

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

デフォルト率と回収率の負の相関を考慮した
担保付貸出の損失評価：
CIR型ハザード率過程での解析的評価

やました さとし よしほ としなお
山下 智志・吉羽 要直

Discussion Paper No. 2010-J-10

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

デフォルト率と回収率の負の相関を考慮した担保付貸出の損失評価：
CIR型ハザード率過程での解析的評価

やました さとし* よしば としなお**
山下 智志*・吉羽 要直**

要 旨

本稿では、ハザード率と担保価値との間に負の相関がある場合を想定して、担保付貸出の期待損失を解析的に評価する。具体的には、ハザード率には非負性を保つ Cox-Ingersoll-Ross 型の平方根過程を想定し、担保価値の瞬間的な収益率はハザード率と負の相関を持つと想定する。この設定のもとで、担保付貸出の期待損失の被積分項は Duffie, Pan, and Singleton [2000]で示された拡張アフィン形式に帰着し、解析解が得られることを示す。また、得られた解析解から、担保による期待回収額は、相関の影響を考慮した生存確率を測度として期待担保価値を満期まで1階積分することで評価されることを示す。

キーワード：デフォルト確率、回収率、拡張アフィン、期待損失、測度変換

JEL classification: G21、G32、G33

* 統計数理研究所准教授 (E-mail: yamasita@ism.ac.jp)

** 日本銀行金融研究所企画役 (E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp)

本稿の作成に当たっては、中川秀敏准教授（一橋大学）、Kenneth J. Singleton 教授（スタンフォード大学）より多くの有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

1 はじめに

景気後退期にはデフォルト率が上昇するとともに担保資産価値が下落するため、デフォルト率と回収率に負の相関がみられるという実証分析がある（例えば、Altman *et al.* [2005]）。こうした分析結果を基にバーゼルIIの先進的内部格付けアプローチでは、回収率の自行推計にあたり、景気後退期を考慮した回収率を推定するように求めている（Basel Committee on Banking Supervision [2005]）。近年の金融危機の中でも、企業の信用力の低下（デフォルト率の上昇）とともに担保資産価値の低下が進み、損失の悪化が進むという問題に注目が集まっている。こうした点を踏まえ、本稿では瞬間的なデフォルト率を表すハザード率の確率過程と担保価値過程に負の相関がある場合の期待損失を解析的に評価する。

信用リスクの確率的なモデル化では、2つの大きなアプローチがある。1つは企業の資産負債構造を基にデフォルト確率を定める構造型モデルであり、もう1つは企業の瞬間的なデフォルトを外生的なハザード率で表現するハザード率過程モデル（誘導型モデル、デフォルト強度モデル）である。

構造型モデルでは、企業の資産負債比率に基づき、負債を所与と仮定する一方で資産価値を幾何ブラウン運動に従って変動すると仮定することによりデフォルト確率を捉えることが多い。ここで、負債はデフォルトを決める資産価値の閾値を定めていることになる。担保付貸出を考えると、企業資産価値の変動に加え、企業資産価値と正の相関を持つ担保資産価値の変動を考慮することでデフォルトと回収に負の相関がある担保付貸出の期待損失を評価することができる。そうしたモデルの代表的な研究はPykhtin [2003]であるが、Pykhtin [2003]のモデルは1期間の構造型モデルになっている。1期間の構造型モデルは、デフォルトが特定の満期にしか起こらないと仮定しており非現実的である。

構造型モデルの中には、特定の満期でのデフォルトを考えるのではなく、資産価値が負債を下回った最初の時点を実際のデフォルトとする初到達型のモデルもあるが（Black and Cox [1976]など）、初到達型のデフォルトのモデル化では、資産が負債を大きく上回っているときに短期的にはデフォルトがほとんど起こらないことになってしまい、市場で観測される短期の信用スプレッドを説明できないという問題を抱えている。こうした問題に対しては資産価格やデフォルト閾値などの情報の不確実性を導入することにより構造型モデルの中で短期の信用スプレッドを説明する手法もある（Duffie and Lando [2001]など）。Chen, Collin-Dufresne, and Goldstein [2009]では、過去のデータに基づきモデルから算出した理論信用スプレッドと市場観察される信用スプレッドとの大きな乖離を「信用スプレッド・パズル」と呼び、初到達型のモデルを用いてその解決を試みている。そこでは、「信用スプレッド・パズル」の要因の1つとして、デフォルト率と回収率の負の相関の可能性を指摘している。

本稿では、デフォルト事象については、こうした内生的な構造型モデルで考えるのではなく、外生的なハザード率過程（デフォルト強度過程）でモデル化する一方で、ハザード率と担保資産変動に負の相関があるという設定のもとで損失分布等の解析的な評価を考える。

ハザード率過程モデルでは、デフォルトの確率過程をハザード率で直接的に記述し、デフォルトは満期までいつでも生じ得ることになる。一方で、回収率については一定とみなすことが多い（Duffie [2005] を参照）。少し拡張した研究としては、Bakshi, Madan, and Zhang [2006] があり、回収率がハザード率の確定的な関数として与えられる場合を検討している。また、Guo, Jarrow, and Zeng [2009] はデフォルト後の回収キャッシュフローの確率過程を考察している。Chen and Joslin [2009] は、彼らの示した一般的なモデルが適用できる事例の 1 つとして、回収のリスクを取り上げ、無リスク金利と回収率・デフォルト率の相関に注目して、債券価格に対する具体的なモデルを提示している。そこでは、ハザード率を含む 2 つの状態変数を導入し、無リスク金利についてはこれらの状態変数の組合せでハザード率との負の相関を表現する一方で、回収率については Bakshi, Madan, and Zhang [2006] と同様にハザード率の確定的な関数としている。本稿では、回収率とハザード率の負の相関に注目し、担保価値（回収資産価値）の確率過程とハザード率の拡散過程との間にはどの時点でも負の相関を持つモデルを構築し、景気を通じた回収率とデフォルト率の負の相関関係を表現する。

上述のようなモデルはこれまでほとんど考えられていないが、Kijima and Miyake [2004] は同じような問題意識に沿って、不動産担保付貸出の価値評価を行っている。ここでは、リスク中立測度下でハザード率と短期金利（瞬間スポット金利）に Ornstein-Uhlenbeck 過程を仮定し、解析的に不動産担保付貸出の価値を算出している。ハザード率は瞬間的なデフォルト率を意味するため負の値はとりえないが、ハザード率を Ornstein-Uhlenbeck 過程で表現すると負のハザード率が生じうる。特に、デフォルト確率（ハザード率）が小さい企業への貸出を分析する場合、この理論的な問題は無視できなくなる。

本稿では、Kijima and Miyake [2004] と同様に、担保付貸出の評価にあたり、(1) デフォルト事象をハザード率過程で捉え、(2) ハザード率と担保価値の負の相関を考慮し、(3) 損失の期待値ならびに n 次モーメントを解析的に評価する。さらに本稿では (4) ハザード率と担保価値の非負性を保つように、ハザード率は Cox, Ingersoll, and Ross [1985] で用いられた平方根過程（CIR 過程）¹に従うとして評価する。

具体的なモデルとしては、ハザード率と担保価値の対数値が Duffie, Pan and Singleton [2000] で紹介されている 2 次元のアフィン拡散過程に従うようにモデル化し、期待損失を考える際、デフォルト確率については「基本アフィン形式」、期待回収額については

¹Cox, Ingersoll, and Ross [1985] は、短期金利に平方根過程を仮定することにより割引債価格を解析的に導出した。このことから、平方根過程は CIR 型の確率過程と呼ばれることがある。

「拡張アフィン形式」に帰着して評価を行う。基本アフィン形式や拡張アフィン形式では、モデルの係数を規定するリッカチ型常微分方程式が導出されるが、この常微分方程式は必ずしも解析解を持つとは限らない²。本稿のモデルの場合は、導出されるリッカチ型常微分方程式が解析解を持つことを示す³。さらに、解析的に評価された期待回収額の被積分項を用いて、評価対象の期待回収額が相関の影響を考慮した生存確率を測度として期待担保価値を時間積分したもので評価できるという結果を導出する。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2節では、ハザード率を用いた期待損失の評価法を整理したうえで、ハザード率と担保価値の確率過程をモデル化し、ハザード率と対数担保価値を2次元の状態変数と考えたとき、状態変数がアフィン拡散過程に従うことを確認する。3節では、評価対象の期待損失の各要素を基本アフィン形式、拡張アフィン形式で評価し、得られる常微分方程式が解析解を持つことを示す。また、これらの解析解を用いて、期待回収額が測度変換された生存確率で期待担保価値を時間積分したものと評価できることを導出する。さらに、測度変換はハザード率変動と担保価値変動の瞬間的な相関を取り除く測度変換として与えられることを示す。また、より一般に損失の n 次モーメントについても同様の解析解と測度変換を導出する。4節では、3節で得られた損失の期待値および標準偏差の解析解を数値計算で求め、損失の期待値や標準偏差が負の相関の程度やハザード率の回帰速度パラメータでどのように変化するか感応度分析を行う。5節では、本稿をまとめる。補論では3節の議論の詳細を示す。

2 モデル

銀行がある企業に満期 T で額面 D の担保付貸出を行うことを考える。担保価値は A_t で表現され確率的に変動すると仮定する。貸出先の企業が満期 T までにデフォルトした際には、その時点の担保資産の一定割合 δ のみが貸出の回収に充てられると仮定する。貸出先企業のデフォルト時刻を τ と表記すると、銀行の損失は

$$L_\tau = D - \delta A_\tau \quad (1)$$

と表現される⁴。ここで δ は担保の処分に際して価値が減価する割合を示す $[0,1]$ の値をとる定数である。貸出先企業が時点 t までデフォルトしていないという条件のもと、時点 $t + dt$ までにデフォルトする確率をハザード率 h_t を用いて $h_t dt$ と表現できるとする。

²Chen and Joslin [2009] は、拡張アフィン形式をさらに一般化したモデルを提示しており、Duffie, Pan, and Singleton [2000] のモデルと同様に係数を規定するリッカチ型常微分方程式を導出しているが、その方程式に必ずしも解析解があるとは限らない点も同様である。

³Duffie, Pan, and Singleton [2000] では基本アフィン形式から導かれるリッカチ型常微分方程式が解析解を持つ例をいくつか紹介しているが、本稿で考察するタイプのモデルは含まれていない。

⁴この損失の定義では、デフォルト時に担保価値が偶々大きな値になったときには損失が負になる（100%超の回収率となる）こともありうるとしている。

具体的なモデルとして、当該企業のデフォルトを表現するハザード率の確率過程は、確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で

$$dh_t = \kappa(\bar{h} - h_t)dt + \sigma_h \sqrt{h_t} dW_t^h \quad (2)$$

という平方根過程で表されるものとする。ここで $\kappa, \bar{h}, \sigma_h$ は正の実数で表現されるパラメータであり、 \bar{h} はハザード率の中心回帰水準、 κ は中心回帰の速度を表すパラメータである。ハザード率の瞬間的なボラティリティは $\sigma_h \sqrt{h_t}$ で表現される。(2) 式の平方根過程で表されるハザード率は初期値 h_0 が正であれば非負性を保つことが知られている。また、 $2\kappa\bar{h} \geq \sigma_h^2$ というパラメータ条件を満たせばハザード率 h_t は 0 にはならず常に正となる (Cox, Ingersoll, and Ross [1985] を参照)。

担保資産価値の確率過程は⁵

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t \sqrt{h_t} dW_t^A \quad (3)$$

という確率過程に従っていると仮定する。ここで (2) 式と (3) 式の確率過程に含まれるブラウン運動は

$$\text{cov}(dW^A, dW^h) = \rho dt \quad (4)$$

という共分散を持つものと仮定する。現実には、景気後退期にはハザード率が上昇するとともに担保価値が下落しやすいことから、相関 ρ は負になると考えられるが、より一般的には正の値もとり得るとする。

本稿では、こうした設定で (1) 式で表される銀行の損失の期待値や n 次モーメントを解析的に評価していく。時点 t でデフォルトしているか否かの増大情報系を (\mathcal{H}_t) で表現し、(2),(3) 式で示されるブラウン運動 W_t^h, W_t^A から生成される増大情報系は、 $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W_s^h, W_s^A : s \leq t\})$ として、 (\mathcal{F}_t) で表す。さらに、別の増大情報系 (\mathcal{G}_t) を

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t \quad (5)$$

で定義する。デフォルト時刻 τ は増大情報系 (\mathcal{F}_t) に関して二重確率的な確率時刻であり、(2) 式のハザード率過程 (h_t) が定義できると仮定する。このとき、 $\int_t^T |L_s h_s| e^{-\int_t^s h_u du} ds$ の可積分性のもとで、銀行の期待損失は

$$\begin{aligned} E[L_\tau 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] &= DE[1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] - \delta E[A_\tau 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] \\ &= 1_{\{t < \tau\}} D(1 - \text{Pr}[\tau > T | t < \tau]) \\ &\quad - 1_{\{t < \tau\}} \delta E\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^s h_u du\right) h_s A_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right] \end{aligned} \quad (6)$$

⁵(3) 式の確率過程から担保価値 A_t は非負性を保つことがわかる。また、(3) 式の確率過程と幾何ブラウン運動 $dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dW_t^A$ との違いは拡散項から生じる瞬間的な分散にある。幾何ブラウン運動では瞬間的な分散が σ_A^2 と定数であるのに対し、(3) 式の瞬間的な分散は定数ではなく、ハザード率に比例して $\sigma_A^2 h_t$ で与えられると想定している。すなわち、ハザード率が大きいとき、担保資産価値は変動しやすいということを表現している。

で評価される⁶。本稿では (6) 式で表される期待損失とより一般的に損失の n 次モーメントを解析的に評価する。

2次元の状態変数ベクトル $X_t = (h_t, \ln A_t)^\top$ を導入すると、(2) ~ (4) 式より、 X_t はアフィン拡散過程に従うことがわかる。(3) 式は伊藤の補題により、

$$d \ln A_t = (\mu_A - \sigma_A^2 h_t / 2) dt + \sigma_A \sqrt{h_t} dW_t^A \quad (7)$$

と変形でき、(4) 式の相関を持たせるために、(2), (3) 式のブラウン運動を独立なブラウン運動 $W_{1,t}$, $W_{2,t}$ を用いて

$$W_t^A = W_{1,t}, \quad W_t^h = \rho W_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} W_{2,t} \quad (8)$$

と表すと、

$$dX_t = d \begin{pmatrix} h_t \\ \ln A_t \end{pmatrix} = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) d \begin{pmatrix} W_{1,t} \\ W_{2,t} \end{pmatrix} \quad (9)$$

ただし、

$$\mu(X_t) = \begin{pmatrix} \kappa \bar{h} \\ \mu_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\kappa & 0 \\ -\sigma_A^2 / 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_t \\ \ln A_t \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\sigma(X_t) = \begin{pmatrix} \sigma_h \sqrt{h_t} & 0 \\ \sigma_A \rho \sqrt{h_t} & \sigma_A \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{h_t} \end{pmatrix} \quad (11)$$

で与えられる。(10) 式よりドリフトは状態変数ベクトル X_t のアフィン形式で表現できている。また、(11) 式より瞬間的な分散共分散行列 $\sigma(X_t)\sigma(X_t)^\top$ を求めると

$$\sigma(X_t)\sigma(X_t)^\top = \begin{pmatrix} \sigma_h^2 h_t & \rho \sigma_A \sigma_h h_t \\ \rho \sigma_A \sigma_h h_t & \sigma_A^2 h_t \end{pmatrix} \quad (12)$$

となり、各要素が状態変数ベクトル X_t の線形関数で表現できていることがわかる。以上より、2次元の状態変数ベクトル $X_t = (h_t, \ln A_t)^\top$ はアフィン拡散過程に従っていることが確認できる。

3 期待損失と n 次モーメントの評価

3.1 期待損失の評価

まず、(2) ~ (4) 式で表現されるハザード率と担保価値の確率過程のもと、(6) 式で表現される期待損失を評価する。

⁶増大情報系の区別や二重確率的な確率時刻については、McNeil, Frey, and Embrechts [2005] の第9章を参照。本稿では一定期間の累積損失の分布を分析の対象としており、割引金利は0としている。ただし、本稿の結果は、固定金利での割引現在価値評価には直接的に応用できる。

(6) 式右辺第 1 項の $\Pr[\tau > T | t < \tau]$ は、時点 t まではデフォルトしていないという条件のもとで、満期 T までデフォルトしないという生存確率であり、

$$\Gamma(T - t | h_t) \equiv E\left[\exp\left(-\int_t^T h_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad (13)$$

で表現される。(2) 式で表現されるハザード率の確率過程（平方根過程）は 1 次元のアフィン拡散過程の 1 つであり、生存確率 $\Gamma(T - t; h_t)$ は Duffie, Pan, and Singleton [2000] の基本アフィン形式を用いて

$$\Gamma(T - t | h_t) = \left[\frac{2\gamma_h e^{(\gamma_h + \kappa)(T-t)/2}}{(\gamma_h + \kappa)e^{\gamma_h(T-t)} + \gamma_h - \kappa} \right]^{\frac{2\kappa\bar{h}}{\sigma_h^2}} \exp\left(\frac{2(1 - e^{\gamma_h(T-t)})h_t}{(\gamma_h + \kappa)e^{\gamma_h(T-t)} + \gamma_h - \kappa}\right) \quad (14)$$

と評価できる。ただし、

$$\gamma_h = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma_h^2} \quad (15)$$

である。生存確率の基本アフィン形式への帰着と、基本アフィン形式が満たす常微分方程式の解については補論 1 を参照。なお、(14) 式の生存確率は Cox, Ingersoll, and Ross [1985] の割引債価格と同じ形になっており、生存確率としては例えば Nakagawa [1999] で示されている。

(6) 式右辺第 2 項は期待回収額を示している。この被積分項

$$\zeta(t, s) \equiv E\left[\exp\left(-\int_t^s h_u du\right) h_s A_s \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad (16)$$

の評価を考える。この評価にあたっては、2 次元の状態ベクトル $X_t = (h_t, \ln A_t)^\top$ を導入し、期待値評価する。2 節で示したように状態ベクトル X_t は (2) ~ (4) 式の確率過程の設定からアフィン拡散過程に従う⁷。一方、 $\zeta(t, s)$ は

$$\zeta(t, s) = E\left[\exp\left(-\int_t^s h_u du\right) e^{\ln A_s} h_s \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad (17)$$

と変形でき、 X_t がアフィン拡散過程に従うことから、Duffie, Pan, and Singleton [2000] の拡張アフィン形式で評価できることがわかる。すなわち、この解は

$$\zeta(t, s) = (C(t) + B(t) \cdot X_t) \exp(\alpha(t) + \beta(t) \cdot X_t) \quad (18)$$

と評価され、係数 $C(t)$ 、 $B(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ はリッカチ型常微分方程式に従うことがわかる。導出されるリッカチ型常微分方程式は、一般の拡張アフィン形式では必ずしも解析解を持つとは限らないが、この場合は、

$$\tilde{\kappa} = \kappa - \rho\sigma_h\sigma_A, \quad \gamma = \sqrt{\tilde{\kappa}^2 + 2\sigma_h^2} \quad (19)$$

⁷Dai and Singleton [2000] の記法を用いれば $\mathbb{A}_1(2)$ のアフィン拡散モデルである。

と置いて、

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \mu_A(s-t) + \frac{2\kappa\bar{h}}{\sigma_h^2} \ln \frac{2\gamma e^{\frac{\gamma+\tilde{\kappa}}{2}(s-t)}}{(\gamma+\tilde{\kappa})e^{\gamma(s-t)} + (\gamma-\tilde{\kappa})}, \\
\beta(t) &\equiv (\beta_1(t), \beta_2(t))^\top, \quad \beta_1(t) = \frac{2(1-e^{\gamma(s-t)})}{(\gamma+\tilde{\kappa})e^{\gamma(s-t)} + (\gamma-\tilde{\kappa})}, \quad \beta_2(t) = 1, \\
B(t) &\equiv (B_1(t), B_2(t))^\top, \quad B_1(t) = \frac{4\gamma^2 e^{\gamma(s-t)}}{\{(\gamma+\tilde{\kappa})e^{\gamma(s-t)} + (\gamma-\tilde{\kappa})\}^2}, \quad B_2(t) = 0, \\
C(t) &= \frac{2\kappa\bar{h}(e^{\gamma(s-t)} - 1)}{(\gamma+\tilde{\kappa})e^{\gamma(s-t)} + (\gamma-\tilde{\kappa})}
\end{aligned} \tag{20}$$

という解析解を持つ。ここで、

$$\begin{aligned}
\eta(s-t|h_t) &\equiv \exp(\tilde{\alpha}(s-t) + \tilde{\beta}(s-t)h_t) \\
&= \left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+\tilde{\kappa})(s-t)/2}}{(\gamma+\tilde{\kappa})e^{\gamma(s-t)} + (\gamma-\tilde{\kappa})} \right]^{\frac{2\kappa\bar{h}}{\sigma_h^2}} \exp \left\{ \frac{2(1-e^{\gamma(s-t)})h_t}{(\gamma+\tilde{\kappa})e^{\gamma(s-t)} + (\gamma-\tilde{\kappa})} \right\}
\end{aligned} \tag{21}$$

ただし、

$$\tilde{\alpha}(s-t) \equiv \alpha(t) - \mu_A(s-t), \quad \tilde{\beta}(s-t) \equiv \beta_1(t) \tag{22}$$

とすると、 $\eta(s-t|h)$ は (14) 式の生存確率と同じ形をしていることがわかる。さらに、 $\eta(s-t|h)$ の s に関する微分は、

$$\tilde{C}(s-t) \equiv C(t), \quad \tilde{B}(s-t) \equiv B_1(t) \tag{23}$$

と置いて、

$$\frac{d\eta(s-t|h_t)}{ds} = (\tilde{C}(s-t) + \tilde{B}(s-t)h_t) \exp(\tilde{\alpha}(s-t) + \tilde{\beta}(s-t)h_t) \tag{24}$$

となっていることが確認でき、 $\zeta(t, s)$ は

$$\zeta(t, s) = -A_t e^{\mu_A(s-t)} \frac{d\eta(z|h_t)}{dz} \Big|_{z=s-t} \tag{25}$$

と表せることがわかる。導出の詳細については、より一般的に損失の n 次モーメントの評価として補論 2 に記述した。

(14) 式と (21) 式を比較すると、 κ が $\tilde{\kappa}$ に変更されていることがわかる。ただし、 $\kappa\bar{h}$ の項には変更が加えられていないことがわかる。また、(15), (19) 式より、 κ が $\tilde{\kappa}$ に変更されると γ_h が γ になることがわかる。この点を踏まえると、 $\eta(s-t|h_t)$ が「相関 ρ で調整された」生存確率、より具体的には、瞬間的な相関を打ち消すような測度変換を行った生存確率に相当していることがわかる。すなわち、 $\eta(s|h_0)$ は

$$dh_t = (\kappa\bar{h} - \tilde{\kappa}h_t)dt + \sigma_h \sqrt{h_t} d\tilde{W}_t^h \tag{26}$$

というハザード率の確率過程を考えたときの時点 s までの生存確率に相当している。(26) 式 of the hazard rate process is (2) 式 of the original hazard rate process and compared, the center of regression is from \bar{h} to $\kappa\bar{h}/\tilde{\kappa}$, the center of regression velocity is from κ to $\tilde{\kappa}$ and transformed, (19), (26) 式より

$$d\tilde{W}_t^h = dW_t^h - \rho\sigma_A\sqrt{h_t}dt \quad (27)$$

で関係付けられる \tilde{W}_t^h をブラウン運動と考える測度変換が行われていることがわかる。また、この測度変換は、ハザード率過程の拡散項に注目すると

$$\sigma_h\sqrt{h_t}d\tilde{W}_t^h = \sigma_h\sqrt{h_t}dW_t^h - \text{cov}(dh_t, d\ln A_t) \quad (28)$$

とハザード率と担保価値の変動の共分散を差し引くような測度変換になっていることがわかる。(25) 式を考察し直すと、このような測度変換により、

$$E\left[\exp\left(-\int_t^s h_u du\right) h_s A_s | \mathcal{F}_t\right] = E[A_s | \mathcal{F}_t] \tilde{E}\left[\exp\left(-\int_t^s h_u du\right) h_s | \mathcal{F}_t\right] \quad (29)$$

と担保価値の期待値評価とデフォルト確率の期待値評価を分離して行えることがわかる。ただし、 $\tilde{E}[\cdot]$ は (27) 式の測度変換後の期待値を表す。

(25) 式を用いて、(6) 式右辺第 2 項の期待回収額を評価すると、(30) 式のように 1 階のスティルチェス積分で評価できることがわかる。

$$\delta E\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^s h_u du\right) h_s A_s ds | \mathcal{F}_t\right] = -\delta A_t \int_0^{T-t} e^{\mu_A z} d\eta(z|h_t) \quad (30)$$

すなわち、期待回収額は、満期までの各時点の期待担保価値 $A_t e^{\mu_A z}$ を測度変換された生存確率 $\eta(z|h_t)$ を測度として 1 階積分することによって評価できる。

以上をまとめると、(6) 式で表される期待損失の時点 $t = 0$ での評価は、(14) 式、(30) 式を代入して

$$E[(D - \delta A_\tau) 1_{\{\tau \leq T\}}] = D(1 - \Gamma(T|h_0)) + \delta A_0 \int_0^T e^{\mu_A z} d\eta(z|h_0) \quad (31)$$

となる。ただし、 $\Gamma(T|h_0)$ 、 $\eta(s|h_0)$ はそれぞれ (14) 式、(21) 式で与えられる。

なお、(31) 式のスティルチェス積分は大きな正数 N に対して $\Delta = T/N$ という刻み幅を考え、(32) 式を評価することにより高速で数値計算ができる。

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{\mu_A i\Delta} \{\eta((i+1)\Delta|h_0) - \eta(i\Delta|h_0)\} \quad (32)$$

3.2 n 次モーメントの評価

貸出の損失評価を行う際、まず大切なのは 3.1 節で示した期待損失の評価であるが、そのばらつきとして、標準偏差や分散、さらに、高次のモーメントの評価を行えると

損失分布の形状をより精緻に捉えることができる。3.1節では期待損失が解析的に表現できることを示したが、本小節ではより一般的に損失の n 次モーメントが解析的に表現できることを示す。

損失の n 次モーメントは、二項展開により、

$$E[L_\tau^n | \mathcal{G}_t] = E[(D - \delta A_\tau)^n 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] = 1_{\{t < \tau\}} \sum_{i=0}^n {}_n C_i D^n (-\delta)^{n-i} I_{n-i} \quad (33)$$

と表現できる。ただし、

$$\begin{aligned} I_n &= E\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^s h_u du\right) A_s^n h_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \int_t^T E\left[\exp\left(-\int_t^s h_u du\right) e^{n \ln A_s} h_s \middle| \mathcal{F}_t\right] ds \end{aligned} \quad (34)$$

である。(18)式の $\zeta(t, s)$ の評価は I_1 の被積分項の期待値評価と解釈できる。一般に I_n の被積分項の期待値評価 $E[\exp(-\int_t^s h_u du) e^{n \ln A_s} h_s | \mathcal{F}_t]$ は拡張アフィン形式に帰着し、導出される常微分方程式は解析解をもち、 I_n は期待損失の評価と同様に1階のスティルチェス積分として高速に数値評価できる。また、デフォルト確率も I_n の特殊ケース I_0 とみなせる。補論2では一般的に I_n の評価の過程を詳しく記述している。一例として、損失の標準偏差は、 $t = 0$ として

$$\sqrt{\text{var}[(D - \delta A_\tau) 1_{\{\tau \leq T\}}]} = \sqrt{D^2 I_0 - 2\delta D I_1 + \delta^2 I_2 - (D I_0 - \delta I_1)^2} \quad (35)$$

と I_n の組合せで評価できる。

4 数値計算

本節では、(31)式で表される期待損失と(35)式で表される損失の標準偏差の数値例を示す。パラメータの設定は、 $D = A_0 = 100$, $T = 1$, $\delta = 0.7$, $\mu_A = 1\%$, $\sigma_A = 0.5$, $\sigma_h = 20\%$ とする。 I_n の評価におけるスティルチェス積分は(32)式のように評価し、刻み数 $N = 1,000$ とする。図1では $h_0 = 4\%$, $\bar{h} = 3\%$ と設定し、図2では $h_0 = 3\%$, $\bar{h} = 4\%$ と設定する。図1、2では、ハザード率の中心回帰速度のパラメータ κ に関して $\kappa = 0.1, 1, 5, 10$ の4つの場合について、期待損失(左図)、標準偏差(右図)が負の相関 ρ でどのように変化するかを示している。図1と図2を比較すると、 κ の大きさと期待損失や標準偏差の大きさの関係は h_0 と \bar{h} の大小関係によるものの、どちらの場合でも、相関の度合い ($|\rho|$) が高まるほど期待損失は大きくなり、その傾向は中心回帰速度が遅い (κ の値が小さい) ほど強くなることがわかる。標準偏差についても同様の傾向があり、期待損失の増加幅と標準偏差の増加幅はほぼ等しくなっていることがわかる。したがって、ハザード率の中心回帰速度が遅いときほど、信用リスク管理を行っていくうえで負の相関 ρ に注意する必要があるといえる。

図 1: 負の相関 ρ に対する期待損失と損失の標準偏差 ($h_0 > \bar{h}$)

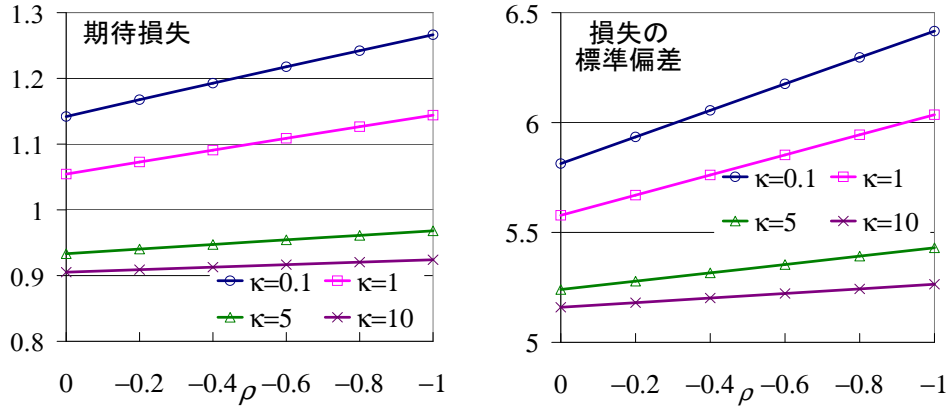
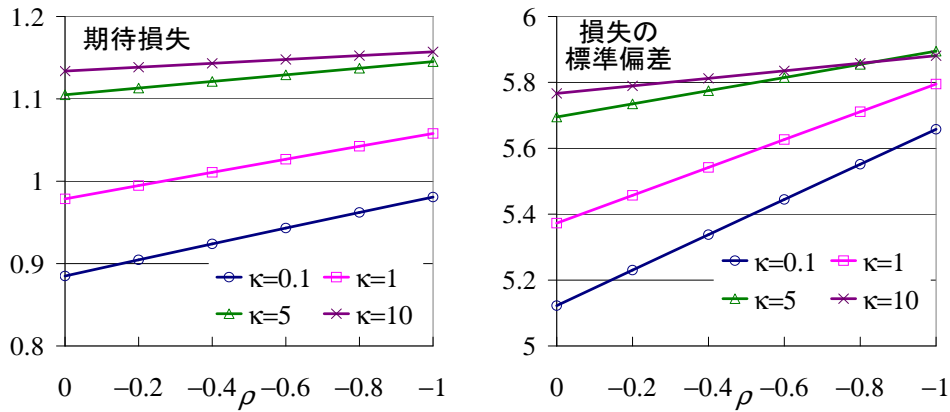


図 2: 負の相関 ρ に対する期待損失と損失の標準偏差 ($h_0 < \bar{h}$)



5 おわりに

本稿では、担保付貸出の評価にあたり、以下の3つの要素を備えたモデルを提示し、損失の期待値ならびに n 次モーメントが解析的に評価されることを示した。

- (1) デフォルト事象は外生的なハザード率の確率過程に基づき、満期までの間いつでも生じ得る。
- (2) ハザード率と担保価値の変動は負の相関を持つ。
- (3) ハザード率と担保価値は非負性を保つ。

具体的には、ハザード率を平方根過程とし、ハザード率と対数資産価値が2次元のアフィン拡散過程に従うモデルを想定して、期待損失および損失の n 次モーメントの被積分項を、拡張アフィン形式を用いて評価し、解析解を導出した。得られた解析解は相関を考慮して測度変換された生存確率を用いて表現できることも示した。

得られた解析解より、期待損失および損失の n 次モーメントは1階のスティルチェス積分で表現でき、離散化した和として数値的に高速で数値計算できることが示された。数値例から、ハザード率と担保価値の負の相関 $-\rho$ の度合い ($|\rho|$) が強いほど期待損失や損失の標準偏差は大きくなり、その傾向は中心回帰速度 κ が遅いほど強くなることが示された。すなわち、ハザード率の中心回帰速度が遅いときほど、信用リスク管理を行っていくうえで負の相関に注意する必要があることが示唆された。

本稿では扱わなかった実務上の課題の1つとして、ハザード率過程や担保資産価値過程のパラメータをどのように推定するかが挙げられる。例えば、時系列データを用いて推定する場合、ハザード率については対象とする企業と同格付けあるいは類似の財務データを持つ企業がデフォルトしたか否かの集計データを用いて推定することになる。集計データはポートフォリオに対する観測データであるため、本稿では扱わなかった個別エクスポージャーのハザード率の相関についても考慮しなければならない点に注意が必要である。

補論1 生存確率の導出

生存確率は1次元の状態変数 $X_t = h_t$ を考えると、基本アフィン形式で評価でき、

$$E[\exp\left(-\int_t^T h_s ds\right) | \mathcal{F}_t] = \exp(\alpha_h(t) + \beta_h(t)h_t) \quad (\text{A-1})$$

と書き表される。基本アフィン形式で導かれる常微分方程式より、 $\alpha_h(t)$ と $\beta_h(t)$ は以下の常微分方程式を満たす。

$$\frac{d\beta_h(t)}{dt} = 1 + \kappa\beta_h(t) - \frac{1}{2}\sigma_h^2\beta_h(t)^2 \quad (\text{A-2})$$

$$\frac{d\alpha_h(t)}{dt} = -\kappa\bar{h}\beta_h(t) \quad (\text{A-3})$$

境界条件は

$$\beta_h(T) = 0, \quad \alpha_h(T) = 0 \quad (\text{A-4})$$

で与えられる。

境界条件 (A-4) のもとで (A-2) 式のリッカチ型常微分方程式を解くと、

$$\beta_h(t) = \frac{2(1 - e^{\gamma_h(T-t)})}{(\gamma_h + \kappa)e^{\gamma_h(T-t)} + \gamma_h - \kappa} \quad (\text{A-5})$$

となる。ただし、

$$\gamma_h = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma_h^2} \quad (\text{A-6})$$

である。リッカチ型常微分方程式の解法は補論3を参照。

(A-4) 式と (A-5) 式を (A-3) 式に代入して積分すると次式を得る。

$$\alpha_h(t) = \alpha_h(t) - \alpha_h(T) = \kappa\bar{h} \int_t^T \beta_h(s) ds = \frac{2\kappa\bar{h}}{\sigma_h^2} \ln \frac{2\gamma_h e^{\frac{\gamma_h + \kappa}{2}(T-t)}}{(\gamma_h + \kappa)e^{\gamma_h(T-t)} + \gamma_h - \kappa} \quad (\text{A-7})$$

(A-5)、(A-7) 式を (A-1) 式に代入すると、生存確率は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Gamma(T-t|h_t) &= E[\exp\left(-\int_t^T h_s ds\right) | \mathcal{F}_t] \\ &= \left[\frac{2\gamma_h e^{(\gamma_h + \kappa)(T-t)/2}}{(\gamma_h + \kappa)e^{\gamma_h(T-t)} + \gamma_h - \kappa} \right]^{\frac{2\kappa\bar{h}}{\sigma_h^2}} \exp\left(\frac{2(1 - e^{\gamma_h(T-t)})h_t}{(\gamma_h + \kappa)e^{\gamma_h(T-t)} + \gamma_h - \kappa}\right) \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

補論2 拡張アフィン形式による損失の期待値・ n 次モーメントの評価

(6) 式の期待損失、より一般的に損失の n 次モーメントは (33) 式のように (34) 式の I_n の組合せで表される。本補論では I_n を拡張アフィン形式で評価する。

まず、2節で示したように2次元の状態変数ベクトル $X_t = (h_t, \ln A_t)^\top$ を導入すると、 X_t はアフィン拡散過程に従うことがわかる。すなわち、

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad (\text{A-9})$$

であり、ドリフト $\mu(X_t)$ は状態変数ベクトル X_t のアフィン形式、瞬間的な分散共分散行列 $\sigma(X_t)\sigma(X_t)^\top$ の各要素も状態変数ベクトル X_t のアフィン形式で表現される。Duffie, Pan, and Singleton [2000] は (A-9) 式のようなアフィン拡散過程に従う状態変数について

$$\phi(v, w, X_t, t, T) = E\left[\exp\left(-\int_t^T R(X_u)du\right) (v \cdot X_T)e^{w \cdot X_T} | \mathcal{F}_t\right] \quad (\text{A-10})$$

という期待値演算を拡張アフィン形式 (extended affine) と呼んでいる。ただし、

$$R(X_u) = r_0 + r_1 \cdot X_u \quad (\text{A-11})$$

である。Duffie, Pan, and Singleton [2000] は、この拡張アフィン形式が

$$\phi(v, w, X_t, t, T) = (C(t) + B(t) \cdot X_t) \exp(\alpha(t) + \beta(t) \cdot X_t) \quad (\text{A-12})$$

と評価されることを示し、係数 $C(t)$ 、 $B(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ の従う常微分方程式を示している。

ここで

$$r_0 = 0 \text{ かつ } r_1 = (1, 0) \text{ すなわち } R(X_u) = h_u \quad (\text{A-13})$$

$$w = (0, n) \text{ すなわち } e^{w \cdot X_T} = e^{n \ln A_T} = A_T^n \quad (\text{A-14})$$

$$v = (1, 0) \text{ すなわち } v \cdot X_T = h_T \quad (\text{A-15})$$

とすれば、

$$\phi(v, w, X_t, t, T) = E\left[\exp\left(-\int_t^T h_u du\right) A_T^n h_T | \mathcal{F}_t\right] \quad (\text{A-16})$$

となり、 I_n の被積分項が拡張アフィン形式に相当していることがわかる。

(A-16) の拡張アフィン形式は、Duffie, Pan, and Singleton [2000] で示された常微分方程式より、係数 $C(t)$ 、 $B(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ が以下の常微分方程式を満たすことになる。ただし、 $B(t) = (B_1(t), B_2(t))^\top$ 、 $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))^\top$ である。

$$\frac{d\beta_1(t)}{dt} = 1 + \kappa\beta_1(t) + \frac{\sigma_A^2}{2}\beta_2(t) - \frac{1}{2}\beta(t)^\top \begin{pmatrix} \sigma_h^2 & \rho\sigma_h\sigma_A \\ \rho\sigma_h\sigma_A & \sigma_A^2 \end{pmatrix} \beta(t) \quad (\text{A-17})$$

$$= 1 + \kappa\beta_1(t) + \frac{\sigma_A^2}{2}\beta_2(t) - \frac{\sigma_h^2}{2}\beta_1(t)^2 - \rho\sigma_h\sigma_A\beta_1(t)\beta_2(t) - \frac{\sigma_A^2}{2}\beta_2(t)^2$$

$$\frac{d\beta_2(t)}{dt} = 0 \quad (\text{A-18})$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = - \begin{pmatrix} \kappa \bar{h} \\ \mu_A \end{pmatrix} \cdot \beta(t) = -\kappa \bar{h} \beta_1(t) - \mu_A \beta_2(t) \quad (\text{A-19})$$

$$\begin{aligned} -\frac{dB_1(t)}{dt} &= -\kappa B_1(t) - \frac{\sigma_A^2}{2} B_2(t) + \beta(t)^\top \begin{pmatrix} \sigma_h^2 & \rho \sigma_h \sigma_A \\ \rho \sigma_h \sigma_A & \sigma_A^2 \end{pmatrix} B(t) \\ &= -\kappa B_1(t) - \frac{\sigma_A^2}{2} B_2(t) + \sigma_h^2 \beta_1(t) B_1(t) \\ &\quad + \rho \sigma_h \sigma_A (\beta_1(t) B_2(t) + \beta_2(t) B_1(t)) + \sigma_A^2 \beta_2(t) B_2(t) \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

$$-\frac{dB_2(t)}{dt} = 0 \quad (\text{A-21})$$

$$-\frac{dC(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \kappa \bar{h} \\ \mu_A \end{pmatrix} \cdot B(t) = \kappa \bar{h} B_1(t) + \mu_A B_2(t) \quad (\text{A-22})$$

境界条件は

$$\beta_1(T) = 0, \quad \beta_2(T) = n, \quad \alpha(T) = 0 \quad (\text{A-23})$$

$$B_1(T) = 1, \quad B_2(T) = 0, \quad C(T) = 0 \quad (\text{A-24})$$

で与えられる。

まず、(A-23) 式の境界条件のもと、(A-17)、(A-18)、(A-19) 式の常微分方程式を解く。(A-23) 式の境界条件と (A-18) 式より

$$\beta_2(t) = n \quad (\text{A-25})$$

となる。(A-25) 式を (A-17) 式に代入して

$$\frac{d\beta_1(t)}{dt} = 1 + \frac{n(1-n)\sigma_A^2}{2} + (\kappa - n\rho\sigma_h\sigma_A)\beta_1(t) - \frac{\sigma_h^2}{2}\beta_1(t)^2 \quad (\text{A-26})$$

を得る。(A-26) 式はリッカチ型常微分方程式になっており、(A-23) 式の境界条件のもと、補論 3 に示す方法で次式のように解ける。

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= \frac{(\tilde{\kappa}_n + \gamma_n) + (\tilde{\kappa}_n - \gamma_n)\tilde{\delta}_n e^{\gamma_n(T-t)}}{\sigma_h^2(\tilde{\delta}_n e^{\gamma_n(T-t)} + 1)} = \frac{(\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)(1 - e^{\gamma_n(T-t)})}{\sigma_h^2\{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)\}} \\ &= \frac{\{2 + n(1-n)\sigma_A^2\}(1 - e^{\gamma_n(T-t)})}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)} \end{aligned} \quad (\text{A-27})$$

ただし、

$$\tilde{\kappa}_n = \kappa - n\rho\sigma_h\sigma_A \quad (\text{A-28})$$

$$\gamma_n = \sqrt{\tilde{\kappa}_n^2 + \sigma_h^2\{2 + n(1-n)\sigma_A^2\}} \quad (\text{A-29})$$

$$\tilde{\delta}_n = \frac{\tilde{\kappa}_n + \gamma_n}{-\tilde{\kappa}_n + \gamma_n} \quad (\text{A-30})$$

である。(A-25)、(A-27) 式を (A-19) 式に代入して (A-23) 式の境界条件のもとで積分すると、

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \alpha(t) - \alpha(T) = \int_t^T \{\kappa\bar{h}\beta_1(s) + n\mu_A\}ds \\
&= n\mu_A(T-t) + \frac{\kappa\bar{h}(\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)}{\sigma_h^2} \int_t^T \frac{(1 - e^{\gamma_n(T-s)})}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-s)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)} ds \\
&= \left\{ n\mu_A + \frac{\kappa\bar{h}(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)}{\sigma_h^2} \right\} (T-t) + \frac{2\kappa\bar{h}}{\sigma_h^2} \ln \frac{2\gamma_n}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)}
\end{aligned} \tag{A-31}$$

を得る。

次に、(A-24) 式の境界条件のもと (A-20)、(A-21)、(A-22) 式の常微分方程式を解く。(A-23) 式の境界条件と (A-21) 式より

$$B_2(t) = 0 \tag{A-32}$$

が得られ、(A-32)、(A-25) 式を (A-20) 式に代入すると、

$$-\frac{dB_1(t)}{dt} = -\kappa B_1(t) + \sigma_h^2 \beta_1(t) B_1(t) + n\rho\sigma_h\sigma_A B_1(t) \tag{A-33}$$

となる。(A-33) 式に (A-27) 式を代入し、(A-24) 式の境界条件のもとで積分すると、

$$\begin{aligned}
\ln B_1(t) &= - \int_t^T \{\tilde{\kappa}_n - \sigma_h^2 \beta_1(s)\} ds \\
&= -\tilde{\kappa}_n(T-t) + \sigma_h^2 \int_t^T \beta_1(s) ds \\
&= \gamma_n(T-t) + 2 \ln \frac{2\gamma_n}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)}
\end{aligned} \tag{A-34}$$

となり、変形して

$$B_1(t) = \frac{4\gamma_n^2 e^{\gamma_n(T-t)}}{\{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)\}^2} \tag{A-35}$$

を得る。また、(A-32) 式を (A-22) 式に代入すれば

$$-\frac{dC(t)}{dt} = \kappa\bar{h}B_1(t) \tag{A-36}$$

となり、(A-24) 式の境界条件のもとで (A-35) 式を代入して積分すれば

$$\begin{aligned}
C(t) &= \kappa\bar{h} \int_t^T B_1(s) ds = 4\gamma_n^2 \kappa\bar{h} \int_t^T \frac{e^{\gamma_n(T-s)}}{\{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-s)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)\}^2} ds \\
&= -\frac{4\gamma_n \kappa\bar{h}}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)} \int_{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)}^{2\gamma_n} \frac{1}{z^2} dz \\
&= \frac{2\kappa\bar{h}(e^{\gamma_n(T-t)} - 1)}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)}
\end{aligned} \tag{A-37}$$

となる。

したがって、(A-16) 式は、

$$\begin{aligned} E[\exp\left(-\int_t^T h_u du\right) A_T^n h_T | \mathcal{F}_t] \\ = A_t^n e^{n\mu_A(T-t)} (\tilde{C}(T-t) + \tilde{B}(T-t)h_t) \exp(\tilde{\alpha}(T-t) + \tilde{\beta}(T-t)h_t) \end{aligned} \quad (\text{A-38})$$

ただし、

$$\tilde{C}(z) = \frac{2\kappa\bar{h}(e^{\gamma_n z} - 1)}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n z} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)} \quad (\text{A-39})$$

$$\tilde{B}(z) = \frac{4\gamma_n^2 e^{\gamma_n z}}{\{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n z} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)\}^2} \quad (\text{A-40})$$

$$\tilde{\alpha}(z) = \frac{\kappa\bar{h}(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)}{\sigma_h^2} z - \frac{2\kappa\bar{h}}{\sigma_h^2} \ln \frac{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n z} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)}{2\gamma_n} \quad (\text{A-41})$$

$$\tilde{\beta}(z) = \frac{(\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)}{\sigma_h^2} \frac{(1 - e^{\gamma_n z})}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n z} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)} \quad (\text{A-42})$$

となる。

ここで、

$$\begin{aligned} \eta_n(z|h_t) &\equiv \exp(\tilde{\alpha}(z) + \tilde{\beta}(z)h_t) \\ &= \left[\frac{2\gamma_n e^{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)z/2}}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n z} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)} \right]^{\frac{2\kappa\bar{h}}{\sigma_h^2}} \exp\left\{ \frac{\{2 + n(1-n)\sigma_A^2\}(1 - e^{\gamma_n z})h_t}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n z} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-43})$$

とすると、(A-8) 式の生存確率 $\Gamma(z|h_t)$ と比較することで、 $\eta_n(z|h_t)$ が生存確率に相当していることがわかる。ただし、パラメータ $\kappa, \gamma_n, \bar{h}$ はそれぞれ $\tilde{\kappa}_n, \gamma_n, \kappa\bar{h}/\tilde{\kappa}_n$ に代わり、ハザード率の初期値は h_t から $\{1 + n(1-n)\sigma_A^2/2\}h_t$ に代わったものと考えられる。さらに、

$$\frac{d\tilde{\alpha}(z)}{dz} = \frac{\tilde{\kappa}_n^2 - \gamma_n^2}{2\sigma_h^2} \tilde{C}(z), \quad \frac{d\tilde{\beta}(z)}{dz} = \frac{\tilde{\kappa}_n^2 - \gamma_n^2}{2\sigma_h^2} \tilde{B}(z) \quad (\text{A-44})$$

が満たされることに注目すると、 $\eta_n(z|h_t)$ の満期までの時間 z に関する 1 階微分が

$$\frac{d\eta_n(z|h_t)}{dz} = \frac{\tilde{\kappa}_n^2 - \gamma_n^2}{2\sigma_h^2} \exp(\tilde{\alpha}(z) + \tilde{\beta}(z)h_t) \{\tilde{C}(z) + \tilde{B}(z)h_t\} \quad (\text{A-45})$$

で与えられることがわかる。

(A-45) 式を (A-38) 式に代入し、 $T = s$ とすると

$$E[\exp\left(-\int_t^s h_u du\right) A_s^n h_s | \mathcal{F}_t] = A_t^n e^{n\mu_A(s-t)} \frac{2\sigma_h^2}{\tilde{\kappa}_n^2 - \gamma_n^2} \frac{d\eta_n(z|h_t)}{dz} \Big|_{z=s-t} \quad (\text{A-46})$$

と整理できる。これを (A-29) 式を用いて (34) 式に代入すると、 I_n を次式のように整理できる。

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{-A_t^n}{1 + n(1-n)\sigma_A^2/2} \int_t^T e^{n\mu_A(s-t)} d\eta_n(s-t|h_t) \\ &= \frac{-A_t^n}{1 + n(1-n)\sigma_A^2/2} \int_0^{T-t} e^{n\mu_A z} d\eta_n(z|h_t) \end{aligned} \quad (\text{A-47})$$

補論3 リッカチ型常微分方程式の解

リッカチ型の常微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{2}a^2y(t)^2 + by(t) + c \quad (\text{A-48})$$

の解法を考える。境界条件は

$$y(T) = g \quad (\text{A-49})$$

で与えられるとする。\$a, b, c, g\$ は定数で \$c \ge 0\$ とする。(A-49) 式の境界条件のもとでの (A-48) 式の常微分方程式の解は

$$y(t) = \frac{b + \gamma + (b - \gamma)\lambda e^{\gamma(T-t)}}{a^2(\lambda e^{\gamma(T-t)} + 1)} \quad (\text{A-50})$$

で与えられる。ただし、

$$\gamma = \sqrt{b^2 + 2a^2c} \quad (\text{A-51})$$

$$\lambda = \frac{-a^2g + b + \gamma}{a^2g - b + \gamma} \quad (\text{A-52})$$

である。

証明. (A-48) 式は次式と同値である。

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{2}a^2(y(t) - y_1)(y(t) - y_2) \quad (\text{A-53})$$

ただし、

$$y_1 = \frac{b + \gamma}{a^2}, \quad y_2 = \frac{b - \gamma}{a^2}, \quad \gamma = \sqrt{b^2 + 2a^2c} \quad (\text{A-54})$$

(A-53) 式を

$$-\frac{1}{2}a^2 dt = \frac{dy(t)}{(y(t) - y_1)(y(t) - y_2)}$$

と変形し、両辺を時間に関して \$[t, T]\$ の範囲で積分すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}a^2(T - t) &= \int_{y(t)}^{y(T)} \frac{dy(s)}{(y(s) - y_1)(y(s) - y_2)} \\ &= \frac{1}{y_1 - y_2} \int_{y(t)}^{y(T)} \left\{ \frac{1}{y(s) - y_1} - \frac{1}{y(s) - y_2} \right\} dy(s) \\ &= \frac{1}{y_1 - y_2} \left\{ \ln \frac{y(T) - y_1}{y(t) - y_1} - \ln \frac{y(T) - y_2}{y(t) - y_2} \right\} = \frac{a^2}{2\gamma} \left\{ \ln \frac{g - y_1}{g - y_2} \frac{y(t) - y_2}{y(t) - y_1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-55})$$

(A-55) 式を整理すると (A-50) 式が導出される。□

参考文献

- Altman, Edward I., Brooks Brady, Andrea Resti, and Andrea Sironi, “The PD/LGD Link: Empirical Evidence from the Bond Market,” in *Recovery Risk*, Altman, E. I., A. Resti, and A. Sironi (eds.), Risk Books, 2005, pp.217–233.
- Bakshi, Gurdip, Dilip Madan, and Frank Zhang, “Understanding the Role of Recovery in Default Risk Models: Empirical Comparisons and Implied Recovery Rates,” working paper, 2006.
- Basel Committee on Banking Supervision, “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards,” Basel Committee Publications No. 107, November 2005. (<http://www.bis.org/>で入手可能)
- Black, Fischer and John C. Cox, “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions,” *Journal of Finance*, **31**(2), 1976, pp.351–367.
- Chen, Hui and Scott Joslin, “Generalized Transform Analysis of Affine Processes and Asset Pricing Application,” working paper, 2009.
- Chen, Long, Pierre Collin-Dufresne, and Robert S. Goldstein, “On the Relation Between the Credit Spread Puzzle and the Equity Premium Puzzle,” *Review of Financial Studies*, **22**(9), 2009, pp.3367–3409.
- Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll Jr., and Stephen A. Ross, “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica*, **53**(2), 1985, pp.385–407.
- Dai, Qiang and Kenneth J. Singleton, “Specification Analysis of Affine Term Structure Models,” *Journal of Finance*, **55**(5), 2000, pp.1943–1978.
- Duffie, Darrell, Jun Pan, and Kenneth J. Singleton, “Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions,” *Econometrica*, **68**(6), 2000, pp.1343–1376.
- and David Lando, “Term Structure of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information,” *Econometrica*, **69**(3), 2001, pp.633–664.
- and Kenneth J. Singleton, *Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management*, Princeton University Press, 2003.
- , “Credit Risk Modeling with Affine Processes,” *Journal of Banking and Finance*, **29**(11), 2005, pp.2751–2802.

- Guo, Xin, Robert A. Jarrow, and Yan Zeng, “Modeling the Recovery Rate in a Reduced Form Model,” *Mathematical Finance*, **19**(1), 2009, pp.73–97.
- Kijima, Masaaki and Yusuke Miyake, “On the Term Structure of Lending Interest Rates When a Fraction of Collateral is Recovered upon Default,” *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **21**(1), 2004, pp.35–56.
- McNeil, Alexander J., Rüdiger Frey, and Paul Embrechts, *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton University Press, 2005. (『定量的リスク管理—基礎概念と数理技法—』、塚原英敦ら訳、共立出版、2008年)
- Nakagawa, Hidetoshi, “Valuation of Default Swap with Affine-type Hazard Rate,” *Proceeding of the Japan Academy Ser. A*, **75**(3), 1999, pp.43–46.
- Pykhtin, Michael, “Unexpected Recovery Risk,” *Risk*, **16**(8), 2003, pp.74–78.