i \leq n)$  として定めたフィルトレーション  $\{\mathcal{G}_n\}$  に適合させることとする。

この更新式によって得られる  $\theta_n$  は、一定の十分条件の下、方程式の解  $\theta^*$  に概収束することが知られている。次の定理は Dufflo [1997] に基づいている。

**定理 3.1** 各パラメータ  $\theta$  について、 $H(Z, \theta)$  は二乗可積分で、期待値  $h(\theta) := E[H(Z, \theta)]$  は  $\theta$  について連続かつ  $h(\theta^*) = 0$  という解  $\theta^*$  を有しているとする。このとき、次の条件 (A) ~ (C) を満たせば、(3) 式の  $\theta_n$  は  $\theta^*$  へ概収束する<sup>12</sup>。

(A) 任意の  $\theta \neq \theta^*$  に対して、 $\langle \theta - \theta^*, h(\theta) \rangle > 0$

<sup>12</sup> $\langle x, y \rangle$  はベクトル  $x, y$  の内積を表している。また、 $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$  と定義している。



(B)  $\{\gamma_n\}$  は一様有界で、確率 1 で  $\gamma_n \rightarrow 0$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$ 、かつ、 $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty$

(C)  $C > 0$  が存在し、すべての  $\theta \in \mathbb{R}^d$  に対して、 $E[\|H(Z, \theta)\|^2] \leq C(1 + \|\theta\|^2)$

$h(\theta) = 0$  を満たす解は存在するものの、その一意性を証明することが難しい場合もある。そのような場合でも適用できるよう、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムの拡張が、Lemaire and Pagès [2010] により与えられている。

**定理 3.2** (Lemaire and Pagès [2010])  $h(\theta) = 0$  の解について、 $\mathcal{T}^* := \{\theta; h(\theta) = 0\}$  が空でないことだけを仮定する<sup>13</sup>。このとき、次の条件 (A') および定理 3.1 の条件 (B)、(C) を満たすならば、 $\mathcal{T}^*$  に値をとる確率変数  $\Theta^*$  が存在し、(3) 式の  $\theta_n$  は  $\Theta^*$  に概収束する。

(A') 任意の  $\theta \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{T}^*$  および  $\theta^* \in \mathcal{T}^*$  に対して、 $\langle \theta - \theta^*, h(\theta) \rangle > 0$

以下では、デリバティブの取引価格に対して  $V_0^\theta = 0$  を満たす約定条件を求めることとし<sup>14</sup>、約定条件パラメータ  $\theta$  は 1 次元の実数と仮定する。

パラメータ  $\theta$  に依存したある確率変数  $Y^\theta$  に対し、何らかの意味で

$$V_0^\theta \sim E[Y^\theta],$$

という近似が成立するものとする。さらに、 $\theta$  を与える毎に、 $Y^\theta$  の分布に従う乱数が容易に生成できるものとし、 $E[Y^\theta]$  はロビンズ=モンロー・アルゴリズムを適用するための各種条件を満たしているものとする。

このような確率変数を見つけることができれば、定理 3.1 によって、

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \gamma_n y_n^{\theta_{n-1}}, \quad (y_n^{\theta} \text{ は } Y^\theta \text{ の実現値}),$$

で更新される  $\theta_n$  は逆問題の近似解に概収束していく。この手続きが実現可能であれば、CVA を考慮した逆問題の求解が、1 回のモンテカルロ法を実施するのと同様な計算量で実行できる。

そこで、更新されるパラメータ  $\theta$  に対して、デリバティブ価格を近似する確率変数をどう構成すればよいかを考える。孕石 [2013] では、Henry-Labordère [2012] によるマーク付き分枝拡散過程を利用することを提案したが、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムが収束

<sup>13</sup>つまり、解は一意でなくてもよい。

<sup>14</sup>取引価格を条件付ける定数をゼロに制約しても一般性は失われない。

する条件に合わせるために追加的な式変形や分布の裾を捨象することから誤差が発生するなど、実務的には大きな問題とはならないものの、理論的に見ると更なる改善の余地があった。このため、本稿では Fujii and Takahashi [2012] によるインタラクティング・パーティクル法 (Interacting Particle Method) を用いることで、孕石 [2013] で課題として残されていた点を解決することを試みる。まず、次節では、インタラクティング・パーティクル法の概要を説明する。

## (2) インタラクティング・パーティクル法

Fujii and Takahashi [2011] は、次のような非線形ドライバーを持つ BSDE、あるいは前進後退確率微分方程式 (Forward Backward Stochastic Differential Equation ; 以下、FBSDE)

$$\begin{cases} dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, & S_0 = s_0, \\ dV_t = c(t, S_t)V_t dt + h(t, S_t, V_t, Z_t)dt + Z_t dW_t, & V_T = \Phi(S_T), \end{cases} \quad (4)$$

の解  $(V_t, Z_t)$  が、漸近展開を用いることで線形 BSDE の解の線形和として近似できることを示した<sup>15</sup>。その概要は以下の通りである。まず、摂動パラメータ  $\varepsilon$  を含む BSDE

$$\begin{cases} dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, & S_0 = s_0, \\ dV_t^{(\varepsilon)} = c(t, S_t)V_t^{(\varepsilon)}dt + \varepsilon h(t, S_t, V_t^{(\varepsilon)}, Z_t^{(\varepsilon)})dt + Z_t^{(\varepsilon)}dW_t, & V_T^{(\varepsilon)} = \Phi(S_T), \end{cases} \quad (5)$$

を考え、解  $(V_t^{(\varepsilon)}, Z_t^{(\varepsilon)})$  が、

$$V_t^{(\varepsilon)} = V_t^{(0)} + \varepsilon V_t^{(1)} + \varepsilon^2 V_t^{(2)} + \dots, \quad (6)$$

$$Z_t^{(\varepsilon)} = Z_t^{(0)} + \varepsilon Z_t^{(1)} + \varepsilon^2 Z_t^{(2)} + \dots, \quad (7)$$

と  $\varepsilon$  に関して展開できるとする。適当な自然数  $k$  まで  $V_t^{(i)}, Z_t^{(i)} (i = 0, \dots, k)$  が求まるとすると、(6) 式および (7) 式の左辺第  $k+1$  項までの和に  $\varepsilon = 1$  を代入した  $\sum_{i=0}^k V_t^{(i)}$  および  $\sum_{i=0}^k Z_t^{(i)}$  は元の (4) 式の BSDE の近似解である。Fujii and Takahashi [2011] は、 $V_t^{(i)}, Z_t^{(i)}$  が従う線形 BSDE を示したうえで、その解の期待値表現を示した。

以下では、(2) 式の求解に必要な漸近展開式を導出する。ただし、(2) 式を次のように変

<sup>15</sup>(4) 式は、 $S_t$  が  $V_t$  や  $Z_t$  の状態に依存しない非連動型の FBSDE (decoupled FBSDE) であるが、Fujii and Takahashi [2011] では、より一般的に、 $S_t$  が  $V_t$  や  $Z_t$  の状態に依存して変動する連動型 FBSDE (coupled FBSDE) についても漸近展開式を導出している。

形してから漸近展開を行うものとする。

$$dV_t = (r_t + \beta_t)V_t dt - \beta_t V_t^- dt + Z_t dW_t, \quad V_T = g(S_T). \quad (8)$$

このとき、(5) 式に、

$$c(t, S_t) = r_t + \beta_t, \quad h(t, S_t, V_t, Z_t) = -\beta_t V_t^-, \quad \Phi(S_T) = g(S_T),$$

を代入すれば漸近展開式が得られる。2次までの漸近展開を具体的に書くと、 $V_t^{(0)}, V_t^{(1)}, V_t^{(2)}$  に対する BSDE は、

$$\begin{aligned} dV_t^{(0)} &= \rho_t V_t^{(0)} dt + Z_t^{(0)} dW_t, & V_T^{(0)} &= g(S_T), \\ dV_t^{(1)} &= \rho_t V_t^{(1)} dt - \Psi_t^{(1)} dt + Z_t^{(1)} dW_t, & V_T^{(1)} &= 0, \\ dV_t^{(2)} &= \rho_t V_t^{(2)} dt - \Psi_t^{(2)} V_t^{(1)} dt + Z_t^{(2)} dW_t, & V_T^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ただし、

$$\rho_t := r_t + \beta_t, \quad \Psi_t^{(1)} := \beta_t (V_t^{(0)})^-, \quad \Psi_t^{(2)} := \beta_t \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(V_t^{(0)}),$$

である<sup>16</sup>。

これらは、 $V_t^{(0)}$  から順次解くことができ、すべて線形 BSDE となる。このため、次の期待値表現を得る。

$$\begin{aligned} V_t^{(0)} &= E_t^Q \left[ e^{-\int_t^T \rho_u du} g(S_T) \right], & V_t^{(1)} &= E_t^Q \left[ \int_t^T e^{-\int_t^s \rho_u du} \Psi_s^{(1)} ds \right], \\ V_t^{(2)} &= E_t^Q \left[ \int_t^T e^{-\int_t^s \rho_u du} \Psi_s^{(2)} V_s^{(1)} ds \right]. \end{aligned}$$

ただし、上式をそのままモンテカルロ法により計算しようとする、 $V_t^{(0)}, V_t^{(1)}$  を時間に対して積分する必要があるほか、シミュレーションの各試行ですべての時点  $t$  に対して  $V_t^{(0)}, V_t^{(1)}$  が必要となる。この計算量は非常に大きいため、Fujii and Takahashi [2012] では、以下の方法によって計算量を大幅に削減し、この手法をインタラクティング・パーティクル法と呼んだ。

インタラクティング・パーティクル法では、0次の近似価格  $V_t^{(0)}$  が適当な関数  $v_0(t, S_t)$

<sup>16</sup>Fujii and Takahashi [2011] には3次までの漸近展開の具体的な式の形が与えられている。また、Fujii *et al.* [2012] では、アメリカン・オプションの価格計算にこの手法を利用しており、そこでは、4次までの漸近展開が導出されている。

として短時間で計算可能であると仮定する。本稿が想定する求解問題では、割引率を  $\rho_t$  と見なせば、CVA を考慮しない評価と同じ計算になるため、ほとんどの場合に短時間で計算可能である。

次に、確率過程  $S_t, V_t^{(0)}$  とは独立な、別の確率過程  $\lambda_t$  を任意に定める。ただし、 $\lambda_t$  は正の値を取るとする。このとき、 $s \geq t$  に対して、

$$\hat{V}_{t,s}^{(i)} := e^{\int_t^s \lambda_u du} V_s^{(i)}, \quad \hat{\Psi}_{t,s}^{(i)} := \frac{1}{\lambda_s} e^{\int_t^s \lambda_u du} \Psi_s^{(i)}, \quad (i = 1, 2),$$

と置くと、伊藤の公式により、

$$\begin{aligned} d\hat{V}_{t,s}^{(1)} &= (\rho_s + \lambda_s) \hat{V}_{t,s}^{(1)} ds - \lambda_s \hat{\Psi}_{t,s}^{(1)} ds + e^{\int_t^s \lambda_u du} Z_s^{(1)} dW_s, & \hat{V}_{t,T}^{(1)} &= 0, \\ d\hat{V}_{t,s}^{(2)} &= (\rho_s + \lambda_s) \hat{V}_{t,s}^{(2)} ds - \lambda_s \hat{\Psi}_{t,s}^{(2)} V_s^{(1)} ds + e^{\int_t^s \lambda_u du} Z_s^{(2)} dW_s, & \hat{V}_{t,T}^{(2)} &= 0, \end{aligned}$$

を得る。 $V_t^{(i)} = \hat{V}_{t,t}^{(i)}$  に注意してこれを解くと、

$$V_t^{(1)} = E_t^Q \left[ \int_t^T e^{-\int_t^s (\rho_u + \lambda_u) du} \lambda_s \hat{\Psi}_{t,s}^{(1)} ds \right], \quad (10)$$

$$V_t^{(2)} = E_t^Q \left[ \int_t^T e^{-\int_t^s (\rho_u + \lambda_u) du} \lambda_s \hat{\Psi}_{t,s}^{(2)} V_s^{(1)} ds \right], \quad (11)$$

を得る。(10) 式および (11) 式の期待値は、割引率  $\rho_t$  の下、ハザード率  $\lambda_t$  のカウンターパーティがデフォルトした際に  $\hat{\Psi}_{t,s}^{(1)}$  または  $\hat{\Psi}_{t,s}^{(2)} V_s^{(1)}$  だけ回収できる取引のデフォルト前価格と同じであることを利用すると、

$$V_t^{(1)} = \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}} E_t^Q \left[ \mathbf{1}_{\{\tau_1 < T\}} e^{\int_t^{\tau_1} (\lambda_u - \rho_u) du} \frac{1}{\lambda_{\tau_1}} \Psi_{\tau_1}^{(1)} \right], \quad (12)$$

$$\begin{aligned} V_t^{(2)} &= \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}} E_t^Q \left[ \mathbf{1}_{\{\tau_1 < T\}} e^{\int_t^{\tau_1} (\lambda_u - \rho_u) du} \frac{1}{\lambda_{\tau_1}} \Psi_{\tau_1}^{(2)} V_{\tau_1}^{(1)} \right] \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_1 > t\}} E_t^Q \left[ \mathbf{1}_{\{\tau_1 < \tau_2 < T\}} e^{\int_t^{\tau_2} (\lambda_u - \rho_u) du} \frac{1}{\lambda_{\tau_1} \lambda_{\tau_2}} \Psi_{\tau_1}^{(2)} \Psi_{\tau_2}^{(1)} \right], \quad (13) \end{aligned}$$

を得る。なお、 $\tau_1, \tau_2$  はハザード率  $\lambda_t$  に従うポアソン型ジャンプの1回目と2回目が発生する時刻を表している。ここでは、シミュレーション1試行を行うために計算が必要な時刻は  $\tau_1, \tau_2$  だけであり、時間に関する積分が解消される。

Fujii and Takahashi [2012] によって提案されたインタラクティング・パーティクル法を利用することで、前進的シミュレーションだけでCVAを考慮したデリバティブ価格を近似的に求めることが可能となる。

以下、これら近似価格の構成要素が  $\theta$  に依存することを示す際には、 $V_t^{\theta, (k)}$  ( $k = 0, 1, 2$ ) と表すことにする。その他の記号についても、同様の表記を用いる。

### (3) 適用のための十分条件

次に、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムの成立を保証する条件 (A) ~ (C) について確認する。条件 (B) は、これを満たすだけなら例えば  $\gamma_n = 1/n$  と置くだけでよく、それほど強い制約ではない。そこで、条件 (A) および (C) の成立を確認することがここでの主問題となる。また、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムの仮定として、期待値を取る確率変数が二乗可積分であることと、期待値自身がパラメータ  $\theta$  について連続である必要があるが、これらについても以下で確認する。

まず、条件 (A) を確認する。説明のため、次の用語を定義する。

**定義 3.3 (ペイオフ関数の単調性)** ペイオフ関数  $g(x, \theta)$  が順方向に (あるいは、逆方向に) 単調であるとは、 $\theta_1 \leq \theta_2$  ならば、すべての  $x \in \mathbb{R}^q$  に対して、

$$g(x, \theta_1) \leq g(x, \theta_2), \quad (\text{あるいは、} g(x, \theta_1) \geq g(x, \theta_2)),$$

となることを言う。

順方向に単調であるような任意のペイオフ関数に対し、デリバティブ価格が  $\theta$  について単調増大であることを示すことができたとする。価格が  $\theta$  について単調増大であることは、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムの条件 (A) を満たすための十分条件であるから、条件 (A) を満たすためにはペイオフ関数が順方向に単調であればよいことになる。次の表 1 のように、現実的なペイオフ関数はその多くが約定条件パラメータに対する単調性を有しており、広範囲で本稿の手法が適用可能であることがわかる。逆方向に単調なペイオフ関数では (3) 式のロビンズ=モンロー更新で符号を反転させればよいので、以下では、順方向に単調なペイオフ関数のみを考える。混同の恐れはないので、これを単にペイオフ関数の単調性と呼ぶ。

ペイオフの単調性によって価格の単調性が導かれるかどうかを検証する。これには、BSDE の比較定理が役立つ。BSDE の比較定理とは、BSDE の終端条件とドライバーが一定の大小関係を満たせば、解自身に対してもその大小関係が保存されることを主張する定

表 1: 約定条件に対する単調性を有したペイオフ関数の例

約定条件	ペイオフ関数 $g(x, \theta)$	備考
スプレッド	$cx + \theta$	$c > 0$
キャップ	$\max\{cx, \theta\}$	$c > 0, \theta > 0$
ストライク	$(\theta - cx)^+$	$c > 0, \theta > 0$
ギアリング	$(\theta x - c)^+$	$c > 0, \theta > 0$

単調性が順方向であるもの限定している

理である。すなわち、2つの BSDE

$$dY_t^i = -h^i(t, Y_t^i, Z_t^i)dt + Z_t^i dW_t, \quad Y_T^i = \xi^i, \quad (i = 1, 2),$$

がある時、 $\xi^1 \leq \xi^2$ 、かつ、すべての  $t, y, z$  に対して  $h^1(t, y, z) \leq h^2(t, y, z)$  が確率 1 で成立するならば、すべての  $t$  に対して  $Y_t^1 \leq Y_t^2$  が確率 1 で成立する。

(2) 式の BSDE に対して比較定理を適用すれば、次の命題が成立する。

命題 3.4 ペイオフ関数が単調であるならば、CVA を考慮した価格  $V_t^\theta$  は  $\theta$  について単調増大となる。

これは漸近展開を施す前の真の価格に対する単調性である。しかし、インタラクティング・パーティクル法によって前進的な計算が可能になったのは漸近展開式により近似された価格であるから、これらの近似価格に対して単調性を示す必要がある。

CVA が従う BSDE を漸近展開して求めた近似価格は必ずしも単調性を満たさないが<sup>17</sup>、元の BSDE を変形した (8) 式を漸近展開することで得られる近似価格には単調性が常に成立する。

定理 3.5 ペイオフ関数の単調性の下で、1 次の近似価格  $V_t^{\theta, (0)} + V_t^{\theta, (1)}$  および 2 次の近似価格  $\sum_{k=0}^2 V_t^{\theta, (k)}$  は  $\theta$  に関して単調増大となる。

証明 まず、0 次の近似価格  $V_t^{\theta, (0)}$  について考える。 $V_t^{\theta, (0)}$  が従う BSDE は (9) 式であるが、このドライバーは  $\theta$  に依らない。したがって、この BSDE の終端条件を定めるペイオフ関数が単調であれば、比較定理により  $V_t^{\theta, (0)}$  も  $\theta$  について単調増大となる。したがって、 $\Psi_t^{\theta, (1)}$  はその定義により  $\theta$  について単調増大となり、(10) 式で与えられる  $V_t^{\theta, (1)}$  も  $\theta$  について単調増大となる。

<sup>17</sup>詳しくは補論 2 を参照。

$V_t^{\theta,(0)}$  の単調増大性から、 $\Psi_t^{\theta,(2)}$  はその定義により  $\theta$  について単調減少である。さらに、 $V_t^{\theta,(1)} \leq 0$  と  $\Psi_t^{\theta,(2)} \geq 0$  が言えるから、その積は  $\theta$  について単調増大である。したがって、(11) 式で与えられる  $V_t^{\theta,(2)}$  は  $\theta$  について単調増大である。

以上により、 $V_t^{\theta,(i)}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) の  $\theta$  に対する単調増大性が言えたので、これらの和で表される近似価格も  $\theta$  について単調増大である。□

以上により、価格の単調性が保証されることが言えたため、2 次までの近似価格に対してロビンズ=モンロー・アルゴリズムの条件 (A) の成立が示せた。

次に、条件 (C) が成立するための十分条件を与える。ここでは、以下の条件を仮定する。

仮定 3.6  $\kappa > 0$  が存在し、確率 1 で、すべての  $t \leq T$  に対して、

$$\rho_t, \lambda_t, \lambda_t^{-1} \leq \kappa,$$

が成立する。

この仮定の下、次の定理が成立する。

定理 3.7 ペイオフ関数  $g$  が、ある  $C > 0$  に対して、

$$E[g(S_T, \theta)^2] \leq C(1 + \theta^2), \quad (14)$$

を満たすならば、1 次および 2 次の近似価格に対してロビンズ=モンローの条件 (C) が成立する。

証明  $X_t^{\theta,(1)}$  と  $X_t^{\theta,(2)}$  を、

$$\begin{aligned} X_t^{\theta,(1)} &:= \mathbf{1}_{\{t < \tau_1 < T\}} e^{\int_t^{\tau_1} (\lambda_u - \rho_u) du} \frac{1}{\lambda_{\tau_1}} \Psi_{\tau_1}^{\theta,(1)}, \\ X_t^{\theta,(2)} &:= \mathbf{1}_{\{t < \tau_1 < \tau_2 < T\}} e^{\int_t^{\tau_2} (\lambda_u - \rho_u) du} \frac{1}{\lambda_{\tau_1} \lambda_{\tau_2}} \Psi_{\tau_1}^{\theta,(2)} \Psi_{\tau_2}^{\theta,(1)}, \end{aligned}$$

と定める。定理の主張を示すには、 $C_1, C_2 > 0$  が存在して、

$$E[(X_t^{\theta,(1)})^2] \leq C_1 E[g(S_T, \theta)^2], \quad E[(X_t^{\theta,(2)})^2] \leq C_2 E[g(S_T, \theta)^2],$$

が成立することを示せば十分である<sup>18</sup>。

---

<sup>18</sup> $C_1, C_2$  は  $t$  には依存してもよい。

まず、任意の  $t \leq T$  に対して、

$$E[(V_t^{\theta,(0)})^2] \leq e^{2\kappa(T-t)} E[g(S_T, \theta)^2] \quad (15)$$

が成立することを示す。 $(V_t^{\theta,(0)})^2$  に伊藤の公式を適用し、期待値を取ることで、

$$E[(V_t^{\theta,(0)})^2] + \int_t^T E[\|Z_u^{\theta,(0)}\|^2] du = E[g(S_T, \theta)^2] - 2 \int_t^T E[\rho_u (V_u^{\theta,(0)})^2] du,$$

を得る。 $\rho_t$  に対する条件から、

$$E[(V_t^{\theta,(0)})^2] \leq E[g(S_T, \theta)^2] + 2\kappa \int_t^T E[(V_u^{\theta,(0)})^2] du,$$

と評価できるので、 Gronwall の不等式により (15) 式が成立する<sup>19</sup>。

$X_t^{\theta,(1)}$  を評価する。 $X_t^{\theta,(1)}$  と  $\Psi_{\tau_1}^{\theta,(1)}$  の定義によって、

$$\begin{aligned} E[(X_t^{\theta,(1)})^2] &\leq \kappa^2 e^{4\kappa(T-t)} E[\mathbf{1}_{\{t < \tau_1 < T\}} (\Psi_{\tau_1}^{\theta,(1)})^2] \\ &\leq \kappa^4 e^{4\kappa(T-t)} E[\mathbf{1}_{\{t < \tau_1 < T\}} (V_{\tau_1}^{\theta,(0)})^2] \end{aligned}$$

が言える<sup>20</sup>。さらに、先ほど示した (15) 式から、

$$\begin{aligned} E[\mathbf{1}_{\{t < \tau_1 < T\}} (V_{\tau_1}^{\theta,(0)})^2] &= \int_t^T E[(V_s^{\theta,(0)})^2 | \tau_1 = s] P(\tau_1 \in ds) \\ &\leq e^{2\kappa(T-t)} E[g(S_T, \theta)^2] \end{aligned}$$

が言える。したがって、

$$E[(X_t^{\theta,(1)})^2] \leq \kappa^4 e^{6\kappa(T-t)} E[g(S_T, \theta)^2]$$

となる。

次に、 $X_t^{\theta,(2)}$  を評価する。上と同様に、 $X_t^{\theta,(2)}$ 、 $\Psi_{\tau_1}^{\theta,(1)}$  および  $\Psi_{\tau_1}^{\theta,(2)}$  の定義によって、

$$E[(X_t^{\theta,(2)})^2] \leq \kappa^4 e^{4\kappa(T-t)} E[\mathbf{1}_{\{t < \tau_1 < \tau_2 < T\}} (\Psi_{\tau_1}^{\theta,(1)})^2 (\Psi_{\tau_2}^{\theta,(2)})^2] \leq \kappa^8 e^{4\kappa(T-t)} E[\mathbf{1}_{\{t < \tau_1 < \tau_2 < T\}} (V_{\tau_1}^{\theta,(0)})^2]$$

が言える。さらに最後の期待値を評価すれば、最終的に、

$$E[(X_t^{\theta,(2)})^2] \leq \kappa^8 e^{6\kappa(T-t)} E[g(S_T, \theta)^2]$$

<sup>19</sup> 孕石 [2013] の命題 A-1.4 でも同様の議論があるので参照されたい。

<sup>20</sup> 仮定 3.6 が  $\beta_t \leq \kappa$  を内包していることに注意されたい。



を得る。 □

注意 3.8 定理 3.7 における (14) 式が満たされない場合は、遠くの  $\theta$  に対して変動を緩慢にさせる関数で変換すればよいので、実務上はあまり問題にならない。

注意 3.9 ロビンズ=モンロー・アルゴリズムの適用には、期待値の  $\theta$  に対する連続性を前提としていたが、ペイオフが  $\theta$  について単調かつ連続ならば、ルベグの収束定理により、(14) 式からその連続性は自動的に導かれる。

以上で、条件 (A) および (C) に対する十分条件が示せた。ここまでの議論を以下に定理としてまとめる。2 次の近似価格に対してのみ記すが、1 次の近似価格に対しても同様の定理が成立する。

定理 3.10 ペイオフ関数  $g(x, \theta)$  は  $\theta$  について連続とし、次の条件 (a) ~ (c) を満たすとする。

- (a) ペイオフ関数  $g(x, \theta)$  は単調性を持ち、(14) 式を満たす
- (b)  $\{\gamma_n\}$  は一様有界で、確率 1 で  $\gamma_n \rightarrow 0$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$ 、かつ、 $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty$
- (c)  $r_t, \beta_t, \lambda_t$  は、仮定 3.6 を満たす

このとき、 $\theta_n$  を更新式

$$\begin{aligned}\theta_n &= \theta_{n-1} - \gamma_n (V_0^{\theta_{n-1},(0)} + x_n^{\theta_{n-1},(1)} + x_n^{\theta_{n-1},(2)}), \\ X^{\theta,(1)} &:= \mathbf{1}_{\{\tau_1 < T\}} e^{\int_0^{\tau_1} (\lambda_u - \rho_u) du} \frac{1}{\lambda_{\tau_1}} \Psi_{\tau_1}^{\theta,(1)}, \\ X^{\theta,(2)} &:= \mathbf{1}_{\{\tau_1 < \tau_2 < T\}} e^{\int_0^{\tau_2} (\lambda_u - \rho_u) du} \frac{1}{\lambda_{\tau_1} \lambda_{\tau_2}} \Psi_{\tau_1}^{\theta,(2)} \Psi_{\tau_2}^{\theta,(1)},\end{aligned}$$

によって定めると<sup>21</sup>、 $T^* := \{\theta \in \mathbf{R}; \sum_{k=0}^2 V_0^{\theta,(k)} = 0\}$  が空でないならば、 $\theta_n$  は、 $T^*$  に値をとる確率変数に概収束する。

次節では、具体例について数値計算を行い、本稿の手法が有効であることを確認する。

---

<sup>21</sup> $x_n$  は  $X$  の実現値を意味している。

## 4 数値計算

### (1) デジタル・オプション

ここでは、Henry-Labordère [2012] の数値検証で利用されたデジタル・オプションについて、同論文で用いられたものと同じパラメータの下で逆問題を解く数値計算を行う<sup>22</sup>。

原資産は  $S_0 = 1$  から出発する 1 次元の確率過程とし、満期  $T$  のペイオフは、ペイオフ関数

$$g(x) := \begin{cases} 1 & (x < 1) \\ -1 & (x \geq 1), \end{cases}$$

を用いて、 $g(S_T)$  で与えられる。ここでは、CVA を考慮した逆問題としてフォワード・プレミアム  $\theta$  の計算を取り上げる。この場合、

$$g(x, \theta) := g(x) - \theta \tag{16}$$

と表すことができる。なお、逆方向の単調性となるので、(3) 式のロビンズ=モンロー更新では符号を反転する必要があることに注意されたい。

また、原資産はブラック=ショールズ・モデル

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

に従うとし、パラメータの値は  $r = 0.0$ ,  $\sigma = 0.2$  とする。クレジット・スプレッド  $\beta$  としては、0.01 および 0.03 の場合を考え、満期  $T$  については、 $T = 2, 4, 6, 8, 10$  の場合を考える。

本稿の数値計算では、2 次の漸近展開による近似価格を用いることにする。ペイオフ関数 (16) は 2 次モーメントに関する条件である (14) 式を満たしているので、定理 3.10 により本稿で提案する手法を利用することができる。

この例は次元数が小さく、漸近展開あり・なしの場合とも数値的に PDE を解くことが可能である。また、 $\theta$  を変えつつ反復計算することで、発見的ではあるが逆問題を解くことも可能であるため、こうして得られる結果を、本稿の数値計算の精度を検証する際のベンチマークとして利用する。反復的な数値計算により得られたフォワード・プレミアムの値は次の表 2 および表 3 の通りである。

図 1~4 は、 $T = 2$  および  $T = 10$  について、本稿で提案する手法による計算結果をベン

<sup>22</sup>これは孕石 [2013] と同じ問題設定である。

表 2: 反復的 PDE 計算による解 ( $\beta = 0.01$ )

$T$	漸近展開なし	漸近展開あり	近似誤差
2	0.10751	0.10752	0.01%
4	0.14872	0.14873	0.01%
6	0.17895	0.17896	0.01%
8	0.20348	0.20351	0.01%
10	0.22437	0.22442	0.02%

表 3: 反復的 PDE 計算による解 ( $\beta = 0.03$ )

$T$	漸近展開なし	漸近展開あり	近似誤差
2	0.09760	0.09762	0.02%
4	0.12905	0.12914	0.07%
6	0.14964	0.14991	0.18%
8	0.16464	0.16524	0.36%
10	0.17609	0.17718	0.62%

チマークに対する誤差で示したものである。シミュレーションに伴う誤差を含む手法であるため、一連の手続きを 100 回行い、それぞれに対しベンチマークからの誤差率<sup>23</sup>を求めている。各点の縦線は、100 回の計算における誤差率の中央値および上下 25% 点をプロットしたものである（数値の詳細や他の満期については補論 4 参照）。

なお、ロビンス=モンロー・アルゴリズムでは、 $\theta$  の初期値および更新の程度を規定する系列  $\{\gamma_n\}$  に任意性があるが、本稿の数値計算では  $\theta$  の初期値ゼロ、 $\gamma_n = 1/n$  を用いた。また、インタラクティング・パーティクル法においては、確率時刻到来の強度を定める  $\lambda_t$  に任意性があるが、ここでは暫定的に  $\lambda_t \equiv 1$  とした。 $\lambda_t$  の与え方については次の 4 節 (2) で改善を試みる。

比較のため、孕石 [2013] で提案した Henry-Labordère [2012] によって導入されたマーク付き分枝拡散過程を利用した方法でもシミュレートし、誤差率をプロットしている。このシミュレーションでは、マーク付き分枝拡散過程を適用する際に行う多項式近似として 4 次多項式を利用し、制御変量法による分散減少効果を追加している。詳細は孕石 [2013] を参照されたい。

本稿の手法においても、シミュレーション回数を増やすほどベンチマークへ接近しており、手法の妥当性を数値的に確認できる。また、マーク付き分枝拡散過程を利用した孕石 [2013] の方法と比較した場合、満期が長い場合は同程度の計算精度であるが、満期が短い

<sup>23</sup>ここでは、漸近展開を含まない PDE から求めた解をベンチマークとし、(シミュレーション値 - ベンチマーク) ÷ ベンチマーク の絶対値を誤差率と定めている。

場合は本稿の手法の方が精度が高い。

図 1:  $T = 2, \beta = 0.01$

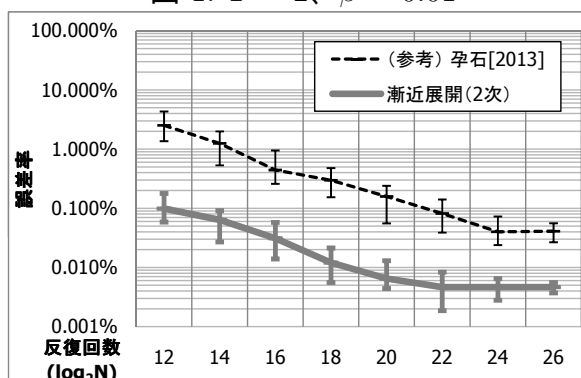


図 2:  $T = 2, \beta = 0.03$

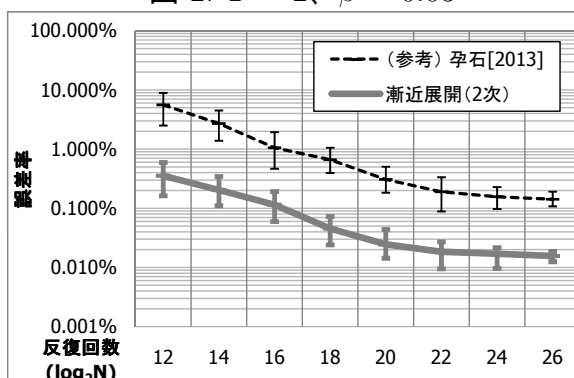


図 3:  $T = 10, \beta = 0.01$

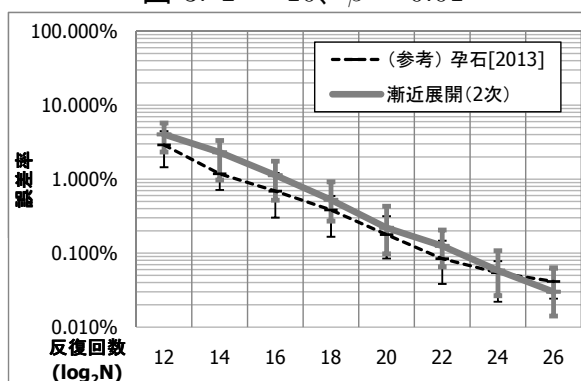
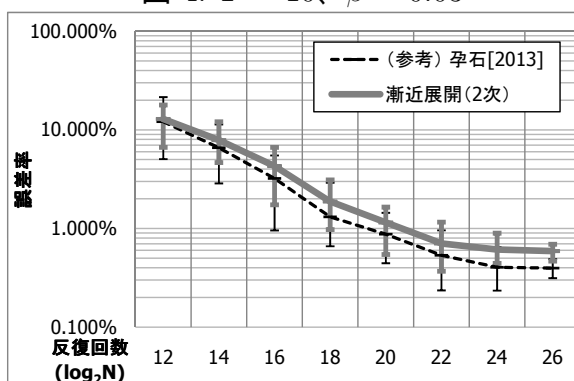


図 4:  $T = 10, \beta = 0.03$



## (2) 分散減少法の適用

通常のモンテカルロ法において、シミュレーション誤差の分散を減少させる手法は分散減少法と総称される。ロビンズ=モンロー・アルゴリズムに対しても適当な分散減少法を適用することで誤差分散は減少することが期待される<sup>24</sup>。

2 次の漸近展開において確率的なのは 1 次の項  $V_0^{(1)}$  と 2 次の項  $V_0^{(2)}$  であるが、これらの項には任意性がある強度パラメータ  $\lambda$  が含まれている<sup>25</sup>。そこで、本稿では、この  $\lambda$  を  $V_0^{(1)} + V_0^{(2)}$  の 2 次モーメントが最小となるように  $\lambda$  を自動で探索する手法を考える。この

<sup>24</sup> 孕石 [2013] では、マーク付き分枝拡散過程を利用した方法に対する分散減少法を与えた。そこでは、制御変量法と呼ばれる分散減少法を用いることを提案し、制御変量として CVA を考慮しない場合に計算される値を用いた。しかし、インタラクティング・パーティクル法では、0 次近似が CVA なしの値であって、これはそもそもシミュレーションに依らない方法で計算可能であるとしているので、本稿の手法は同様の制御変量法を適用する余地がない。

<sup>25</sup> Fujii and Takahashi [2012] では、この  $\lambda$  の与え方について言及していない。

自動探索手法は Arouna [2004] によって提案された適応モンテカルロ法 (Adaptive Monte Carlo) の考え方を本稿の問題に応用したものである。Arouna [2004] では正規分布の位置パラメータ (平均) を最適化するための自動探索を議論したが、ここでは指数分布の強度パラメータの最適化を行うことになる。

まず、次の補題を示す。

補題 4.1  $X_t$  を拡散過程、 $\tau, v$  を  $X_t$  と独立で、かつお互いに独立な強度  $\lambda$  の指数分布に従う確率時刻、 $f(t, u, x_1, x_2)$  を  $f(\tau, v, X_\tau, X_{\tau+v})$  が二乗可積分となるボレル可測関数とする。このとき、任意の  $c \in (-\lambda, \infty)$  に対して、

$$E[f(\tau, v, X_\tau, X_{\tau+v})] = E \left[ f(\tau^c, v^c, X_{\tau^c}, X_{\tau^c+v^c}) \frac{\lambda^2 e^{c(\tau^c+v^c)}}{(\lambda+c)^2} \right], \quad (17)$$

が成立する。ただし、 $\tau^c, v^c$  は  $X_t$  と独立で、かつお互いに独立な強度  $\lambda+c$  の指数分布に従う確率時刻である。さらに、(17) 式の右辺に対応する 2 次モーメントを  $M(c)$  で表すと、 $M(c)$  は  $c$  に関して下に凸な関数となる。

証明 (17) 式は、指数分布の密度関数を用いて計算できる。後半は、以下の (19) 式の通り  $M(c)$  の 2 階微分  $M''(c)$  が正であることから示すことができる。

$$\begin{aligned} M(c) &:= E \left[ f^2(\tau^c, v^c, X_{\tau^c}, X_{\tau^c+v^c}) \frac{\lambda^4 e^{2c(\tau^c+v^c)}}{(\lambda+c)^4} \right] \\ &= E \left[ f^2(\tau, v, X_\tau, X_{\tau+v}) \frac{\lambda^2 e^{c(\tau+v)}}{(\lambda+c)^2} \right], \end{aligned}$$

$$M'(c) = E \left[ f^2(\tau, v, X_\tau, X_{\tau+v}) \frac{\lambda^2 e^{c(\tau+v)}}{(\lambda+c)^2} \left\{ \tau + v - \frac{2}{\lambda+c} \right\} \right], \quad (18)$$

$$M''(c) = E \left[ f^2(\tau, v, X_\tau, X_{\tau+v}) \frac{\lambda^2 e^{c(\tau+v)}}{(\lambda+c)^2} \left\{ \left( \tau + v - \frac{2}{\lambda+c} \right)^2 + \frac{2}{(\lambda+c)^2} \right\} \right]. \quad (19)$$

□

補題 4.1 を  $V_0^{(1)} + V_0^{(2)}$  に適用する。 $V_0^{(1)} + V_0^{(2)}$  には確率時刻  $\tau_1, \tau_2$  が含まれるが、 $\tau_1$  は補題の  $\tau$ 、 $\tau_2$  は  $\tau+v$  と見なせる。したがって補題の前半の主張により、 $V_0^{(1)} + V_0^{(2)}$  を次

のように  $c \in (-\lambda, \infty)$  に依存する形で書ける。

$$\begin{aligned} V_0^{(1)} + V_0^{(2)} &= E \left[ \mathbf{1}_{\{\tau_1^c < T\}} e^{(\lambda-\rho)\tau_1^c + c\tau_2^c} \frac{\lambda \Psi_{\tau_1^c}^{(1)}}{(\lambda+c)^2} + \mathbf{1}_{\{\tau_1^c < \tau_2^c < T\}} e^{(\lambda+c-\rho)\tau_2^c} \frac{\Psi_{\tau_1^c}^{(2)} \Psi_{\tau_2^c}^{(1)}}{(\lambda+c)^2} \right] \\ &= E \left[ \mathbf{1}_{\{\tau_1^c < T\}} e^{(\lambda+c-\rho)\tau_1^c} \frac{\Psi_{\tau_1^c}^{(1)}}{\lambda+c} + \mathbf{1}_{\{\tau_1^c < \tau_2^c < T\}} e^{(\lambda+c-\rho)\tau_2^c} \frac{\Psi_{\tau_1^c}^{(2)} \Psi_{\tau_2^c}^{(1)}}{(\lambda+c)^2} \right]. \end{aligned}$$

また、対応する 2 次モーメントを  $M(c)$  とおくと、

$$\begin{aligned} M(c) &:= E \left[ \mathbf{1}_{\{\tau_1^c < T\}} e^{2(\lambda+c-\rho)\tau_1^c} \frac{(\Psi_{\tau_1^c}^{(1)})^2}{(\lambda+c)^2} + \mathbf{1}_{\{\tau_1^c < \tau_2^c < T\}} e^{2(\lambda+c-\rho)\tau_2^c} \frac{(\Psi_{\tau_1^c}^{(2)} \Psi_{\tau_2^c}^{(1)})^2}{(\lambda+c)^4} \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1^c < \tau_2^c < T\}} e^{(\lambda+c-\rho)(\tau_1^c + \tau_2^c)} \frac{\Psi_{\tau_1^c}^{(1)} \Psi_{\tau_1^c}^{(2)} \Psi_{\tau_2^c}^{(1)}}{(\lambda+c)^3} \right] \\ &= E \left[ \mathbf{1}_{\{\tau_1 < T\}} e^{2(\lambda-\rho)\tau_1 + c\tau_1} \frac{(\Psi_{\tau_1}^{(1)})^2}{\lambda(\lambda+c)} + \mathbf{1}_{\{\tau_1 < \tau_2 < T\}} e^{2(\lambda-\rho)\tau_2 + c\tau_2} \frac{(\Psi_{\tau_1}^{(2)} \Psi_{\tau_2}^{(1)})^2}{\lambda^2(\lambda+c)^2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 < \tau_2 < T\}} e^{(\lambda-\rho)(\tau_1 + \tau_2) + c\tau_1} \frac{\Psi_{\tau_1}^{(1)} \Psi_{\tau_1}^{(2)} \Psi_{\tau_2}^{(1)}}{\lambda^2(\lambda+c)} \right], \end{aligned}$$

を得る。補題 4.1 の後半の主張から、これは下に凸である。さらに、 $\lim_{c \rightarrow -\lambda, \infty} M(c) = \infty$  が成立しているから、 $M(c)$  を最小にする  $c^* \in (-\lambda, \infty)$  が存在する。

本稿における分散減少法は、指数時間の分布パラメータを当初の  $\lambda$  から  $\lambda + c^*$  に移すことで分散の減少を図るものである。これは重点サンプリング法の一つと言える。

ところで、 $M(c)$  を最小にする  $c$  をを見つけるには、 $M'(c) = 0$  を  $c$  について解けばよいが、 $M'(c)$  は (18) 式のような期待値表現を持つから、これは期待値に関する方程式である。 $M'(c)$  を具体的に求めると、

$$\begin{aligned} M'(c) &= E \left[ \mathbf{1}_{\{\tau_1 < T\}} e^{2(\lambda-\rho)\tau_1 + c\tau_1} \frac{\tau_1(\lambda+c) - 1}{\lambda(\lambda+c)^2} (\Psi_{\tau_1}^{(1)})^2 \right. \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{\tau_1 < \tau_2 < T\}} e^{2(\lambda-\rho)\tau_2 + c\tau_2} \frac{\tau_2(\lambda+c) - 2}{\lambda^2(\lambda+c)^3} (\Psi_{\tau_1}^{(2)} \Psi_{\tau_2}^{(1)})^2 \\ &\quad \left. + 2 \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 < \tau_2 < T\}} e^{(\lambda-\rho)(\tau_1 + \tau_2) + c\tau_1} \frac{\tau_1(\lambda+c) - 1}{\lambda^2(\lambda+c)^2} \Psi_{\tau_1}^{(1)} \Psi_{\tau_1}^{(2)} \Psi_{\tau_2}^{(1)} \right], \quad (20) \end{aligned}$$

である。ここでも、確率的求解アルゴリズムであるロビンズ=モンロー・アルゴリズムが適用でき、効率的な探索が可能である。ただし、(20) 式を見ると  $c$  の変動が指数関数に影響を与えている。この場合、一般的にはロビンズ=モンロー・アルゴリズムの条件 (C)

は満たされないため、パラメータ探索が発散して失敗する可能性がある<sup>26</sup>。探索を確実に  
 行うためには、注意 3.8 で述べたように変動を緩慢にする関数を用意するという対応のほ  
 か、より慎重な更新ステップを持つ確率的打ち切りアルゴリズム (Randomly Truncated  
 Algorithm) などを利用する、あるいは、予め強度  $\lambda + c$  の取りうる範囲を有界な範囲に  
 制限しておくという対応が考えられる<sup>27</sup>。

なお、 $M'(c)$  の確率時刻  $\tau_1, \tau_2$  も  $\tau_1^c, \tau_2^c$  に揃えて変形しておくことと便利である。なぜなら、  
 約定条件  $\theta$  に対するロビンス=モンロー更新は、より分散減少効果の大きい強度  $\lambda + c$  で  
 の確率時刻により実行することになるため、 $M'(c)$  の計算でも同じ確率時刻を使うことに  
 すれば、乱数生成の計算コストを抑制できるからである。このとき、逆問題の求解と  $\lambda$  の  
 最適化を多次元の確率的求解アルゴリズムを用いることにより同時実行することが可能  
 である。 $M'(c)$  の具体的な変形は次のようになる。

$$M'(c) = E \left[ \mathbf{1}_{\{\tau_1^c < T\}} e^{2(\lambda+c-\rho)\tau_1^c} \frac{\tau_1^c(\lambda+c) - 1}{(\lambda+c)^3} (\Psi_{\tau_1^c}^{(1)})^2 \right. \\
 + \mathbf{1}_{\{\tau_1^c < \tau_2^c < T\}} e^{2(\lambda+c-\rho)\tau_2^c} \frac{\tau_2^c(\lambda+c) - 2}{(\lambda+c)^5} (\Psi_{\tau_1^c}^{(2)} \Psi_{\tau_2^c}^{(1)})^2 \\
 \left. + 2 \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1^c < \tau_2^c < T\}} e^{(\lambda+c-\rho)(\tau_1^c + \tau_2^c)} \frac{\tau_1^c(\lambda+c) - 1}{(\lambda+c)^4} \Psi_{\tau_1^c}^{(1)} \Psi_{\tau_1^c}^{(2)} \Psi_{\tau_2^c}^{(1)} \right].$$

次の図 5 ~ 10 は  $\lambda$  の最適化による収束の速さの比較である。再び、100 回のシミュレー  
 ションでの、誤差率の中央値および上下 25% 点をプロットしている。モデルとパラメー  
 タは前項と同一で、 $c$  の初期値をゼロ、 $\lambda + c$  の取りうる範囲を 0.001 から 2 までに制限  
 した。

図 5:  $T = 2$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\lambda$  最適化

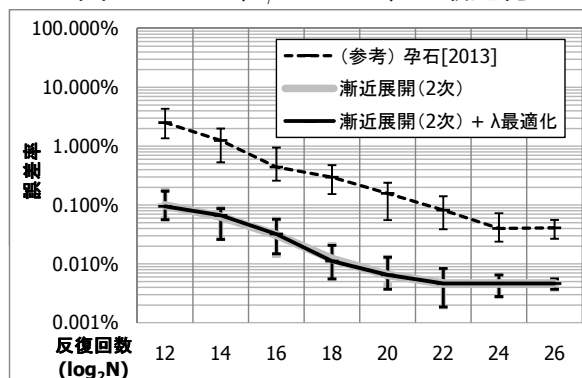
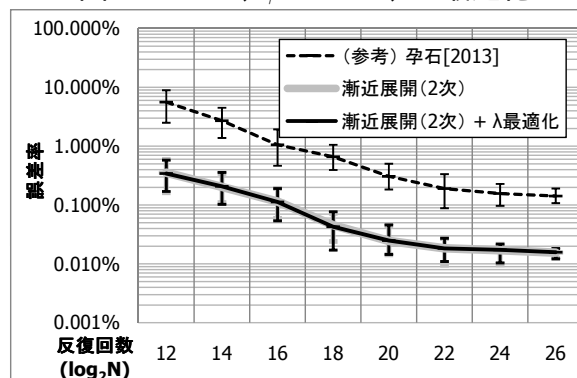


図 6:  $T = 2$ ,  $\beta = 0.03$ ,  $\lambda$  最適化



<sup>26</sup>この点については、孕石 [2013] の注意 3.4 を参照。

<sup>27</sup>このパラメータ探索は、主たるパラメータ探索である逆問題の求解をサポートしているだけなので、最も手軽な有界範囲への制限という対応を採用すれば実用上は十分である。

図 7:  $T = 10$ 、 $\beta = 0.01$ 、 $\lambda$  最適化

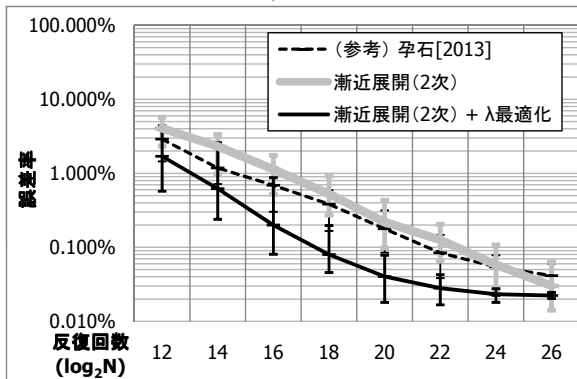


図 8:  $T = 10$ 、 $\beta = 0.03$ 、 $\lambda$  最適化

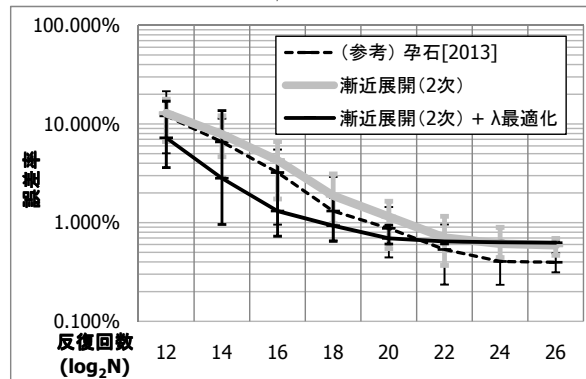


図 9:  $\lambda + c$ 、 $\beta = 0.01$

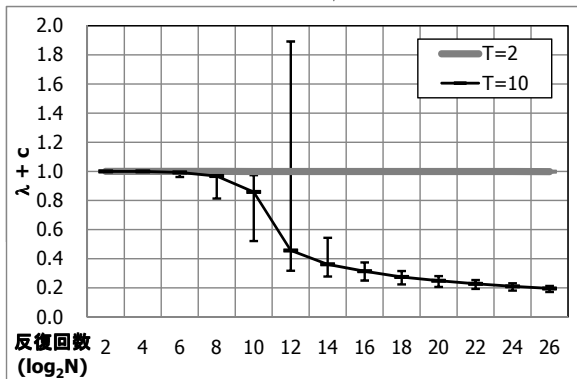
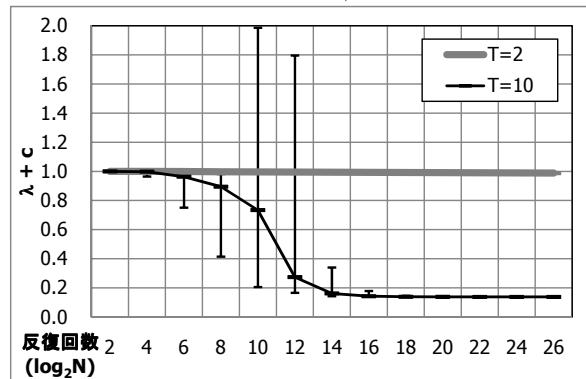


図 10:  $\lambda + c$ 、 $\beta = 0.03$



図を見ると、 $T = 2$  では精度向上は得られていない。しかし、 $T = 10$  の計算に対しては分散減少効果が確認でき、計算量を最大で数十分の一程度に減少できた<sup>28</sup>。これは図 9 および図 10 の結果とも整合している。すなわち、 $\lambda$  の最適化を加えても、 $T = 2$  では初期値 1 のままほとんど変化しないが、 $T = 10$  ではより小さい値となるため計算精度の向上が見られている。

また、同じ図 9 および図 10 の中で、 $T = 10$  においては途中の  $\lambda + c$  の値が発散しかけている箇所があるのが確認される ( $\log_2 N = 12$  の点など)。これは、パラメータ  $\lambda$  の探索ではロビンズ=モンローの条件 (C) が満たされないためであり、前述した通りの結果である。本稿では  $\lambda + c$  の範囲を制限することで、発散を回避した。

ここで、図 9 および図 10 で示された結果の挙動が適切なのかどうかを確認する。つまり、予め様々な  $\lambda$  を与えたうえで、シミュレーションで求まるデリバティブ価格の標準偏差を計算し、図 9 および図 10 が正しく最小の標準偏差を与える  $\lambda$  へと接近しているかを検証する。次の図 11 および図 12 は、様々な  $\lambda$  に対する標準偏差をモンテカルル口法で求め

<sup>28</sup>この計算量の比較では、モンテカルル口法におけるサンプル・パスの生成に掛かる計算コストを捨象して考察している。全体の計算量を評価する際に当該コストを勘案する場合には補論 3 を参照されたい。



たものである。ただし、 $\theta$  はゼロに固定し、順問題としてのプライシングを行っている。図 9、図 10 のどのパスも、それぞれ図 11、12 で最小値を達成している点と概ね近い値に接近していることが確認できる。

図 11: 様々な  $\lambda$  での標準偏差、 $\beta = 0.01$

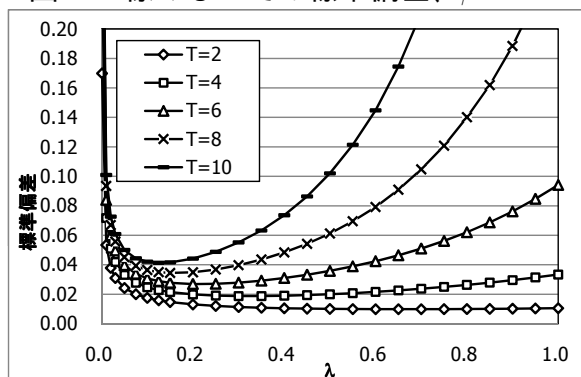
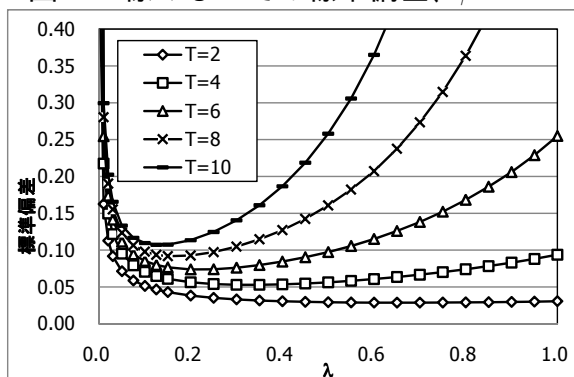


図 12: 様々な  $\lambda$  での標準偏差、 $\beta = 0.03$



## 5 おわりに

本稿では、ロビンズ=モンロー・アルゴリズムと Fujii and Takahashi [2012] が提案したインタラクティング・パーティクル法を同時に適用することで CVA を考慮した逆問題を効率的に求解する手法を提案した。これは、孕石 [2013] で提案したマーク付き分枝拡散過程による手法と同様、CVA を考慮した逆問題の求解において生じる多重の入れ子構造を解消し、1回のシミュレーションで求解を達成する手法である。本稿の手法が適用可能となるための十分条件が、ペイオフ関数の単調性に帰着できるという点も孕石 [2013] と同様である。さらに、1回のロビンズ=モンロー・アルゴリズムで①逆問題の求解、②分散減少法における計算パラメータ最適化の2つを同時に処理する高速化手法も提案した。

孕石 [2013] の方法を非有界なペイオフ関数を持つ契約に対して適用する場合は、分布の裾の情報を無視するという誤差を伴った対応が必要となるが、本稿の手法はこうした対応が不要であるため、より汎用性が高いと言える。一方、本稿の手法には、CVA を考慮しない場合のデリバティブ価格が短時間で計算可能であることが必要となるほか、漸近展開式はモデルやペイオフ関数に依存するため、商品毎に別のプログラムを実装する必要があるという、実務的な難しさがある。したがって、本稿の手法と孕石 [2013] の手法は、どちらか一方が優れているというわけではなく、対象とする商品などに応じて、適宜使い分けることが望ましいと考えられる。

数値計算を用いた孕石 [2013] の手法との比較では、本稿の手法は、クレジット・スプレッドが大きく満期が長い場合に、孕石 [2013] の手法よりも近似誤差が大きくなった。しかしながら全体的に見ると誤差の水準は十分小さく、特にビッド・アスク・スプレッドが大きくなりがちな CVA の計算においては、実務上許容できる範囲にあると考えられる。

## 参考文献

- 富安弘毅、『カウンターパーティーリスクマネジメント トレーディングとの融合によるリスク管理の収益源化』、金融財政事情研究会、2010年
- 孕石匡弘、「CVA 逆問題の確率的求解手法 マーク付き分枝拡散過程の適用」、日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー No.2013-J-11、2013年
- Arouna, B., “Robbins-Monro Algorithms and Variance Reduction in Finance,” *Journal of Computational Finance*, 7, 2004, pp.35-61.
- Bielecki, T. R., and M. Rutkowski, *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer, 2002.
- Brigo, D., and M. Morini, “Close-out convention tensions,” *Risk Magazine*, Dec., 2011, pp.74-78.
- Burgard, C., and M. Kjaer, “Partial Differential Equation Representations of Derivatives with Bilateral Counterparty Risk and Funding Costs,” *The Journal of Credit Risk*, 7, 2011, pp.75-93.
- Duflo, M., *Random Iterative Models*, Springer-Verlag, 1997.
- Fujii, M., and A. Takahashi, “Analytical Approximation for Non-linear FBSDEs with Perturbation Scheme,” CARF working paper, CARF-F-269, 2011.
- , “Perturbative Expansion Technique for Non-Linear FBSDEs with Interacting Particle Method,” CARF working paper, CARF-F-278, 2012.
- Fujii, M., S. Sato, and A. Takahashi, “An FBSDE Approach to American Option Pricing with an Interacting Particle Method,” CARF working paper, CARF-F-302, 2012.
- Henry-Labordère, P., “Cutting CVA’s Complexity,” *Risk Magazine*, Jul., 2012, pp.67-73.
- Lemaire, V., and G. Pagès, “Unconstrained Recursive Importance Sampling,” *Annals of Applied Probability*, 20, 2010, pp.1029-1067.

Ma, J., P. Protter, and J. Yong, "Solving Forward-Backward Stochastic Differential Equations Explicitly - A Four Step Scheme," *Probability Theory and Related Fields*, 98(3), 1994, pp.339-359.

Robbins, H., and S. Monro, "A Stochastic Approximation method," *Annals of Mathematical Statistics*, 22, 1951, pp.400-407.

## 補論1 清算時 CVA なしの場合

デフォルト時の清算の際に CVA を考慮しない場合について考える。

約定条件パラメータ  $\theta$  を明示して表せば、この場合の PDE は、

$$\begin{cases} (\partial_t + \mathcal{L})v + h(Rm^+ + m^- - v) - rv = 0, & v(T, x; \theta) = g(x, \theta), \\ (\partial_t + \mathcal{L})m - rm = 0, & m(T, x; \theta) = g(x, \theta), \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

となる。 $V_t^\theta = v(t, S_t; \theta)$  がこの場合の CVA を考慮した価格である。

さらに  $M_t^\theta = m(t, S_t; \theta)$  とおき、(A-1) 式の第 1 式に対応する BSDE を求めると、

$$dV_t^\theta = (r_t + h_t)V_t^\theta dt - R_t h_t (M_t^\theta)^+ dt - h_t (M_t^\theta)^- dt + Z_t^\theta dW_t, \quad (\text{A-2})$$

となる。 $M_t^\theta$  が求めれば、これは線形 BSDE であるから解くことができ、

$$V_t^\theta = E_t^Q \left[ \int_t^T e^{-\int_t^s (r_u + h_u) du} \{R_s h_s (M_s^\theta)^+ + h_s (M_s^\theta)^-\} ds + e^{-\int_t^T (r_u + h_u) du} g(S_T, \theta) \right],$$

を得る。

ここで、 $h_t$  をハザード率とした最初のポアソン型ジャンプの時刻を  $\tau$  と定義すれば、

$$V_t^\theta = E_t^Q \left[ \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} e^{-\int_t^\tau r_u du} \{R_\tau (M_\tau^\theta)^+ + (M_\tau^\theta)^-\} + \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} e^{-\int_t^T r_u du} g(S_T, \theta) \right], \quad (\text{A-3})$$

を得る。

$M_t^\theta$  は CVA を考慮しない場合の価格である。インタラクティング・パーティクル法の仮定から、 $M_t^\theta$  は適当な関数を用いて計算可能である。したがって、(A-3) 式の期待値は前進的なシミュレーション手法を用いて計算できる。さらに、 $\theta$  に対して単調性を持つペイオフ関数の下で、

$$\theta_1 \leq \theta_2 \text{ ならば、} V_t^{\theta_1} \leq V_t^{\theta_2} \quad (\text{A-4})$$

が成立することを示せば、本稿の手法が清算時 CVA なしの場合でも適用できることがわかる。

$V_t^\theta$  が従う (A-2) 式の BSDE のドライバーは  $M_t^\theta$  を含む確率的なものとなっているが、CVA を考慮しないデリバティブ価格  $M_t^\theta$  については明らかに、

$$\theta_1 \leq \theta_2 \text{ ならば、} M_t^{\theta_1} \leq M_t^{\theta_2}$$

である。これにより、すべての  $v \in \mathbf{R}$  に対して、確率 1 で、

$$(r_t + h_t)v - R_t h_t (M_t^{\theta_1})^+ - h_t (M_t^{\theta_1})^- \geq (r_t + h_t)v - R_t h_t (M_t^{\theta_2})^+ - h_t (M_t^{\theta_2})^-,$$

となるので、再び BSDE の比較定理によって (A-4) 式の成立が言える。

## 補論 2 漸近展開を用いた近似価格の単調性

本稿の 3 節では、元の BSDE を (8) 式に変形したうえで漸近展開を行い、2 次までの近似価格に対する単調性を得た。変形を施さないそのままの BSDE を漸近展開すると、必ずしも近似価格に対する単調性が満たされるとは限らない。例として、1 次の漸近展開を用いた近似価格に対して価格の単調性が得られない場合を考える。

ここでは、ペイオフ関数を単純化して確定的であるとする。これを  $f(\theta)$  で表し、順方向、あるいは逆方向に単調であるとする。それ以外の設定は本文の数値計算例に一致させる。

もともとの BSDE である (2) 式を漸近展開し、近似価格を導出する。このとき、 $V_t^{(k)}$  ( $k = 0, 1$ ) は、それぞれ、

$$\begin{aligned} V_t^{(0)} &= E_t [e^{-r(T-t)} f(\theta)] = e^{-r(T-t)} f(\theta), \\ V_t^{(1)} &= -E_t \left[ \int_t^T e^{-r(s-t)} \beta (V_s^{(0)})^+ ds \right] = -\beta f(\theta)^+ (T-t) e^{-r(T-t)}, \end{aligned}$$

と計算できる。したがって、1 次の近似価格は、

$$V_0^{(0)} + V_0^{(1)} = \begin{cases} f(\theta) e^{-rT}, & f(\theta) < 0 \text{ なる } \theta \text{ に対して,} \\ f(\theta) e^{-rT} \{1 - \beta T\}, & f(\theta) \geq 0 \text{ なる } \theta \text{ に対して,} \end{cases}$$

となるから、例えば、 $\beta T > 1$  となるように  $\beta$  と  $T$  が設定されていれば、1 次の近似価格は  $\theta$  に対して単調ではない。

ただし、この例も、2 次の漸近展開まで考えれば価格は単調となる。実際、

$$V_t^{(2)} = -E_t \left[ \int_t^T e^{-r(s-t)} \beta \mathbf{1}_{[0, \infty)}(V_s^{(0)}) V_s^{(1)} ds \right] = \frac{1}{2} \beta^2 f(\theta)^+ (T-t)^2 e^{-r(T-t)},$$

であるから、

$$V_0^{(0)} + V_0^{(1)} + V_0^{(2)} = \begin{cases} f(\theta)e^{-rT}, & f(\theta) < 0 \text{ のとき,} \\ f(\theta)e^{-rT}\{(1 - \frac{1}{2}\beta T)^2 + \frac{1}{4}\beta^2 T^2\}, & f(\theta) \geq 0 \text{ のとき,} \end{cases}$$

を得るが、これは単調である。

なお、一般のデリバティブに対して2次、あるいは、より高次の漸近展開を用いて得られる近似価格が、(8)式への変形なしに常に単調となるか否かは未解決である。単調性が崩れる例を挙げるべく、いくつかの商品と様々なパラメータ設定の下で数値的な価格計算を試みたが、反例を得るには至らなかった。一方で、単調性が常に成立するという証明も得られていない。

### 補論3 サンプル・パスの生成コストを考慮した計算量

4節の数値計算では、原資産価格はブラック=ショールズ・モデルに従う確率過程で表現できると仮定しているため、シミュレーションに必要なサンプル・パスの生成を解析的に行うことができ、その計算コストをほとんど無視できるとした。しかし、例えばオイラー=丸山法などのように初期値からの逐次的演算でサンプル・パスを生成する場合、時間の離散化幅を固定すれば、その生成コストはサンプル・パスが必要な時間定義域の長さに比例して増加する。

インタラクティング・パーティクル法により2次の近似価格  $\sum_{k=0}^2 V_t^{(k)}$  を計算する場合、 $V_t^{(0)}$  は短時間で求められることを仮定しているため、その計算コストはほとんどゼロであると仮定してよいだろう。しかし、 $V_t^{(1)}$  と  $V_t^{(2)}$  の計算では、確率時刻  $\tau_1$  または  $\tau_2$  まで原資産  $S_t$  のサンプル・パスが必要であり<sup>29</sup>、その分の計算コストが掛かる。

4節(2)では、インタラクティング・パーティクル法の計算量を最小にするため、2次モーメント最小化を与える  $\lambda$  を考えたが、上述の通り、そこではサンプル・パスの生成に掛かる計算コストを捨象している。しかし、確率時刻  $\tau_1$  および  $\tau_2$  を与える強度  $\lambda$  を変えれば、サンプル・パスが必要となる時間定義域の長さも変わるため、サンプル・パスの生成コストを明示的に考慮する場合は、考察対象となる計算量にその生成コストを加味する必要がある。

以下では、サンプル・パスの生成に掛かる計算コストはサンプル・パスが必要となる時間定義域の長さに比例するという仮定の下、 $\lambda$  に応じた  $V_0^{(1)}$  と  $V_0^{(2)}$  の計算量を考察し、そ

<sup>29</sup>  $\rho_t, \beta_t$  も確率的に変動すると仮定するならば、これらも同様に生成する必要がある。

れを  $\lambda$  の関数として表現することにする。サンプル・パスを単位時間分だけ生成するのに必要な計算コストを  $C$  とすると、1本のサンプル・パスに対する  $V_0^{(1)} + V_0^{(2)}$  の計算コストは、(12)式および(13)式より、 $T \leq \tau_1 < \tau_2$  の場合はゼロ、 $\tau_1 < T \leq \tau_2$  の場合は  $\tau_1 C$ 、 $\tau_1 < \tau_2 < T$  の場合は  $\tau_2 C$  となる。したがって、 $V_0^{(1)} + V_0^{(2)}$  の平均計算コストは、

$$\begin{aligned}
 & C \int_0^T P(\tau_1 \in dt_1) \left\{ \int_T^\infty t_1 P(\tau_2 \in dt_2 | \tau_1 = t_1) + \int_{t_1}^T t_2 P(\tau_2 \in dt_2 | \tau_1 = t_1) \right\} \\
 &= C \int_0^T \lambda e^{-\lambda t_1} dt_1 \left\{ \int_T^\infty t_1 \lambda e^{-\lambda(t_2-t_1)} dt_2 + \int_{t_1}^T t_2 \lambda e^{-\lambda(t_2-t_1)} dt_2 \right\} \\
 &= \frac{C}{2} \lambda T^2 e^{-\lambda T} + \frac{2C}{\lambda} \left\{ 1 - e^{-\lambda T} - \lambda T e^{-\lambda T} - \frac{1}{2} \lambda^2 T^2 e^{-\lambda T} \right\} \tag{A-5}
 \end{aligned}$$

となる。モンテカルロ法の反復回数が十分に大きければ、大数の法則より、サンプル・パス1本あたりの計算コストは(A-5)式に収束する。図A-1および図A-2は、 $T = 2$  および  $T = 10$  について、(A-5)式を  $\lambda$  の関数として計算したものである<sup>30</sup>。 $\lambda$  を小さくすると、 $\tau_1, \tau_2$  の増大に伴ってサンプル・パスの生成が必要となる時間の長さが増す一方で、 $\tau_1 \geq T$  あるいは  $\tau_2 \geq T$  となる確率も高まるから、サンプル・パス生成に掛かる計算コストは  $\lambda$  に対して単調とはならないことに注意されたい。

図 A-1: パス生成コスト、 $T = 2$

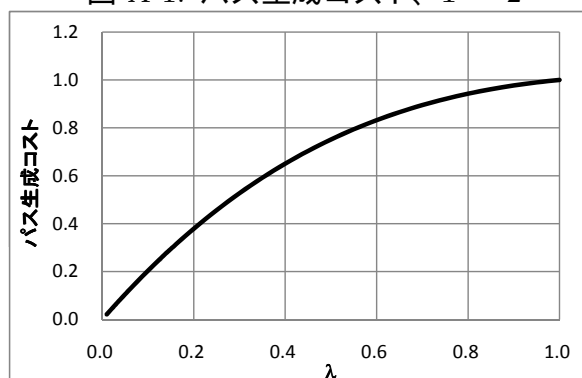
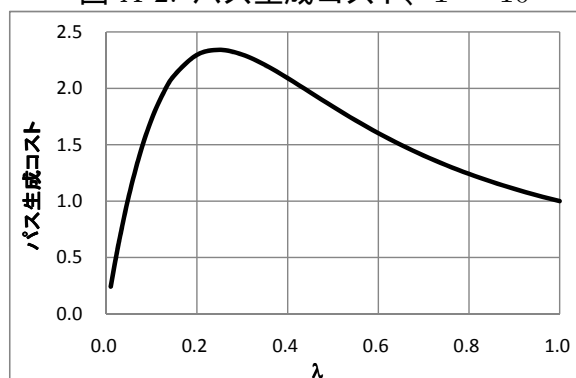


図 A-2: パス生成コスト、 $T = 10$



図A-1および図A-2を見ると、どちらの満期  $T$  に対しても、4節(2)で計算量が最小となつた  $\lambda$  の値の近傍でサンプル・パスの生成コストが最大となっている。このことから、サンプル・パスの生成に無視できない計算コストが発生する場合は、モンテカルロ法における分散の減少によって得られる計算量の削減効果とサンプル・パスの生成に掛かる計算コストの増大の双方を考慮する必要がある。

実際に、4節の例を用いて、サンプル・パスの生成コストも考慮したうえで計算量全体

<sup>30</sup> $\lambda = 1$  のときの計算コストを1として基準化した。



の比較を行う。ここでは、検証のため、ブラック＝ショールズ・モデルに従うサンプル・パスをオイラー＝丸山法によって生成することとする。 $\beta = 0.03$ 、 $\theta = 0.0$ とした順問題を様々な $\lambda$ の下で100回ずつ計算し、算出された価格の標準偏差と平均計算時間を求めた。さらに、分散減少効果による計算量の削減率が分散の減少率に比例すること<sup>31</sup>に注意し、同程度の計算精度を達成するために必要な全体の計算量をそれぞれの $\lambda$ に対して求めた。なお、シミュレーション回数は100万回、離散近似における時間刻みは1年を100分割するものとしている。

結果を表 A-1、A-2 および図 A-3～A-6 に記した。表 A-1、A-2 および図 A-3、A-4 で示された計算時間は、上記で求めた $\lambda$ の関数と概ね一致している。表 A-1 および図 A-5 で示された $T = 2$ に関しては、4 節 (2) では初期値 $\lambda = 1$ のままでも分散減少という意味で概ね最適であるとしたものの、より小さな $\lambda$ を用いた方がサンプル・パスの生成コストの減少によって計算量全体としては削減されるという結果となった。一方、表 A-2 および図 A-6 で示された $T = 10$ では、サンプル・パスの生成に掛かる計算コストを考慮したうえでも、4 節 (2) で最適とした $\lambda$ の近傍で概ね最小の計算量となった。ただし、これらの結果はペイオフ関数やクレジット・スプレッド $\beta$ といったパラメータ、あるいはサンプル・パスに関する離散近似方法や時間間隔の取り方に依存していることに注意されたい。

表 A-1: サンプル・パス生成コストを考慮した計算量 ( $T = 2$ )

$\lambda$	標準偏差 (a)	平均計算時間 (秒) (b)	計算量全体 (a)×(a)×(b)	計算量全体を $\lambda = 1$ で基準化
0.001	$61.36 \times 10^{-5}$	0.12	$43.41 \times 10^{-9}$	5.3620
0.010	$17.61 \times 10^{-5}$	0.26	$8.07 \times 10^{-9}$	0.9974
0.050	$7.54 \times 10^{-5}$	0.90	$5.14 \times 10^{-9}$	0.6343
0.100	$5.26 \times 10^{-5}$	1.66	$4.59 \times 10^{-9}$	0.5664
0.200	$4.08 \times 10^{-5}$	3.01	$5.01 \times 10^{-9}$	0.6188
0.500	$3.00 \times 10^{-5}$	5.90	$5.33 \times 10^{-9}$	0.6578
0.750	$3.05 \times 10^{-5}$	7.25	$6.75 \times 10^{-9}$	0.8339
1.000	$3.20 \times 10^{-5}$	7.90	$8.10 \times 10^{-9}$	1.0000

<sup>31</sup>分散が2分の1になれば、同程度の計算精度を求めるために必要な反復回数は2分の1となる。

表 A-2: サンプル・パス生成コストを考慮した計算量 ( $T = 10$ )

$\lambda$	標準偏差 (a)	平均計算時間 (秒) (b)	計算量全体 (a)×(a)×(b)	計算量全体を $\lambda = 1$ で基準化
0.001	$16.70 \times 10^{-4}$	0.50	$1.39 \times 10^{-6}$	0.0246
0.010	$2.89 \times 10^{-4}$	4.01	$0.33 \times 10^{-6}$	0.0059
0.050	$1.43 \times 10^{-4}$	17.05	$0.35 \times 10^{-6}$	0.0062
0.100	$1.03 \times 10^{-4}$	28.07	$0.30 \times 10^{-6}$	0.0053
0.200	$1.19 \times 10^{-4}$	37.37	$0.53 \times 10^{-6}$	0.0095
0.500	$2.43 \times 10^{-4}$	30.14	$1.78 \times 10^{-6}$	0.0317
0.750	$6.85 \times 10^{-4}$	21.82	$10.24 \times 10^{-6}$	0.1819
1.000	$18.36 \times 10^{-4}$	16.70	$56.30 \times 10^{-6}$	1.0000

図 A-3: 標準偏差と計算時間 ( $T = 2$ )

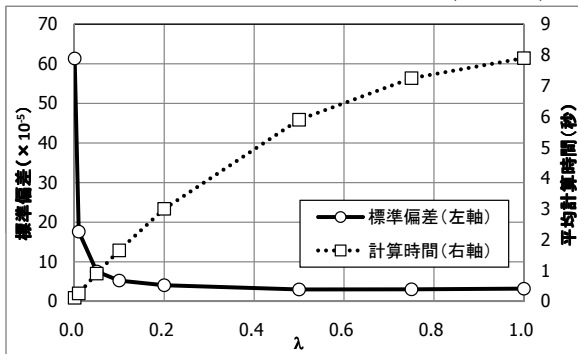


図 A-4: 標準偏差と計算時間 ( $T = 10$ )

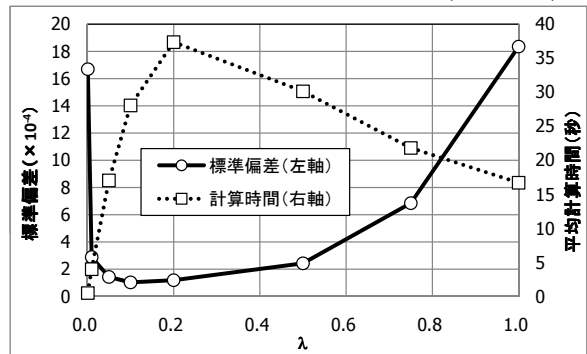


図 A-5: 計算量全体 ( $T = 2$ )

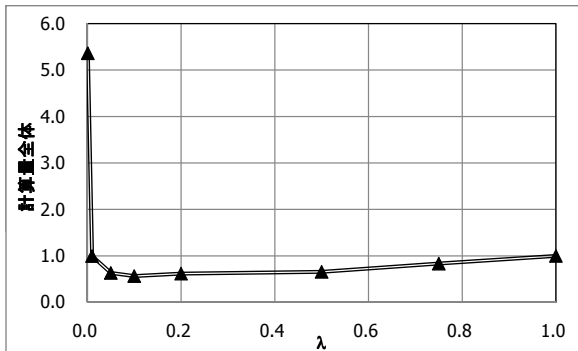
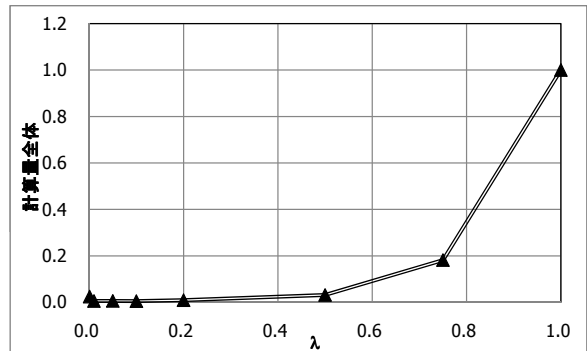


図 A-6: 計算量全体 ( $T = 10$ )



## 補論4 数値計算結果

本稿の数値計算の結果を、表 A-3 から表 A-12 にまとめた。表の値は、誤差率について、100 回のシミュレーションでの中央値、および上下 25% 点を求めたものである。

図 A-7 ~ A-12 は  $T = 4, 6, 8$  についてフォワード・プレミアムをプロットしたものであり、図 A-13 と図 A-14 は  $T = 2, 4, 6, 8, 10$  について  $\lambda + c$  の最適化の様子をプロットしたものである<sup>32</sup>。

表 A-3:  $T = 2$ 、 $\beta = 0.01$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	2 次の漸近展開			2 次の漸近展開 $\lambda$ 最適化あり				(参考) 孕石 [2013]		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	$\lambda$	25%	中央	75%
12	0.06	0.10	0.18	0.06	0.10	0.17	0.999	1.36	2.51	4.34
14	0.03	0.06	0.09	0.03	0.07	0.09	0.999	0.53	1.25	2.00
16	0.01	0.03	0.06	0.01	0.03	0.06	0.999	0.26	0.44	0.95
18	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.02	0.999	0.15	0.30	0.48
20	0.00	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.999	0.06	0.16	0.24
22	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.999	0.04	0.08	0.14
24	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.999	0.02	0.04	0.07
26	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.998	0.03	0.04	0.06

表 A-4:  $T = 4$ 、 $\beta = 0.01$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	2 次の漸近展開			2 次の漸近展開 $\lambda$ 最適化あり				(参考) 孕石 [2013]		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	$\lambda$	25%	中央	75%
12	0.15	0.33	0.53	0.14	0.30	0.52	0.980	1.23	2.71	4.30
14	0.06	0.15	0.24	0.06	0.13	0.22	0.975	0.28	0.87	2.03
16	0.04	0.07	0.11	0.02	0.06	0.10	0.970	0.29	0.61	1.07
18	0.02	0.04	0.06	0.02	0.03	0.05	0.965	0.13	0.31	0.51
20	0.01	0.02	0.03	0.01	0.02	0.03	0.960	0.06	0.13	0.21
22	0.00	0.01	0.02	0.00	0.01	0.01	0.956	0.04	0.07	0.12
24	0.00	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.951	0.02	0.05	0.09
26	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.946	0.04	0.05	0.08

<sup>32</sup>中央値のみプロットしている。

表 A-5:  $T = 6$ 、 $\beta = 0.01$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	2 次の漸近展開			2 次の漸近展開 $\lambda$ 最適化あり				(参考) 孕石 [2013]		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	$\lambda$	25%	中央	75%
12	0.34	0.69	1.20	0.25	0.54	0.93	0.854	0.95	2.41	4.17
14	0.12	0.31	0.55	0.14	0.25	0.47	0.814	0.46	0.99	1.74
16	0.08	0.16	0.29	0.05	0.09	0.19	0.782	0.28	0.58	0.93
18	0.03	0.07	0.14	0.03	0.06	0.10	0.754	0.15	0.31	0.54
20	0.02	0.04	0.06	0.01	0.02	0.05	0.729	0.07	0.16	0.28
22	0.01	0.03	0.04	0.00	0.02	0.03	0.708	0.05	0.08	0.14
24	0.01	0.01	0.02	0.00	0.01	0.01	0.688	0.04	0.07	0.11
26	0.01	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.669	0.04	0.06	0.08

表 A-6:  $T = 8$ 、 $\beta = 0.01$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	2 次の漸近展開			2 次の漸近展開 $\lambda$ 最適化あり				(参考) 孕石 [2013]		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	$\lambda$	25%	中央	75%
12	0.96	1.55	2.51	0.28	0.63	2.01	0.602	1.09	2.38	4.76
14	0.45	0.80	1.17	0.15	0.38	0.77	0.533	0.63	1.28	2.35
16	0.23	0.47	0.78	0.07	0.17	0.29	0.482	0.42	0.77	1.11
18	0.09	0.20	0.35	0.03	0.08	0.13	0.443	0.14	0.35	0.58
20	0.05	0.10	0.17	0.01	0.03	0.06	0.416	0.11	0.20	0.33
22	0.03	0.07	0.11	0.01	0.02	0.03	0.394	0.05	0.09	0.16
24	0.01	0.03	0.05	0.01	0.02	0.02	0.374	0.03	0.06	0.10
26	0.01	0.02	0.03	0.01	0.01	0.02	0.356	0.03	0.05	0.08

表 A-7:  $T = 10$ 、 $\beta = 0.01$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	2 次の漸近展開			2 次の漸近展開 $\lambda$ 最適化あり				(参考) 孕石 [2013]		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	$\lambda$	25%	中央	75%
12	2.33	4.04	5.75	0.57	1.70	3.90	0.457	1.45	2.90	4.46
14	0.97	2.31	3.34	0.24	0.62	2.60	0.362	0.72	1.18	2.30
16	0.52	1.13	1.75	0.08	0.20	0.88	0.314	0.30	0.69	1.22
18	0.27	0.53	0.92	0.05	0.08	0.20	0.275	0.17	0.38	0.59
20	0.10	0.22	0.43	0.02	0.04	0.08	0.249	0.08	0.18	0.32
22	0.07	0.13	0.21	0.02	0.03	0.04	0.228	0.04	0.08	0.15
24	0.03	0.06	0.11	0.02	0.02	0.03	0.210	0.02	0.05	0.08
26	0.01	0.03	0.06	0.02	0.02	0.02	0.196	0.02	0.04	0.06

表 A-8:  $T = 2$ 、 $\beta = 0.03$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	2 次の漸近展開			2 次の漸近展開 $\lambda$ 最適化あり				(参考) 孕石 [2013]		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	$\lambda$	25%	中央	75%
12	0.16	0.35	0.60	0.17	0.34	0.58	0.995	2.50	5.59	8.94
14	0.11	0.20	0.34	0.10	0.21	0.36	0.994	1.38	2.71	4.50
16	0.06	0.11	0.19	0.05	0.11	0.19	0.993	0.47	1.06	1.94
18	0.02	0.05	0.07	0.02	0.04	0.08	0.992	0.39	0.66	1.06
20	0.01	0.02	0.04	0.01	0.03	0.05	0.991	0.18	0.31	0.50
22	0.01	0.02	0.03	0.01	0.02	0.03	0.990	0.09	0.19	0.34
24	0.01	0.02	0.02	0.01	0.02	0.02	0.989	0.10	0.16	0.23
26	0.01	0.02	0.02	0.01	0.02	0.02	0.988	0.11	0.14	0.19

表 A-9:  $T = 4$ 、 $\beta = 0.03$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	2 次の漸近展開			2 次の漸近展開 $\lambda$ 最適化あり				(参考) 孕石 [2013]		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	$\lambda$	25%	中央	75%
12	0.69	1.01	1.76	0.35	0.77	1.49	0.872	2.45	5.51	8.61
14	0.27	0.58	0.87	0.21	0.40	0.75	0.848	1.47	3.11	4.63
16	0.11	0.24	0.39	0.07	0.16	0.29	0.823	0.72	1.40	2.24
18	0.06	0.14	0.21	0.04	0.09	0.17	0.799	0.33	0.65	1.34
20	0.03	0.06	0.11	0.03	0.06	0.09	0.778	0.18	0.45	0.70
22	0.04	0.06	0.09	0.04	0.06	0.08	0.758	0.10	0.28	0.44
24	0.05	0.06	0.08	0.05	0.06	0.07	0.739	0.15	0.25	0.33
26	0.06	0.07	0.08	0.06	0.06	0.07	0.721	0.21	0.25	0.28

表 A-10:  $T = 6$ 、 $\beta = 0.03$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	2 次の漸近展開			2 次の漸近展開 $\lambda$ 最適化あり				(参考) 孕石 [2013]		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	$\lambda$	25%	中央	75%
12	1.25	2.67	4.54	0.57	1.33	2.94	0.481	2.97	7.49	13.73
14	0.59	1.35	2.16	0.27	0.54	1.02	0.433	1.64	3.48	6.20
16	0.31	0.55	1.00	0.13	0.31	0.50	0.395	0.68	1.61	2.89
18	0.14	0.30	0.56	0.10	0.22	0.32	0.364	0.38	0.92	1.32
20	0.10	0.22	0.36	0.14	0.19	0.23	0.339	0.19	0.47	0.86
22	0.11	0.17	0.26	0.15	0.17	0.19	0.318	0.18	0.29	0.49
24	0.15	0.18	0.21	0.16	0.17	0.19	0.300	0.22	0.32	0.41
26	0.16	0.19	0.20	0.17	0.18	0.18	0.285	0.23	0.29	0.34

表 A-11:  $T = 8$ 、 $\beta = 0.03$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	2 次の漸近展開			2 次の漸近展開 $\lambda$ 最適化あり				(参考) 孕石 [2013]		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	$\lambda$	25%	中央	75%
12	2.53	5.95	10.54	0.91	3.00	12.49	0.358	4.34	8.54	14.62
14	1.32	2.90	4.82	0.46	1.06	6.41	0.266	1.89	4.12	6.65
16	0.75	1.46	2.69	0.38	0.68	2.56	0.219	1.25	2.35	3.45
18	0.31	0.69	1.14	0.35	0.47	0.78	0.196	0.38	0.93	1.70
20	0.26	0.47	0.76	0.35	0.40	0.48	0.183	0.25	0.57	0.92
22	0.18	0.38	0.57	0.34	0.38	0.41	0.177	0.16	0.31	0.56
24	0.26	0.39	0.46	0.35	0.37	0.38	0.174	0.20	0.33	0.47
26	0.33	0.37	0.41	0.36	0.36	0.37	0.172	0.29	0.35	0.40

表 A-12:  $T = 10$ 、 $\beta = 0.03$  での誤差率 (%) の分位点

反復回数 ( $\log_2 N$ )	2 次の漸近展開			2 次の漸近展開 $\lambda$ 最適化あり				(参考) 孕石 [2013]		
	25%	中央	75%	25%	中央	75%	$\lambda$	25%	中央	75%
12	6.65	12.87	17.89	3.62	7.24	17.03	0.274	5.05	12.10	21.51
14	4.66	7.87	12.10	0.96	2.82	13.70	0.162	2.87	6.59	11.34
16	1.74	4.30	6.65	0.73	1.31	4.33	0.143	0.96	3.22	5.51
18	0.98	1.88	3.12	0.65	0.93	1.81	0.139	0.66	1.31	2.91
20	0.54	1.15	1.65	0.61	0.69	0.94	0.138	0.44	0.87	1.44
22	0.37	0.70	1.16	0.61	0.65	0.70	0.138	0.24	0.53	0.96
24	0.44	0.61	0.90	0.61	0.63	0.65	0.138	0.23	0.40	0.65
26	0.47	0.59	0.69	0.62	0.63	0.63	0.138	0.31	0.40	0.49

図 A-7:  $T = 4$ 、 $\beta = 0.01$

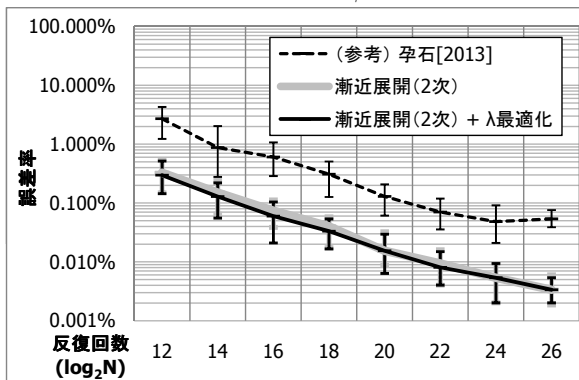


図 A-8:  $T = 4$ 、 $\beta = 0.03$

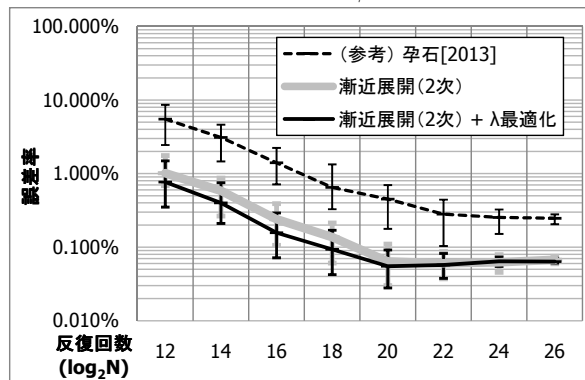


圖 A-9:  $T = 6, \beta = 0.01$

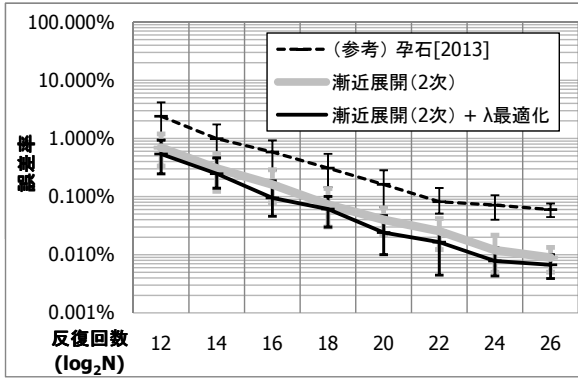


圖 A-10:  $T = 6, \beta = 0.03$

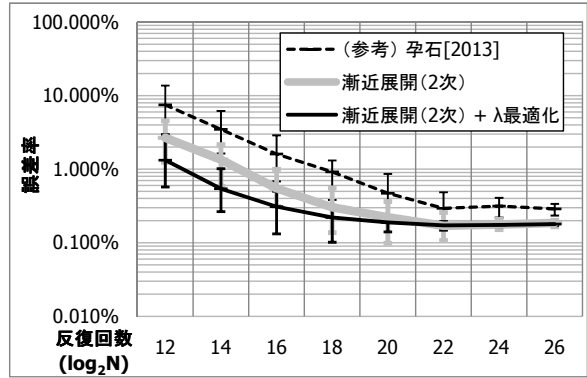


圖 A-11:  $T = 8, \beta = 0.01$

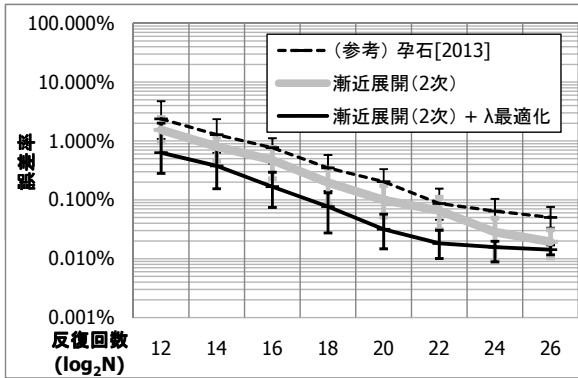


圖 A-12:  $T = 8, \beta = 0.03$

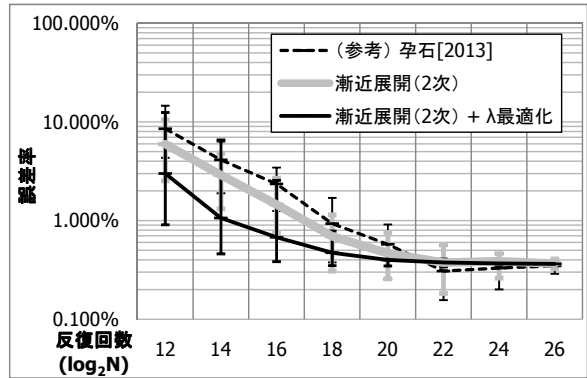


圖 A-13:  $\lambda + c, \beta = 0.01$

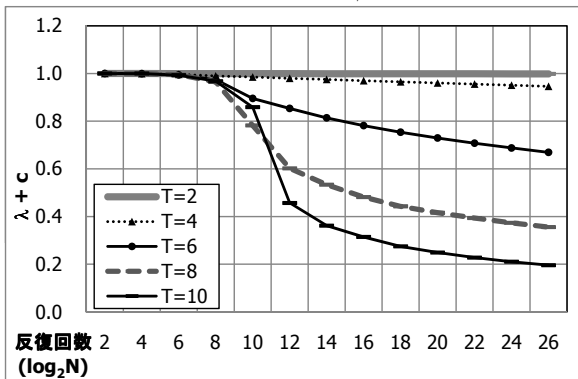


圖 A-14:  $\lambda + c, \beta = 0.03$

