

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

コモディティ価格変動の特徴と プライシング・モデルの展開

もろた たかよし
諸田崇義

Discussion Paper No. 2010-J-1

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

コモディティ価格変動の特徴とプライシング・モデルの展開

もろた たかよし*
諸田 崇義*

要 旨

近年、原油や金属などコモディティのデリバティブ取引の規模は世界的に拡大傾向にあり、その価格変動に注目が集まっている。コモディティは実物資産であるため、その価格は、消費需要や供給制約等を反映するなど、他の金融商品とは異なる特徴を持つ。例えば、原資産の需給が引き締まっている状況では、先物カーブにバックワーデーションという現象が生じやすいほか、貯蔵が困難な財のスポット価格にはスパイクという現象が生じることがある。こうした価格変動の特徴は、株や債券など通常の金融資産に対するプライシング・モデルでは捉えられず、コモディティのためのモデルが開発されてきている。本稿では、コモディティに特徴的な価格変動を紹介したうえで、それらも表現可能なように構築された各種のプライシング・モデルについてサーベイする。また、各商品に対してモデルを適用した研究を紹介する。

キーワード：コモディティ、コンビニエンス・イールド、キャリー・コスト、バックワーデーション、スパイク、原油、先物

JEL classification: G13、Q14、Q41

* 日本銀行金融研究所 (E-mail: takayoshi.morota@boj.or.jp)

本稿の作成に当たっては、大橋和彦教授（一橋大学）および日本銀行スタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

(目次)

1. はじめに	1
2. コモディティ取引の概要と価格変動の特徴	2
(1) コモディティ市場の概観	2
(2) さまざまなコモディティ取引	4
(3) 先物価格・スポット価格の特徴	7
イ. 先物価格の期間構造	7
ロ. 長期均衡水準への平均回帰と回帰水準のシフト	10
ハ. 季節性	12
ニ. 高ボラティリティ、スパイク、ジャンプ	15
3. プライシング・モデル	17
(1) プライシング・モデルの類型化	17
(2) コンビニエンス・イールドと先物価格	18
(3) ボラティリティ変動モデルへの拡張	24
イ. ボラティリティの季節性と時間変化	24
ロ. オプション・ボラティリティ特有の変動	27
(4) 潜在変数モデル	30
(5) スポット価格のスパイクの表現	32
イ. ジャンプ過程を用いたモデル	33
ロ. 需給変動からスパイクを表現するモデル	35
(6) プライシング・モデルのまとめ	39
4. 応用例	41
(1) 原油	41
(2) 銅	42
(3) 天然ガス	43
(4) 貴金属	43
(5) 穀物	45
(6) 電力	46
5. おわりに	47
参考文献	49

1. はじめに

近年、エネルギー資源、金属、穀物といったコモディティ（商品）の価格変動に注目が集まっている。企業は、原材料や生産物価格の価格変動リスクをヘッジする目的から、コモディティの先物・先渡取引や各種スプレッド取引に対するニーズを高めている。また、インフレ・リスクをヘッジする目的や、伝統的な金融資産との相関の低さを利用したポートフォリオ最適化上の利点などもあって、新しいアセット・クラスとしても注目されており、オルタナティブ投資における重要性も高まりつつある。実際、BIS 統計や取引所の総取引高データをみると、コモディティ・デリバティブの規模は拡大傾向にある。

コモディティは、財の消費に本源的な価値が存在する実物資産であるがゆえに、金融資産と異なった特徴的な価格変動パターンを示すほか、その先物価格にも特徴的な期間構造が現れることがよく知られている。

コモディティの価格変動要因は多岐にわたり、供給制約、保管コスト、需要や供給の季節性、在庫、投機的取引の存在などがある。こうした価格変動要因は、実物資産に特徴的なものが多い。例えば、電力は貯蔵が難しいため、需要に合わせて供給を調整しているが、需要量が供給量の限界を超えるとスポット価格は急激に上昇する。また、天然ガスや灯油は、高需要期に先物価格水準が高くなるという季節性が強い。

先物取引においては、将来の受渡時点までの需給予測に加え、在庫の保有に伴う保管コストや、現物を消費できることのメリットなども勘案して価格形成がなされる。金融資産では、保管コストや現物を消費できることのメリットは小さくモデル化は不要な場合が多いが、コモディティではこうした要素を無視することができず、プライシング・モデルは複雑になる。また、こうした要素は、コモディティごとに特徴が異なるため、コモディティの種類に応じてさまざまなモデルが研究されてきている。

本稿では、コモディティの価格変動の特徴を整理し、それらを表現するプライシング・モデルについてサーベイを行う。本稿の構成は以下のとおりである。2節では、コモディティ市場を概観したうえで、さまざまな特徴を説明し、3節では、それらの特徴を踏まえたコモディティのプライシング・モデルを特徴別に分類して紹介する。4節では、応用例として、各種のコモディティにモデルを適用した実証分析の結果をまとめる。

2. コモディティ取引の概要と価格変動の特徴

(1) コモディティ市場の概観

エネルギー資源や金属、穀物といった実物資産は、コモディティと呼ばれ、規格化された現物やこれを原資産とした先物やオプションが商品先物市場で取引されている（表 1 参照）。それぞれの商品先物市場は、発展の歴史的経緯を映じて主要な商品に特徴を持っており、シカゴ・マーカンタイル取引所（Chicago Mercantile Exchange ; CME）やシカゴ商品取引所（Chicago Board of Trade ; CBOT）であれば農畜産物、ニューヨーク・マーカンタイル取引所（New York Mercantile Exchange ; NYMEX）はエネルギーや金属、ロンドン金属取引所（London Metal Exchange ; LME）は金属、インターコンチネンタル取引所（Intercontinental Exchange ; ICE）はエネルギーを中心に現物や派生商品の取引の場を提供している¹。

表 1 商品取引所におけるコモディティ取引の事例

分類	商 品
エネルギー関連	原油、天然ガス、電力、石油製品（ガソリン、灯油）、石炭、排出権
金属・工業品	非鉄金属（銅、アルミ、ニッケル、亜鉛、錫、鉛）、貴金属（金、銀、プラチナ、パラジウム）、工業品（ゴム）
農畜産物	大豆、小麦、トウモロコシ、米、砂糖、綿花、コーヒー、カカオ、オレンジジュース、食用油、豚肉、牛肉、牛、ミルク、バター、木材、パルプ

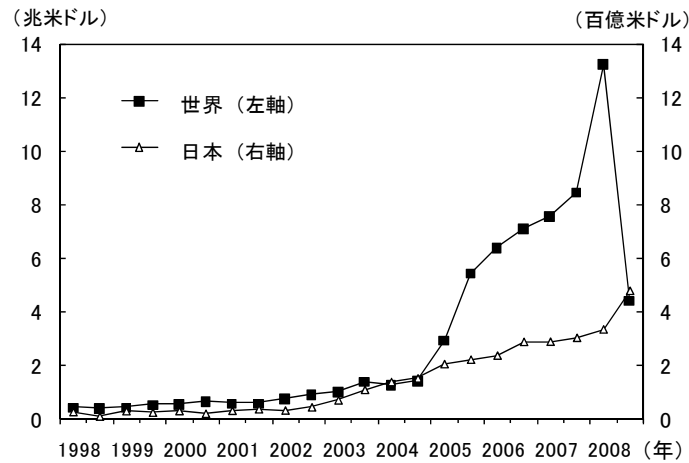
表 1 に示した取引所取引では、品質や決済方法を規格化するために、現物の一取引あたりの数量や、引渡場所、引渡方法が商品ごとに詳細に指定されているほか、原油のように産地別に取引を行うこともある。一方、店頭取引は、相対で契約を交わすため契約内容の自由度が高く、コモディティの生産者・需要家のさまざまなニーズを満たす多様な契約形態がある。生産者と需要家が直接契約を結ぶこともあるが、商社や金融機関、ブローカー等の仲介者が相手方にな

¹ ICE は、ロンドンをはじめニューヨーク、シカゴ等に拠点を置き、主にエネルギーを中心に取り扱う電子取引所であり、M&A によって他取引所を傘下に収めてきたことから、拠点所在地の意味（コモディティ産地との地理的関連性）は薄まりつつある。ICE は、北海ブレント等を主力商品に持つロンドン国際石油取引所（International Petroleum Exchange ; IPE、現 ICE Futures Europe）や、綿花・砂糖等のソフト・コモディティで発展してきたニューヨーク商品取引所（New York Board of Trade ; NYBOT、現 ICE Futures U.S.）を傘下に持つ。なお、CBOT や NYMEX は CME によって買収されている。日本では、東京工業商品取引所や東京穀物商品取引所などが、エネルギー・金属・農産物を扱っている。

る場合が多い。

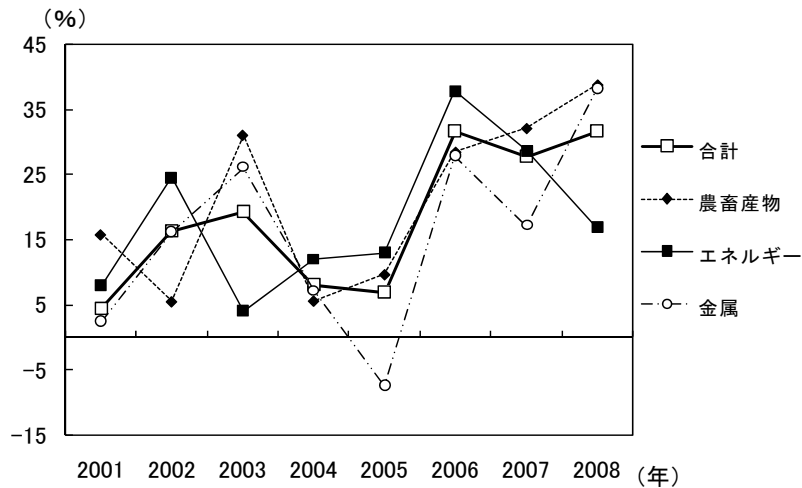
コモディティ市場の規模は、近年、急速に増加してきた。G10 諸国の主要金融機関を対象とした市場調査（図 1）をみると、世界の店頭デリバティブの取引残高は 2005 年より急激に増加しており、取引所取引（図 2）をみても、エネルギー、金属、農畜産物、いずれの分野の取引量も高い伸びを続けている。

図 1 店頭取引残高（想定元本ベース、各年 6・12 月末時点）



資料：BIS [2009]、日本銀行 [2009]を基に作成²。

図 2 取引所取引（年間取引枚数、前年比）



備考：対象は世界主要取引所 69 先（2008 年時点）。

資料：Futures Industry Association の FI Magazine

² 時系列データは BIS Web Site (<http://www.bis.org/statistics/derstats.htm>) Table19 Time series と、日本銀行 Web Site (<http://www.boj.or.jp/theme/research/stat/bis/yoshi/index.htm>) 時系列データを参照。直近データは、更新される可能性がある。

(2) さまざまなコモディティ取引

本小節では、コモディティ市場の特徴を整理する³。コモディティ取引にはスポット取引のほか、先物・先渡取引やプレーンなオプション取引、さらにスプレッド取引やエキゾチック・オプションなどがある。

金融資産のスポット取引では、取引約定の直後に現物の受渡しが行われるが、コモディティの場合、純粋なスポット取引は稀である。これは、コモディティ取引では、約定から受渡しまで時間を要するほか、一定期間における一定数量の受渡しを対象とした取引が少なくないためである⁴。スポット取引と先渡取引の区分は必ずしも明確ではなく、受渡し時点までが最短の先渡取引がスポット取引であると解釈することができる。

先渡・先物取引ともに、将来のある時点で所与の数量と金額を交換する契約であるが、先物取引は、取引所を通じて取引されること、取引所が決済機関となって清算や値洗い、取引証拠金の管理などを担うこと等が先渡取引と異なる。現物を受渡しする場合、場所や時間帯が指定されており、例えば、NYMEXのWTI原油先物は、オクラホマ州クッシングにある原油貯蔵基地で現物決済される。一方、先渡取引は相対取引ゆえ、取引相手の倒産や未払い、決済の不履行など、カウンターパーティ・リスクを抱えることになる。なお、相対取引である先渡価格は一般に観察され難いため、市場データを参照する際には先物価格が用いられることが多い。本稿中では特記しない限り両者を区別しない⁵。

先物やプレーンなオプションなどの標準化されたデリバティブ以外にも、原材料と製品の価格差を取引するスプレッド取引や、各種のエキゾチック・オプションが盛んに取引されている。これらのデリバティブの商品特性は最終需要

³ 本小節はジュマン [2007]を参照した。同書は、各種のコモディティ取引や代表的なプライシング・モデルのほか、主要なコモディティ市場の取引実態を詳細に解説している。

⁴ 電力市場において当日取引・当日引渡という取引が存在するが、翌日から数日先までのある時間帯の電力供給を契約する一日前市場（day-ahead market、30分刻みの場合1日当たり48市場が存在）が主流であり、これは、リアル・タイムでの取引ではない。

⁵ 先物価格と先渡価格の理論的な差異は値洗いの有無にあり、無リスク金利の変動が原資産価格の変動と独立である場合、先物価格と先渡価格は理論的には一致する（実際には、取引コストや税金、信用リスク、流動性等の相違もあって両者は乖離する）。コモディティ・デリバティブのモデルでは、無リスク金利を確率変数として扱わないものが多い。これは、スポット価格やコンビニエンス・イールド（後述）の変動が大きく、金利の影響が比較的小さいことによるものと考えられる。本稿で取り上げたモデルも、無リスク金利を固定したものが多い。

家の取引ニーズを反映した内容となっている。すなわち、原材料と最終製品の価格差の変動リスクに晒されている企業にとって、各種のスプレッド取引はリスク・ヘッジに有効である。また、石油製品や火力発電のように生産コストに占める原材料費の割合が大きい場合、スプレッドが工場や発電所の収益率を近似するため、スプレッド取引は事業リスクのコントロールに有益である。このほか、実物投資を伴わずに事業投資と同様のリスク・リターンを得たい場合にもスプレッド取引が有効である。具体的なスプレッド取引としては、原油と石油製品との先物価格差を取引するクラック・スプレッド、天然ガスと電力の価格差を取引するスパーク・スプレッド、穀物と穀物製品⁶の価格差を取引するクラッシュ・スプレッドなどがある⁷。

エキゾチック・オプションについては、アジアン・オプションの取引量が多い。需要家はコモディティを消費する期間中の平均価格に関心があり、取引で参照される価格インデックスも平均値として算出されているため、算術平均価格を原資産価格とするアジアン・オプションに対する取引需要が生じる。また、市場価格操作に対する安全性や、日々のスポット価格計測の困難さも、取引需要に結び付いていると指摘されている。この他のエキゾチック・オプションでは、オプション手数料（プレミアム）を節約しつつ、原材料仕入価格の上限や製品価格の下限を設定するバリア・オプション⁸や、為替レート変動リスクも同時にコントロールするクオント・オプション⁹などが利用されている。

コモディティ市場に特徴的な取引として、取引量に関するオプションを有した契約が存在する。例えば、液化天然ガス（LNG）などの先渡契約ではテイク・オア・ペイと呼ばれる条項が盛り込まれることがある。この条項は、契約期間中の総取引量があらかじめ決められた最低総取引量に達しなかった場合、商品の

⁶ 例えば、大豆と大豆ミール、砂糖とエタノールなど。

⁷ これらの可変スプレッドを固定スプレッドとスワップするスプレッド・スワップ取引や、スプレッドを原資産価格とするオプション取引もある。なお、価格スプレッドを測る際の数量単位は、原油一定量（1バレル等）とこれより精製される石油製品の数量を基準とするなど、スプレッド取引を上場している取引所などによって定められている。天然ガスと電力の場合、発熱率（ヒート・レート、1キロワットの電力生産に必要な燃料の熱量単位）を参考にスプレッドを求める数量単位が定義される。

⁸ 対象となる原材料価格が所与の閾値（バリア）に到達したときオプションが有効（無効）になるデリバティブ契約。

⁹ スポットや先物価格が他国通貨建ての場合、為替レートを乗じて自国通貨建てに変換したものを原資産価格とすることで、コモディティ価格の変動リスクと為替リスクが同時にヘッジ可能となる。

受取り側は、未達部分についても支払い義務があるというものである¹⁰。

また、需要量や需要タイミングの不確実性が大きいコモディティでは、スイング・オプションと呼ばれる条項が盛り込まれることがある。スイング・オプションとは、一定期間中の最低・最大取引量を事前に決定しておき、その範囲内で自由に取引を行うことができる権利である。権利行使のタイミングや回数、一回当たり取引量の自由度も、さまざまに設定することができる。取引価格は、先渡取引のように事前に固定したり、一定のルールに従って事後的に決定することもあるなど、自由度が高い。また、ほとんどのスイング・オプションには、テイク・オア・ペイ条項が課されており、最低取引量に達しない場合についてペナルティが課されるが、さらに、取引不足分を第三者に振り分ける権利を買い手に付与する場合もある¹¹。

投資対象としてのコモディティ市場には、代表的な先物価格から作成された多数の商品指数¹²や、ペイオフが商品指数に連動する取引（コモディティ・リンク債や、より複雑なペイオフを持つ派生商品など）が存在する。本稿では、コモディティのスポット価格および先物価格のモデルを解説し、エキゾチック・オプションや取引数量にオプション性を持たせた取引等は取り上げない。これらについても多数のプライシング・モデルが研究されている¹³。

¹⁰ 生産販売体制の確立に長期のプロジェクト投資を要する事業では、生産側に長期に亘って価格変動リスクをヘッジしたいニーズがある。テイク・オア・ペイ条項は、こうしたニーズを反映したものである。最低総取引量に不足した分の支払いは、契約価格（実際に受け取った分への適用価格）より割引かれることが多いが、その割引率も相対で事前に交渉、決定されている。

¹¹ スイング・オプションは、最小購入量と支払い代金を事前に確定したテイク・オア・ペイに、同量を上回って購入する（スイング・アップ）自由度を追加で与えたもの、すなわちコール・オプションを付与したものと解釈できる。上限を上回って購入することを認める場合もあり、こうした場合のペナルティ・レート適用等にはさまざまなバリエーションがある。基準取引量からスイング・ダウンすることを認める取引契約は、先渡取引にプット・オプションを付与していることになる。なお、実務では購入権利を第三者に譲渡することをスイングと呼び、上述のスイング・オプションをテイク・オア・ペイと呼ぶこともある。これは、スイング・オプションとテイク・オア・ペイがセットで用いられることが多いためと推測される。

¹² 代表的なものとして、ロイター・ジェフリーズ CRB 指数（19 品目）やダウ＝ジョーンズ AIG 商品指数（19 品目）、S&P ゴールドマン・サックス商品指数（24 品目）などがある。いずれも、世界生産額や流動性等を参考に品目の構成ウエイトを設定している。

¹³ 例えば、コモディティ・リンク債については、Schwartz [1982]、Carr [1987]、Miura and Yamauchi [1998]などが詳しい。

(3) 先物価格・スポット価格の特徴

コモディティの価格形成においては、現物の需給要因や、在庫・決済にかかるコストや時間、在庫のキャパシティ、財の耐久性、埋蔵量や作付可能面積など潜在的な生産能力、生産量調節の自由度、農作物に典型的な供給の季節性、エネルギー財における需要の季節性、需要の価格非弾力性など、実物財であることに起因するさまざまな要因が関係してくる。また、金融資産と異なり使用価値を持つため、現物を在庫として保有することに伴う利点（市場価格での売却のみならず自家消費するという選択肢を有していること）が存在する。これが先物価格の期間構造（以下、先物カーブ）にコモディティ独特の特徴をもたらす。以下では、上述の要因がコモディティ価格にもたらす影響のうち代表的なものを順にみていく。

イ. 先物価格の期間構造

金融資産の場合、無裁定条件によってスポット価格から先物価格が決まると考えることが多い。例えば、流動性の高い無配当の株式の場合、無リスク金利と現時点の株価から先物株価が決定される。

これに対し、コモディティでは、先物価格とスポット価格が乖離する要因として、金融資産のような資金調達コストのほかに、在庫コストや即時消費可能な現物を手元に保有することの価値を考える必要がある。在庫コストが高ければ、先物価格はスポット価格よりも割高になると考えられるが、即時消費可能な現物を手元に保有するメリットが大きければ、先物価格はスポット価格よりも割安になると考えられる。貯蔵が困難な財、在庫量がわずかとなった財、希望時に即時調達することが困難な財ほど、現物を保有する価値が高まるため、この傾向は強まる。この保有価値を利回り形式で表現したものをコンビニエンス・イールドと呼ぶ。

上述の内容をモデル解説で用いる表記に従って整理しておく。現在時点 t で現物を価格 $S(t)$ で購入し、同時に約定した先物取引で T 期に受け渡す（代わりに先物価格 $F(t,T)$ を受け取る）ことを考える。現物を持ち越すためのキャリー・コストは、資金調達コスト（無リスク金利 r ）と在庫コスト（利回り表示 c ）の和から、コンビニエンス・イールド（利回り表示 ε ）を差し引いたものになる。これより、スポット価格と先物価格の関係を

$$F(t, T) = S(t)e^{(r+c-\varepsilon)(T-t)}, \quad (1)$$

と表すことができる。

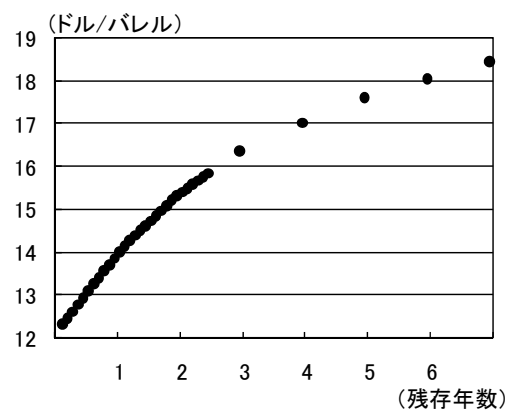
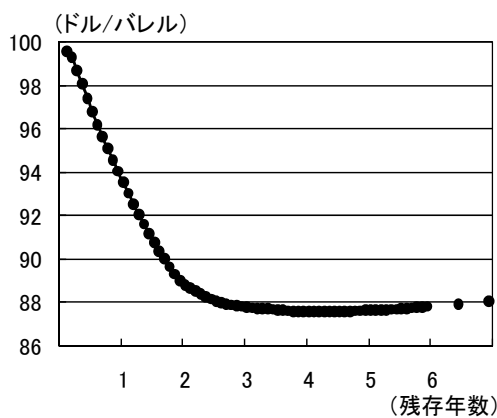
なお、在庫コストは直接観察不能な場合が多いため、コンビニエンス・イールドから在庫コストを差し引いたものをまとめてコンビニエンス・イールドと呼ぶ場合もある。本稿では、後者の定義を用いて $\delta(=\varepsilon-c)$ と表記する。この場合、観察可能なスポット・先物価格と金利から、コンビニエンス・イールド δ を逆算することができる。また、キャリー・コスト全体は $r-\delta$ と表せる。

市場価格として観察される先物カーブは、右肩下がりになっていることが多い。この形状はバックワーデーションと呼ばれており、キャリー・コストが負値になっていること($r < \delta$)を示している。一般に、需給が引き締まっている(スポット価格が高い、在庫が低水準にある)状況下では、バックワーデーションが現れやすい。逆に、需給が緩むとコンタンゴと呼ばれる右肩上がりの形状が現れやすくなる。これをコンビニエンス・イールドで表現すると、需給が引き締まっているときには、在庫コストを払っても現物を保有しておく価値が高く、コンビニエンス・イールドが高いことになる。コモディティの先物カーブがバックワーデーションになりがちなことは、コンビニエンス・イールドが金利より高い水準になりやすいことを意味している。なお、図3では、WTI原油先物カーブがバックワーデーションおよびコンタンゴとなった事例を示した。

図3 WTI原油の先物カーブ

バックワーデーション (2008年1月2日)

コンタンゴ (1999年1月4日)

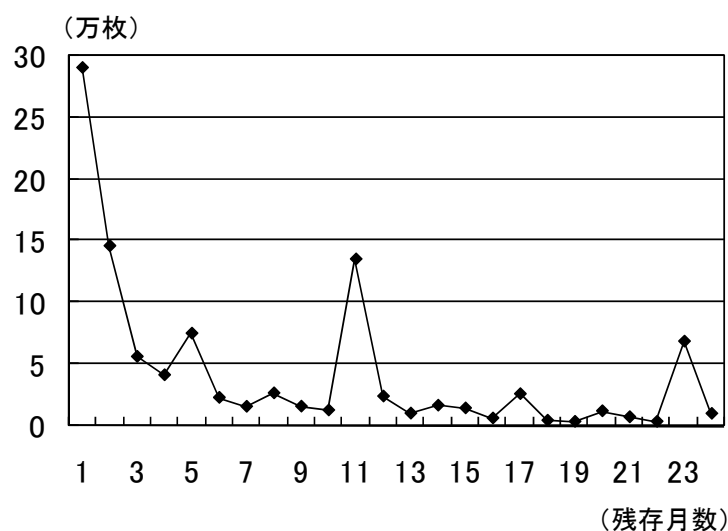


資料：ブルームバーグ

このように、在庫を含めた現物の需給要因が先物カーブの形状を決定するという特性から、現物や期近の先物ほど足許の需給の影響を強くうけることがわかる。図 4 に示したように、先物市場の流動性も期近物ほど高くなる¹⁴。長期先物が影響を受けにくいのは、長期的には生産調整によって市場への供給量が調整され、スポット価格が長期均衡水準へ回帰する傾向を持っているためと考えられる（ただし、長期的均衡水準に関する市場の合意は時期によって大きく変化する可能性があることを後述する）。また、限月が近づくと現物の受渡し需要が高まるため、価格変動が激しくなる傾向がある。このように期先より期近の先物価格の方が変化しやすいことから、先物カーブのボラティリティの期間構造は右肩下がりになる場合が多い¹⁵。

このほか、コモディティのボラティリティは、スポット価格の水準と正の相関関係を持ちやすいことが知られている。その理由として、現物の需給が逼迫して価格が上昇する際には、価格変動を緩和する在庫も僅少になっており、これがボラティリティの増大に繋がりやすいことが指摘されている。なお、株価のボラティリティは株価下落の際に高まりやすいため、コモディティとは逆の関係になる。

図 4 WTI 原油先物の残存期間別建玉（2006 年 12 月 29 日）

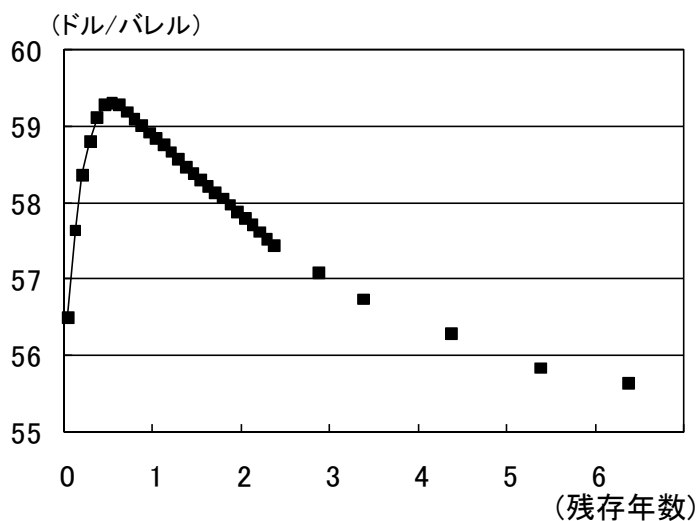


資料：ブルームバーグ

¹⁴ 12月限月の季節性については、脚注16を参照。

¹⁵ 経済学者のポール・サミュエルソンがこの点を指摘したため、サミュエルソン効果と呼ばれている。

図 5 WTI 原油の先物カーブ (2005 年 6 月 30 日)



資料：ブルームバーグ

先物カーブは、単調な右肩上がりや右肩下がりになるとは限らない。カーブの途中で局所的に曲率が高まった複雑な形状が現れることもある。図 5 の先物カーブは、期近 6 ヶ月までコンタンゴだが、その先はバックワーデーションとなっている。こうした形状は純粋な金利の期間構造だけでは説明できず、コンビニエンス・イールドが期間構造を持っていると解釈する方が自然である¹⁶。実際、後述するモデル群ではコンビニエンス・イールドが確率過程として扱われており、コモディティの価格変動をモデル化するうえで重要な役割を果たしている。この点は、先物価格の意味することとも関連しているため、3 節(2)でも言及する。

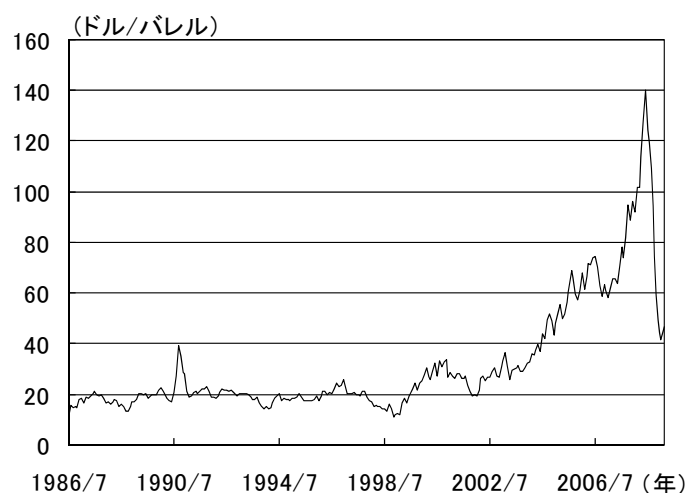
ロ. 長期均衡水準への平均回帰と回帰水準のシフト

スポット価格の長期均衡水準への平均回帰的な変動を WTI 最期近物（現物の

¹⁶ 期近先物を買って建てていた投資家が、限月が近づくにつれ、ポジションを解消する必要性から売りを出すという現象が、図 5 のようなカーブの形状を生み出していると考えられる（ポジションを閉じないと約定していた先物価格を支払って現物を受け取ることになる）。先物の流動性もカーブの形状に影響をもたらす。図 4 にみられるように、WTI 取引の流動性は残存期間 1~2 ヶ月の期近物に集中しているほか、暖房需要期である 12 月限月にピークがある（12 月 29 日時点の残存期間では 11 ヶ月目に相当）。図 5 ではカーブの転換点が 12 月限月前後にあたり、上述のようなポジション造成と手仕舞いに伴う先物カーブへの影響に対して、流動性の多寡が何らかの関係性を有しているものと考えられる。実際、先物カーブに転換点が現れる位置は時期によって異なっている。

代理変数) についてみたものが図 6 である。2003 年頃から始まった価格高騰期の前までは、原油 1 バレルの価格は、おおよそ 20 ドル付近で振幅しながら推移してきた。短期的な乖離はあっても概ね 20 ドル前後に回帰する現象が繰り返し観察されている。

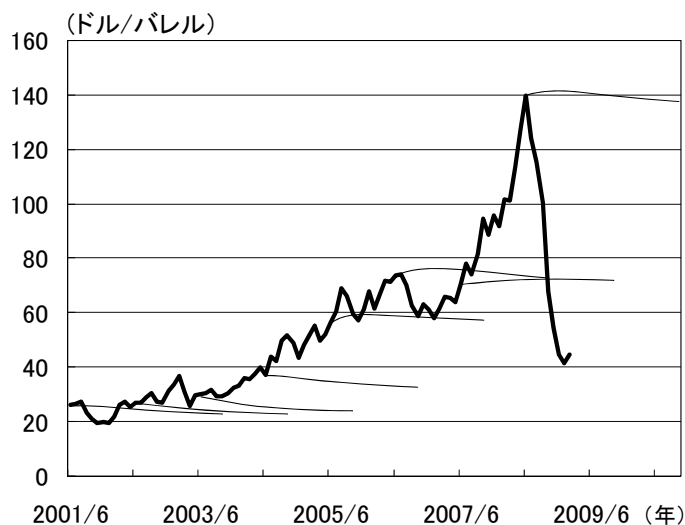
図 6 NYMEX 原油の月末価格



資料：ブルームバーグ

図 7 は、図 6 で示した月末のスポット価格（太線）の 8 つの時点について各時点の先物カーブ（細線）を付記したものである。2003 年までの先物カーブ（図中初期の 3 本）は、期先に行くほど 20 ドル強の水準に収斂しており、この価格帯が長期均衡水準とみなされていたと考えられる。しかし、2003 年以降は、スポット価格の上昇に引きずられるかたちで先物カーブが水平シフトするようになった。これは、スポット価格の大幅な上昇が長期間続いたため、先物市場参加者の間で長期均衡水準に関する相場観が無くなってしまったものと解釈できよう。この事例のように長期均衡価格は一定とは限らないため、後述するように、近年では回帰水準が変動するモデルも開発されてきている。

図 7 NYMEX 原油の月末価格と先物カーブ



備考：太線は NYMEX 原油の月末価格、細線は各時点における先物カーブ。
資料：ブルームバーグ

ハ. 季節性

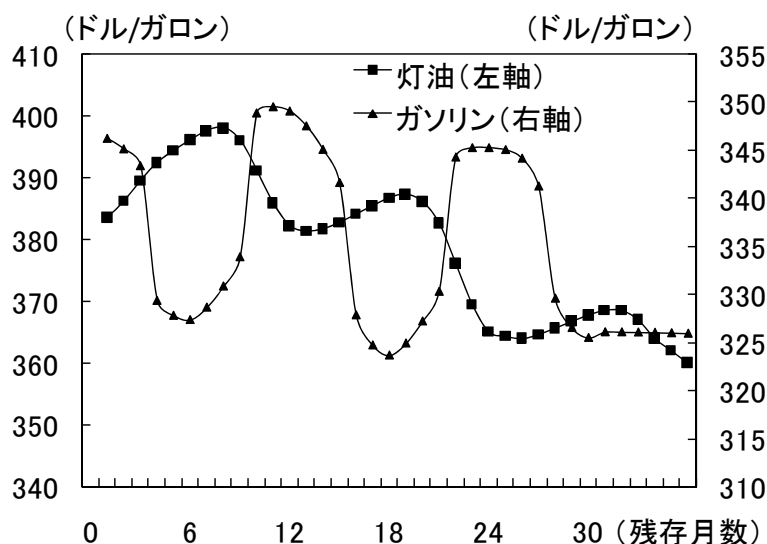
コモディティのスポット・先物価格は、需要や供給の季節性に大きく依存する場合がある。まず、灯油とガソリンの先物カーブをみしてみる（図 8）。灯油は冬場の暖房需要、ガソリンは夏場の旅行・レジャー需要から、スポット価格に強い季節性が生じることが知られている。こうしたスポット価格の季節性が先物カーブにも反映されている¹⁷。スポット価格に明確な季節性がある場合、低需要期において現物キャリーと高需要期限月の先物ショートという組合せで取引を行えば正のリターンが期待できる投資機会が存在しているように思われる。しかし、灯油とガソリンは連産品であり、需要の季節性に対応した生産タイミングの調整が困難であるため、高需要期にむけて在庫を積み上げる必要がある。これは、在庫コストや貯蔵余力に季節性をもたらし、こうしたコストの変動を勘案すると、先物市場において必ずしも正のリターンが期待できる投資機会が存在しているとは限らない。

なお、灯油、ガソリンともに、シーズンを超えた趨勢的なスポット価格の変動は原油価格と連動しているため、原油の先物カーブが両者の先物カーブの大まかな形状を決定すると考えられる。例えば、図 8 に示した灯油とガソリンの

¹⁷ 2 年半以上先になると明解な逆相関性は観察されなくなる。これは、満期が長い先物市場では流動性が低くなることに起因しているものと考えられる。

先物カーブは全体としてみれば右肩下がりとなっているが、これは、同時期（2008年6月）のWTI原油先物カーブ（図7の最も右側の細線）がほぼバックワーデーションとなっていることを反映したものとみられる。

図8 NYMEX 灯油と NYMEX ガソリンの先物カーブ（2008年6月11日）



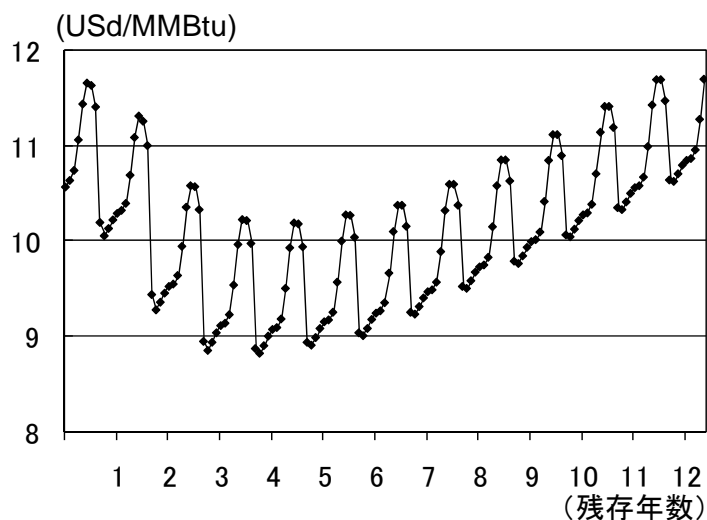
資料：ブルームバーグ

図9に示した天然ガスの先物カーブにも冬場に高く夏場に低いという強い季節性が観察される¹⁸。天然ガスは欧米ではパイプラインによる供給が主力であり、地理的な市場分断が生じやすいことに加え、輸送コストが原油やLNG（液化天然ガス）より高いことなどから、スポット価格の季節変動が先物カーブに強く反映されている¹⁹。また、プロジェクト・ファイナンス等で非常に長期に亘る先渡契約が存在しているため、先物についても10年を超える長期物が取引されている点や、その長期先物カーブにも同様な季節性が現れている点が特徴的である。

¹⁸ 受渡地点はルイジアナ州のサバイン・パイプラインのヘンリー・ハブ。

¹⁹ 米国と英国では、競争的なスポット市場が発展しており、パイプライン網がハブや接続ゲートでリンクされているため地域的な市場分断の程度は小さい。NYMEXでは、ヘンリー・ハブでの受渡先物価格と他の数十箇所の価格設定地点との価格差をもちいたベース・スワップ取引も上場されている。こうした流動性を持つ市場であるにも関わらず、図9からみてとれるような強い季節性が存在している。日本ではLNG（液化天然ガス）として輸入されており、生産・輸送・貯蔵・消費にかかる設備費が大きいことから長期契約が交わされる。その際、前述したテイク・オア・ペイ条項が活用されており、また支払い価格は、時々の平均的原油価格（Japan crude cocktail）を参照しつつ、大きな変動を抑制するような価格決定式で決定されている。ただし、近年では世界的にLNGのスポット供給が増加しており、日本でも価格変動の激しいスポット物の輸入が増加している。

図 9 NYMEX ヘンリー・ハブ天然ガスの先物カーブ (2008 年 7 月 18 日)

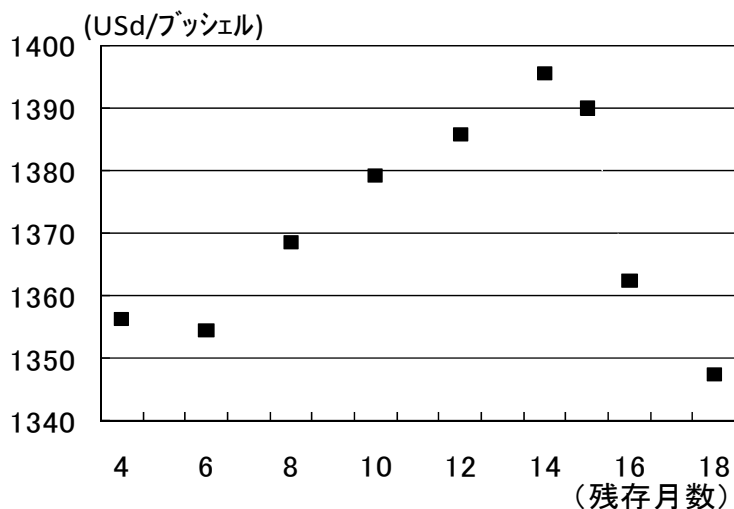


備考：縦軸単位はドル／百万 Btu。Btu (British thermal unit) は、英国熱量単位であり、1 ポンドの水を 1 度上昇させるのに必要な熱量を表す。

資料：ブルームバーグ

供給の季節性が先物価格に現れるコモディティ市場もある。図 10 は大豆の先物カーブを示している。秋の収穫時期には価格が下落する一方、収穫時期の直前には価格が最も高い。また、前年に収穫された在庫が減少するにつれて価格が上昇していく様子が窺われる。毎年の収穫量は天候等の要因に大きく左右されるため、価格水準は年ごとに異なるが、カーブ形状を年ごとにみれば供給の季節性が現れている。

図 10 CBOT 大豆の先物カーブ (2008 年 5 月 30 日)



資料：ブルームバーグ

二. 高ボラティリティ、スパイク、ジャンプ

コモディティ価格変動の特徴の一つとして、金融資産と比較してボラティリティが高い傾向があること、とりわけスポット価格のボラティリティが高いことが挙げられる²⁰。こうした特徴は在庫を含む現物の供給制約に起因するところが大きく、典型的には、価格水準の急激かつ大幅な上昇として現れることが多い。本稿では、これを価格水準のジャンプと呼ぶ。ジャンプの直後に価格上昇要因が剥落すれば、価格水準の急激かつ大幅な降下が生じ、価格は元の水準に戻る。本稿では、こうした価格水準の急上昇と直後の急降下を合わせてスパイクと呼ぶ²¹。

コモディティ価格の変化率の分布は尖度が高く、分布の裾が厚いことが知られている²²。これには、ジャンプやスパイクの頻度や規模の大きさが寄与していると考えられ、早くからモデル化の対象となっている。現物の供給制約は価格の上方ジャンプをもたらす、収益率分布の右裾を厚くする要因になる。一方、供給制約が一時的であると、価格は急速に元の水準に戻ることになり、収益率分布の左裾を厚くする要因にもなる。

スパイクが最も強く現れるのが自由化された電力市場である。図 11 は、PJM²³ と呼ばれる米国の代表的な電力市場における日次スポット価格の変動を示している。そもそも日次の変動幅が大きいことがみてとれるが、とりわけ前日比で

²⁰ ジュマン [2007]では、金利のボラティリティの水準は10%程度であり、株価のボラティリティの水準は通常15~18%程度である一方、検証したコモディティの全品目でボラティリティはより高いとしている。具体的に、1993年7月~2000年11月における先物直近限月の日次市場価格等から求めたコモディティのボラティリティとして、天然ガス66.60%、WTI原油35.07%、銅24.42%、とうもろこし25.99%、コーヒー48.06%などを挙げている。

²¹ 一般的にスパイクとは、価格の急激かつ大幅な上昇を意味するが、本稿では混乱を避けるため、上記のように使い分けている。なお、スパイクが頻繁に発生する市場では、変化率の分布は上下両方向で裾が厚くなる。

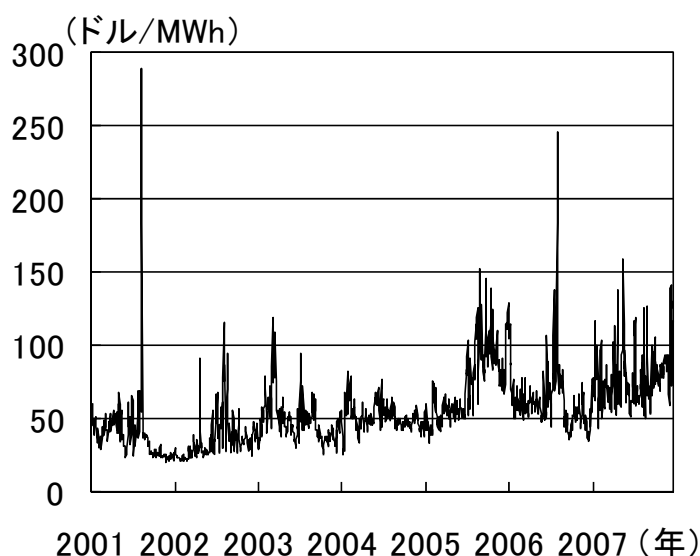
²² ジュマン [2007]では、1993年7月~2000年11月の市場価格の日次収益率を用いた尖度として、天然ガス30.7、WTI原油6.2、銅7.5、とうもろこし51.2、コーヒー10.1などを挙げており、いずれも正規分布の尖度3よりも大きな値となっている。

²³ ペンシルバニア (P)、ニュージャージー (J)、メリーランド (M) の3州を中心としてこれらにデラウェア、バージニア、ワシントン D.C.を加えたエリアでは、既存の電力会社3社が電力プールを行うようになり、やがて独立送電運用者 (independent system operator : ISO) として卸電力の市場や取引所 (Power Exchange : PX) の運営を行うようになった。市場参加者は、発電設備保有者、送電設備保有者、その他電力供給者、配電事業者、需要家である。1990年代末からの電力自由化に伴い、相対取引やスポット取引がPXで活発に取引されるようになった。決済される全ての電力はプール市場で取引され (強制プール制)、プール価格変動リスクをコントロールするために現物を伴わない相対取引が用いられる。

数十パーセント以上にも、時には 10 倍程度にも跳ね上がる非常に大きな価格急騰が瞬間的に発生していることがわかる。こうしたスパイクは、北欧や英国等の電力スポット市場においても共通して観察される²⁴。

スパイク発生 の 主な要因は電力の貯蔵不可能性にある。こうした財において、需要の一時的な増加が供給能力を上回った場合、在庫バッファがない分、価格の急騰が生じやすい。家計や企業といった最終需要家は固定価格契約となっていることが多く、需要量が市場価格に対して非弾力的となっている点も大幅な価格上昇をもたらしやすい要因となっている。たとえば、図 11 のスパイクは夏場で発生しているケースが多く、猛暑がもたらした需要増が発電所の平時の供給量を一時的に上回ったため生じたものと考えられる²⁵。

図 11 NYMEX PJM の日次スポット価格の推移



資料：ブルームバーグ

²⁴ 電力スポット価格は、1 日前市場（受渡日前日に取引を確定させる市場）の価格を指すことが多い。一日を 30 分もしくは 1 時間毎に分割し、時間帯ごとの電力供給について 1 日前先物取引が結ばれている。なお、当日中の需給バランスを調整するための当日市場も存在する。これらの日次・日中市場は短期調整のための市場であり、需要家の価格変動リスクのヘッジや投資目的には、週や月、年単位での受渡しを約束する先物市場が存在している。なお、在庫が不可能な電力は、自由化の過程で常に需給が一致するような（需要変動に電力供給が合わせられるような）市場制度手当てがなされており、各国、各地域で制度面での相違がある。

²⁵ 自由化された市場においても、電力の安定供給を担保するため、供給予備力を保持しておくことが求められている。供給力を確保できない事業者へのペナルティや発電設備容量の売買市場なども整備されており、これらの要因も価格形成に強い影響力を持つ。

価格水準のジャンプは、多くのコモディティ市場で観察される。例えば、原油市場では、原油減産やパイプライン事故、産油国の紛争等のニュースによって価格が急変動することがあり、穀物市場ではハリケーンや害虫被害、天候予想の修正、輸入国の関税措置といった政治動向等のニュースで価格が急変動することがある。このような供給制約や輸送制約、需要量の変化は、一定期間続くことが予想される場合が多く、このため、一時的な上昇に過ぎないスパイクと異なって価格が高値・安値圏にとどまる傾向がある。

こうしたジャンプは金融資産市場でも生じているが、発生頻度の高さやジャンプの大きさという点で相違がある。また、金融資産市場では、価格変動の背景にある情報フローの発生量が週末に低下するのに対し、コモディティ市場では、そのような情報フローの週末の低下幅が比較的小さいことも特徴であり、このため、平日のボラティリティに対する週末のボラティリティの比率を比べると金融資産市場よりもコモディティ市場の方が高いと指摘されている。

3. プライシング・モデル

2節では、コモディティの価格形成には、各財の生産・流通・消費における特殊性を反映したさまざまな特性があることを紹介した。コモディティのプライシング・モデルを構築するうえでは、こうした特性に対応したモデル化が重要となる。本節では、これまで考案されてきたプライシング・モデルを類型別にサーベイする。

(1) プライシング・モデルの類型化

コモディティのプライシング・モデルは、大別して2つのグループに分類可能である。1つめは、需要関数と供給関数をそれぞれ設定し、両者が均衡する条件から内生的に均衡価格を導出するもので、構造モデルと呼ぶことができる。こうしたモデルは、価格形成のメカニズムを定性的に考察するうえで強みを持つ一方、現実にはより複雑に変動する市場価格を正確に再現する能力には限界がある。構造モデルの代表的な例としては、Routledge, Seppi and Spatt [2000]がある。彼らは、供給サイドについては生産と期初の在庫を、需要サイドについては当期の消費と在庫投資を考え、それら需給をバランスさせるようにスポット価格

が決定されるモデルを構築して、コモディティ価格の特性を分析している。

もう一方のプライシング・モデルのグループは、価格形成に影響を与えるさまざまな要因を外生的な確率過程として記述し、それらの要因が相互に関係を持ちながら変動していく過程で、無裁定条件を満たしつつコモディティ関連の価格が決定されるというタイプのモデルで、誘導型モデル（または無裁定モデル）と呼ばれる。こうしたモデルは、各種要因の変動が引き起こされるメカニズムに立ち入って分析を行うには限界もある一方、確率過程を的確に利用することでコモディティ関連の市場価格の動きを定量的に再現する能力には優れている。こうした構造モデルと誘導型モデルという分類は、コモディティに限らず、さまざまな金融資産のプライシングにおいても同様にあてはまる。本稿では、コモディティ関連のプライシングに焦点を当てるため、以下では誘導型モデルのサーベイに特化し、構造モデルに関しては立ち入らない。

コモディティ価格について誘導型モデルを構築する際には、金融資産の場合と同様にスポット価格の確率変動やそのリスクの市場価格をモデル化することが重要であるほかに、コモディティに特徴的なコンビニエンス・イールドのモデル化も不可欠なポイントとなる。以下、(2)では、コンビニエンス・イールドを確率過程によって記述したモデル、(3)では、ボラティリティ変動を表現できるように拡張したモデル、(4)では、確率変動をもたらすファクターを潜在変数として記述したモデルを具体的に紹介する。これらの誘導型モデルは、貯蔵がある程度は可能なタイプのコモディティに広く共通した特徴を捉えたプライシング・モデルとなっているが、一方で電力のように貯蔵が困難なコモディティについては、一時的に価格が急上昇（スパイク）するという固有の特徴があるため、別途のモデル化が必要となる。そこで、(5)では、そうしたスポット価格のスパイクを捉えたモデルを紹介する。

(2) コンビニエンス・イールドと先物価格

需給や在庫に関するさまざまな要因を集約して表現されたコンビニエンス・イールドが観測不能かつ可変的であることは、先物価格の決定において重要なポイントとなる。金融資産の場合、コンビニエンス・イールドに相当する配当は観測可能である場合が多いが、コモディティの場合はコンビニエンス・イールド

が観測できず一定ともみなせない²⁶。その結果、現実測度下での価格の確率変動を所与としても無裁定条件からはリスク中立測度での価格確率変動を一意に求めることができず、現実測度とリスク中立測度とを繋ぐリスク・プレミアムについて何らかの仮定を置いてプライシング・モデルを構築することになる。

この分野の先駆的な研究とされている Gibson and Schwartz [1990]は、NYMEX の WTI 原油先物価格からコンビニエンス・イールドを逆算し、それが現実測度のもとで平均回帰的に変動していることを示した。そのうえで、現実測度の下で、スポット価格 S を幾何ブラウン運動で、コンビニエンス・イールド δ をオルンシュタイン＝ウーレンベック過程 (Ornstein-Uhlenbeck 過程、以下 OU 過程)²⁷として表現した以下の 2 ファクター・モデル

$$\begin{aligned} dS &= (\mu - \delta)Sdt + \sigma_1 SdB^1, \\ d\delta &= \kappa_2(\bar{\delta} - \delta)dt + \sigma_2 dB^2, \end{aligned} \quad (2)$$

を考えた。ここで、 μ 、 $\bar{\delta}$ 、 κ_2 、 σ_1 、 σ_2 は定数である。また、スポット価格が高いときほどコンビニエンス・イールドが上昇する傾向を表現し得るように、ブラウン運動 B^1 と B^2 は相関を持つと仮定した。次に、2 つのブラウン運動に対応するリスクの市場価格がそれぞれ定数 ($(\mu - r)/\sigma_1$ 、 λ/σ_2) であると仮定し、現実測度とリスク中立測度のブラウン運動を(3)式のように関連付けた。

$$dB^1 = d\tilde{B}^1 - \frac{\mu - r}{\sigma_1} dt, \quad dB^2 = d\tilde{B}^2 - \frac{\lambda}{\sigma_2} dt. \quad (3)$$

これにより、(2)式のモデルは、リスク中立測度のもとで、

$$\begin{aligned} dS &= (r - \delta)Sdt + \sigma_1 Sd\tilde{B}^1, \\ d\delta &= \{\kappa_2(\bar{\delta} - \delta) - \lambda\}dt + \sigma_2 d\tilde{B}^2, \end{aligned} \quad (4)$$

という確率過程に従うモデルとして表現し直せる²⁸。同測度のもとでは、スポット価格のドリフト $r - \delta$ がキャリー・コストとなる。先物価格 $F(t, T)$ は、リスク

²⁶ 福田・齊藤・高木 [2002]は、金融資産である国債についても、金融資産という側面の他に、①貸借取引における担保としての活用、②債券先物市場における受渡し銘柄としての利用、③金融不安時の資金の一時的な退避先、といったコンビニエンスが存在するとして、そのコンビニエンス・イールドが国債の価格形成に及ぼす影響を分析している。

²⁷ (2)式のコンビニエンス・イールド δ の式のように、ドリフト項が平均回帰性を持ち、拡散項が正規性を持つような拡散過程を一般に OU 過程と呼ぶ。 $\bar{\delta} = 0$ の場合を OU 過程と呼ぶこともあるが、本稿では $\bar{\delta} \neq 0$ も含めて OU 過程と呼ぶことにする。

²⁸ ただし、ブラウン運動 \tilde{B}^1 と \tilde{B}^2 の相関は B^1 と B^2 の相関と等しいものとする。

中立測度 Q のもとで満期時点でのスポット価格の期待値として表現され、

$$F(t, T) = E_t^Q[S(T)], \quad (5)$$

と表せる。ここで $E_t^Q[\cdot]$ はリスク中立測度のもとでの時点 t における期待値である²⁹。(4)、(5)式から導かれる先物価格の解析解は、解法も含め Schwartz [1997] に詳述されている。

ここでの議論からわかるように、コンビニエンス・イールドは先物カーブの期間構造を決定するうえで、またリスクの市場価格はスポット価格と先物価格の時間変動を表すうえで、それぞれ重要となる³⁰。

Schwartz [1997]は、(4)式の2ファクター・モデルでは固定値として与えられていた無リスク金利を確率変数に拡張した3ファクター・モデルを考えている。具体的には、無リスク金利の確率過程として、コンビニエンス・イールドと同様なOU過程

$$dr = \kappa_3(\bar{r} - r)dt + \sigma_3 d\tilde{B}^3, \quad (6)$$

を与えて先物価格の解析解を導いている。Schwartz [1997]では、スポット価格のみを確率変数とした1ファクター・モデルから上記の3ファクター・モデルへの拡張の効果が分析されているほか、各モデルでの先物価格の導出方法や、パラメータ推定方法³¹が詳しく述べられており、コモディティのプライシング理論の

²⁹ リスク中立測度のもとで先物価格がマルチンゲールになる（ドリフトが0になる）という条件下で、先物価格に関する偏微分方程式を導出し、満期でのペイオフを $t = T$ での境界条件（先物価格がスポット価格に収斂する）として与えて解析解を導出している。

³⁰ Gibson and Schwartz [1990]の実証分析では、まず、WTI原油のスポット価格が存在しないため、無裁定条件(1)式を異なる先物満期 T （最期近1M物と2M物）について考え、2つの先物価格とフォワード無リスク金利からフォワード・コンビニエンス・イールド（1ヵ月後スタート2ヵ月後エンド）を求め、これを連続表現で定義された瞬間コンビニエンス・イールドの離散観測値とみなして時系列データを得た。その平均回帰性を確認したうえで、(2)式中のコンビニエンス・イールドのOU過程を離散過程として、スポット価格（最期近の先物価格）と同時に見かけ上相関のない回帰（seemingly unrelated regression : SUR）推計を行っている。推計値はリスク中立測度下でのパラメータであり、リスクの市場価格を決めるパラメータ λ は先物価格が満たす偏微分方程式と境界条件から別途推計されている。具体的には、 λ の最初の候補 λ_1^* に対し、偏微分方程式と境界条件から理論先物価格を求め、理論先物価格と実際の価格の二乗誤差和を計算する。この二乗誤差和は λ に対して2次のオーダーであると仮定することで、局所最適解の問題を回避する。 λ_j^* に対するルート平均二乗誤差と λ_{j+1}^* に対するそれを比較し、これらの差が十分小さくなったところで、 λ の推定値とする。

³¹ Gibson and Schwartz [1990]が二段階推計であったのに対し、Schwartz [1997]ではカルマン・フィルタを用いて、コンビニエンス・イールドのリスクの市場価格 λ を含めて同時推計して

代表的な研究として知られている。また、同じ論文内で、原油、銅、金に対して、モデルのパラメータ推定を行った結果を比較提示している（後述の 4 節を参照）。

2 節でみたように、需給バランスがタイト化して在庫が減少するなかでスポット価格が上昇するような場合、コンビニエンス・イールドが上昇し、先物カーブがバックワーデーション化する傾向がある。また、名目金利についても、経済成長やインフレ率等の経済情勢を反映しているため、コンビニエンス・イールドとの間に関連性があると考えられる。Schwartz [1997]では、ブラウン運動の相関でこうした関係性を表現しようとしたが、拡散項の主たる目的はスポット価格変動のボラティリティを表現することであるため、ドリフトで両者の関係を表現した方が自由度は高い。また、このような関連性は必ずしも安定的ではなく、可変と考えた方がよいという指摘や、リスクプレミアムも可変でありかつスポット価格と負に相関しているという指摘がなされている。

そのような課題に対応するため、Casassus and Collin-Dufresne [2005]は、Schwartz [1997]の 3 ファクター・モデルをアフィン・モデル（線形モデル）として一般化し、スポット価格や金利がコンビニエンス・イールドのドリフトに影響を及ぼす点や、リスクの市場価値が可変となるような拡張を施している。具体的には、Casassus and Collin-Dufresne [2005]は、アフィン・モデルのうちエッセンシャル・アフィン³²と呼ばれるモデルを用いて、以下のようなモデルを考えた。

$$\begin{aligned} d \log S &= (r - \delta - \sigma_1^2 / 2)dt + \sigma_1 d\tilde{B}^1, \\ dr &= \kappa_1(\bar{r} - r)dt + \sigma_2 d\tilde{B}^2, \\ d\delta &= (\kappa_0 - \kappa_r r - \kappa_\delta \delta - \kappa_S \log S)dt + \sigma_3 d\tilde{B}^3. \end{aligned} \tag{7}$$

いる。

³² アフィン・モデルは、金利の期間構造モデルとして考案されたものであるが、他の資産にも応用可能である。同モデルは、瞬間無リスク金利を状態変数のアフィン関数（線形関数と定数項の和で表される関数）として表現する。また、その状態変数が従う確率微分方程式のドリフトと瞬間的な分散共分散行列の各要素についても、状態変数のアフィン関数として表される。こうしたアフィン・モデルのうち、さらにリスクの市場価格についても状態変数の線形関数でモデル化したものをエッセンシャル・アフィンと呼ぶ。また、拡散係数を表現する状態変数の線形結合の分散を用いてリスクの市場価格をモデル化したものをコンプリートリー・アフィンと呼ぶ。本稿のように拡散項を定数としたガウシアン・モデルでは、コンプリートリー・アフィンではリスクの市場価格が定数となってしまう。上記論文は、ガウシアン・モデルの扱いやすさを維持しつつ、リスクの市場価格を可変にするために、エッセンシャル・アフィンを用いたものと思われる。なお、アフィン期間構造モデルについては、Piazzesi [2009]や紅林 [2008]のサーベイ論文、Dai and Singleton [2000]などを参照。

なお、リスク中立測度のもとで与えられる 3 つのブラウン運動 \tilde{B}^i の間には相関を想定している。まず、先物価格をリスク中立測度下でのスポット価格期待値として表現するために、対数スポット価格 $\log S$ が確率微分方程式で表現されている。その瞬間ボラティリティ σ_1 は定数と仮定されている。また、そのドリフトに含まれるキャリー・コスト中の無リスク金利 r は 1 ファクターの OU 過程で表現され、コンビニエンス・イールド δ については、ドリフトが無リスク金利とスポット対数価格と自身の値の線形結合、瞬間ボラティリティ σ_3 が定数となるようなガウシアン型のアフィン・モデルとなっている。このコンビニエンス・イールドから金利や対数スポット価格に依存しない部分を新たな状態変数 $\hat{\delta}$ とすると、

$$\delta(t) = \hat{\delta}(t) + \alpha_r r(t) + \alpha_s \log S(t), \quad (8)$$

と表現される。このとき状態変数 $\hat{\delta}$ は、無リスク金利やスポット価格の影響を受けない OU 過程

$$d\hat{\delta} = \kappa_{\hat{\delta}}(\theta - \hat{\delta})dt + \sigma_{\hat{\delta}}d\tilde{B}^{\hat{\delta}}, \quad (9)$$

で表現される。ただし、 $\kappa_{\hat{\delta}}$ 、 θ 、 $\sigma_{\hat{\delta}}$ は定数であり、 $\tilde{B}^{\hat{\delta}}$ は 3 つのブラウン運動 \tilde{B}^i の線形結合となる。

本モデルでは、リスクの市場価格を $\beta_0 + \beta_1 X$ と表現し (β_0 は定数ベクトル、 β_1 は定数行列)、状態変数 (再定義したコンビニエンス・イールド $\hat{\delta}$ 、スポット価格、金利) のベクトル $X(t)$ の線形関数として明示的にモデル化している。すなわち、リスク中立測度でのブラウン運動 \tilde{B} (3 要素のベクトル) に対して、

$$d\mathbf{B} = d\tilde{B} - (\beta_0 + \beta_1 X)dt, \quad (10)$$

という測度変換により、現実測度でのブラウン運動 \mathbf{B} を得られる³³。リスクの市場価格の線形関数のパラメータ β_1 の推計値により、上記 3 つの状態変数がリスクプレミアムに及ぼす影響を知ることができる。また、両測度の対応付けに自由度を持たせたため、リスク中立測度によって規定される先物カーブの期間構造と、現実測度によって規定されるスポット価格変動の両者を同時にフィットさせる能力が高まっている。

実証分析では、原油、銅、金、銀といった複数の先物価格の時系列データを

³³ この点がエッセンシャル・アフィンの特徴である (前脚注参照)。

用いた推計結果から、本モデルが有効であること（特に、(8)式の α_r や α_s 、リスクの市場価格の関数パラメータが有意となったこと）を示した。また、スポット価格や金利が高いときほどコンビニエンス・イールドが高まりやすいこと、スポット価格とリスクの市場価格の間に負の関係があること、これらが現実測度で表現したスポット価格の時系列変動において平均回帰性を強める要因となっていることを明らかにした（推計結果から窺われる個別財の特徴については4節で後述）³⁴。

ここまでのモデルは、コンビニエンス・イールドを中心に必要に応じて金利についても確率的な変動を考えるモデルであったが、貿易財の価格を考える場合には、為替についても確率的な変動を考えるモデルが必要となる。山内 [2002] は、穀物など消費目的のコモディティの価格変動を説明するうえで、スポット価格 S （産出国通貨建）、為替レート X （産出国通貨1単位の自国通貨建価格）、自国金利 r 、コンビニエンス・イールド δ が変動すると仮定した4ファクター・モデルを用い、輸入コストも考慮したうえで、先物の理論価格を求めた。各ファクターは、現実測度下で以下のように仮定したほか、金利、コンビニエンス・イールドの変動に対するリスクの市場価格は先験的に与えた³⁵。

$$\begin{aligned} dS &= \mu_s S dt + \sigma_1 S dB^1, \\ dX &= \mu_x X dt + \sigma_2 X dB^2, \\ dr &= \kappa_r (\bar{r} - r) dt + \sigma_3 dB^3, \\ d\delta &= \kappa_\delta (\bar{\delta} - \delta) dt + \sigma_4 dB^4. \end{aligned} \tag{11}$$

ただし、 μ_s 、 μ_x 、 κ_r 、 κ_δ 、 \bar{r} 、 $\bar{\delta}$ 、 $\sigma_i (i=1, \dots, 4)$ は定数である。

一般に、コンビニエンス・イールドを考慮した商品先物市場に関する論文は、その市場で決済される通貨を用いて分析することが大半であるが、山内 [2002] は、異なる通貨で決済される市場間の関係を論じた数少ない論文の1つとなっ

³⁴ 現実測度に変換したスポット価格の確率過程では、そのドリフトにスポット価格の平均回帰性を生み出す項のほかコンビニエンス・イールドや無リスク金利が含まれている。なお、スポット価格の平均回帰変動や先物カーブのフィット向上は、ボラティリティの期間構造のフィット向上にも繋がっており、これはオプション等デリバティブのプライシングや VaR の精度を高める面にも貢献している。論文中では、モデルの改善に伴う精度向上（不十分なモデル設定に伴うオプションのミスプライスや VaR 計測誤差）の実例が示されている。

³⁵ 具体的には、自国金利の拡散項 B^3 に対する市場価格は 0.01 で固定し、コンビニエンス・イールドの拡散項 B^4 に対する市場価格は、コンビニエンス・イールドと自国金利の相対的な大きさに応じて、 $\max\{(\delta - r)/\sigma_4, 0.01\}$ としている。

ている。山内 [2002]のモデルは、Schwartz [1997]の3ファクター・モデルに為替変動を加えて拡張している。その分析結果は、4節で詳述する。

(3) ボラティリティ変動モデルへの拡張

イ. ボラティリティの季節性と時間変化

上述のモデルはいずれも、スポット価格やコンビニエンス・イールドの確率過程の拡散係数を定数としたガウシアン・モデルであった。しかし、実証分析においては、スポット価格のボラティリティ上昇が、コンビニエンス・イールドの上昇もしくは同ボラティリティの上昇を伴いやすいことが指摘されてきた³⁶。これは、需給が逼迫し在庫が僅少な場合は、外生ショックに対しスポット価格が変動しやすくなり、同時に、現物を保有する利点が上昇もしくはボラティリティになりやすいことを反映したものと考えられる。

このような拡散係数の特性を取り入れるため、Richter and Sørensen [2002]は、前出のGibson and Schwartz [1990]の2ファクターモデルに確率ボラティリティを導入した3ファクターモデルを考案した。具体的には、ボラティリティの確率過程として非負の値のみをとる平方根過程を考え、リスク中立測度下でこれがスポット価格とコンビニエンス・イールドの拡散係数として共有される以下のモデル

$$\begin{aligned} dS &= (r - \delta)Sdt + e^{\omega(t)}\sqrt{v}Sd\tilde{B}^1, \\ d\delta &= (\alpha(t) - \beta\delta)dt + e^{\omega(t)}\sigma_\delta\sqrt{v}d\tilde{B}^2, \\ dv &= (\theta - \kappa v)dt + \sigma_v\sqrt{v}d\tilde{B}^3, \end{aligned} \tag{12}$$

を考案した³⁷。ここで v はボラティリティ、 $e^{\omega(t)}$ は季節変動を表現するフーリエ級数である。類似したより簡単なモデル化法として、Nielsen and Schwartz [2004]は、両拡散係数をコンビニエンス・イールドの線形関数の平方根として与え、両拡散項のブラウン運動に正相関を持たせることで、スポット価格とコンビニエ

³⁶ Fama and French [1988]やNg and Pirrong [1994]、Litzenberger and Rabinowitz [1995]、Routledge, Seppi and Spatt [2000]は、原油先物や金属先物の実証分析で、スポット価格のボラティリティが先物カーブのバックワーデーションの強さと正相関することを指摘している。

³⁷ 両拡散項には異なる定数項が乗じてある分、格差が存在するが、その時間変動は一次同次である。なお、同論文は大豆をモデル化しているため、季節性変動を表現する関数が共通項として拡散項に乘じられている。

ンス・イールドのボラティリティ変動に正相関を持たせている³⁸。

Andersen [2008]は、市場価格として直接観察できる先物価格に注目し、先物オプション市場におけるインプライド・ボラティリティの季節性を考慮して、先物価格の変動を可変ボラティリティ・モデルを用いて定式化した。そのうえで、直接的には観察できないスポット価格とコンビニエンス・イールドを先物価格から逆算する方法を考えた³⁹。すなわち、スポット価格は、先物価格の解において $F(t,t)$ として得られ、その確率過程のドリフト項がキャリー・コストに相当する。

具体的には、NYMEX の天然ガス（ヘンリー・ハブ）先物市場を対象として、以下のような特性を取り込むような可変ボラティリティ・モデルを構築した。

- ① 先物価格の水準は、冬（12月と1月）に高い傾向がある（前掲図 9 参照）。
- ② 天然ガスには長期の先物・オプション取引が存在し、そのインプライド・ボラティリティは、満期が長くなるにつれて小さくなる傾向がある。また、冬に満期を迎えるオプションのインプライド・ボラティリティは、夏のそれよりも高くなる傾向がある。
- ③ 短期と長期の先物価格の相関は、夏より冬が低くなる傾向がある。
- ④ インプライド・ボラティリティは、アット・ザ・マネーを底とするスマイル構造を持つが、行使価格が高いほど高いボラティリティを示す傾向がある。また、ボラティリティ・スマイルの傾きは、冬の方が夏に比べて大きくなりやすい。

まず、先物カーブの変動を主成分分析した結果、2つのファクターで95%以上を説明できたことを踏まえ、独立な2つのブラウン運動を用いてリスク中立測度下における先物価格を次のようにモデル化した。

$$\begin{aligned} \frac{dF_c(t,T)}{F_c(t,T)} &= \sigma_1(t,T)d\tilde{B}^1 + \sigma_2(t,T)d\tilde{B}^2, \\ \sigma_1(t,T) &= h_1 \exp[b(T) - \kappa(T-t)] + h_\infty \exp[a(T)], \\ \sigma_2(t,T) &= h_2 \exp[b(T) - \kappa(T-t)]. \end{aligned} \tag{13}$$

³⁸ コンビニエンス・イールドとスポット価格のいずれのボラティリティもコンビニエンス・イールドの水準によって決定する2ファクター・モデルである。両ボラティリティの比率は一定に保たれており、ボラティリティは可変であるものの、関係性には強い制約がある。Nielsen and Schwartz [2004]は、こうしたモデルのもとで、先物価格を指数アフィン形式で求め、LMEの銅先物に対して実証分析を行っている。

³⁹ 同様のアプローチは、Cortazar and Schwartz [1994]でも試みられている。

ここでは、アット・ザ・マネーにおけるボラティリティの期間構造をモデル化しており、ボラティリティのスマイル構造については別途考察されている。 $\sigma_1(t, T)$ は長期先も考慮したボラティリティを、 $\sigma_2(t, T)$ は期近のみのボラティリティを表している。前者の期間構造は、第一項が短期水準の影響、第二項が長期水準の影響を示す設定となっている。 κ はボラティリティの平均回帰速度、 $a(T)$ と $b(T)$ はボラティリティの季節変動を表現する関数であり、1年を通してみれば平均0となる関数である。 h_1 、 h_2 、 h_∞ はボラティリティの水準を調整する定数である。ボラティリティを2つのファクターで説明した(13)式のモデルでは、先物価格のボラティリティ $\sigma_F(t, T)$ は

$$\sigma_F(t, T)^2 = \sigma_1(t, T)^2 + \sigma_2(t, T)^2, \quad (14)$$

と表現できることになる。ここで、ボラティリティの季節性を取り除いて、 $a(T) = b(T) = 0$ となるようにすると、スポットのボラティリティの水準 σ_0 は

$$\sigma_0 \equiv \sigma_F(t, t) = \sqrt{(h_1 + h_\infty)^2 + h_2^2}, \quad (15)$$

長期先のボラティリティの水準 σ_∞ は

$$\sigma_\infty \equiv \sigma_F(t, \infty) = h_\infty, \quad (16)$$

と表される。また、スポット価格と長期先物価格の相関 ρ_∞ は

$$\rho_\infty = \frac{h_1 + h_\infty}{\sqrt{(h_1 + h_\infty)^2 + h_2^2}}, \quad (17)$$

と表せる。現実測度下でもボラティリティ構造はリスク中立測度下と変わらないものとする、(15)~(17)式の関係を用いることで先物価格データからモデルをキャリブレートできる。

実際にパラメータや季節関数を市場価格からキャリブレートしたところ、①先物価格水準の季節性、②インプライド・ボラティリティの季節性、③異なる期間相関の季節性の3つを表現できた。さらに、④ボラティリティ・スマイルの季節性を取り入れるため、上記のモデルによって表される先物価格 $F_c(t, T)$ に、これと独立に変動する純粋ジャンプ・マルチンゲール過程 $F_j(t, T)$ を掛けた確率過程を考え、これを最終的な先物価格 $F(t, T)$ のモデルとした。

$$F(t, T) = F_c(t, T)F_j(t, T). \quad (18)$$

上記のモデルでは $F_j(t, T)$ の方でボラティリティのスマイル構造を表現してい

る。 $F_j(t,T)$ が非常にシンプルな場合、具体的には $F_j(t,T)$ が2状態レジーム・スイッチング・モデルに従うとして計算したところ、市場で観測されるボラティリティ・スマイルの形状をよく再現することができた。

ロ. オプション・ボラティリティ特有の変動

前述の Richter and Sørensen [2002]のモデルでは、スポット価格変動のボラティリティとコンビニエンス・イールドのボラティリティが線形の関係となっている。しかし、コモディティのオプションから算出されるボラティリティの構造をみると、ボラティリティを駆動する確率ファクターにはスポット価格を駆動する確率ファクター以外のファクターが必要であることが指摘されている。

この問題は、スポット価格とコンビニエンス・イールドのボラティリティを異なる確率ファクターによって記述することである程度は解決できる。同様の問題は、イールド・カーブ・モデルの研究において指摘されている。すなわち、債券の実証分析では、キャッシュフローが実現ボラティリティに依存するようなタイプのデリバティブのプライシングを行うには、スポットレートを駆動する確率ファクターだけでは不十分であることが指摘されている。これは、ボラティリティを駆動する確率ファクターにはスポットレートを駆動する確率ファクター以外のファクターが必要であることを意味している。

そこで、Collin-Dufresne and Goldstein [2002]は、イールド・カーブ・モデルについて、アンspanned確率ボラティリティ (unspanned stochastic volatility) という概念を提案した。これは、ボラティリティを表す状態変数のなかには、スポットレートの変動を表す状態変数とは独立な変数も含まれるという着想に基づくものである。実際、スワップレートのカップとフロアから合成されるストラドル⁴⁰の収益率は、スワップレートの変動ではほとんど説明できず、誤差項にはスワップレートとは別の強い主成分が残存していることを日米英のスワップ市場で確認している⁴¹。そこで、アフィン型のスポットレート・モデルとして、状

⁴⁰ ストラドルとは、権利行使価格と満期が等しいプット・オプションとコール・オプションを同数ロングするポジションをいう。

⁴¹ Heidari and Wu [2003]は、米国のスワップ・カーブの変動は3つの主成分でほぼ説明できるが、これらだけではスワップションのインプライド・ボラティリティ (implied volatility : IV) のスマイル変動は6割程しか説明できず、ボラティリティを表現する別の主成分が3つ必要になることを示している。

状態変数の数 N より独立な確率ファクターの数 d が少ない確率過程（拡散項が $N \times d$ 行列）を考え、アンスパンド確率ボラティリティ・モデルが構成される条件を検討した。その結果、2変数の状態変数の場合はアンスパンド確率ボラティリティ・モデルは構成できず、3変数の状態変数の場合はボラティリティを決める独立な状態変数が1つの場合に限りアンスパンド確率ボラティリティ・モデルが構成できることとその条件を示した。また、HJM (Heath-Jarrow-Morton) 型のフォワードレート・モデルにおいてもアンスパンド確率ボラティリティ・モデルが構築できる条件を示した⁴²。

Trolle and Schwartz [2009]は、コンビニエンス・イールド（正確には無リスク金利を含めたキャリー・コスト⁴³： $y = r - \delta$ ）のフォワードレート・モデルを考え、これに上述のモデルを応用することを考えた。まず、時点 t において観察される将来時点 T の瞬間的なフォワード・キャリー・コストを $y(t, T)$ で与える⁴⁴。先物価格はフォワード・キャリー・コストによって

$$F(t, T) = S(t) \exp\left\{\int_t^T y(t, u) du\right\}, \quad (19)$$

と表される。

WTI 先物のオプションについて、インプライド・ボラティリティやストラドル・ポジションの収益率を主成分分析や回帰分析で検証したところ、先物価格のボラティリティ変動を説明するには2つの成分が必要ながわかった。そこで、スポット価格 S とフォワード・キャリー・コスト $y(t, T)$ のボラティリティが、それぞれ2つのファクター (v^1, v^2) で駆動されるという包括的なモデルを考え

⁴² Casassus, Collin-Dufresne and Goldstein [2005]は、HJM モデルがスポットレート・モデルと一対一対応するように、アンスパンド確率ボラティリティとして作ったスポットレート・モデルがフォワードレート・モデルとして等価表現できることを示している。また、スポットレート（瞬間無リスク金利）、ボラティリティ、スポットレートの平均回帰水準を3つの状態変数としたアフィン・モデルをアンスパンド確率ボラティリティ・モデルとして構築し、米国のスワップレートとそのデリバティブ（キャップとフロア）に適用すると、モデルの説明力が高いことを示している。

⁴³ コンビニエンス・イールドと無リスク金利を併せて1変数として扱うアプローチは、本研究に先立つ Cortazar and Schwartz [1994]でも採用されている。金利が確率変動することの先物価格への影響力はコンビニエンス・イールドに比べると遥かに小さく、前出の Casassus and Collin-Dufresne [2005]でも、金利とスポット価格の確率ファクター間の相関はほぼゼロと推計されている。

⁴⁴ t 期における瞬間的なスポット・キャリー・コストは、 T を t とした場合のフォワード・キャリー・コストとして $y(t, t)$ で与えられる。

たうえで、スポット価格の説明には 2 つのファクターのうち一方が不要であることを検証する分析方針をとっている。まず、リスク中立測度でのモデルとして、

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} &= \delta(t)dt + \sigma_{s1}\sqrt{v^1}d\tilde{B}^1 + \sigma_{s2}\sqrt{v^2}d\tilde{B}^2, \\ dy(t,T) &= \mu_y(t,T)dt + \sigma_{y1}(t,T)\sqrt{v^1}d\tilde{B}^3 + \sigma_{y2}(t,T)\sqrt{v^2}d\tilde{B}^4, \\ dv^1 &= (\eta_1 - \kappa_1v^1 - \kappa_{12}v^2)dt + \sigma_{v1}\sqrt{v^1}d\tilde{B}^5, \\ dv^2 &= (\eta_2 - \kappa_{21}v^1 - \kappa_2v^2)dt + \sigma_{v2}\sqrt{v^2}d\tilde{B}^6,\end{aligned}\tag{20}$$

を考える。6 つのブラウン運動のうち、 \tilde{B}^1 と \tilde{B}^2 はスポット価格の拡散項、 \tilde{B}^3 と \tilde{B}^4 はフォワード・キャリー・コストの拡散項、 \tilde{B}^5 と \tilde{B}^6 はスポット価格やフォワード・キャリー・コストのボラティリティを表現するファクター (v^1 、 v^2) の拡散項を生成する。 \tilde{B}^1 、 \tilde{B}^3 、 \tilde{B}^5 は互いに相関 ρ_{13} 、 ρ_{15} 、 ρ_{35} を持ち、 \tilde{B}^2 、 \tilde{B}^4 、 \tilde{B}^6 は互いに相関 ρ_{24} 、 ρ_{26} 、 ρ_{46} を持つものとする⁴⁵。 $\delta(t)$ は、 t 時点のスポット・キャリー・コストであり $y(t,t)$ に当たる。期先の先物ほどボラティリティが小さくなる現象がコモディティ全般に観察されるため、フォワード・キャリー・コストのボラティリティ係数については、

$$\sigma_{yi}(t,T) = \alpha_i \exp\{-\gamma_i(T-t)\} \quad (i=1,2),\tag{21}$$

と仮定する。ここで α_i と γ_i は定数である。2 つのファクター v^i 間で係数 γ_i が異なると、ハンプ・シェイプした U 字や逆 U 字の期間構造も表現できる。

フォワード・キャリー・コストのドリフトは、無裁定条件から、

$$\begin{aligned}\mu_y(t,T) &= -\{v^1\sigma_{y1}(t,T)(\rho_{13}\sigma_{s1} + \int_t^T \sigma_{y1}(t,u)du) \\ &\quad + v^2\sigma_{y2}(t,T)(\rho_{24}\sigma_{s2} + \int_t^T \sigma_{y2}(t,u)du)\},\end{aligned}\tag{22}$$

を満たす。HJM モデルと同様、ドリフトがボラティリティで表現されており、最終的にはキャリー・コストがスポット、フォワード共にファクター v^i の関数として表される。また、リスク中立測度下の(20)式を現実測度に変換する際には、

⁴⁵ 奇数番号と偶数番号のブラウン運動間は独立とすることにより、2 つのファクター v^i が独立したアフィン拡散過程に従うよう工夫している。なお、 v^1 のドリフト項に v^2 が含まれており、これにより例えば $\kappa_{21} = \mathbf{0}$ 、 $\kappa_{12} = -\kappa_1$ とした際に、ボラティリティが平均回帰的に変動し、かつ、平均回帰水準が変動するモデルとなり、表現力が高められている。

各ブラウン運動に対するリスクの市場価格が $\sqrt{v^1}$ ないし $\sqrt{v^2}$ に比例するように

$$\begin{aligned} dB^i &= d\tilde{B}^i - \Lambda_i(t)dt, \quad i=1,\dots,6, \\ \Lambda_i(t) &= \lambda_i \sqrt{v^1}, \quad i=1,3,5, \\ \Lambda_i(t) &= \lambda_i \sqrt{v^2}, \quad i=2,4,6, \end{aligned} \tag{23}$$

で与える⁴⁶。

以上のモデルを WTI 先物とオプションに適用した分析結果として、①先物カーブを決めるキャリー・コストのボラティリティは2つのファクターを必要とするが、②スポット価格のボラティリティは1ファクター (v^1) で十分に表現できること、③そのボラティリティ・ファクター (v^1) は平均回帰過程に従うが、平均回帰水準は v^2 の変動に伴い緩やかに変動していることを示した。また、モデルのフィットが高く、先物カーブのみならず、スポット価格の変動、オプション価格から導出されるインプライド・ボラティリティのスマイル構造や期間構造のいずれに対する表現力にも優れたモデルであると結論付けている。

(4) 潜在変数モデル

2節(3)ロ. では、先物カーブが平行にシフトし、長期均衡水準が一定とは考えにくい事象が近年起きていることを説明した。こうした状況を踏まえて、長期均衡水準が変動することを直接的にモデル化しようとした潜在変数モデルも開発されてきている。確率変動をもたらすファクターを潜在変数としてモデル化した研究としては、Schwartz and Smith [2000]、白谷・高橋・福西 [2007]、Cortazar and Naranjo [2006]などを挙げることができる。これらのモデルではすべての状態変数がスポット価格やコンビニエンス・イールド等に明示的に結び付いているわけではないという点で、潜在変数を含んだモデル化となっている。

Schwartz and Smith [2000]は、対数スポット価格が2つの潜在変数 x^1 、 x^2 の和で表されるとし ($\log S = x^1 + x^2$)、潜在変数は(24)式の確率過程に従うとした。

$$\begin{aligned} dx^1 &= -\kappa x^1 dt + \sigma_1 dB^1, \\ dx^2 &= \mu dt + \sigma_2 dB^2. \end{aligned} \tag{24}$$

⁴⁶ リスクの市場価格に関して、コンプリートリー・アフィンを仮定していることになる。前出の Casassus and Collin-Dufresne [2005]は、より自由度が高いエッセンシャル・アフィンを用いていたが、Trolle and Schwartz [2009]は彼らの推計結果はその必要性がなかったことを示しているとして、より扱いやすいコンプリートリー・アフィンを採用している。

ここで、 κ 、 μ 、 σ_1 、 σ_2 は定数で、ブラウン運動 B^1 と B^2 は相関を持つ。2つの潜在変数は以下のように解釈できる。まず、 x^1 はゼロに回帰する成分であり、短期的な変動を表す。次に、 x^2 は、対数スポット価格から短期変動を除いた成分であり、長期の変動を表現している。対数スポット価格は x^2 の周りで短期的に変動するため、 x^2 は長期的にみたときの均衡水準を表すとも解釈できる。(24)式 of 確率過程で表される潜在変数はリスク中立測度のもとでは

$$\begin{aligned} dx^1 &= (-\kappa x^1 - \lambda_1)dt + \sigma_1 d\tilde{B}^1, \\ dx^2 &= (\mu - \lambda_2)dt + \sigma_2 d\tilde{B}^2, \end{aligned} \quad (25)$$

で表現される。ただし、 λ_1 、 λ_2 は定数であり、各状態変数に対するリスクの市場価格は λ_1/σ_1 、 λ_2/σ_2 である。また、ブラウン運動 \tilde{B}^1 と \tilde{B}^2 の相関は B^1 と B^2 の相関と等しいとする。このような設定のもとで先物価格の解析解が導出されている。

白谷・高橋・福西 [2007]は、3つの潜在変数 x^1 、 x^2 、 x^3 を導入し、 x^1 を対数スポット価格とし($\log S = x^1$)、その他2つの潜在変数 x^2 、 x^3 が(26)式 of 確率過程に従うと仮定した。

$$\begin{aligned} dx^1 &= \kappa_1(x^2 + x^3 - x^1)dt + \sigma_1 dB^1, \\ dx^2 &= -\kappa_2 x^2 dt + \sigma_2 dB^2, \\ dx^3 &= (\alpha - \kappa_3 x^3)dt + \sigma_3 dB^3. \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、 κ_i 、 σ_i ($i=1,2,3$)、 α は定数で、ブラウン運動は相関を持つとする($dB_i^i \cdot dB_j^j = \rho_{ij} dt$)。また、 κ_1 は x^1 が $x^2 + x^3$ へ回帰する速度を表し、 κ_2 は x^2 が減衰する速度を表し、 κ_3 は x^3 が α/κ_3 へ回帰する速度を表すものと解釈できる。この場合、 $x^2 + x^3$ は対数スポット価格の中期的な均衡水準を表し、このうち、 x^2 は長期的にはゼロに回帰するが、 x^3 は長期的に α/κ_3 に回帰する。

白谷・高橋・福西 [2007]は、各潜在変数に対するリスクの市場価格を時間と潜在変数に依存する関数として設定することにより、リスク中立測度のもとで(27)式のように潜在変数が(26)式 of 確率過程と同じ形式を保つようにした。

$$\begin{aligned} dx^1 &= \tilde{\kappa}_1(x^2 + x^3 - x^1)dt + \sigma_1 d\tilde{B}^1, \\ dx^2 &= -\tilde{\kappa}_2 x^2 dt + \sigma_2 d\tilde{B}^2, \\ dx^3 &= (\tilde{\alpha} - \tilde{\kappa}_3 x^3)dt + \sigma_3 d\tilde{B}^3. \end{aligned} \quad (27)$$

ただし、 $\tilde{\kappa}_i$ ($i=1,2,3$)、 $\tilde{\alpha}$ は定数で以下のように与えられる。

$$\tilde{\kappa}_1 = \kappa_1 + c_1\sigma_1, \quad \tilde{\kappa}_2 = \kappa_2 + c_2\sigma_2, \quad \tilde{\kappa}_3 = \kappa_3 + c_3\sigma_3, \quad \tilde{\alpha} = \alpha + c_4\sigma_3. \quad (28)$$

ここで、 c_i ($i=1, \dots, 4$) は定数である。また、ブラウン運動 $\tilde{\mathbf{B}}^i$ は(26)式のブラウン運動 \mathbf{B}^i と同じ相関を持つ ($d\tilde{\mathbf{B}}_i^i \cdot d\tilde{\mathbf{B}}_i^j = \rho_{ij} dt$)。このような設定のもとで先物価格の解析解が導出されている。

Cortazar and Naranjo [2006]は、さらに一般的な形で n 次元の潜在変数モデルを提示して先物価格の解析解を導いた。すなわち、対数スポット価格は、 n 個の潜在変数と既知のトレンド μt を用いて、以下のように表現されると仮定する。

$$\log S = x^1 + x^2 + \dots + x^n + \mu t. \quad (29)$$

さらに、潜在変数ベクトル $\mathbf{X} = (x^1, \dots, x^n)^T$ は、次の多次元平均回帰モデルに従うと仮定する。

$$d\mathbf{X} = -\mathbf{K}\mathbf{X}dt + \Sigma d\mathbf{B}. \quad (30)$$

ただし、 \mathbf{K} は(1,1)成分がゼロの定数対角行列、 Σ も定数対角行列、 \mathbf{B} は相関があるブラウン運動とする。(30)式の確率過程は、潜在変数に対するリスクの市場価格を定数ベクトル $\Sigma^{-1}\lambda$ とすると、リスク中立測度のもとで次の多次元 OU 過程に従う。

$$d\mathbf{X} = -(\lambda + \mathbf{K}\mathbf{X})dt + \Sigma d\tilde{\mathbf{B}}. \quad (31)$$

ただし、 $\tilde{\mathbf{B}}$ は \mathbf{B} と同じ相関を持つブラウン運動である。このモデルは、潜在変数の数を柔軟に増やすことができるという柔軟性があり、前掲(5)式を評価することで先物価格の解析解も導出できる。ただし、各潜在変数の意味付けは不明瞭になってしまう。

(5) スポット価格のスパイクの表現

これまでさまざまな種類のコモディティ価格を対象としたモデルをサーベイしてきたが、ここでは、特に電力価格を対象としたモデルを扱う。電力価格は、貯蔵困難という性質を反映し、前掲図 11 に示したように価格が急上昇し、直後に急降下することがある。こうしたスポット価格のスパイクを表現するモデルとしては、ジャンプを含む確率過程でスポット価格過程を表現するタイプのモデルと、需要変動や供給制約からスパイクを表現するタイプのモデルがある。いずれのモデルも、急激な価格上昇だけでなく、その後の急激な価格低下

を表現する点に工夫がみられる。

イ. ジャンプ過程を用いたモデル

(イ) 平均回帰過程とジャンプ過程を組み合わせたモデル

Johnson and Barz [1999]は、表 2 に示したように、ブラウン運動 (Brownian motion ; BM)、幾何ブラウン運動 (geometric Brownian motion ; GBM)、平均回帰過程 (mean reverting process ; MR)、幾何平均回帰過程 (geometric mean reverting process ; GMR) の 4 つのモデルと、それらにジャンプ項 J を加えた 4 つのモデル (BMJ、GBMJ、MRJ、GMRJ) を比較・分析した。ここで、ジャンプを表す確率過程 J は、次の複合ポアソン過程である。

$$J(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} J_i. \quad (32)$$

表 2 ブラウン運動、平均回帰過程、およびジャンプ・モデル

BM	$dS = \mu dt + \sigma dB$	MR	$dS = \kappa(\alpha - S)dt + \sigma dB$
GBM	$dS = \mu S dt + \sigma S dB$	GMR	$d \log S = \kappa(\alpha - \log S)dt + \sigma dB$
BMJ	$dS = \mu dt + \sigma dB + dJ$	MRJ	$dS = \kappa(\alpha - S)dt + \sigma dB + dJ$
GBMJ	$dS = \mu S dt + \sigma S dB + dJ$	GMRJ	$dS = \kappa(\alpha + \sigma^2 / 2 - \log S)S dt + \sigma S dB + dJ$

備考： $N(t)$ は、ジャンプ強度が λ の定常ポアソン過程を表し、ジャンプ幅 J_i は、独立同一の両側指数分布に従う。

Johnson and Barz [1999]は、4 地域 (北欧、英国、豪州、米国)、3 期間 (1998 年 4~5 月、6~7 月、8~9 月) の計 12 ブロックの電力価格データについて、上記の 8 つのモデルのパラメータを最尤法で推定し、対数尤度によりフィットの良さを比較した。その結果、多くの地域と期間 (9 ブロック) で、GMRJ が最もフィットが良いという結果を得た。

また、表 2 の左右のモデルを比較すると、平均回帰性を持つ右のモデルの方が、フィットが良いことが示された。これは、平常時はあるレンジ圏内で電力価格が推移している点を表現するうえで、ブラウン運動よりも平均回帰モデルが適しているためと考えられる。次に、ジャンプの有無について評価するために、MR と MRJ、GMR と GMRJ をそれぞれ比較すると、MRJ や GMRJ の方が

フィットが良いという結果となった。これは、スパイクのような一時的な価格上昇を表現するには、拡散項のみのモデルよりもジャンプ項を含んだモデルの方が適しているためと考えられる。なお、MRJ と GMRJ では、対数価格変動をモデル化した方がスパイクをうまく表現できることから、GMRJ の方がフィットが良くなっている。

(ロ) 閾値モデル

Geman and Roncoroni [2006]は、前述の GMRJ を改良し、閾値モデルを提唱した。このモデルでは、対数スポット価格から季節性とトレンドを表す $\mu(t)$ （時間を引数とする確定的な関数）を差し引いた確率過程が OU 過程に従い、さらに、閾値の上下で方向が変わるジャンプ項が加えられている。このジャンプ項は、大きなスパイクなどにより対数スポット価格がある閾値を越えると、需要が低下し、価格が急激に下落する様子を表現している。

具体的には、対数スポット価格過程として、以下のモデルを仮定する。

$$d(\log S(t) - \mu(t)) = -\kappa(\log S(t-) - \mu(t))dt + \sigma dB + h(t-)dJ. \quad (33)$$

ただし、 $t-$ は時間 t に関する左極限を表す。すなわち、時点 t でジャンプが起こる場合、 $t-$ はそのジャンプの直前の時刻を指す。また、 κ 、 σ は定数、 B はブラウン運動であり、 $h(t)$ は、閾値 \bar{X} で値が変わる以下の関数とする。

$$h(t) = \begin{cases} +1 & (\log S(t) < \bar{X}) \\ -1 & (\bar{X} \leq \log S(t)). \end{cases} \quad (34)$$

この関数を利用すると、大きなスパイクが発生して対数スポット価格が閾値 \bar{X} 以上になったときに、下方へのジャンプが加わることで通常の OU 過程よりも早く平均回帰水準に向かうという性質を表現できる。さらに、スパイクを表すジャンプ過程は、次のように置く。

$$J(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} J_i. \quad (35)$$

J_i は区間 $[0, b]$ ($0 < b < \infty$) に値をとる確率変数で、独立同一の切断指数分布に従うとする。 b は最大のジャンプ幅である。 J_i の確率密度関数は、パラメータ θ を用いて、

$$p(x; \theta, b) = \frac{\theta}{1 - \exp(-\theta b)} \exp(-\theta x) \quad (0 \leq x \leq b), \quad (36)$$

と表現され、パラメータ θ が大きいほど、大きなジャンプが発生する可能性は小さくなる。また、 $N(t)$ は、非定常ポアソン過程とし、そのジャンプ強度 $\lambda(t)$ は、パラメータ λ (単位時間当たりの期待最大ジャンプ数) を用いて、

$$\lambda(t) = \lambda \left\{ \frac{2}{1 + |\sin(\pi(t - \tau)/k)|} - 1 \right\}^d, \quad (37)$$

と表される。ここで、 τ はスパイクの発生頻度が高い時期を表し、 $\lambda(t)$ は期間 k の周期性を持つ。 d の値が高いほど、ピーク時以外のジャンプの発生頻度は低下する。季節性を表す $\mu(t)$ については、

$$\mu(t; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta) = \alpha + \beta t + \gamma \cos(\varepsilon + 2\pi) + \delta \cos(\zeta + 4\pi), \quad (38)$$

と仮定している。右辺第 3 項の $\cos(\varepsilon + 2\pi)$ は半年周期、第 4 項の $\cos(\zeta + 4\pi)$ は四半期周期を表している。右辺第 2 項の β は季節性を除去したうえでの平均回帰水準の伸び率 (トレンド) を示している。

実証分析としては、1997 年 1 月 6 日から 99 年 12 月 30 日までの米国 (ECAR・PJM・COB 地域⁴⁷) の電力日次データを用いてパラメータを推計し、この推計値のもとでシミュレートした電力価格と実際の市場価格の変動をインサンプルで比較した。その結果、実際の市場価格と非常に似た変動をするサンプルパスを発生させることができたと報告している。ただし、トレンド $\mu(t)$ について上記のようにモデル化したとき、実証分析のように観測期間を 3 年間程度 (750 営業日) にすると、観測期間が短すぎ β の推計誤差が大きくなることが考えられる。本分析でも 3 つの米国市場のうち、COB での β の値は桁が大きく異なっていた。

ロ. 需給変動からスパイクを表現するモデル

(イ) 需要要因が確率的に変動するモデル

Barlow [2002] や Kanamura and Ohashi [2007] は、需要要因を確率過程で表現するとともに、市場全体の供給関数 ($y = f(x)$ 、 x は価格、 y は供給量) を所与と

⁴⁷ ECAR (East Central Area Reliability) 地域はケンタッキー州周辺、COB (California Oregon Border) 地域はカリフォルニア州とオレゴン州の境周辺である。

するモデルを提唱した。両モデルとも共通して、需要量 D を OU 過程とし、その需要量を供給逆関数 $x = f^{-1}(y)$ に代入することで⁴⁸、スポット価格 S を $S = f^{-1}(D)$ と表現している。

Barlow [2002] と Kanamura and Ohashi [2007] の違いは供給逆関数の形にある⁴⁹。Barlow [2002] は、Box and Cox [1964] で紹介された変換式⁵⁰ ((39)式) を用いた一方、Kanamura and Ohashi [2007] は、ホッケー・スティック型と呼ばれる関数 ((40)式) を供給逆関数に用いている。スパイク発生頻度へのフィットという観点で両モデルを比較すると、Kanamura and Ohashi [2007] のモデルの方が現実のデータによりフィットしているとのシミュレーション結果が得られている。

Barlow [2002] の供給逆関数 $f^{-1}(y)$ は、 $\alpha < 0$ に対して、

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} & (a - b\varepsilon < y) \\ \left(\frac{a-y}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & (y \leq a - b\varepsilon), \end{cases} \quad (39)$$

であり、Kanamura and Ohashi [2007] の供給逆関数 $f^{-1}(y)$ は、

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 y & (y \leq y_1) \\ a + by + cy^2 & (y_1 < y < y_2) \\ \alpha_2 + \beta_2 y & (y_2 \leq y), \end{cases} \quad (40)$$

である。例えば、横軸を発電量 (MWh)、縦軸を電力卸売価格として各取引をプロットすると、限界費用を表す曲線に沿って分布する。このような限界費用曲線の形状に近いものを供給逆関数として選択することで、電力価格の変動をより正確に再現できる。Kanamura and Ohashi [2007] の方が市場データにフィットした背景にも、より精密な供給逆関数の表現があると考えられる。

⁴⁸ 需要 D を供給逆関数に代入する背景には、需要量をリアル・タイムで観測しつつ電力供給量を調節している実状がある。

⁴⁹ このほか、Skantze, Ilic and Gubina [2004] は、需要量 D を OU 過程とし、供給逆関数を指数関数としたモデルを考えている。

⁵⁰ Box-Cox 変換の逆変換を供給逆関数とすることで、需要の高まりに応じて価格が急激に大きくなる性質を表現するとともに、一定以上の需要では価格の上限に達する様子を表現している。

(ロ) 供給要因が確率的に変動するモデル

Huisman and Mahieu [2003]は、供給要因としてレジーム・スイッチする確率過程を考え、これと季節変動成分の和で対数スポット価格を表現するモデルを提唱した。

まず、対数スポット価格 $\log S(t)$ ($t = 0, 1, 2, \dots$) は、季節要因 $D(t)$ と供給要因 $Y(t)$ の和として、

$$\log S(t) = D(t) + Y(t), \quad (41)$$

と表されると仮定する。 $D(t)$ は曜日ごとの需要を次のように表す。

$$D(t) = \begin{cases} d_0 & (\text{平日}) \\ d_1 & (\text{土曜日}) \\ d_2 & (\text{日曜日}). \end{cases} \quad (42)$$

ここで、 d_i ($i = 1, 2, 3$) は定数である。また、 $Y(t)$ はレジーム・スイッチをする供給であり、次のように表される。

$$Y(t) - Y(t-1) = \begin{cases} -\kappa_1 Y(t-1) + \sigma_1 \varepsilon(t) & (Z(t) = 1) \\ \mu + \sigma_2 \varepsilon(t) & (Z(t) = 2) \\ -\kappa_3 Y(t-1) + \sigma_3 \varepsilon(t) & (Z(t) = 3). \end{cases} \quad (43)$$

ここで、 μ と κ_j ($j = 1, 3$)、 σ_j ($j = 1, 2, 3$) は定数で $0 < \kappa_1 \ll \kappa_3$ とし、 $\varepsilon(t)$ は互いに独立に標準正規分布に従う確率変数、 $Z(t)$ はレジームを表し、 $\{1, 2, 3\}$ に値をとるマルコフ連鎖とする。具体的には、 $Z(t) = 1$ がスパイク非発生時の通常ダイナミクス、 $Z(t) = 2$ がスパイク発生時のダイナミクス、 $Z(t) = 3$ がスパイク発生後の回帰水準への強い回帰を表す。これらのレジームは、次のような推移確率を持つとする。時刻 t でのレジームが j 、時刻 $t+1$ でのレジームが i となる確率を $\pi(i, j)$ とすると、

$$\pi(1,1) = p, \pi(2,1) = 1-p, \pi(3,2) = 1, \pi(1,3) = 1 \text{ それ以外の } \pi(i, j) = 0. \quad (44)$$

したがって、レジームが 1 の状態からは、 $\pi(2,1) = 1-p$ の確率でレジームが 2 の状態になり、翌日には、必ずレジームが 3 の状態、翌々日には必ずレジームが 1 の状態に戻ることを表している。

(ハ) 需要要因と供給要因が確率的に変動するモデル

電力の需給を考えるうえで、需要項と供給項がともに確率変動するとしてモデル化する手法もある。このような研究として、Hikspoons and Jaimungal [2007] や Cartea and Villaplana [2008]が挙げられる。両者の大きな違いは、供給要因の表現方法である。前者は、供給要因としてジャンプ過程を用いているのに対し、後者は、季節ごとにボラティリティ定数を変える関数が拡散項にかかっている。

Hikspoons and Jaimungal [2007]は、対数スポット価格を2つの確率過程の和で表現した。一方は需要要因を表し (D)、もう一方は供給要因を表す (C)。 D は OU 過程に従い、 C は OU 過程の拡散項がジャンプ項に代わった(45)式の確率過程である。

$$\begin{aligned}\log S &= D + C, \\ dD &= \kappa_1(\alpha_1 - D)dt + \sigma dB, \\ dC &= -\kappa_2 C dt + dJ.\end{aligned}\tag{45}$$

ここで、 α_1 は需要の平均回帰水準を表す定数、 σ は定数、 κ_1 は需要が平均回帰水準に回帰する速度を表す定数、 κ_2 はジャンプによる影響が減衰する速度を表す定数である。ジャンプを表す確率過程 J は、次の複合ポアソン過程とする。

$$J(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} J_i.\tag{46}$$

$N(t)$ は、ジャンプ強度が $\lambda(t)$ の非定常ポアソン過程であり、ジャンプサイズ J_i は独立同分布 $F(x)$ に従う。ジャンプ強度 $\lambda(t)$ やジャンプサイズの分布 $F(x)$ は、実証分析に基づき推計する。これまでのジャンプ項が入ったモデル (Johnson and Barz [1999]、Geman and Roncoroni [2006]) は、回帰速度のパラメータが1つであったため、スパイク発生後の急激な回帰を表現するのが難しかったが、このモデルでは、回帰速度のパラメータを2つ (κ_1 と κ_2) 設定することで、その表現が可能となっている。

一方、Cartea and Villaplana [2008]のモデルは、以下のとおりである。まず、対数スポット価格を(47)式のように需要要因 (D) と供給要因 (C) で表現し、それぞれの要因を季節性およびトレンドと OU 過程の和と考える。

$$\begin{aligned}\log S(t) &= \log \beta + \alpha D(t) + \gamma C(t), \\ D(t) &= g^D(t) + X^D(t), \\ C(t) &= g^C(t) + X^C(t).\end{aligned}\tag{47}$$

ここで、 α と β は正の定数とし、 γ は負の定数とする。これは、電力供給容量が下がったときに電力価格が上昇する様子を表現するためである。関数 $g^D(t)$ は需要の季節性とトレンドを表し⁵¹、そこからのずれ X^D は、以下の OU 過程で表す。

$$dX^D = -\kappa^D X^D dt + \sigma^D(t) dB^D. \quad (48)$$

(48)式のボラティリティ関数 $\sigma^D(t)$ については、季節ごとに一定の値をとる階段関数を考える。定数 κ^D は需要が平均回帰水準に回帰する速度を表す。また、供給要因としては、発電所の保守など予想される変化を織り込んだ電力供給量を表す関数 $g^C(t)$ を考えるとともに、そこからのずれ X^C を以下の OU 過程で表現している⁵²。

$$dX^C = -\kappa^C X^C dt + \sigma^C dB^C. \quad (49)$$

κ^C は回帰速度を表す定数、 σ^C はボラティリティを表す定数である。また、ブラウン運動 B^D と B^C は独立である。

本小節で扱ったスポット価格のスパイクの表現は、電力価格を対象としたものが多い。それらのプライシング・モデルは、スパイクを考慮しながらスポット価格をモデル化したものが多く、先物価格のモデル化はあまりなされていない。Cartea and Villaplana [2008]では、上記のようにスポット価格をモデル化したことに加え、リスクの市場価格を仮定することにより、先物価格のモデルも与えている。具体的なモデルについては、4節(6)の電力価格に関する応用例で紹介する。

(6) プライシング・モデルのまとめ

本節で紹介した各種モデルの特性をまとめると、表 3、表 4 のように整理できる。

まず、先物カーブのモデルをみると (表 3)、分析対象商品としては原油や銅が多いことがわかる。これらの商品は長期と短期の先物価格に比較的大きな差があり、その性質を表現するために、コンビニエンス・イールド (CY) を直接的にモデル化したものや回帰水準が変動するモデルなどが考えられている。

⁵¹ 月ごとの需要水準を表す階段型の関数である。

⁵² Cartea and Villaplana [2008]は、供給容量に対する超過需要分を $-g^C(t)$ で近似している。

表 3 先物カーブ特性と論文

論文	因子数	表現した特性				分析商品
		CY	金利	為替	ボラティリティ	
Gibson and Schwartz [1990]	2	○	固定	—	固定	原油
Schwartz [1997]	3	○	変動	—	固定	原油 銅 金
Casassus and Collin-Dufresne [2005]	3	○	変動	—	固定	原油 銅 金 銀
山内 [2002]	4	○	変動	○	—	とうもろこし
Richter and Sørensen [2002]	3	○	—	—	変動	大豆
Nielsen and Schwartz [2004]	2	○	—	—	—	銅
Andersen [2008]	3	—	—	—	変動	天然ガス
Trolle and Schwartz [2009]	6	○	—	—	変動	原油
Schwartz and Smith [2000]	2	○	—	—	—	原油
白谷・高橋・福西 [2007]	3	○	変動	—	—	原油 銅
Cortazar and Naranjo [2006]	N	—	—	—	—	原油 銅

備考：—は明示的にはモデル化していないことを示す。

表 4 スポット価格特性と論文

論文	型	表現した特性		分析商品
		スパイク	季節変動	
Johnson and Barz [1999]	GBMJ	ジャンプ過程	—	電力
Geman and Roncoroni [2006]	GBMJ	ジャンプ過程・閾値	所与	電力
Kanamura and Ohashi [2007]	需給	供給関数	OU 過程	電力
Hikspoors and Jaimungal [2007]	需給	ジャンプ過程	—	電力
Huisman and Mahieu [2003]	レジーム・スイッチング	ジャンプ過程	所与	電力

次に、スポット価格のモデルをみると（表 4）、電力価格が供給制約等を背景にスパイクしやすいことから、分析対象を電力価格としてスパイクを表現可能なモデル化が行われている。スパイクについては、幾何ブラウン運動にジャンプを加えた確率過程（geometric Brownian motion with jumps ; GBMJ）やレジーム・

スイッチング・モデルにより外生的にスポット価格をモデル化するものや、需給関係をモデル化することでスポット価格を内生的に導出するものが発展してきている。

4. 応用例

本節では、前節で述べた既存モデルの具体例をコモディティ市場別に整理する。この際、各コモディティ市場の特徴を踏まえたうえで、どのようにモデル化が行われているかそのモデルの特色をまとめる。

(1) 原油

原油価格の動きをみると、湾岸戦争時を除いて 1980 年代後半～90 年代には、前述のとおり、20 ドル/バレル前後の水準へ回帰するように変動しており（前掲図 6 参照）、先物カーブも長期の限月物ほどこの回帰水準に近づいていた。しかし、2000 年代半ば以降については、原油価格高騰の局面で先物カーブがほぼ平行にシフトするようになった。こうした特徴を記述するため、近年では、回帰水準を固定しないモデルが発展し、応用されている。

Schwartz [1997]は、3 節(2)で紹介した Gibson and Schwartz [1990]の 2 ファクター・モデルと、金利をファクターに加えた 3 ファクター・モデルを用いて、原油先物価格の分析を行った。用いた原油価格データは、1990 年 1 月から 95 年 2 月までの原油先物価格（週次データ）である。両モデルの推計結果を比較すると、3 ファクター・モデルの方が、パラメータ数が多いにもかかわらず、対数尤度は両モデルでほとんど同じであることが示された。特に、前掲(6)式の 3 ファクター・モデルで推計された σ_3 の値は 0.0081 と小さく、スポット価格への影響は、金利変動よりもコンビニエンス・イールドの変動の方が大きいと考えられる。したがって、金利が大きく変化しない局面では、金利を定数としたモデルで十分と考えられる。

Cortazar and Naranjo [2006]では、カルマン・フィルタを用いて、1992 年から 2001 年の日次価格に N ファクターの潜在変数モデルをフィットさせた。対数スポット価格を 1 つのブラウン運動と $N-1$ 個の OU 過程の線形和であるとし、 N が 1～4 の場合にどの程度フィットするかを調べ、先物カーブの表現には最低 3 ファクターが必要であること、4 ファクターではボラティリティの期間構造まで表現

可能であることを示した。更に、サンプル外のデータに関する平均二乗誤差をみても、ファクター数を増やしたモデルの適合性が高いことを示している。

白谷・高橋・福西 [2007]では、3つの潜在変数によって対数先物価格を表現したモデル（3節(4)を参照）を用い、1997年1月から2002年10月までの週次データおよび1997年1月から2006年11月までの週次データにカルマン・フィルタを用いてフィッティングを行った。対象とした先物は、NYMEXの原油先物の直近限月および7年分の12月限の先物である。分析の結果、先物価格の期間構造をこのモデルで的確に表現できることを示すとともに、長期の先物を短期の先物で効率的にヘッジする手段を提示した。長期の対数先物価格の変動要因を表す潜在変数 x^3 は $dx^3 = (\alpha - \kappa_3 x^3)dt + \sigma_3 dB^3$ という確率過程に従うと仮定しているが、ここで κ_3 が正値をとれば平均回帰モデルになり、 κ_3 がゼロの場合は非平均回帰モデルとなる。 κ_3 の推定値は、2002年10月までのサンプルでは0.110と、ある程度回帰性がある一方、2006年11月までのサンプルでは0.005と、回帰性がほとんどないという結果になった。すなわち、近年の原油価格高騰局面を含めたデータをフィットさせる場合、平均回帰モデルより非平均回帰モデルの方が当てはまりが良いことが予想される。実際、サンプル外で行ったヘッジ効率の検証でも、原油価格高騰の局面における非平均回帰モデルの効率性が示されている。

(2) 銅

銅の価格変動は、原油の価格変動と共通点が多い。この理由としては、銅と原油の価格は、共に産業需要要因から強い影響を受けることが挙げられる。そのため、銅の価格変動モデルとして、原油価格のモデルをそのまま利用している研究が多い。以下に示すSchwartz [1997]と白谷・高橋・福西 [2007]の2つの実証結果からも、銅と原油の価格変動の共通性をみることができる。

Schwartz [1997]は、銅についても原油と同様に2ファクター・モデルとそれを拡張した3ファクター・モデルを想定し、パラメータの推計と対数尤度の算出を行ったが、ファクター数を増やしても対数尤度に大きな改善はみられなかった。この結果は本節(1)で示した原油に関する結果と同様である。なお、銅の実証分析では、1988年7月から95年6月までの銅先物価格（週次データ）からパラメータ推計を行っている。

白谷・高橋・福西 [2007]は、原油と同様に銅についても対数先物価格を表現したモデル（3節(4)を参照）を用い、2002年9月から04年11月までの週次データおよび2002年9月から06年12月までの週次データにカルマン・フィルタを用いてフィッティングを行った。対象とした先物は、LMEの銅先物の直近限月および6年分の12月限の先物である。推計の結果、平均回帰性を表すパラメータ κ_3 の推定値は、2004年11月までのサンプルでは0.007、2006年12月までのサンプルでは0.044と、いずれも潜在変数 x^3 には平均回帰性がほとんどないという結果になった。すなわち、LMEの銅先物のデータには、平均回帰モデルより非平均回帰モデルの方が当てはまりが良いと考えられる。実際、長期先物価格のヘッジ効率について、平均回帰モデルと非平均回帰モデルで比較すると、原油の場合と同様に、非平均回帰モデルを用いた方が効率的なヘッジとなることが示されている。

(3) 天然ガス

天然ガスは、暖房や発電燃料としての需要により、冬場に価格や取引頻度が高まり、他のコモディティよりも価格の季節性が強い。こうした特徴を記述するために、既存研究では天然ガスの先物カーブに季節性を織り込んだモデルが応用されている。

例えば、Andersen [2008]は、3節(3)イ.で紹介したように、季節性を考慮した確率ボラティリティ・モデルで先物カーブをモデル化している。これにより、先物カーブに現れる季節性を的確に表現できるほか、オプション価格を導出した場合には、インプライド・ボラティリティのスマイルやスキューも表現可能となっている。実証分析としては、2000年1月から07年6月のNYMEX天然ガスの先物価格やインプライド・ボラティリティのスマイル・スキュー構造を数値計算し、本モデルが市場で観測される特徴をよく再現することを確認している。

(4) 貴金属

一般的に、金や銀などの貴金属は、消費するコモディティとしての性質よりも、金融資産としての特性の方が強いいため、他のコモディティに対するモデルを適用しにくい。既存研究では、コンビニエンス・イールドを取り込んだ通常のコモディティ・モデルのパフォーマンスが貴金属に対しては低いことが報告さ

れている。例えば、Casassus and Collin-Dufresne [2005]は、3 節(2)で示した 3 ファクター・モデルで(8)式の α_s を推定すると、金の場合は推定値がゼロであり、スポット価格の水準がコンビニエンス・イールドに影響を及ぼさない点で金融資産に類似していることを指摘している⁵³。

また、Schwartz [1997]は、幾何 OU 過程⁵⁴の金価格へのフィットは悪く、対象期間内（1985 年 1 月～95 年 6 月）での平均回帰性を見出すことができなかつたとしている。さらに、カルマン・フィルタを用いて、上記の 2 ファクター・モデルを原油、銅、金のデータにフィットさせたところ、金は他の資産（原油や銅）と比べ、コンビニエンス・イールド（CY）の回帰水準やボラティリティが低いなど、その影響が非常に小さいことが示された（表 5 参照）。変動金利を考慮した 3 ファクター・モデルにおいても、表 5 の結果とさほど変わらないことも示した。

Casassus and Collin-Dufresne [2005]は、3 節(2)で示した 3 ファクター・モデルを用いて、1990～2003 年の原油、銅、金、銀の週次データから最尤推定法による推計を行った。その結果、金と銀については、コンビニエンス・イールドの水準が低く、スポット価格への影響は限定的であったことを示した（表 6 参照）⁵⁵。実際、対象期間を通じて金と銀の先物カーブは右肩上がりの形状（コンタンゴ）を維持し、カーブの傾きの変化も少なかった。

表 5 商品ごとの 2 ファクター・モデルのパラメータ推定値

商品 推計期間	CY 回帰速度	CY 回帰水準	CY ボラティリ ティ	スポット・ボラ ティリティ
原油 85～95 年	1.876 (0.024)	0.106 (0.025)	0.527 (0.015)	0.393 (0.007)
銅 88～95 年	1.156 (0.041)	0.248 (0.098)	0.280 (0.017)	0.274 (0.012)
金 85～95 年	0.011 (0.008)	-0.002 (0.322)	0.016 (0.001)	0.135 (0.003)

備考：括弧内は標準誤差。

資料：Schwartz [1997] Table VI～VIII

⁵³ 金やプラチナ等の貴金属では、リース市場（金融資産のレポ市場に相当）が発展していることや保管コストが他のコモディティ（原油や銅）に比べ小さく、現物の劣化が進みにくいことなどがその原因と考えられる。

⁵⁴ 対数スポット価格が $d \log S = (\alpha - \kappa \log S)dt + \sigma_1 dB^1$ という確率過程に従うとしたモデルで、3 節(2)の 2 ファクター・モデルにおいて、 $\delta = \kappa \log S$ としたモデルに相当する。

⁵⁵ 厳密には、ここでのコンビニエンス・イールドは δ ではなく 3 節(2)の(9)式の $\hat{\delta}$ を指す。

表 6 商品ごとの3ファクター・モデルのパラメータ推定値

商品 推計期間	CY 回帰速度	CY 回帰水準	CY ボラティリ ティ	スポット・ボラ ティリティ
原油 90～03年	1.191 (0.023)	-0.839 (0.033)	0.384 (0.013)	0.397 (0.012)
銅 90～03年	1.048 (0.038)	-0.673 (0.063)	0.178 (0.006)	0.228 (0.006)
金 90～03年	0.392 (0.035)	-0.009 (0.003)	0.015 (0.001)	0.132 (0.004)
銀 90～03年	-0.157 (0.008)	-0.530 (0.043)	0.019 (0.001)	0.223 (0.006)

備考：括弧内は標準誤差。

資料：Casassus and Collin-Dufresne [2005] Table II

さらに、Casassus and Collin-Dufresne [2005]は、原油・銅・金・銀の各コモディティの対数スポット価格の週次変動について相関を計算したところ、金と銀の組合せでは強い相関（0.6程度）を観察したものの、それ以外の組合せでは相関が低い（0.2以下）という結果を得た。また、各対数スポット価格と金利の相関を計算したところ、金や銀については、わずかながら金利と逆相関の関係があるとの結果を得た。

(5) 穀物

とうもろこし、大豆、小豆等の穀物の価格変動は、そうした穀物の調達を輸入に大きく依存している場合、コンビニエンス・イールドの変動に加え、為替レートや金利の影響が強く加わる。こうした特徴を記述するために、変動金利・為替レート、輸入コストを考慮したモデルが適用されている。

山内 [2002]は、3節(2)で示したように、対数スポット価格 $\log S$ 、対数為替レート $\log X$ 、自国金利 r 、コンビニエンス・イールド δ の4ファクター・ガウシアン・モデルにより先物の理論価格を求めるモデルを構築したうえで、CBOTのとうもろこし先物価格を用いてモデルから算出される東京穀物商品取引所（Tokyo Grain Exchange ; TGE）のとうもろこし先物価格を理論価格とし、それとTGEにおけるとうもろこしの市場価格との乖離を評価するために、以下の式で定義した誤差率を計算している。

$$\text{誤差率} = \frac{\text{理論価格} - \text{市場価格}}{\text{市場価格}}$$

この誤差率に基づき、以下の5つのモデルを比較・評価した。

- ① S 、 X 、 r 、 δ が前掲(11)式に従うと仮定した4ファクター・モデル
- ② ①において、為替レート X を固定した3ファクター・モデル
- ③ ②において、自国金利 r も固定した2ファクター・モデル
- ④ ③において、コンビニエンス・イールド δ も固定した1ファクター・モデル
- ⑤ ④において、スポット価格 S も固定したモデル

理論価格は、CBOT の先物価格から、C&F プレミアム（運賃等上乗せ分）と CIF 係数（保険料分）を加味してドルベースの CIF 価格⁵⁶を導出し、①のケースについては為替レート X のモデル、②～⑤のケースについては時点 t での為替レートを用いて算出した円換算額を用いている。ここで、CIF 係数については標準的な係数 1.07 を仮定したが、C&F プレミアムについてはよく用いられる係数 0.7 では過大評価になりがちだったため、0.35 のケースも想定した。その結果、C&F プレミアムが 0.35 の場合、6 カ月先物の平均的な誤差率は、①0.39%、②0.39%、③0.41%、④1.09%、⑤-4.38%となり、ファクターを増やした方がモデルの精緻化が図られていることが示された⁵⁷。

(6) 電力

電力市場では、2 節(3)でみたように、季節的な需要変動や発電容量による供給制約があり、このためスポット価格にスパイクや季節性といった特徴が表れる。こうした電力市場の特徴を踏まえ、既存研究では、3 節(5)で紹介したように、ジャンプ付き平均回帰過程で電力価格の確率過程をモデル化する方法や、その拡張として、電力価格がある閾値を超えたときにジャンプの効果が変化する閾値モデルが考えられている。このほか、需要要因や供給要因をモデル化したうえで価格を導く方法も紹介した。

Johnson and Barz [1999]の GMRJ の利点は、ブラウン運動だけでは表現し難いスパイクを表現できるほか、パラメータ推定も比較的容易である点にある。ただし、スパイク発生頻度が推計期間を通じて一定となり、半年ないし四半期の

⁵⁶ 輸入到着地価格を指し、原価 (cost) である出発地の FOB (free on board) 価格に、保険料 (insurance) や運賃 (freight) を上乗せした価格を指す。出発地点と到着地点の組合せにより、原価、保険料、運賃は異なる。

⁵⁷ ②と③で顕著な差が出なかったことについては、低金利政策下の円金利の変動モデルに OU 過程を仮定することは適切ではなかった点を要因に挙げている。

季節性は考慮されない。Johnson and Barz [1999]が検討した他の7つのモデルでも季節性は勘案されていなかった⁵⁸。一方で、Geman and Roncoroni [2006]のモデルでは、3節(5)で紹介したように季節性を考慮したうえで、閾値の上下で方向が変化するジャンプを考えており、需要の増加に対応しきれない供給制約を表現している。

Barlow [2002]やKanamura and Ohashi [2007]は、構造モデルからスパイクを表現した点が他の研究と異なる。既存の研究では、価格変動式に工夫を施すことにより価格の急落を再現していたが、ジャンプ過程やレジーム・スイッチングを使わずに価格の急落まで表現している点が特徴といえる。

Huisman and Mahieu [2003]は、日次の季節性を加え、スパイク発生後にはその影響が消えるようなレジーム・スイッチング・モデルを導入することでスパイクを表現した。また、Hikspoor and Jaimungal [2007]やCartea and Villaplana [2008]は、需要要因と供給要因を別々にモデル化することで、スパイクの頻度や元の水準への速い回帰を表現している点が特徴といえる。

Cartea and Villaplana [2008]は、3節(5)ロ. (ハ) で示したスポット価格のモデルに加え、供給要因のブラウン運動 B^C に対してはリスクの市場価格 ϕ^C を定数で与える一方、需要要因のブラウン運動 B^D に対しては四半期毎の時間依存性を織り込んだ関数としてリスクの市場価格 $\phi^D(t)$ を考えた。このとき、リスク中立測度下での各ブラウン運動 \tilde{B}^C 、 \tilde{B}^D は、現実測度のもとでのブラウン運動 B^C 、 B^D を用いて

$$d\tilde{B}^C = dB^C + \phi^C dt, \quad d\tilde{B}^D = dB^D + \phi^D(t)dt, \quad (50)$$

と表現できる。このモデルのもとで、先物価格と先物プレミアム（先物価格と期待スポット価格の差）を解析的に求め、PJM、E&W (England and Wales)、Nord Pool のデータにより実証分析した結果、先物プレミアムに強い季節性があることを確認している。

5. おわりに

本稿では、コモディティの価格変動について概観し、消費需要や供給制約を

⁵⁸モデルの比較に際して、観測期間を2ヵ月程度に短く区切っているのも、そのためと考えられる。

背景にそのスポット価格や先物価格が金融資産価格と異なった特徴的な変動パターンを示すことをみたうえで、こうした特徴を表現するために研究・開発されてきた各種のプライシング・モデルを紹介した。

コモディティ取引の多様性が広がる中で、プライシング・モデルも商品ごとの特徴をよりの確に反映するように発展してきている。今後も、コモディティ取引へのニーズがさらに拡大する可能性があり、これに伴って、プライシング・モデルも進化・発展していくことが予想される。

以 上

参考文献

- 紅林 孝彰、「近年のアフィン型イールド・カーブ・モデルの展開：マクロ・ファイナンスへの応用、ジャンプや信用リスクの取り込み」、『金融研究』、第 27 巻第 1 号、2008 年、55～91 頁
- ジュマン、エリエッテ、『コモディティファイナンス』、日経 BP 社、2007 年
- 福田 祐一・齋藤 誠・高木 真吾、「国債の価格形成とコンベニエンス：1990 年代後半の日本国債のケース」、齋藤 誠・柳川 範之 編、『流動性の経済学』、東洋経済新報社、2002 年
- 白谷 健一郎・高橋 明彦・福西 洋介、「3 ファクター・モデルによる長期商品先物・先渡し契約の評価とヘッジ」、FSA リサーチ・レビュー2007、2007 年、159～188 頁
- 日本銀行金融市場局、「デリバティブ取引に関する定例市場報告」、日本銀行、2009 年
- 山内 浩嗣、「商品先物価格の実証分析～とうもろこしの場合～」、『MTEC ジャーナル』、第 14 号、2002 年、41～60 頁
- Andersen, Leif B.G., “Markov Models for Commodity Futures: Theory and Practice,” *SSRN eLibrary* 1138782, 2008.
- Barlow, Martin T., “A diffusion model for electricity prices,” *Mathematical Finance*, 12(4), 2002, pp.287–298.
- BIS (Bank for International Settlements), *Quarterly Review*, March 2009.
- Box, George E. P., and David R. Cox, “An analysis of transformations,” *Journal of the Royal Statistical Society*, B(26), 1964, pp.211–252.
- Carr, Peter, “A Note on the Pricing of Commodity-Linked Bonds,” *The Journal of Finance*, 42(4), 1987, pp.1071–1076.
- Cartea, Álvaro, and Pablo Villaplana, “Spot price modeling and the valuation of electricity forward contracts: The role of demand and capacity,” *Journal of Banking and Finance*, 32(12), 2008, pp.2502–2519.
- Casassus, Jaime, and Pierre Collin-Dufresne, “Stochastic Convenience Yield Implied from Commodity Futures and Interest Rates,” *The Journal of Finance*, 60(5), 2005, pp.2283–2331.

- Casassus, Jaime, Pierre Collin-Dufresne and Robert S. Goldstein, “Unspanned Stochastic Volatility and Fixed Income Derivative Pricing,” *Journal of Banking and Finance*, 29(11), 2005, pp.2723–2749.
- Collin-Dufresne, Pierre and Robert S. Goldstein, “Do bonds span the fixed income markets? Theory and evidence for unspanned stochastic volatility,” *The Journal of Finance*, 57(4), 2002, pp. 1685–1730.
- Cortazar, Gonzalo and Lorenzo Naranjo, “An N-factor Gaussian Model of Oil Futures Prices,” *Journal of Futures Markets*, 26(3), 2006, pp.243–268.
- Cortazar, Gonzalo and Eduardo S. Schwartz, “The valuation of commodity-contingent claims,” *Journal of Derivatives*, 1(4), 1994, pp.27–39.
- Dai, Qiang and Kenneth J. Singleton, “Specification Analysis of Affine Term Structure Models,” *The Journal of Finance*, 55(5), 2000, pp.1943–1978.
- Fama, Eugene F. and Kenneth R. French, “Business cycles and the behavior of metals prices,” *The Journal of Finance*, 43(5), 1988, pp.1075–1093.
- Geman, Hélyette and Andrea Roncoroni, “Understanding the Fine Structure of Electricity Prices,” *The Journal of Business*, 79(3), 2006, pp.1225–1261.
- Gibson, Rajna and Eduardo S. Schwartz, “Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims,” *The Journal of Finance*, 45(3), 1990, pp.959–976.
- Heidari, Massoud and Liuren Wu, “Are interest rate derivatives spanned by the term structure of interest rates?,” *Journal of Fixed Income*, 13(1), 2003, pp.75–86.
- Hikspoors, Samuel and Sebastian Jaimungal, “Energy Spot Price Models and Spread Options Pricing,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 10(7), 2007, pp.1111–1135.
- Huisman, Ronald and Ronald Mahieu, “Regime jumps in electricity prices,” *Energy Economics*, 25(5), 2003, pp.425–434.
- Johnson, Blake and Graydon Barz, “Selecting stochastic processes for modelling electricity prices,” *Energy Modelling and the Management of Uncertainty*, 1999, pp.3–22.
- Kanamura, Takashi and Kazuhiko Ohashi, “A Structural Model for Electricity Prices with Spikes: Measurement of spike risk and optimal policies for hydropower plant operation,” *Energy Economics*, 29, 2007, pp.1010–1032.

- Litzenberger, Robert H. and Nir Rabinowitz, "Backwardation in oil futures markets: Theory and empirical evidence," *The Journal of Finance*, 50(5), 1995, pp.1517–1545.
- Miura, Ryoza and Hiroaki Yamauchi, "The pricing formula for commodity-linked bonds with stochastic convenience yields and default risk," *Asia-Pacific Financial Markets*, 5, 1998, pp.129–158.
- Ng, Victor K. and Stephen Craig Pirrong, "Fundamentals and volatility: Storage, spreads, and the dynamics of metals prices," *The Journal of Business*, 67(2), 1994, pp.203–230.
- Nielsen, Martin J. and Eduardo S. Schwartz, "Theory of storage and the pricing of commodity claims," *Review of Derivatives Research*, 7(1), 2004, pp.5–24.
- Piazzesi, Monika, "Affine term structure models," in Yacine Aït-Sahalia and Lars Hansen, eds., *Handbook of Financial Econometrics Vol. I*, North-Holland, 2009.
- Richter, Martin Christian and Carsten Sørensen, "Stochastic volatility and seasonality in commodity futures and options: the case of soybeans," *SSRN eLibrary* 301994, 2002.
- Routledge, Bryan R., Duane J. Seppi, and Chester S. Spatt, "Equilibrium forward curves for commodities," *The Journal of Finance*, 55(3), 2000, pp.1297–1338.
- Schwartz, Eduardo S., "The pricing of commodity-linked bonds," *The Journal of Finance*, 37(2), 1982, pp.525–541.
- Schwartz, Eduardo S., "The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging," *The Journal of Finance*, 52(3), 1997, pp.923–973.
- Schwartz, Eduardo S. and James E. Smith, "Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices," *Management Science*, 46(7), 2000, pp.893–911.
- Skantze, Petter, Marija Ilic, and Andrej Gubina, "Modelling locational price spreads in competitive electricity markets; applications for transmission rights valuation and replication", *IMA Journal of Management Mathematics*, 15, 2004, pp.291–319.
- Trolle, Anders B. and Eduardo S. Schwartz, "Unspanned Stochastic Volatility and the Pricing of Commodity Derivatives," *Review of Financial Studies*, 22(11), 2009, pp.4423–4461.