

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

わが国株式市場のモデルフリー・  
インプライド・ボラティリティ

すぎはらよしひこ  
杉原慶彦

Discussion Paper No. 2009-J-21

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

**備考：** 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

## わが国株式市場のモデルフリー・インプライド・ボラティリティ

すぎはらよしひこ  
杉原慶彦\*

### 要 旨

ブラック=ショールズ式に基づいて算出されるインプライド・ボラティリティ (BSIV) は、ボラティリティ・スマイルとして知られるように、一般に権利行使価格毎に異なる値として推計される。これに対し、特定のモデルを前提としないノンパラメトリックな手法により推定されるモデルフリー・インプライド・ボラティリティ (MFIV) を用いると、権利行使価格に依存しないかたちでボラティリティを求めることができる。このため、MFIV を使うことで、インプライド・ボラティリティの変動や期間構造 (ボラティリティ・カーブ) の分析が容易になるとのメリットが期待できる。本稿では、MFIV の具体的な推定法を解説したうえで、実際に日経 225 株価指数オプションの取引データから日次の MFIV を推定し、ボラティリティおよび同カーブの変動を分析した。この結果、(1) MFIV の水準が高い時期にはその変動も大きい、(2) MFIV の水準が低い局面では順カーブ、高い局面では逆カーブになる傾向がある、(3) MFIV の水準は、過去 1 週間の原資産価格の実現変動率や欧米市場の前日のボラティリティに依存している、(4) 短期の MFIV は、先行き半年程度のボラティリティ変動に対する予測力があるといった特徴が判明した。

キーワード：モデルフリー・インプライド・ボラティリティ、VIX、ボラティリティの期間構造

JEL classification: G12、G13、G14

\* 日本銀行金融研究所主査 (E-mail: yoshihiko.sugihara@boj.or.jp)

本稿の作成に当たっては、大屋幸輔教授 (大阪大学) 渡部敏明教授 (一橋大学) ならびに日本銀行のスタッフから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

# 1 はじめに

インプライド・ボラティリティ (implied volatility : IV) は、市場が期待する将来の価格変動を表す指標である。実務では、オプション価格からブラック＝ショールズ・モデルを逆算することで得られるブラック＝ショールズ・インプライド・ボラティリティ (Black-Scholes implied volatility : BSIV) が利用されることが多い。ブラック＝ショールズ・モデルでは、原資産価格が幾何ブラウン運動に従い、期待価格の広がり度合いを決めるボラティリティが将来にわたり一定であると仮定されている。しかし、これらの仮定は現実の市場と不整合である。現実の市場では、ボラティリティが可変的であるほか、その変動が原資産価格の変動と関係をもっていることから、オプション価格から算出した BSIV は、ボラティリティ・スマイルとして知られているように、権利行使価格毎に異なった値となる。そのため、BSIV によって、ボラティリティの水準を 1 つに特定するのは困難であるほか、ボラティリティの期間構造 (ボラティリティ・カーブ) も権利行使価格毎に複数存在するなど、そもそもブラック＝ショールズ・モデルが前提とするボラティリティが一定との仮定と矛盾が生じてしまう。

近年、原資産価格の変動に関して特定のモデルを前提としないノンパラメトリックなインプライド・ボラティリティの推定法が考案されてきている。当該手法を用いて推定したボラティリティは、モデルフリー・インプライド・ボラティリティ (model free implied volatility : MFIV) と呼ばれている。MFIV は、1990 年代から Neuberger [1990]、Dupire [1992]、Demeterfi *et al.* [1999]、Britten-Jones and Neuberger [2000] らによってその方法論が研究されてきており、近年では、Jiang and Tian [2005, 2007]、Carr and Lee [2007a] らが推定法の改良を進めてきている。

MFIV を用いると、権利行使価格に依存しないかたちでボラティリティやその期間構造を求めることができる。このため、MFIV をみることで、BSIV では捉え難かったインプライド・ボラティリティの変動や期間構造の特徴が明確になる。本稿では、わが国株式市場の代表的指数である日経 225 株価指数 (日経平均) とそのオプションを対象として、わが国株価の MFIV を推定する。そして、その変動や期間構造の特徴を分析する。

また、MFIV は、期待ボラティリティのフェアバリューであるため、将来の価格変

動率そのものを売買するボラティリティ・デリバティブ取引に活用されている<sup>1</sup>。米国では、MFIV の考え方に依拠して算出された VIX と呼ばれる指数が公表されている<sup>2</sup>。VIX は、期待ボラティリティの代表的指標として広く参照されるとともに、ボラティリティ・デリバティブ取引に活用されている。わが国でも、ボラティリティ・デリバティブ取引は既に一部で行われている。

なお、MFIV は、同一の満期をもち権利行使価格が異なる複数のヨーロッパ・オプション価格から推定できる。その推定手法は、2 つに大別される。1 つは、市場で取引されているオプション価格のみを利用する手法であり、代表的には上述の米国 VIX の算出に用いられている。もう 1 つは、市場で取引されていない価格を補間して算出に取り入れる手法であり、Jiang and Tian [2007] が提案した推定手法が知られている。米国 VIX の手法に基づいた日経平均 MFIV は、大阪大学・金融保険センターの研究グループによって算出・公開され、日々更新されている<sup>3</sup>。これに対し、本稿では、後者の Jiang and Tian [2007] の手法に従って、日経平均 MFIV を推定する。

こうしたわが国株式市場の MFIV を扱った先行研究としては、Nishina *et al.* [2006]、Maghrebi [2007]、山口 [2008] がある。Nishina *et al.* [2006]、Maghrebi [2007] は、米国 VIX の手法に従って期間 1 ヶ月の日経平均 MFIV を算出し、原資産価格のボラティリティに関するその予測力などを分析した。その結果、MFIV は、原資産価格のボラティリティの変化に影響を受けており、また、時系列に長期記憶性があることから、将来の原資産価格のボラティリティに対してある程度予測力をもっていることが判明した。また、山口 [2008] は、米国 VIX の手法に基づいて算出した期間 1 ヶ月の日経平均 MFIV と、Jiang and Tian [2007] の手法に基づいて推定した MFIV について、

<sup>1</sup> ボラティリティ・デリバティブには、原資産の離散実現変動値（ヒストリカル・ボラティリティ、HV）に基づいて 2 者間でキャッシュフローを交換するバリエーション・スワップやボラティリティ・スワップなどがある。バリエーション・スワップは、バリエーションの売り手が満期日に

購入単位数 × (バリエーション・スワップ・レート - HV<sup>2</sup>) × 単位数額

を受け取る（マイナスの場合は支払う）。ボラティリティ・スワップも同様に、ボラティリティの売り手が満期日に

購入単位数 × (ボラティリティスワップ・レート - HV) × 単位数額

を受け取る。ボラティリティは、現物価格が急落し市場での不安心理が高まる局面で大きく上昇する傾向がある。そのため、株式投資家は、ボラティリティ・スワップによって期待ボラティリティを買うことで、株式市場が急落した際に生じるポートフォリオの損失が低減する効果を見込むことができる。詳細は補論 3 を参照。

<sup>2</sup> VIX は、シカゴ・オプション取引所から公表されている S&P500 の 1 ヶ月物ボラティリティ指標。VIX を原資産としたオプションや先物等のデリバティブは、同取引所で 2006 年 2 月から取引が開始されている。VIX に関しては CBOE [2009] に詳しい。

<sup>3</sup> ウェブサイト：<http://www-csf.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/structure/activity/vxj.php> から入手可能。直近データのほか、1995 年からの過去データも入手可能。

原資産価格の実現ボラティリティに関する予測パフォーマンスを比較した。その結果、山口 [2008] は、Jiang and Tian [2007] の手法に基づいた MFIV が、米国 VIX の手法に基づいた MFIV と比べて、1 期先の実現ボラティリティに対して予測力が高く、より多くの情報を含んでいる可能性を指摘した。

本稿では、はじめに、MFIV の定義や推定法に関して解説した後、山口 [2008] の結果を踏まえ、Jiang and Tian [2007] の手法を採用して期間 1 ヶ月から 6 ヶ月の日経平均 MFIV を推定する。そして、推定された MFIV の水準、変動、期間構造の特徴、その予測力などを分析する。このように MFIV の期間構造を推定・分析している点は、本稿の特徴の 1 つとなっている。

本稿の構成は次のとおりである。まず、2 節では MFIV の定義と特性を示し、3 節で推定法を解説する。4 節では、過去の日経平均オプションの取引データから推定した MFIV を分析し、その特徴点を整理する。特に、他のボラティリティ指標との比較、ボラティリティ・カーブの特徴とボラティリティの変動要因の整理、ボラティリティ・カーブの予測力について検証する。なお、補論 1、2 では、MFIV 評価式導出の背景となる理論について解説する。補論 3 では、ボラティリティ・デリバティブについて簡単にまとめる。

## 2 MFIV の定義と特性

### (1) 定義

時刻  $t$  における資産価格を  $S_t$  とし、時刻  $t$  までの資産価格に関する情報集合を  $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_u; u \leq t\}$  とかく。資産価格  $S_t$  の瞬間リターン  $dS_t/S_t$  が独立同分布に従うとする。資産価格変動にジャンプが混在するとき、 $S_{t-}$  を時刻  $t$  に発生するジャンプ直前の資産価格とする。瞬間リターンを 2 乗し、現時点  $t$  から将来のある時点  $T$  まで平均した値を  $\langle S \rangle_{t,T}$  とかき、次のとおり定義する。

$$\langle S \rangle_{t,T} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \left( \frac{dS_u}{S_{u-}} \right)^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \frac{1}{S_{u-}^2} d[S, S]_u. \quad (1)$$

ここで、 $1/(T-t)$  は年率に換算するための係数である<sup>4</sup>。 $\langle S \rangle_{t,T}$  は、しばしば離散時間ベースで定義される一般的な金融資産のリターンの分布幅（分散）を連続時間ベースで定義したものである。

時刻  $t$  において、こうしたリターンの分布幅を評価する場合、分散  $\langle S \rangle_{t,T}$  の期待値と、標準偏差  $\sqrt{\langle S \rangle_{t,T}}$  の期待値の 2 通りを考えることができる。前者を MFIVar、後者を MFIVol と呼ぶこととし、それぞれ標準偏差次元にて  $\sigma_{\text{MFIVar}}$ 、 $\sigma_{\text{MFIVol}}$  と記すこととする。すなわち、

$$\sigma_{\text{MFIVar}} = \sqrt{E^Q [\langle S \rangle_{t,T} | \mathcal{F}_t]}, \quad (2)$$

$$\sigma_{\text{MFIVol}} = E^Q \left[ \sqrt{\langle S \rangle_{t,T}} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (3)$$

ここで、 $Q$  はリスク中立測度を示し、いずれも、リスク中立測度下での期待値として定義される。言い換えると、MFIVar は標準偏差次元で標記した期待分散、MFIVol は期待標準偏差である。実現したデータを用いて変動率を推定する場合には、両者は一致するが、リスク中立測度下における将来の期待値を推定する場合には、両者は異なった値となる。平方根関数は上に凸であるから、ジェンセンの不等式によって、

$$\sigma_{\text{MFIVol}} \leq \sigma_{\text{MFIVar}}, \quad (4)$$

が成立する。すなわち、MFIVar は MFIVol と等しいかそれを上回るという関係がある。なお、MFIVar が VIX およびバリエンス・スワップレートに、MFIVol がボラティリティ・スワップレートに相当する（詳しくは補論 3 を参照）。

## (2) オプションによる合成

MFIVar、MFIVol は、ともに、ヨーロピアン・オプションを用いて近似できる。まず、MFIVar については、(2) 式のとおり、権利行使価格が  $K$ 、満期までの期間が  $\tau (= T - t)$  であるヨーロピアン・プットオプション価格  $P(\tau, K)$  とコールオプション価格  $C(\tau, K)$ 、時刻  $t$  における期間  $\tau$  の無リスク・ゼロクーポン債券価格  $B(t, T)$

<sup>4</sup> 当該年率換算は、瞬間リターンが独立であることを前提としている。実務においては一般的な換算法であるため、本稿でもこれに倣っている。

を用いて近似できることが知られている（導出は補論 1 を参照）<sup>5</sup>。

$$\sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, T) \simeq \frac{2}{\tau B(t, T)} \left( \int_0^{F(t, T)} \frac{P(\tau, K)}{K^2} dK + \int_{F(t, T)}^{\infty} \frac{C(\tau, K)}{K^2} dK \right). \quad (5)$$

ここで、 $F(t, T)$  は時刻  $t$  における受渡日  $T$  の先渡価格であり、 $F(t, T) = S_t/B(t, T)$  である。プット/コール・パリティを用いると、(5) 式は、コールオプションのみ、あるいはプットオプションのみでも表すことができる。ただし、プットオプション、コールオプションともに、アウトオブザマネー (OTM) の領域では、一般にオプションの銘柄数が多く市場流動性も高い。従って、価格の信頼度が高いため、OTM オプションのみで表した (5) 式が用いられることが多い。本稿でもそれに倣うこととする。また、価格が不連続にジャンプする場合の近似誤差を低減させるため、資産価格のリターンがある一定範囲 (コリドー) に収まった場合のみ計算に加えるような、コリドー型の推定手法も存在するが、本稿では扱わない。

一方、MFIVol については、Carr and Lee [2007a,b] によってオプションによる合成近似式が考案されている。すなわち、資産価格が拡散過程に従い、デルタ・ニュートラル<sup>6</sup>の仮定のもとで、ヨーロピアン・プット/コールオプション価格と期間  $\tau$  の無リスク債券価格を用いて、以下のとおり近似できる（導出は補論 2 を参照）。

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{MFIVol}} \simeq & \sqrt{\frac{\pi}{2\tau} \frac{P(\tau, F(t, T)) + C(\tau, F(t, T))}{F(t, T)B(t, T)}} \\ & + \frac{1}{B(t, T)} \sqrt{\frac{\pi}{8\tau F(t, T)}} \left\{ \int_{K < F(t, T)} \frac{I_0 \left( \ln \sqrt{\frac{K}{F(t, T)}} \right) - I_1 \left( \ln \sqrt{\frac{K}{F(t, T)}} \right)}{K\sqrt{K}} P(\tau, K) dK \right. \\ & \left. + \int_{K > F(t, T)} \frac{I_1 \left( \ln \sqrt{\frac{K}{F(t, T)}} \right) - I_0 \left( \ln \sqrt{\frac{K}{F(t, T)}} \right)}{K\sqrt{K}} C(\tau, K) dK \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

<sup>5</sup> (5) 式の近似誤差は、原資産価格にジャンプが含まれないときはゼロ、含まれるときはジャンプ率の 3 乗のオーダーとなる。

<sup>6</sup> 現在価値の資産価格による 1 次微分が一定値 (2 次微分がゼロ) であること。

ここで、 $I_\nu$  は次数  $\nu$  の第 1 種修正ベッセル関数

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^\pi \cosh(x \cos \theta) \sin^{2\nu} \theta d\theta, \quad (\nu > -0.5) \end{aligned}$$

である ( $\Gamma$  はガンマ関数)。なお、Fitz and Gatheral [2005] によると、(6) 式によって推定される期待ボラティリティの近似値は、フォワード・アットザマネー (ATM) の BSIV と極めて近い水準となることが分かっている。

### (3) BSIV と MFIV の比較

上述のように、MFIV は、定義上の仮定が少ないうえ、その期間構造が一通りに決まるため、権利行使価格への依存性 (ボラティリティ・スマイル) がある BSIV に比べて、各種の分析が容易になるというメリットを有する。一方、MFIV は、推定において多数のオプション銘柄の価格情報が必要となり、計算負荷も BSIV 対比大きいというデメリットがある。また、従来から使われてきている BSIV は、オプションのプライシングに直接利用することができるほか、市場の期待を反映する指標としての利用価値が高い。このように、BSIV と MFIV には、それぞれメリット、デメリットがあり、利用目的によって使い分ける必要がある。こうしたメリット・デメリットについては、表 1 に整理している。

## 3 MFIV の推定法

(5)、(6) 式に基づくと、MFIV は、理論上、ゼロから無限大までの権利行使価格をもつヨーロピアン・オプション価格から推定できる。しかし、実際に市場で取引されている権利行使価格は、原資産価格付近に限られ、その数も限られている。この制約を克服するため、実際に MFIV を推定する際には、(5)、(6) 式の被積分関数を何らかの関数で補間および補外する近似手法と、補間等を施さず市場価格のみを用いる近似手法が提案されている。本節では、前者として Jiang and Tian [2007] による推定法を、後者として米国 VIX で採用されている推定法を解説する。

表 1 BSIV と MFIV のメリット・デメリット

	メリット	デメリット
BSIV	<ul style="list-style-type: none"> <li>・権利価格行使ごとのボラティリティ水準から、原資産価格の変動方向とボラティリティの変動方向の関係に関する期待がわかる。</li> <li>・オプションの価格評価に直接利用することができる。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・期間構造まで含めると3次元のボラティリティ・サーフィスとして観察されるため、各種の分析が容易ではない。</li> <li>・原資産価格の変動に関する強い仮定のもとで成立する。それら仮定の一部は、市場と不整合である。</li> </ul>
MFIV	<ul style="list-style-type: none"> <li>・将来のボラティリティ・カーブが1つに特定されるため、変動や期間構造の分析が容易になる。</li> <li>・ボラティリティ・デリバティブの価格評価に利用できる。</li> <li>・モデル上の仮定が少ない。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・算出するうえで多くのオプション銘柄が必要であるほか、ボラティリティを補間・補外によって近似する必要。</li> <li>・権利行使価格数が少ない長期タームのボラティリティの精度が落ちる。</li> <li>・計算負荷が大きい。</li> </ul>

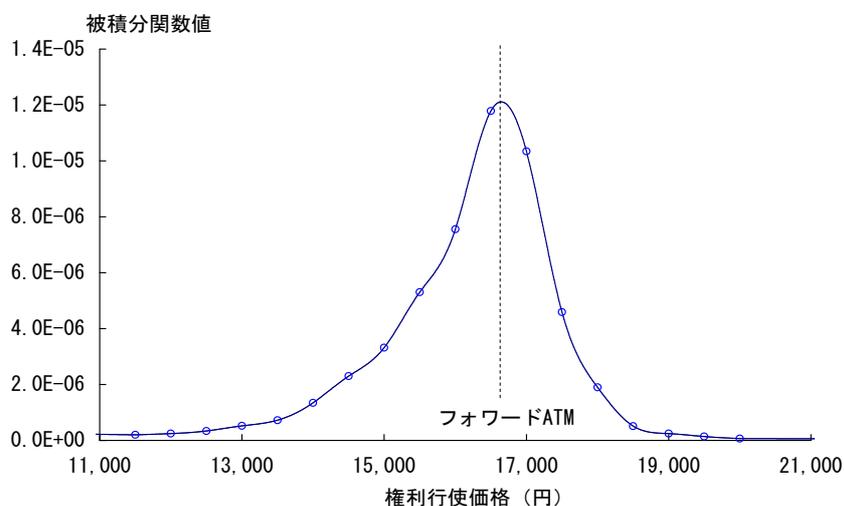
## (1) Jiang and Tian による推定法

### イ. 補間、補外法

Jiang and Tian [2007] は、直接オプション価格を補間するのではなく、はじめに権利行使価格毎の BSIV を算出し、そのスマイル曲線上で BSIV を補間・補外した後、ブラック＝ショールズ式を用いてオプション価格に戻し、(5)、(6) 式に基づいて MFIV を推定する手法を提案した。本稿における推定もそれに倣っている。この手法では、BSIV の次元で補間することにより、オプション価格が負となる可能性を排除できるほか、積分値に最も大きく影響する  $F(t, T)$  近傍の近似精度が向上するという利点がある<sup>7</sup>。通常 BSIV のスマイル曲線には変曲点が少ないことから、補間関数には3次スプライン関数を用いる。また、補外については、BSIV スマイル曲線の両端に位置する補関数に接する線形関数で補外する手法や、両端の値を保持して一定値とする手法などが考えられるが、本稿では、補外した関数が負となる可能性を

<sup>7</sup> (5) 式の被積分関数が  $F(t, T)$  近傍で高いピークを持つ図1のような形状をとる一方、BSIV は  $F(t, T)$  近傍で比較的滑らかな形状を示すことが多い。

図 1 MFIVar 被積分関数の形状



備考：2007年9月28日終値のオプション価格から算出。 は市場価格から算出した値、実線は補間・補外関数から算出した値。

排除するため、後者を採用する。

図1には、日経平均MFIVarの被積分関数について、市場価格から算出した値と、同値を上記の手法により補間・補外した関数の形状を示した。被積分関数は、フォワードATM近傍でピークをもつ単峰形をしており、同近傍の補間近似精度が、推定されるMFIVarの精度に大きく影響する。一方、補外の必要があるディープOTMでは、被積分関数が非常に小さい値となるため、補外精度は推計値にそれほど影響しない。

## ロ． 積分

被積分関数を得た後、(5)、(6)式の数値積分を実行することで、MFIVを推定する。Jiang and Tian [2007]は、数値積分の精度を向上させる手法として、権利行使価格  $K$  を、適当な微小量  $\theta (> 0)$  のもとで指数離散化

$$K_i = F(t, T)e^{i\theta} \quad (i = -i_{\max}, -i_{\max} + 1, \dots, i_{\max}), \quad (7)$$

することを提案している。本稿でもそれに倣い、積分区間  $[K_{\min} = F(t, T)e^{-i_{\max}\theta}, K_{\max} = F(t, T)e^{i_{\max}\theta}]$  を決定する  $i_{\max}$  を、適当な精度  $\epsilon (> 0)$  のもとで、

$$i_{\max} = \arg \max_{i>0} \left[ \frac{C(\tau, K_i)}{K_i^2} < \epsilon \text{ and } \frac{P(\tau, K_{-i})}{K_{-i}^2} < \epsilon \right], \quad (8)$$

と決めることで、(5) 式について、

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{MFIVar}}^2(\tau) &\simeq \frac{2e^{r\tau}}{\tau} \sum_{i=-i_{\max}}^0 \frac{K_{i-1} - K_i}{2} \left\{ \frac{P(\tau, K_i)}{K_i^2} + \frac{P(\tau, K_{i-1})}{K_{i-1}^2} \right\} \\ &\quad + \frac{2e^{r\tau}}{\tau} \sum_{j=1}^{i_{\max}} \frac{K_j - K_{j-1}}{2} \left\{ \frac{C(\tau, K_j)}{K_j^2} + \frac{C(\tau, K_{j-1})}{K_{j-1}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

と、また、(6) 式について、

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{MFIVol}}(\tau) &\simeq \sqrt{\frac{\pi}{2\tau} \frac{e^{r\tau}}{K_0}} \{C(\tau, K_0) + P(\tau, K_0)\} \\ &\quad + \sqrt{\frac{e^{2r\tau}\pi}{8\tau K_0}} \sum_{i=-i_{\max}}^{-1} \frac{K_{i-1} - K_i}{2} \left\{ \frac{I_0\left(\ln \sqrt{\frac{K_i}{K_0}}\right) - I_1\left(\ln \sqrt{\frac{K_i}{K_0}}\right)}{K_i \sqrt{K_i}} P(\tau, K_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_0\left(\ln \sqrt{\frac{K_{i-1}}{K_0}}\right) - I_1\left(\ln \sqrt{\frac{K_{i-1}}{K_0}}\right)}{K_{i-1} \sqrt{K_{i-1}}} P(\tau, K_{i-1}) \right\} \\ &\quad + \sqrt{\frac{e^{2r\tau}\pi}{8\tau K_0}} \sum_{j=1}^{i_{\max}} \frac{K_j - K_{j-1}}{2} \left\{ \frac{I_1\left(\ln \sqrt{\frac{K_j}{K_0}}\right) - I_0\left(\ln \sqrt{\frac{K_j}{K_0}}\right)}{K_j \sqrt{K_j}} C(\tau, K_j) \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_1\left(\ln \sqrt{\frac{K_{j-1}}{K_0}}\right) - I_0\left(\ln \sqrt{\frac{K_{j-1}}{K_0}}\right)}{K_{j-1} \sqrt{K_{j-1}}} C(\tau, K_{j-1}) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

と離散近似する。MFIV の被積分関数は、 $F(t, T)$  を境に 2 つの下に凸な関数から構成されるため、(9)、(10) 式に基づいた数値積分により推定される値は、推定値が真の値より大きくなる、すなわち、上方バイアスが生じる。一方、積分区間を有限とすることに伴う下方バイアスも生じる。Jiang and Tian [2007] などの先行研究では、前者のバイアスの方が大きいとの結果が得られている。

なお、離散近似に伴うパラメータについて、本稿では、 $\theta = 0.001$ 、 $\epsilon = 1.0 \times 10^{-14}$ とする。また、ボラティリティは、年360日として年率換算する。

## (2) 米国 VIX の推定法

次に、市場価格のみを用いた MFIV の推定法として、米国 VIX で採用されている手法を紹介する。

米国では、シカゴ・オプション取引所 (CBOE) が、S&P500 指数を原資産とするボラティリティ指数：VIX を算出し、2003 年 9 月より日次で公表している<sup>8</sup>。VIX は、MFIV の考え方に依拠して定義されており、算出には次の計算式が用いられている。

$$\sigma_{\text{VIX}}^2 = \frac{2}{(T-t)B(t,T)} \left[ \sum_{i \leq 0} \frac{P(\tau, K_i)}{K_i^2} \Delta K_i + \sum_{i > 0} \frac{C(\tau, K_i)}{K_i^2} \Delta K_i \right] - \frac{1}{T-t} \left( \frac{F(t,T)}{K_0} - 1 \right)^2, \quad (11)$$

ここで、 $K_i (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  は市場で取引可能な権利行使価格であり、 $\Delta K_i$  は市場で取引可能な権利行使価格の間隔で、 $\Delta K_i = (K_{i+1} - K_{i-1})/2$  としている。また、 $K_0$  は市場で取引可能な権利行使価格のうち、 $F(t, T)$  以下のものの最大値である。すなわち VIX は、算出される MFIV に最も影響するフォワード ATM 近傍のオプション価格にコールオプションを用いている。

(11) 式を (5) 式と比較すると、VIX は (5) 式を離散近似したものであることが分かる。3 節 (1) では、オプション価格を補間したうえで比較的多数の権利行使価格のグリッドを用いて離散近似したが、VIX は、透明性の確保を優先し、離散近似のグリッドを市場価格 (仲値) のみに限定して構成している。このように算出される VIX は、ビッド・オファー・スプレッド等を無視すれば、市場性のあるオプションで完全ヘッジ (複製) が可能であるという利点を有する一方で、3 節 (1) の手法で推定した MFIV<sub>var</sub> 対比、推計値に上方バイアスが生じ得る。

図 2 には、参考として、2001 年から 2009 年 7 月までの VIX 指数の時系列を示した。市場が比較的平穏であった 2003 年央から 2007 年央までは、VIX は、10% から 20% の範囲で安定的に推移していた。一方で、2001 年秋の同時多発テロ、2002 年央のエンロン破綻と会計不信、2003 年春のイラク侵攻、そして、2007 年央以降のサブプライム問題再燃に端を発した金融危機時など、市場が不安定であった時期には、

<sup>8</sup> ただし、遡及算出されていることから、VIX データ自体は 1990 年から存在。

図 2 米国 VIX 指数の推移



資料：VIX 指数は CBOE 算出値、S&P500 指数は S&P 社算出値を、ブルームバーグより入手。

VIX 指数は大きく上昇し、不安定な動きを示した。また、同図に参考として掲載した S&P500 株価指数 (VIX の原資産) を VIX と比較すると、株価が下落する局面で VIX が上昇している、すなわち、中長期的に株価と VIX が逆相関の関係になっていることがわかる。このように、VIX はその大小によって市場の不安定度や価格の方向性を明確に示すことから、市場の先行き不透明感やリスク回避性向を表す指標として注目されている。

## 4 実証分析

### (1) データ

本稿では、2003 年 4 月初から 2007 年 9 月末までの日経平均 MFIV を分析対象とする。当該期間は、米国のイラク侵攻の影響が剥落した後、サブプライム問題が本格化するまでの、わが国株式市場が比較的平常な状態であった時期であり、本稿では、そうした平時におけるわが国の MFIV を分析する<sup>9</sup>。

MFIV 推定の原データとなるのは、日経平均、同先物、同オプションの取引毎デー

<sup>9</sup> 2007～09 年の金融危機時も含む期間の実証分析については、別途の論文にて行う予定。

タ(ティック・データ<sup>10</sup>)であり、同データから日次で推定する。このほか、無リスク金利は、無担保オーバーナイト・コールレート、期間1ヶ月から12ヶ月までのLIBOR、それに2年物スワップレートを用い、線形補間して算出する<sup>11</sup>。また、オプション価格と原資産価格の算出時刻を揃える必要があることから、原資産価格は、日経平均先物(期近物)の終値を該当期間の無リスク金利で割り引いた値とする<sup>12</sup>。

大阪証券取引所における日経平均オプション市場では、最長1年3ヶ月のタームまで取引可能であるが、取引は、満期までの期間が3か月未満である期近物に集中する傾向がある<sup>13</sup>。そのため、本稿では、取引が成立していない長期タームのオプション銘柄については、指値データも併用することとする<sup>14</sup>。具体的には、該当日に取引が成立しているオプション銘柄については最終取引価格を用い、取引が成立していない銘柄については後場終了時点での指値の中央値で代用する<sup>15</sup>。

また、ボラティリティ・カーブの横軸となる満期までの期間(ターム)については、1から6ヵ月までとする。図3は、本稿がMFIV推定の対象としているOTMオプションの権利行使価格の平均的な個数(プット、コールの合算値)を同期間別にみたものである。2007年には、多い日で、株価から上下それぞれ10個程度、価格に換算してから上下5,000円程度が取引されているが<sup>16</sup>、長期になるほど権利行使価格数が減少する特徴が見てとれる。特に2003年から2005年においては、6ヶ月を越える期間において、MFIVの推定に用いることができる権利行使価格数が5を下回っている。本稿では、MFIVの算出に際し3次スプライン関数でオプション価格を補間することから、推定に用いるオプション銘柄数は少なくとも3つは必要である。こ

<sup>10</sup> 日経メディア・マーケティング社から購入したデータを利用。

<sup>11</sup> LIBOR等の算出時刻は15時であり、オプションの終値が算出される15時10分とは異なるが、無リスク金利の水準がMFIVの推定値に与える影響は比較的小さいことから、ここでは15時時点の無リスク金利を用いることとする。

<sup>12</sup> わが国では、オプション・先物市場は午後3時10分に取引が終了するのに対し、現物市場は午後3時に取引終了となる。そのため、現物価格の終値を原資産価格とすると、オプションと原資産の終値算出時刻が異なってしまう。こうした点を踏まえ、本稿では先物価格から原資産価格を推定することとする。

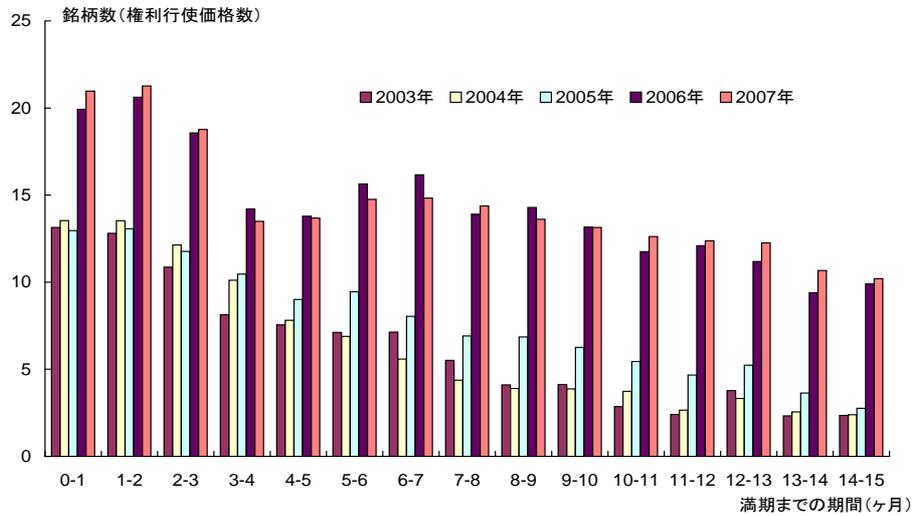
<sup>13</sup> 例えば、2006年から2007年9月末までの期間における1日の平均取引件数(全権利行使価格についての平均値、プットとコールをともに含むベース)をみると、期近物では100件程度であるのに対して、タームが6ヵ月では1.5件程度となっている。

<sup>14</sup> 例えば、2006年から2007年9月末までの期間について1営業日の間の指値の平均提示時間(全権利行使価格についての平均値、プットとコールをともに含むベース)をみると、タームが1から2ヶ月の期近物は100分程度であるのに対して、タームが6ヵ月では35分程度となっており、タームによる指値提示時間の差異は、取引件数の差異と比べて小さい。

<sup>15</sup> ビッド、オファーのいずれか一方のみ指値が提示されている場合には、提示されている値とする。

<sup>16</sup> 日経平均オプション市場では、取引所で取引可能な権利行使価格の間隔が500円刻みとなっている。

図 3 満期までの期間別にみた OTM オプションの平均銘柄数



備考：銘柄数には、プット、コールオプションをともに含む。2003年データは4月初から12月末、2007年データは1月初から9月末までのデータの平均値。

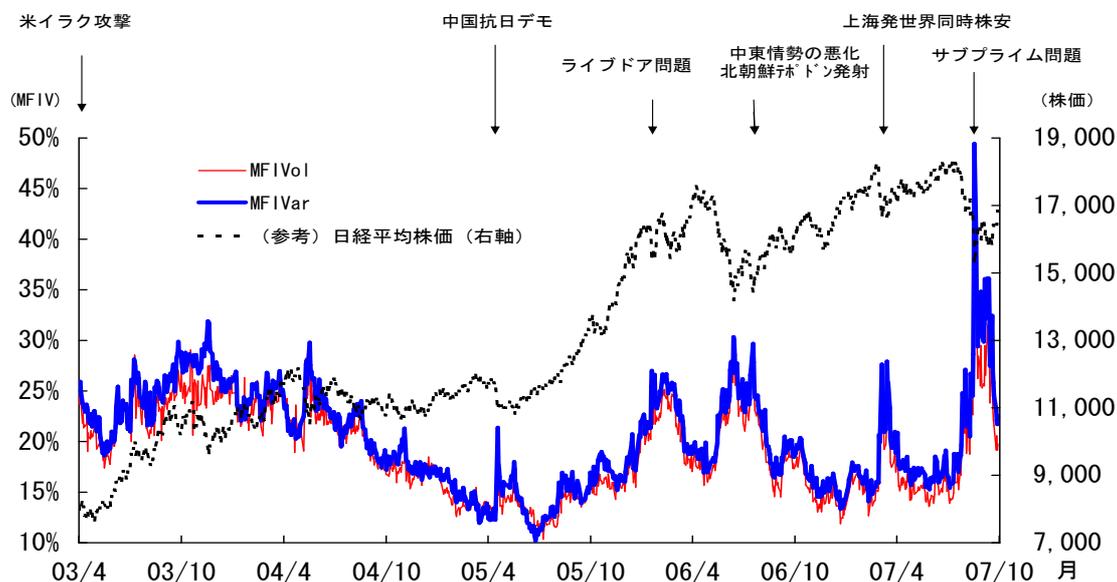
これを踏まえると、6ヶ月を超えるような長期のMFIVの精度は、短期の値と比べて著しく劣ると考えられる。こうした点から、本稿では、タームが6か月までのボラティリティを推定対象とすることとする。なお、期間を揃える必要から、限月が7ヶ月未満のMFIVを推定した後、3次スプライン関数にて補間し、ちょうど満期まで1から6ヶ月の1ヶ月毎に該当するMFIVを推定する。

また、オプション取引データの中には、ヨーロピアン・オプションの無裁定区間

$$\begin{aligned}
 C(\tau, K) &\in [\max(0, Se^{-\delta\tau} - Ke^{-r\tau}), Se^{-\delta\tau}] \\
 P(\tau, K) &\in [\max(0, Ke^{-r\tau} - Se^{-\delta\tau}), Ke^{-r\tau}]
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

から外れるものが存在するが、こうしたデータについては、BSIVの算出が不能となることから除外する。

図 4 日経平均 MFIV と日経平均株価の推移



備考：MFIV は左軸、日経平均株価は右軸。MFIV のタームは1ヶ月。

## (2) 推定結果

はじめに、推定結果を概観する。図4には、分析対象である2003年4月初から2007年9月末までの日経平均MFIVと原資産である日経平均株価の推移、それに株価が大きく下落した際の主要なイベントを記した。また、表2には、同期間のMFIV推計値の基本統計量を示した<sup>17</sup>。分析対象とした期間では、MFIVはおよそ10%から50%のレベルで推移している。

図表から窺われる第1の特徴として、MFIVの安定期と不安定期の存在が挙げられる。2004年央から2005年にかけてなど、MFIVの水準が10%から25%程度のレベルで推移した時期には、MFIVの変動は安定している一方で、水準がそれを超えるレベルではMFIVの挙動が不安定になっている。特に、2007年央以降の米サブプライム問題再燃を背景とした株安局面では、MFIVは一時50%近くまで上昇したが、翌営業日は急速に低下するなど変動が非常に激しくなった。こうした特徴を映じて、

<sup>17</sup> 長期タームのMFIVolの最大値が、MFIVarの最大値を上回っており、(4)式に示した理論上の大小関係と逆転している。これは、稀に長期タームのMFIVの推計において、ATMのBSIVに売り指値データを利用することがあり、ATMのBSIVと極めて近い水準となるMFIVolが異常に高い値に推計されたことによるもの。

表 2 MFIV 推計値の基本統計量

	ターム	平均	標準偏差	最大値	最小値	歪度	尖度	標本数
MFIVar	1 カ月	20.36	4.94	49.44	10.20	0.57	0.73	1,108
	2 カ月	19.98	4.28	42.35	12.03	0.46	0.21	1,108
	3 カ月	19.85	3.87	35.79	12.73	0.26	-0.69	1,108
	4 カ月	19.74	3.68	33.25	12.75	0.24	-0.85	1,108
	5 カ月	19.70	3.52	32.71	13.11	0.27	-0.77	1,108
	6 カ月	19.65	3.36	29.19	13.17	0.25	-0.88	1,108
MFIVol	1 カ月	19.11	4.45	46.88	10.35	0.51	0.56	1,108
	2 カ月	19.11	4.06	38.57	10.37	0.33	-0.34	1,108
	3 カ月	19.01	3.92	35.56	10.37	0.31	-0.40	1,108
	4 カ月	18.98	3.87	34.67	10.37	0.29	-0.52	1,108
	5 カ月	18.99	4.04	40.76	10.37	0.66	1.20	1,108
	6 カ月	18.94	3.94	35.24	10.37	0.41	-0.22	1,108

備考：単位は%。サンプル期間は、2003年4月初から2007年9月末。

表 3 株価と MFIV の変動の相関係数

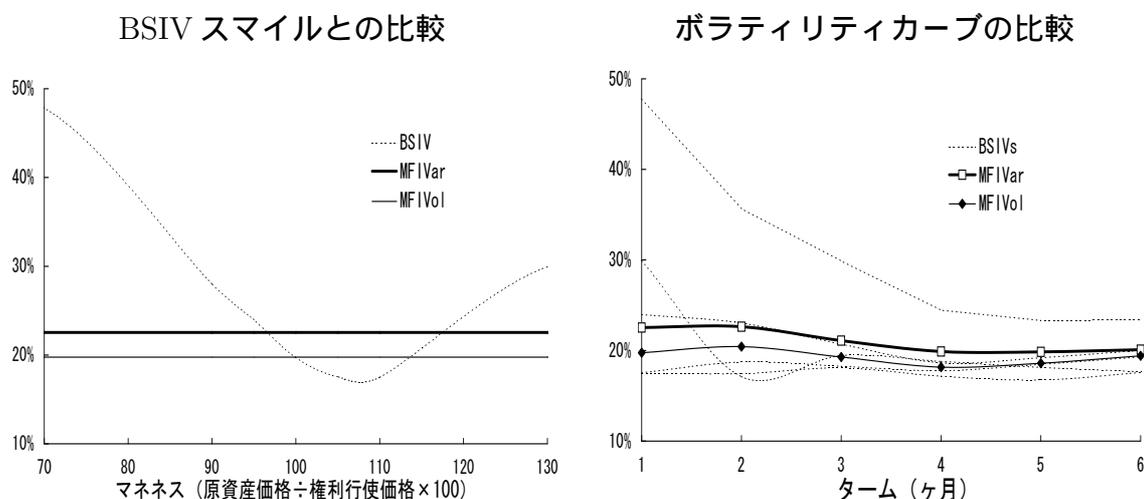
	1 日変動率	1 週間変動率	1 ヶ月変動率
MFIVar	-0.44	-0.40	-0.38
MFIVol	-0.33	-0.33	-0.31

備考：MFIV は1ヶ月ターム。

表 2 に示した歪度はいずれも正の値となっている。このような特徴は、3 節 (2) に示した米国 VIX 指数の特徴と類似している。

第 2 の特徴として、株価とボラティリティの関係をみると、株価が大きく下落した際に MFIV が上昇していることが窺われる。ボラティリティと株価の短中期 (1 日 ~ 1 ヶ月) の変化の方向性について、相関係数をみると、表 3 に示したとおり、短期の変動ほど強い負の相関関係を示している。こうした特徴も、3 節 (2) に示した米国 VIX 指数と類似している。

図 5 ボラティリティ指標の水準比較



備考：2007年9月28日の終値。左図の満期までの期間は1ヶ月。

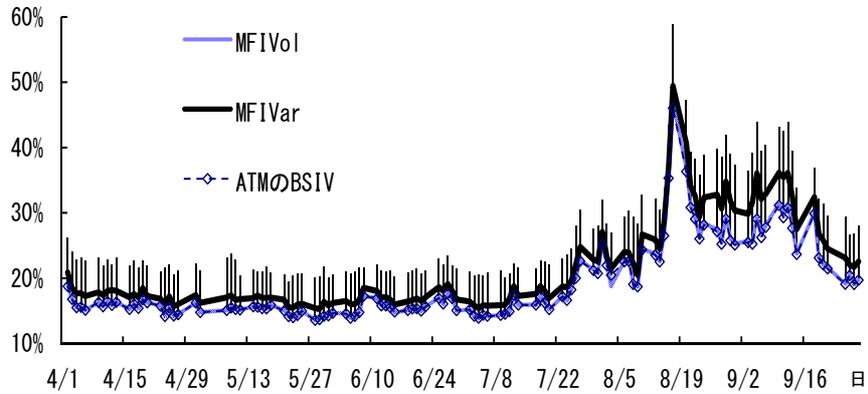
### (3) 他のボラティリティ指標との比較

#### イ. BSIV との比較

はじめに、推計したMFIVをBSIVと比較する。図5には、2007年9月末を例にとり、MFIVとBSIVを同時にプロットした。BSIVでは、権利行使価格に依存したボラティリティ・スマイル構造が観察されるのに対し、MFIVでは、ボラティリティが権利行使価格に依存せず一意に決まる。また、BSIVについて権利行使価格毎に複数存在するボラティリティ・カーブは、MFIVにより一本に特定される。また、MFIVol、MFIVarは、この順にBSIVスマイルの底より高く、BSIVスマイルの端より低い水準となっている。他のターム、取引日についても、概してMFIVの推計値は同様の水準に位置する。例えば、図6では、2007年4月から9月までのMFIV推計値を、BSIVの水準と比較している。MFIVの推計値は、BSIVスマイルの底となることが多いATMのBSIVより高く、権利行使価格が原資産価格対比 $\pm 10\%$ となるBSIVより低い水準に位置している。MFIVは、BSIVのスマイル上を積分して得られる結果、このような水準に推定されることが多いと考えられる<sup>18</sup>。

<sup>18</sup> 推計誤差やBSIVスマイルの形状等の影響で、当該特徴を満たさない推計値も存在する。

図 6 MFIVar、MFIVol、ATMのBSIVの水準比較



備考：BSIVの上昇線は、権利行使価格が原資産価格対比±10%であるBSIVのうち、水準が高い方のレベルを示す。タームは1ヶ月。

#### ロ． 実現ボラティリティとの比較

実現リターンの二乗累積値は、実現ボラティリティ (integrated realized volatility: IRV) と呼ばれている。IRVは、前掲の(1)式を用いて、

$$\sigma_{\text{IRV}}(t, T) = \sqrt{\langle S \rangle_{t, T}} \quad (13)$$

と定義される。IRVは、単純に $\langle S \rangle_{t, T}$ を離散近似することで推定される。具体的には、時刻 $t$ から $T$ までの間に取引日が $N$ 日あるとし、 $i$ 番目の取引日の時刻を $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N; t = t_0, T = t_N$ )と表し、第 $i$ 日の取引時間帯に高頻度で観測されたリターン二乗値の和をRVと呼び $\sigma_{RV}^2(t_i)$ とかくと、IRVは、

$$\sigma_{\text{IRV}}^2(t, T) \simeq \frac{1}{T-t} \sum_{i=1}^N \sigma_{RV}^2(t_i) \quad (14)$$

と推定される。

MFIVの定義を示す(2)、(3)式と比較して明らかなように、MFIVはリスク中立測度下での期待変動率を表すのに対し、IRVは現実測度下での実現変動率を表す。したがって、両者の差は、インプライド・ボラティリティに内包されたボラティリティ・

リスクプレミアムとして捉えることができる。ここでは、 $\sigma_{\text{IRV}}^2 - \sigma_{\text{MFIVar}}^2$  をバリエーション・リスクプレミアム、 $\sigma_{\text{IRV}} - \sigma_{\text{MFIVol}}$  をボラティリティ・リスクプレミアムと定義し、それぞれ分析する。

期間1カ月のIRVとMFIVを比較する場合、ある観測時点 $t$ までに得られる情報をもとに算出できる最新のIRVは、過去1カ月の原資産の価格変動を表わす値であるのに対して、同情報をもとに算出できる最新のMFIVは、将来1カ月の原資産の期待価格変動を表わしている。両者の差を、ここでは「観測時点プレミアム」と呼ぶこととする。すなわち、 $T - t$ が1カ月であるとする、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{時点 } t \text{ の観測時点バリエーション・プレミアム} = \sigma_{\text{IRV}}^2(t - (T - t), t) - \sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, T) \\ \text{時点 } t \text{ の観測時点ボラティリティ・プレミアム} = \sigma_{\text{IRV}}(t - (T - t), t) - \sigma_{\text{MFIVol}}(t, T) \end{array} \right.$$

である。

一方、観測時点プレミアムとは別に、同一の1ヶ月間の価格変動を表わすMFIVとIRVを事後的に比較する「実現プレミアム」も定義できる。すなわち、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{時点 } t \text{ の実現バリエーション・プレミアム} = \sigma_{\text{IRV}}^2(t, T) - \sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, T) \\ \text{時点 } t \text{ の実現ボラティリティ・プレミアム} = \sigma_{\text{IRV}}(t, T) - \sigma_{\text{MFIVol}}(t, T) \end{array} \right.$$

である<sup>19</sup>。実現プレミアムは、MFIVの観測時点では未知である将来のIRVとの乖離であるため、MFIVによるIRVの予測可能性を示している<sup>20</sup>。

米VIXとS&P500を対象とした先行研究では、Carr and Wu [2007]、Bollerslev and Zhou [2007]とも、実現プレミアムを推定している。いずれも、1ヶ月タームのボラティリティについて、プレミアムが負( $\sigma_{\text{MFIVar}} > \sigma_{\text{IRV}}$ )であるとの結果を得ている。

本稿では、日経平均について、前場および後場に5分毎に観測したリターンから推定したIRVと、MFIVを用いて、実現プレミアムと観測時点プレミアムを推定してその特徴をみた<sup>21</sup>。

<sup>19</sup> オプションを売却し、満期までそのポジションをデルタヘッジするオプションの売り手を考えると、その損益は、ここで定義した実現プレミアムに比例するという関係がある。一方、観測時点プレミアムは、過去一定期間の実現ボラティリティが将来の同じ期間継続するとの仮定のもとで、こうしたオプションの売り手に対して要求されるリスクプレミアムを示していると解釈できる（観測時点プレミアムが負である局面では、オプションの売り手が買い手に要求している）。

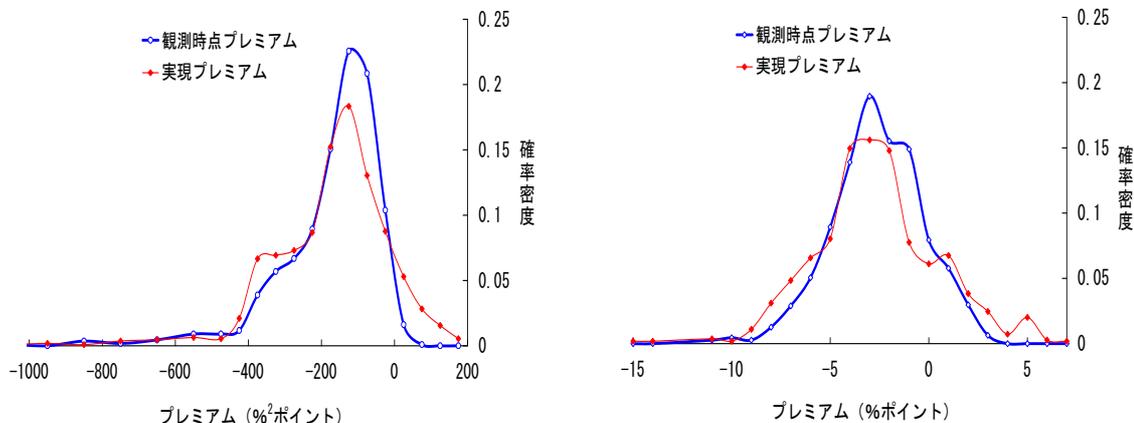
<sup>20</sup> また、実現プレミアムはボラティリティ・スワップの収益率となる。詳細は補論3を参照。

<sup>21</sup> 先行研究によって、リターンの計測頻度がおよそ5分より短い場合には、推定されたRVに、マー

図 7 観測時点プレミアムと実現プレミアムの水準分布比較

(1) バリアンス・リスクプレミアム

(2) ボラティリティ・リスクプレミアム



備考：満期までの期間はすべて1ヶ月。

はじめに、図7に示した両プレミアムの分布をみると、バリアンス・リスクプレミアムは、およそ  $-1,000\%^2$  ポイントから  $200\%^2$  ポイントの範囲にほぼ負の値で分布している。また、ボラティリティ・リスクプレミアムは、 $-10\%$  ポイントから  $6\%$  ポイントの範囲に分布している。両者ともに、観測時点プレミアムより実現プレミアムにおいて、分布の幅が広い。特に、実現プレミアムは、観測時点プレミアムと比べて分布の右側の裾野が広がっており、オプション契約時に負で設定されたプレミアムが、満期までに正の値に反転したことが幾度かあったことを示している。

観測時点プレミアムが負に分布していることは、オプションの売り手が買い手に対して、将来のボラティリティの不確実性に対する対価としてプレミアムを要求しており<sup>22</sup>、そのプレミアムの水準は、過去の実現ボラティリティの動きを参考にしながら決められていることを示唆している。また、プレミアムが正となる確率が、観測時点プレミアムより実現プレミアムにおいて相対的に高い点は、オプションの売り手が当初想定した以上に、ボラティリティが上昇したことを示唆している。

ケット・マイクロストラクチャ・ノイズが含まれ、推定値が過大なバイアスをもってしまうことが知られている。これについては、Hansen and Lunde [2004] などに詳しい。なお、RV は現物価格から推定するため、午後3時～3時10分のボラティリティは含まれていない。また、夜間および昼休み時間帯のリターンに関しては、それぞれ1つのリターンとして算入している。

<sup>22</sup> この点については、脚注19を参照。

#### (4) ボラティリティの期間構造

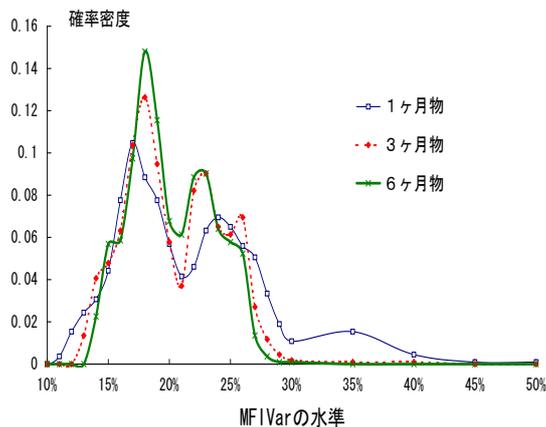
BSIVの期間構造は、権利行使価格毎に複数存在する、換言すれば、BSIVは権利行使価格とタームの両方に依存するボラティリティ面として観察されることから、分析が容易ではなかった。しかし、MFIVでは、期間構造が一意に定まることから、イールドカーブと同じように、容易に分析することができる。本節では、MFIVの期間構造（ボラティリティ・カーブ）の分析結果を整理する。

##### イ. ターム別の水準分布

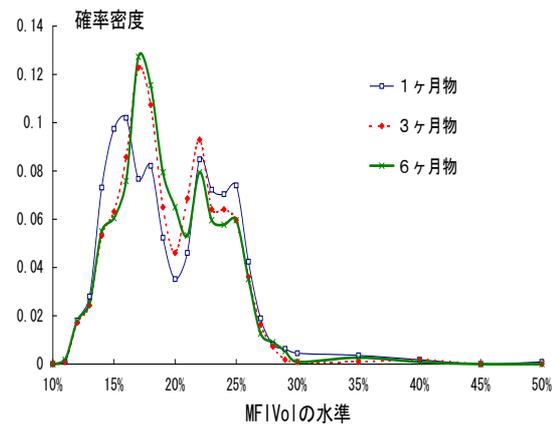
はじめに、ターム別にMFIVの水準分布みたのが図8である。ピークが2つ存在し、左側のピーク（低ボラティリティ局面）の幅が、右側のピーク（高ボラティリティ局面）と比べて広く、また、長期のタームほどピークが高く分布幅が狭い、といった特徴が確認できる。これは、通常時、ボラティリティは低位で安定しているが、一旦市場が不安定になるとジャンプし、ボラティリティ自体も変化しやすくなることを示している。また、短期タームほど、ボラティリティが不安定化しやすい傾向がある。

図8 ターム別にみた水準分布比較

(1) MFIVar



(2) MFIVol



## ロ．カーブと水準の関係

上述の特徴を別の方向から確認するため、過去のMFIVの水準とボラティリティ・カーブの形状（右肩上がりの順カーブか、あるいは、右肩下がりの逆カーブか）の関係をみた。図9は、2006年以降の1、3、6ヶ月物MFIVarの推移である。濃いシャドウは順カーブ局面、薄いシャドウは逆カーブ局面であることを示している。現物価格が大きく下落するようなイベントがあるとき、短期のボラティリティほど高くなり、逆カーブとなっている。逆に市場が安定している局面では、順カーブとなる傾向がある。

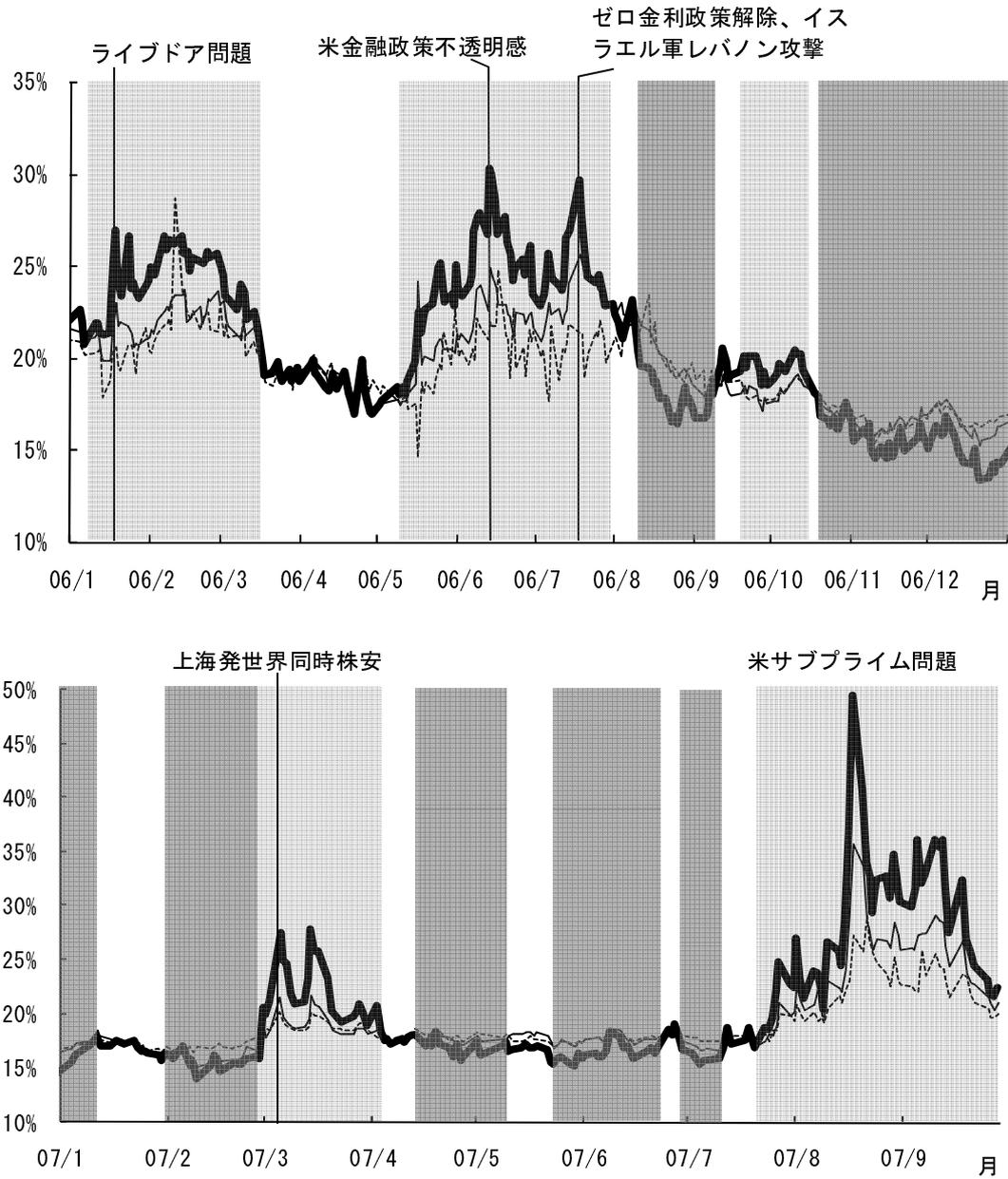
サンプル期間を全調査期間に広げ、1ヶ月物ボラティリティの水準分布をボラティリティ・カーブの形状別にみたものが図10である。順カーブ局面では、1ヶ月物のMFIVarが13%程度を中心に10%から26%の範囲で分布している。一方、逆カーブ局面では、28%を中心に20%から40%の範囲で分布しており、順カーブ局面と水準が異なっている。こうした分析から、長期的にも、ボラティリティの水準とカーブの傾きは、逆相関の関係（低ボラティリティ局面で順カーブ、高ボラティリティ局面で逆カーブ）であることが確認できる。

当該特徴は、高ボラティリティ局面において、市場は、そうした状態が数ヶ月で収束し、その後はボラティリティが低下するとみており、逆に、低ボラティリティ局面において、市場は、将来ボラティリティが高まるリスクを織り込んでいると解釈される。結果として、ボラティリティ・カーブには平均回帰性が現れると考えられる。なお、過去、ボラティリティは、高ボラティリティ局面と低ボラティリティ局面を循環している。こうした点は、平均的にみれば、現在のボラティリティ・カーブが将来のボラティリティに対する予測力をもつ可能性を示唆している。この点については、4節（6）で検証する。

## ハ．カーブ変動の主成分

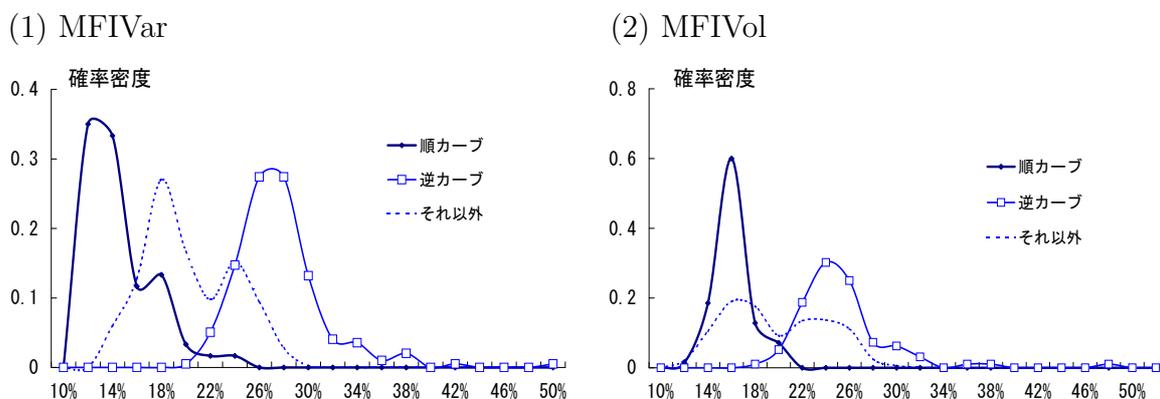
最後に、ボラティリティ・カーブの変化を総合的に把握するために、5年分の日次ボラティリティ・カーブ（1ヶ月から6ヶ月）の主成分分析を行い、結果を図11に示した。上段は大きい順に固有値を、中段は横軸の順位までの固有値で説明可能な変動の割合（決定係数）を、下段は固有値が大きい上位3位までの固有ベクトルを示している。これをみると、MFIVol、MFIVarともパラレルシフト、スティーブニン

図 9 MFIVar の推移と順 / 逆カーブ局面



備考：上段は2006年、下段は2007年初から2007年9月末の動きを示す。太線は1ヶ月ターム、細線は3ヶ月ターム、点線は6ヶ月タームのMFIVar。濃いシャドーは順カーブ局面、薄いシャドーは逆カーブ局面を示す。順カーブ局面は、概ね1, 3, 6ヶ月の順にボラティリティが高くなっている局面、逆カーブ局面は同順に低くなっている局面。順 / 逆カーブ局面では、一部に順序が入れ替わる日があるが、数日を均してみても順 / 逆カーブであれば、シャドーを付している。

図 10 ボラティリティ・カーブの形状別にみたボラティリティの水準分布



備考：順カーブは、1、3、6ヶ月物の順にボラティリティが大きく、かつ1ヶ月物と6ヶ月物が2%ポイント以上の乖離があること、逆カーブはその逆と定義。

グ、ベンディングの3つでほぼ説明可能である。特に第1成分である平行シフトが5割超の説明力を有する。次にスティーピングが2割程度、ベンディングが1割程度の説明力となっている。こうした点は、Litterman and Scheinkman [1991]などが調べたイールドカーブの変動成分の特徴と類似している。

当該結果は、Heston [1993]のモデルのように、ボラティリティ変動を1つの確率因子で表現する確率的ボラティリティ変動モデルより、二重CEVモデルのように、確率変動を2つの確率因子で表現するモデルの方が、現実のインプライド・ボラティリティの動きをより上手く説明できるという実証分析結果（Gatheral [2008]）とも整合的である。

### (5) ボラティリティの変動要因

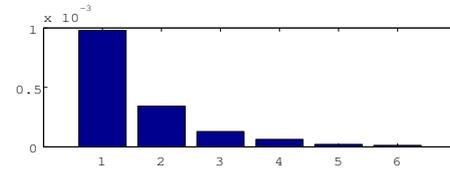
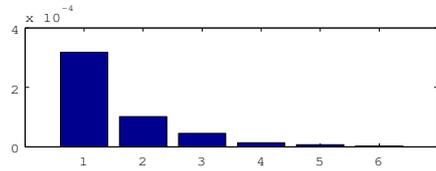
MFIVは様々な要因で変動するが、内外の市場に大きなショックが起きたとき、特に大きく変動している。そうしたボラティリティの変動要因として、ここでは、実現ボラティリティで推計される過去のショックと、海外市場におけるMFIVを取り上げ、それぞれ分析する。

図 11 ボラティリティ・カーブ変動の主成分

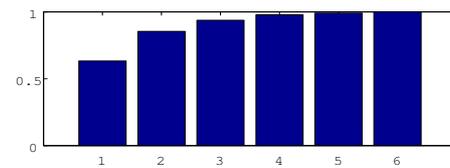
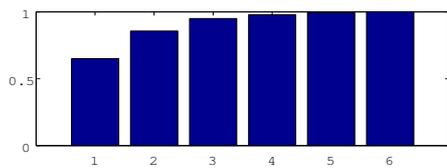
(1) MFIVar

(2) MFIVol

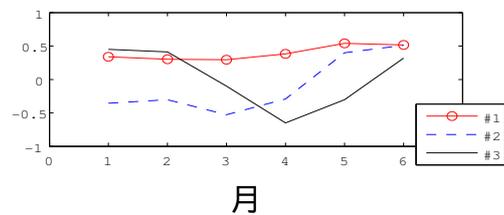
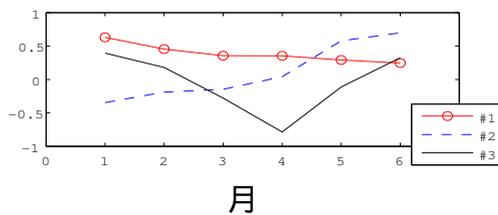
a. 分散共分散行列の固有値 (大きい順)



b. 横軸の順位までの主成分による説明力 (決定係数)



c. 第 3 位成分までの固有ベクトル



備考：分析に用いたボラティリティ変動は、前日からの単純差として定義。各パネルとも横軸は期間 (単位：月) を表す。c. 行図中の凡例に示す #1 等は第 1 主成分等を示す。

## イ. 実現ボラティリティ

一般に、原資産市場のボラティリティ水準が変化すれば、その影響を受けて、期待ボラティリティである MFIV も変化すると考えられる。そこで、本節では、過去の実現ボラティリティの変化が、MFIV の水準にどのような影響を与えるかについて分析する。ここでは、過去ボラティリティの代理変数として、1 日の実現ボラティリティの一致推定量である RV を利用する。観測時点に近い日の RV ほど、MFIV の水準に与えるインパクトが大きいと予想されるため、分析には、次の線形回帰式を

用いる。

$$\sigma_{\text{MFIVar}}^2(t_0, T) = \alpha_1 + \sum_{i=0}^m \xi_i \sigma_{RV}^2(t_{-i}) + \varepsilon_1, \quad (15)$$

$$\sigma_{\text{MFIVol}}(t_0, T) = \alpha_2 + \sum_{i=0}^m \zeta_i \sigma_{RV}(t_{-i}) + \varepsilon_2. \quad (16)$$

ここで、 $\alpha_1, \alpha_2$  は定数項、 $\xi_i, \zeta_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ) は過去の RV に対する感応度を示すパラメータ、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  は推計誤差とする。MFIV は、午後 3 時 10 分時点、RV は午後 3 時時点の値であることから、右辺には現時刻  $t_0$  の RV を含めている。

はじめに、 $m = 20$  の場合、すなわち、過去約 1 ヶ月 (20 営業日) の RV が期間 1 ヶ月の MFIV の期待形成にどのような影響を与えるかを調査する。表 4 には、リスクプレミアムを示す  $\alpha$ 、および、ラグ  $i$  日前の RV の係数  $\xi_i, \zeta_i$  の推定結果を示している。初めに、 $\alpha$  の推定値についてみると、いずれのサンプルでも有意に正の値が推定されている。これは、4 節 (3) 節でみたように、ボラティリティに負のリスクプレミアムが存在するケースが多いことと整合的な結果である<sup>23</sup>。次に、各ラグにおける係数  $\xi_i, \zeta_i$  の推定値についてみると、ラグが  $i = 5$  (1 週間) までは、概ね統計的に有意に正の値が推定されている。また、係数のレベルは、ラグが拡大するにつれて急激に低下している。ラグが  $i = 6$  を超えると、係数  $\xi_i, \zeta_i$  はほぼゼロに推定され、有意である係数の数も減少している。

さらに、 $m = 50$  までラグを延長した (15)、(16) 式を再推定し、比較的長期にわたる過去 RV のインパクトの有意性を  $t$  値によって測ると、図 12 に示したように、およそ 17 営業日前 (3 週間強) までの係数 ( $\xi_i, \zeta_i$ ) は、概して 5% の水準で統計的に有意に正の値となるが、それ以前の係数はほとんど有意ではないことが分かる。すなわち、過去 3 週間程度の RV は、MFIV の水準に影響をもち得るが、それより過去の RV は、MFIV に有意な影響を与えない。

こうした結果は、オプション市場の参加者が過去のボラティリティ水準を何らかのかたちで参考にしつつオプション価格を決定しており、特に、現時点により近い時点の実現ボラティリティ水準ほど重視する傾向があることを示唆している。また、1 ヶ月以上遡る過去の実現ボラティリティ水準は、ターム 1 ヶ月のオプションのプライシング時に、それほど重視されないことも示唆している。

<sup>23</sup> (15)、(16) 式における定数項  $\alpha_1, \alpha_2$  は、パラメータが  $\xi_i, \zeta_i$  がすべて 1 かつ  $m = 20$  である場合に、4 節 (3) で定義した観測時点プレミアムに  $-1$  を乗じた値となる。

表 4  $\xi$  の推定結果 (推計期間: 過去 1 ヶ月  $\langle m = 20 \rangle$ )

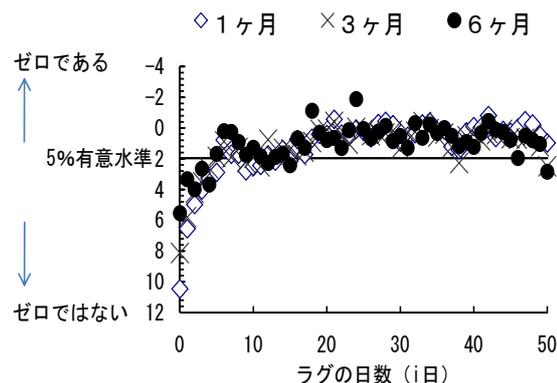
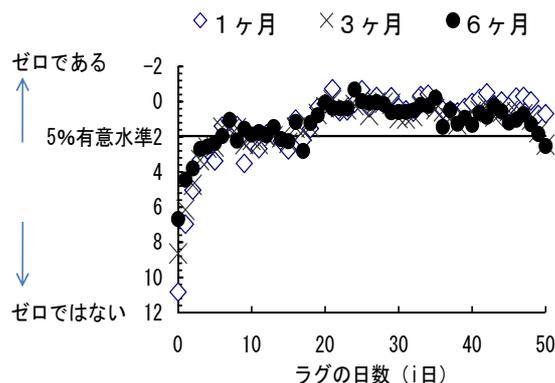
ラグ ( $i$ 日)	MFIVar ( $\xi_i$ の推定値)						MFIVol ( $\zeta_i$ の推定値)					
	1 ヶ月		3 ヶ月		6 ヶ月		1 ヶ月		3 ヶ月		6 ヶ月	
$\alpha$	52.18	(8.93)	127.08	(6.68)	166.42	(6.15)	3.52	(0.30)	5.55	(0.29)	6.26	(0.33)
0	62.62	(5.72)	34.74	(4.28)	24.58	(3.95)	2.76	(0.26)	1.94	(0.25)	1.55	(0.28)
1	42.54	(5.88)	25.58	(4.40)	16.87	(4.05)	1.77	(0.27)	1.40	(0.25)	0.95	(0.29)
2	30.57	(5.92)	20.80	(4.43)	15.32	(4.08)	1.39	(0.27)	1.12	(0.26)	1.23	(0.29)
3	20.75	(5.98)	14.56	(4.48)	11.18	(4.12)	1.12	(0.27)	0.94	(0.26)	0.79	(0.30)
4	17.48	(5.98)	11.75	(4.48)	10.58	(4.12)	0.96	(0.27)	0.72	(0.26)	1.07	(0.30)
5	20.82	(5.98)	11.86	(4.47)	9.68	(4.12)	0.84	(0.27)	0.54	(0.26)	0.52	(0.30)*
6	8.05	(5.98)*	6.96	(4.47)*	8.29	(4.12)	0.22	(0.27)*	0.24	(0.26)*	0.13	(0.30)*
7	7.73	(6.02)*	8.22	(4.51)*	5.72	(4.15)*	0.48	(0.27)*	0.54	(0.26)	0.18	(0.30)*
8	9.28	(6.02)*	8.00	(4.50)*	9.51	(4.15)	0.51	(0.27)*	0.42	(0.26)*	0.36	(0.30)*
9	20.98	(6.02)	11.57	(4.51)	7.32	(4.15)*	0.76	(0.27)	0.63	(0.26)	0.52	(0.30)*
10	14.58	(6.03)	10.43	(4.51)	8.21	(4.16)	0.74	(0.27)	0.55	(0.26)	0.42	(0.30)*
11	16.34	(6.02)	11.82	(4.51)	7.86	(4.15)*	0.71	(0.27)	0.70	(0.26)	0.61	(0.30)
12	12.17	(6.03)	10.01	(4.51)	8.64	(4.16)	0.51	(0.27)*	0.27	(0.26)*	0.74	(0.30)
13	12.48	(6.06)	9.79	(4.54)	7.31	(4.18)*	0.63	(0.28)	0.55	(0.26)	0.66	(0.30)
14	14.63	(6.07)	10.35	(4.54)	9.60	(4.19)	0.40	(0.28)*	0.40	(0.26)*	0.53	(0.30)*
15	17.52	(6.09)	12.46	(4.56)	11.52	(4.20)	0.64	(0.28)	0.48	(0.26)*	0.86	(0.30)
16	7.19	(6.09)*	9.35	(4.56)	7.12	(4.20)*	0.29	(0.28)*	0.60	(0.26)	0.38	(0.30)*
17	14.36	(6.10)	10.33	(4.56)	14.11	(4.21)	0.55	(0.28)	0.56	(0.26)	0.57	(0.30)*
18	9.81	(6.03)*	10.23	(4.51)	8.46	(4.16)	0.29	(0.27)*	0.49	(0.26)*	-0.07	(0.30)*
19	2.39	(6.00)*	7.67	(4.49)*	7.37	(4.13)*	0.23	(0.27)*	0.33	(0.26)*	0.42	(0.29)*
20	1.47	(5.82)*	8.33	(4.36)*	7.31	(4.01)*	0.24	(0.26)*	0.45	(0.25)*	0.64	(0.29)

備考: 括弧内は標準誤差。標準誤差に付された\*は、95% 信頼区間にゼロが含まれる推計値。  
 $\xi_i$  は %<sup>2</sup> スケール、 $\zeta_i$  は % スケール。

図 12  $\xi_i, \zeta_i$  の  $t$  値 (推計期間: 過去 2 ヶ月半  $\langle m = 50 \rangle$ )

(1)  $\xi_i$  の  $t$  値 (MFIVar)

(2)  $\zeta_i$  の  $t$  値 (MFIVol)



備考: 縦軸は、推計された係数  $\xi_i, \zeta_i$  がゼロであるとの仮説に関する  $t$  値であり、下方に位置するほど、推計値が有意にゼロではないことを示す。グラフ中の横線は、5% 有意水準。

## ロ． 海外市場の MFIV

わが国株式市場では、海外の投資家も活発に取引しており、海外市場の動向に敏感に反応することが多い。ボラティリティも、海外市場のボラティリティと連動する局面が少なくないと考えられる。ここでは、3節(2)で紹介した米国の VIX と、ドイツ証券取引所が算出している VDAX を用いて、その連動性を見た。VDAX は、ドイツの株価指数 DAX を原資産としたオプション価格から、VIX の手法に基づいて算出されたボラティリティ指数である。

はじめに、図 13 には、2003 年から 2007 年央までの、わが国 MFIVar、米 VIX、独 VDAX の推移を示した。2003 年央や 2006 年初のわが国 MFIVar など、一部各国独自の要因で上下する局面はあるものの、大半の時期において、各国のボラティリティは連動した動きとなっている。

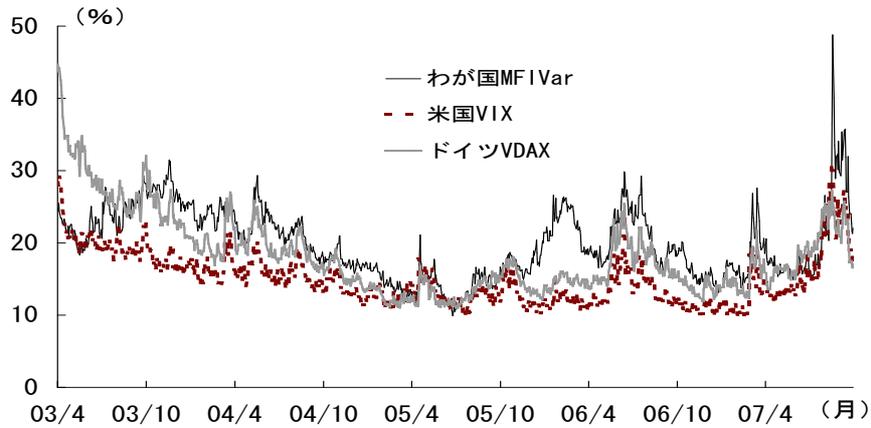
次に、各国ボラティリティの時差相関をみると、図 14(1) に示したように、米独の相関が最も強く、次に、日米、日独の順に大きい正の相関関係が観察された。また、1 日変動差の時差相関を見ると、図 14(2) のように、ドイツと米国のボラティリティでは同日相関が最も大きいのに対して、わが国のボラティリティでは 1 日遅れの時差相関が大きいことが分かった。すなわち、欧州と米国の株式市場は、取引時間帯が重なっていることもあり<sup>24</sup>、同一営業日のボラティリティが連動して動き、わが国への波及は、その翌営業日となっている。なお、図 14(2) に示された変動差の時点相関をみると、ボラティリティの国から国への波及は、当日と翌営業日に限られ、2 営業日以降はほぼ消滅している。

さらに、どの国のボラティリティが先行して動いているかを確認するため、Granger の因果性検定を行うと、表 5 のように、日、米、独のいずれのペアのいずれの方向にも統計的に有意な因果関係が存在するとの結果となった。すなわち、MFIV は、平時には、日米独で相互に依存する関係にあることが示唆される。

以上の結果は、MFIV が、過去の原資産価格の動きや海外市場の影響を受けており、そうした他市場でのショックがオプション市場に伝播することによって、期待ボラティリティの方向性が変化していることを示唆するものである。

<sup>24</sup> 独 VDAX は、現地時刻の 17 時 45 分に算出されている。この時刻は、ニューヨークにおける株式市場の正午頃となり、取引時間帯であるため、独 VDAX と米 VIX の連動性が最も強く現れると考えられる。

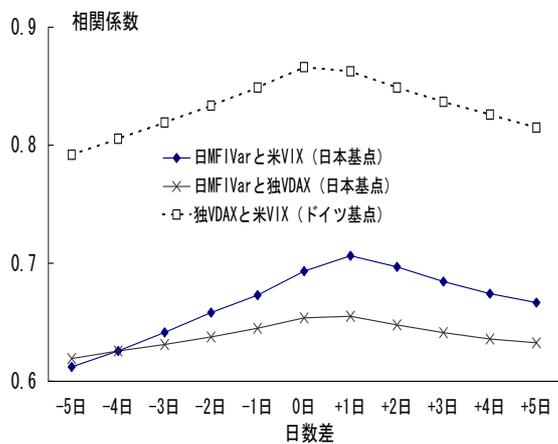
図 13 わが国 MFIVar、米国 VIX、ドイツ VDAX の推移



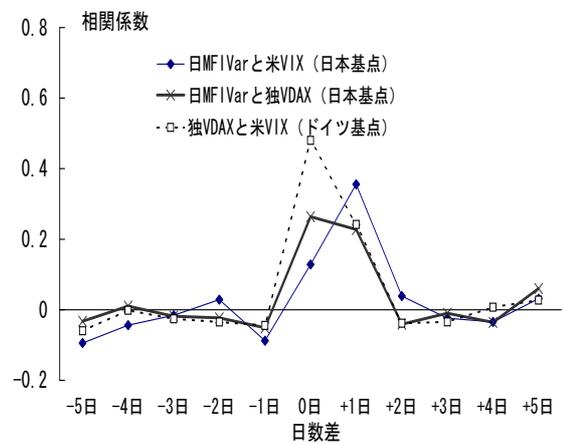
資料：VIX 指数は CBOE 算出値、VDAX はドイツ証券取引所算出値を、ブルームバーグより入手。

図 14 わが国 MFIVar、米 VIX、独 VDAX の時差相関

(1) 水準の時差相関



(2) 1日変動差の時差相関



備考：わが国 MFIV 与米 VIX および独 VDAX の相関データは、日本時間 15 時 10 分が基点、米 VIX と独 VDAX の相関データは欧州中央時間 17 時 45 分 (VDAX の算出時刻) が基点。

資料：VIX 指数は CBOE 算出値、VDAX はドイツ証券取引所算出値を、ブルームバーグより入手。

表 5 わが国 MFIVar、米 VIX、独 VDAX の因果関係

	自転方向の因果関係			自転と逆方向の因果関係		
	日	独	米	米	独	日
ラグ 1 日	25.30*	89.97*	60.47*	26.67*	31.25*	28.20*
ラグ 2 日	60.39*	221.18*	101.62*	68.86*	48.65*	27.86*

備考：表内数値はグレンジャー因果検定の  $F$  値。\* は 1% 有意水準で統計的に有意に因果関係が認められる場合。

資料：VIX 指数は CBOE 算出値、VDAX はドイツ証券取引所算出値を、ブルームバーグより入手。

## (6) 将来ボラティリティの予測力

4 節 (4) におけるボラティリティの期間構造とその水準の分析では、ボラティリティ・カーブが将来のボラティリティに対する予測力がある程度有している可能性が示唆された。本節では、当該予測力について統計学的に検証する。

金利や株価の先渡取引（フォワード）と同様に、MFIV についてもフォワードを考えることができる。時点  $t$  におけるフォワード MFIVar は、将来のある時点  $t_1$  ( $t_1 > t$ ) からさらに将来のある時点  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ) までの間の期待分散として、次のとおり定義することができる<sup>25</sup>。

$$\sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, t_1, t_2) = E_t \langle S \rangle_{t_1, t_2}, \quad (17)$$

「現在のフォワード MFIVar が将来の MFIVar を予測している」との仮説を検定するために、将来時点  $t_1$  における同時点から  $t_2$  までの MFIVar を、現時点  $t$  における同期間のフォワード MFIVar に誤差が加わったものとして、次のとおり表現する。

$$\begin{aligned} E_{t_1} \langle S \rangle_{t_1, t_2} &= E_t \langle S \rangle_{t_1, t_2} + \varepsilon_{t_1-t}, \\ \varepsilon_{t_1-t} &\sim N(\mu_{t_1-t}, (t_1 - t)v^2). \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、誤差は、簡単化のため、平均  $\mu_{t_1-t}$ 、分散  $(t_1 - t)v^2$  の独立な正規分布に従うとした。 $t_2 - t_1$  が一定のもとで  $t_1$  が増加する場合を考えると、(18) 式は、フォー

<sup>25</sup> MFIVol については、期待値の平方根ゆえ予測力の検証に困難が伴うため、本節では、MFIVar（期待分散）のみを対象に検証を行う。

ド・ボラティリティカーブが時間とともに右方向に平行移動する状況を示している。すなわち、(18)式を検定することで、ボラティリティ・カーブの予測力を検証できる。ただし、(18)式を直接検定する場合、検定対象となる式が多数に上ることから、MFIVarの線形性を用いて、(18)式を以下のとおり加工する。

初めに、時点 $t$ 、満期 $T$ のボラティリティカーブを、フォワード・ボラティリティカーブに分割する。分割単位を $m$ (ヵ月)、分割数を $n$ とすると、 $T = t + mn$ であるから、(1)式の線形性より

$$\langle S \rangle_{t,t+nm} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle S \rangle_{t+im,t+im+m}, \quad (19)$$

と展開できる。時刻 $t$ における条件付期待値を取ると、

$$E_t \langle S \rangle_{t,t+nm} = \sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, t + nm) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_t \langle S \rangle_{t+im,t+im+m}, \quad (20)$$

と分解できる。これを(18)式に代入し、さらに、Campa and Chang [1995]、Mixon [2007]に倣い、両辺から $\sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, t + m)$ を差し引くことで、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [\sigma_{\text{MFIVar}}^2(t + im, t + im + m) - \sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, t + m)] \\ & = \alpha + \beta [\sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, t + nm) - \sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, t + m)] + \bar{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (21)$$

と変形する。ただし、 $\bar{\varepsilon} = -\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_{im}$ である。(21)式を予測方程式と呼ぶ。

予測方程式において、 $\alpha = 0$ 、 $\beta = 1$ を仮説として検定することで、MFIVarの予測力を検証することができる。ただし、誤差項 $\bar{\varepsilon}$ は、期間が重なる誤差 $\varepsilon_{im}$ の和であることから、誤差に自己相関が存在し得る。そこで、推定では、Newey and West [1987]が提案した手法に基づいて標準誤差を計算し、 $t$ 検定と $F$ 検定の2つによって、予測力を検証する<sup>26</sup>。

$m, n$ を適当に変えた場合の検定結果を表6に示した。はじめに、 $\alpha, \beta$ の推定値を個別にみると、 $\alpha$ は、いずれもほぼゼロと推定されるほか、 $\beta$ は、 $m$ が小さいほど1に近い値に推定されている。 $t$ 検定に基づくと、全ての $m, n$ について、 $\alpha = 0$ の仮説

<sup>26</sup> 2次スペクトラル・カーネルとして、バートレット・カーネルを用い、自己相関が存在する期間の推定には、Andrews [1991]によって提案された手法のうち、誤差項と説明変数の積がAR(1)モデルに従う手法を適用している。

表 6 予測方程式 (21) の推定結果

分割単位 $m$ (ヶ月)	分割数 $n$	$\alpha$	$\beta$	$F$ 値
1	6	0.0021 (0.0014)	1.0888 (0.0914)	16.0898
1	3	0.0026 (0.0014)	1.0493 (0.1151)	37.9883
1	2	0.0022 (0.0012)	0.8213 (0.1412)	44.8982
2	3	0.0006 (0.0009)	0.9265 (0.1112)	3.6296**
2	2	0.0010 (0.0007)	0.7825 (0.1262)	16.4197
3	2	0.0003 (0.0006)	0.6729* (0.0889)	20.2436

備考： $\alpha$ ,  $\beta$  の推定値に付した \* は、 $\alpha = 0$  あるいは  $\beta = 1$  の仮説が 5% 有意水準で棄却されることを示す。また、 $F$  値の推定値に付した \*\* は、 $\alpha = 0$  かつ  $\beta = 1$  の仮説が 1% 有意水準で棄却されることを示す。括弧内は Newey and West [1987] 法に基づいた標準誤差。

が棄却されないほか、 $(m, n) = (3, 2)$  の場合を除いて  $\beta = 1$  の仮説が棄却されない。また、 $F$  検定に基づくと、 $(m, n) = (2, 3)$  の場合を除いて、 $\alpha = 0$  かつ  $\beta = 1$  の仮説が棄却されない。すなわち、表 6 の結果からは、期間 1 ヶ月の MFIV は先行き 6 ヶ月までの、期間 2 カ月の MFIV は先行き 4 カ月までの MFIV に対する予測力を有していると考えられる。

## 5 結論

本稿では、モデルフリー・インプライド・ボラティリティを取り上げ、2 種類の定義を提示したうえで、それらをオプションの市場価格から推定する手法を解説した。また、実際に、過去約 5 年分の日経 225 指数オプション取引データを用いて、1 月から 6 ヶ月の MFIV を推定し、その特徴や変動要因等について実証分析を行った。分析の結果、(1) MFIV には高ボラティリティ局面と低ボラティリティ局面の 2 局面が

存在し、高ボラティリティ局面の方がボラティリティの変動が激しい、(2) 長期タームほど安定性が高く、従って、(3) 低ボラティリティ局面では順カーブ、高ボラティリティ局面では逆カーブとなる傾向がある、(4) ボラティリティカーブは、パラレルシフト 5 割強、スティーピング 2 割、ベンディング 1 割で構成されている、(5) インプライド・ボラティリティにはリスクプレミアムが含まれるなど、BSIV では正確に捉えることが困難であった特徴が判明した。また、ボラティリティの変動要因については、(6) MFIV のレベルが、過去 1 週間程度の原資産価格の実現変動率に依存すること、(7) わが国の MFIV は、米国の VIX や欧州の VDAX と連動しており、米国や欧州に 1 日遅れて変動する傾向があること、さらに、(8) 短期の MFIV は、先行き半年程度将来のボラティリティの変動に対する予測力があることなども示唆された。

こうした MFIV の特性への理解が進み、米国 VIX のように市場に浸透すると、わが国においても MFIV は市場の警戒感や先行き不透明感を示す指標としてより広く利用され得る。また、MFIV は、ボラティリティ・デリバティブの原資産価格としても位置付けられるため、ボラティリティ・デリバティブ市場が発展すれば、従来の金融派生商品市場では取引するのが困難であったボラティリティ自体の取引が容易になる。その場合には、投資家のリスク・コントロール手段が拡充されることになる。こうした点については、補論 3 にまとめている。

もっとも、従来から利用されている BSIV も、オプションのプライシングに直接利用することができるほか、市場の期待を反映する指標として引き続き大きな価値がある。2 節 (3) において整理したように、BSIV、MFIV には、それぞれメリット、デメリットがあり、利用目的によって使い分ける必要がある。

本稿では、MFIV の基本的な特徴を中心に分析したが、さらに、MFIV 変動の詳細な性質（例えば、定常性や長期記憶性）、あるいは、MFIV に内在するリスクプレミアムの動きなどを詳細に検証することで、インプライド・ボラティリティの記述にはどのようなモデルが適当であるのかなどを考察することができる。こうした点は、今後の研究課題としたい。

## 補論 1 . MFIVar 評価式の導出

### (1) 前提となる価格変動過程

原資産のフォワードレート  $F(t, T) = F_t$  の変動は、拡散過程に、それと独立なジャンプ過程  $x$  が加わった一般的なジャンプ拡散過程

$$dF_t = F_{t-} \sigma(t^-, \cdot) dW_t + F_{t-} \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1) [\mu(dx, dt) - \nu(dx, t) dt], \quad (\text{A-1})$$

に従うとする。第 1 項は連続マルチンゲール、第 2 項は非連続マルチンゲール (任意の有限ジャンプ) を示している。連続マルチンゲールの  $dW_t$  はブラウン運動であり、拡散係数  $\sigma(t, \cdot)$  は時刻  $t$  のほか、確率変数を含む任意の変数に依存可能である。第 2 項の  $x$  は  $\mu(x, t) = 1$  のときの価格ジャンプ率  $x = \ln(F_t/F_{t-})$  である。 $x$  について積分することで、あらゆる幅を持つジャンプを考慮している。 $t^-$  はジャンプが発生する直前の時刻、 $\mu(x, t)$  は任意の計数過程、 $\nu(x, t)$  はジャンプ過程

$$J_t = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} F_{s-} (e^x - 1) \mu(dx, ds), \quad (\text{A-2})$$

の補過程であり、

$$\tilde{E}_s \mu(dx, dt) = \tilde{E}_s \nu(dx, t) dt, \quad (\forall s < t),$$

が成り立つ。ここで、 $F_t$  がマルチンゲールとなる確率測度を  $T$ -フォワード測度とよび、同測度下の変量 (あるいはオペレータ) にはチルダ  $\tilde{\cdot}$  を付して表記する。また、 $\tilde{E}_t[\cdot] = \tilde{E}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ 、 $\mathcal{F}_t = \sigma(F_s; s \leq t)$  とする。さらに、 $F_t$  の分散を有限とするために、 $\nu(x, t)$  について、

$$\nu(0, t) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (e^{2x} \vee 1) \nu(x, t) dx < \infty, \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (\text{A-3})$$

が満たされるものとする。

この過程のもとで、MFIVar の合成式

$$\sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, T) \simeq \frac{2}{\tau B(t, T)} \left( \int_0^{F_t} \frac{P(\tau, K)}{K^2} dK + \int_{F_t}^{\infty} \frac{C(\tau, K)}{K^2} dK \right), \quad (\text{A-4})$$

が近似的に成立することは、以下のとおり示される。

はじめに、オプション価格とキャッシュ、先物価格を用いれば、どのようなペイオフでも複製できることを示す。

## (2) ヨーロピアン型ペイオフの展開

任意のヨーロピアン型ペイオフ関数  $f(\cdot)$  が2次まで微分可能であるとする。そのとき、正の変数  $x$  を用いて、 $f(y)$  ( $y > 0$ ) は以下のとおり展開できる。

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \int_0^x f''(K)(K-y)^+ dK + \int_x^\infty f''(K)(y-K)^+ dK. \quad (\text{A-5})$$

(証明)

2階微分可能な関数  $f(\cdot)$  と任意の正の実数  $x, y$  について、

$$f(y) - f(x) = \mathbf{1}\{y \geq x\} \int_x^y f'(u) du - \mathbf{1}\{x > y\} \int_y^x f'(u) du,$$

が成立する。上式を変形すると、

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \mathbf{1}\{y \geq x\} \int_x^y \left[ f'(x) + \int_x^u f''(v) dv \right] du \\ &\quad - \mathbf{1}\{x > y\} \int_y^x \left[ f'(x) - \int_u^x f''(v) dv \right] du \\ &= f(x) + f'(x)(y-x) + \mathbf{1}\{y \geq x\} \int_x^y f''(v) \int_v^y dudv + \mathbf{1}\{x > y\} \int_y^x f''(v) \int_y^v dudv \\ &= f(x) + f'(x)(y-x) + \mathbf{1}\{y \geq x\} \int_x^y (y-v) f''(v) dv + \mathbf{1}\{y < x\} \int_y^x (v-y) f''(v) dv \\ &= f(x) + f'(x)(y-x) + \int_x^\infty (y-v)^+ f''(v) dv + \int_0^x (v-y)^+ f''(v) dv, \end{aligned}$$

となる。 $v = K$  のとき、(A-5) 式を得る。■

## (3) 現在価値の合成

次に、任意のヨーロピアン型ペイオフ  $f(F_T)$  の現在価値  $V_t = B(t, T) \tilde{E}_t f(F_T)$  は、無リスク債券価格  $B(t, T)$ 、先物価格  $F_t$ 、コールおよびプット・オプション価

格  $C(\tau, K), P(\tau, K)$  によって、以下のとおり合成できる。

$$V_t = f(F_t)B(t, T) + \int_0^{F_t} f''(K)P(\tau, K)dK + \int_{F_t}^{\infty} f''(K)C(\tau, K)dK. \quad (\text{A-6})$$

特に、対数ペイオフについて、

$$B(t, T)\tilde{E}_t \left[ -\ln \frac{F_T}{F_t} \right] = \int_0^{F_t} \frac{P(\tau, K)}{K^2} dK + \int_{F_t}^{\infty} \frac{C(\tau, K)}{K^2} dK, \quad (\text{A-7})$$

が成立する。

(証明)

(A-5) 式において、 $x = F_t$  とし、両辺の時刻  $t$  において、 $T$ -フォワード測度下で期待値をとると、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t f(F_T) &= f(F_t) + f'(F_t)(\tilde{E}_t F_T - F_t) \\ &\quad + \tilde{E}_t \int_0^{F_t} f''(K)(K - F_T)^+ dK + \tilde{E}_t \int_{F_t}^{\infty} f''(K)(F_T - K)^+ dK, \end{aligned}$$

となる。第2項は  $T$ -フォワード測度下で  $F_t$  がマルチンゲールであることよりゼロとなる。従って、この現在価値は、

$$V_t = f(F_t)B(t, T) + \int_0^{F_t} f''(K)P(\tau, K)dK + \int_{F_t}^{\infty} f''(K)C(\tau, K)dK,$$

となり、(A-6) 式が成立する。また、ペイオフ関数が対数関数  $f(x) = \ln x$  であるとき、(A-6) 式は、

$$\tilde{E}_t \ln F_T = \ln F_t - \int_0^{F_t} \frac{\tilde{P}(\tau, K)}{K^2} dK - \int_{F_t}^{\infty} \frac{\tilde{C}(\tau, K)}{K^2} dK,$$

となることから、(A-7) 式が成立する。■

#### (4) MFIVar の合成

上記を用いて MFIVar を合成すると、(5) 式が原資産価格変動の 2 次のオーダーで成立する。すなわち、

$$\sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, T) = \frac{2}{(T-t)B(t, T)} \left( \int_0^{F_t} \frac{P(\tau, K)}{K^2} dK + \int_{F_t}^{\infty} \frac{C(\tau, K)}{K^2} dK \right) + \varepsilon,$$

$$\varepsilon \sim o \left( \left( \frac{dF_s}{F_{s^-}} \right)^3 \right). \quad (\text{A-8})$$

(証明)

MFIVar は、仮定 (A-3) 式より、

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, T) &= \frac{1}{T-t} \tilde{E}_t \int_t^T \left( \frac{dF_s}{F_{s^-}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{T-t} \tilde{E}_t \int_t^T \left( \frac{1}{F_{s^-}} \right)^2 d[F, F]_s \\ &= \frac{1}{T-t} \tilde{E}_t \int_t^T \left[ \sigma^2(s^-, \cdot) ds + \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)^2 \mu(dx, ds) \right]. \end{aligned}$$

ここで、 $\ln F_s$  に伊藤の定理を適用すると、

$$d \ln F_s = \frac{dF_s}{F_{s^-}} - \frac{1}{2} \sigma^2(s^-, \cdot) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \ln(F_{s^-} e^x) - \ln F_{s^-} - \frac{F_{s^-} e^x - F_{s^-}}{F_{s^-}} \right] \mu(dx, ds)$$

であるから、 $\sigma^2(s^-, \cdot)$  を消去すると、

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, T) &= \frac{2}{T-t} \tilde{E}_t \left[ -\ln \frac{F_T}{F_t} \right] + \frac{2}{T-t} \tilde{E}_t \int_t^T \frac{dF_s}{F_{s^-}} \\ &\quad + \frac{1}{T-t} \tilde{E}_t \int_t^T \int_{-\infty}^{\infty} (e^{2x} - 4e^x + 2x + 3) \mu(dx, ds). \end{aligned}$$

第 2 項は  $T$ -フォワード測度下で  $F_t$  がマルチンゲールであることよりゼロとなる。

第1項について (A-7) 式を用いると、

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{MFIVar}}^2 &= \frac{2}{(T-t)B(t,T)} \left[ \int_0^{F_t} \frac{P(\tau, K)}{K^2} dK + \int_{F_t}^{\infty} \frac{C(\tau, K)}{K^2} dK \right] \\ &\quad + \frac{1}{T-t} \tilde{E}_t \int_t^T \int_{-\infty}^{\infty} (e^{2x} - 4e^x + 2x + 3) \mu(dx, ds) \\ &= \frac{2}{(T-t)B(t,T)} \left[ \int_0^{F_t} \frac{P(\tau, K)}{K^2} dK + \int_{F_t}^{\infty} \frac{C(\tau, K)}{K^2} dK \right] + \varepsilon,\end{aligned}$$

となり、(A-4) 式を得る。

なお、誤差  $\varepsilon$  は非連続マルチンゲール (価格ジャンプ) の3次累積値となる。なぜなら、 $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^3)$  であるから、

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{T-t} \tilde{E}_t \int_t^T \int_{-\infty}^{\infty} (e^{2x} - 4e^x + 2x + 3) \mu(dx, ds) \\ &= \frac{1}{T-t} \tilde{E}_t \int_t^T \int_{-\infty}^{\infty} \{ (1 + 2x + 2x^2 + o(x^3)) - 4(1 + x + x^2/2 + o(x^3)) + 2x + 3 \} \mu(dx, ds) \\ &\sim \frac{1}{T-t} \tilde{E}_t \int_t^T \int_{-\infty}^{\infty} o(x^3) \mu(dx, ds).\end{aligned}$$

以上から、(A-8) 式は、独立な増分をもつマルチンゲール価格過程に対して、価格変化率の2次オーダーで近似的に成立する。■

## 補論 2 . MFIVol 評価式の導出

Carr and Lee [2007b] による MFIVol の合成式

$$\sigma_{\text{MFIVol}}(t, T) = E^Q \left[ \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T \left( \frac{dS_u}{S_u} \right)^2} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (\text{A-9})$$

が、デルタ・ニュートラルの仮定のもとで、ヨーロピアン・プット / コールオプション価格と期間  $\tau$  の無リスク債券価格を用いて、

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{MFIVol}} \simeq & \sqrt{\frac{\pi}{2\tau} \frac{P(\tau, F_t) + C(\tau, F_t)}{F_t B(t, T)}} \\ & + \frac{1}{B(t, T)} \sqrt{\frac{\pi}{8\tau F_t}} \left\{ \int_{K < F_t} \frac{I_0 \left( \ln \sqrt{\frac{K}{F_t}} \right) - I_1 \left( \ln \sqrt{\frac{K}{F_t}} \right)}{K \sqrt{K}} P(\tau, K) dK \right. \\ & \left. + \int_{K > F_t} \frac{I_1 \left( \ln \sqrt{\frac{K}{F_t}} \right) - I_0 \left( \ln \sqrt{\frac{K}{F_t}} \right)}{K \sqrt{K}} C(\tau, K) dK \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

と展開できることを示す。

### (1) 平方根の等価式

任意の正の実数  $q$  について、平方根の等価式

$$\sqrt{q} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-sq}}{s\sqrt{s}} ds, \quad (\text{A-11})$$

が成立する。

(証明)

ガンマ関数について、

$$\sqrt{\pi} = \Gamma \left( \frac{1}{2} \right) = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds.$$

部分積分により解くと

$$\sqrt{\pi} = \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-s})'}{\sqrt{s}} ds = \left[ \frac{1 - e^{-s}}{\sqrt{s}} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1 - e^{-s}}{2s^{\frac{3}{2}}} ds = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-s}}{2s^{\frac{3}{2}}} ds.$$

変数変換  $s = qt$  により、

$$\sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-qt}}{2(qt)^{\frac{3}{2}}} q dt = \frac{1}{2\sqrt{q}} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-qt}}{t^{\frac{3}{2}}} dt.$$

これより、(A-11) 式を得る。■

## (2) 期待分散の期待リターンへの変換 ( $\sigma$ と $W_t$ が独立であるケース)

満期  $T$  のフォワードレート  $F_t$  が拡散過程

$$\frac{dF_t}{F_t} = \sigma(t, \cdot) dW_t, \quad (\text{A-12})$$

に従うとする。 $F_t$  に関して、時刻  $t$  における時刻  $T$  までのリターンを  $X_T$ 、分散を  $\langle X \rangle_T$  と表す。すなわち、

$$X_T = \int_t^T \frac{dF_s}{F_s} = \ln \frac{F_T}{F_t}, \quad (\text{A-13})$$

$$\langle X \rangle_T = \int_t^T \left( \frac{dF_s}{F_s} \right)^2. \quad (\text{A-14})$$

さらに、任意の複素数  $\lambda$  と、 $\lambda$  の関数

$$p^{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 8\lambda} \right), \quad (\text{A-15})$$

を設定する。このとき、 $\sigma$  と  $W$  が独立との仮定のもとで、以下のように期待指数分散を期待指数リターンに変換できる。

$$\tilde{E}_t e^{-\lambda \langle X \rangle_T} = \tilde{E}_t e^{p^{\pm}(\lambda) X_T}. \quad (\text{A-16})$$

(証明)

確率変数  $x, y$  に関する  $C^{1,2}$  級の関数  $u(x, y)$  を考える。伊藤の定理より、 $u$  について、

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d[x, x] + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

また、 $X_t$  について、

$$dX_t = \frac{dF_t}{F_t} - \frac{1}{2}d\langle X \rangle_t,$$

である。 $x = X_t$ ,  $y = \langle X \rangle_t$  のとき、上式を用いると、

$$\begin{aligned} du(X_t, \langle X \rangle_t) &= \frac{\partial}{\partial x} u(X_t, \langle X \rangle_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(X_t, \langle X \rangle_t) d\langle X \rangle_t + \frac{\partial}{\partial y} u(X_t, \langle X \rangle_t) d\langle X \rangle_t \\ &= \frac{1}{F_t} \frac{\partial}{\partial x} u(X_t, \langle X \rangle_t) dF_t + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right\} u(X_t, \langle X \rangle_t) d\langle X \rangle_t, \end{aligned}$$

と展開できる。上式の  $\{ \}$  内がゼロである、すなわち、

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

のとき、 $u$  は  $T$ -フォワード測度下でマルチンゲールとなる。特に、適当なパラメータ  $p, \lambda$  のもとで、 $u(x, y) = e^{px + \lambda y}$  となるとき、上記の条件は、 $\frac{1}{2}p^2 + \lambda - \frac{1}{2}p = 0$ , となり、この解は、(A-15) 式に示した  $p^\pm(\lambda)$  である。 $p = p^\pm(\lambda)$  のとき、 $u = e^{p^\pm(\lambda)X + \lambda\langle X \rangle}$  はマルチンゲールであるから、 $X_t = \langle X \rangle_t = 0$  であることを踏まえると、

$$\tilde{E}_t e^{p^\pm(\lambda)X_T + \lambda\langle X \rangle_T} = e^{p^\pm(\lambda)X_t + \lambda\langle X \rangle_t} = 1.$$

ここで、 $\tilde{E}$  は、補論 1 節 (1) で定義した  $T$ -フォワード測度下の期待値である。 $\sigma$  と  $W$  が独立との仮定より、 $X$  と  $\langle X \rangle$  も独立であるから、(A-16) 式が成り立つ。■

### (3) ボラティリティの合成

(A-11) 式で  $q = \langle X \rangle_T$  とし、(A-16) 式を適用すると、 $\sigma$  と  $W$  が独立との仮定のもとで、資産価格の標準偏差の期待値を次のとおりリターンの期待値にて表現できる。

$$\tilde{E}_t \sqrt{\langle X \rangle_T} = \tilde{E}_t \left[ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{p(\lambda)X_T}}{\lambda\sqrt{\lambda}} d\lambda \right]. \quad (\text{A-17})$$

$\sum \theta^\pm = 1$  かつ  $\sum p^\pm \theta^\pm = 0$  である変数  $\theta^\pm$  を導入すると、上式は次のようにもかける。

$$\tilde{E}_t \sqrt{\langle X \rangle_T} = \tilde{E}_t \left[ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{\pm} \int_0^\infty \theta^\pm(\lambda) \frac{1 - e^{X_T p^\pm(\lambda)}}{\lambda\sqrt{\lambda}} d\lambda \right]. \quad (\text{A-18})$$

ただし、

$$\theta^\pm(\lambda) = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{1}{\sqrt{1-8\lambda}} \right). \quad (\text{A-19})$$

(証明)

(A-16) 式より  $\tilde{E}_t e^{p^-(\lambda)X_T} = \tilde{E}_t e^{p^+(\lambda)X_T}$  であるから、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t e^{-\lambda\langle X \rangle_T} &= \tilde{E}_t e^{p^+(\lambda)X_T} + \theta^-(\lambda) \left( \tilde{E}_t e^{p^-(\lambda)X_T} - \tilde{E}_t e^{p^+(\lambda)X_T} \right) \\ &= \tilde{E}_t \sum_{\pm} \theta^\pm(\lambda) e^{p^\pm(\lambda)X_T}, \end{aligned}$$

が成り立つ。(A-11) 式において  $q = \langle X \rangle_T$  とし、期待値をとり上式を適用すると、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t \sqrt{\langle X \rangle_T} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \tilde{E}_t \left[ \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda\langle X \rangle_T}}{\lambda\sqrt{\lambda}} d\lambda \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - \tilde{E}_t e^{-\lambda\langle X \rangle_T}}{\lambda\sqrt{\lambda}} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sum_{\pm} \theta^\pm(\lambda) - \tilde{E}_t \sum_{\pm} \theta^\pm(\lambda) e^{p^\pm(\lambda)X_T}}{\lambda\sqrt{\lambda}} d\lambda \quad \left( \because \sum_{\pm} \theta^\pm(\lambda) = 1 \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \tilde{E}_t \int_0^\infty \sum_{\pm} \theta^\pm(\lambda) \frac{1 - e^{p^\pm(\lambda)X_T}}{\lambda\sqrt{\lambda}} d\lambda, \end{aligned}$$

となり、(A-18) 式が成立する。なお、上記の第 2 式と第 4 式ではフビニの定理を適用している。同定理の成立根拠については、Carr and Lee [2007b] を参照。■

(A-17) 式および (A-18) 式は、 $\sigma$  と  $W$  が独立であるとの前提で導出した。ここでは、 $\sigma$  がブラウン運動  $W$  に依存して確率的に変化する場合でも、(A-17)、(A-18) 式がボラティリティを近似していることを示す。Carr and Lee [2007b] は、シミュレーションにより、(A-18) 式の方が、(A-17) 式より精度の高い近似となっていることを示した。ここでも、(A-18) 式を、MFIVol の近似合成式として計算を続ける。

#### (4) MFIVol の合成

上記の計算をもとに MFIVol を合成すると、(A-10) 式がデルタ・ニュートラルの下で成立する。

(証明)

はじめに、指数  $\alpha$  のペイオフ  $e^{\alpha X_T}$  の期待値を合成する。(A-6) 式において、 $f$  を冪関数  $f(x) = x^\alpha$  とすることで、

$$\tilde{E}_t F_T^\alpha = F_t^\alpha + \alpha(\alpha - 1) \int_0^{F_t} \tilde{P}(\tau, K) K^{\alpha-2} dK + \alpha(\alpha - 1) \int_{F_t}^\infty \tilde{C}(\tau, K) K^{\alpha-2} dK,$$

と展開できる。 $\alpha = p^\pm(\lambda)$  のとき  $\alpha(\alpha - 1) = -2\lambda$  であるから、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t e^{p^\pm(\lambda) X_T} &= \tilde{E}_t \left[ \left( \frac{F_T}{F_t} \right)^{p^\pm(\lambda)} \right] \\ &= 1 - 2\lambda \left[ \int_0^{F_t} \frac{\tilde{P}(\tau, K)}{K^2} \left( \frac{K}{F_t} \right)^{p^\pm(\lambda)} dK + \int_{F_t}^\infty \frac{\tilde{C}(\tau, K)}{K^2} \left( \frac{K}{F_t} \right)^{p^\pm(\lambda)} dK \right]. \end{aligned}$$

MFIVol は、この展開式を (A-18) 式に代入することで、

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{MFIVol}} &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \tilde{E}_t \sqrt{\langle X \rangle_T} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau\pi}} \sum_{\pm} \int_0^\infty d\lambda \frac{\theta^\pm(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left[ \int_0^{F_t} \frac{\tilde{P}(\tau, K)}{K^2} \left( \frac{K}{F_t} \right)^{p^\pm(\lambda)} dK \right. \\ &\quad \left. + \int_{F_t}^\infty \frac{\tilde{C}(\tau, K)}{K^2} \left( \frac{K}{F_t} \right)^{p^\pm(\lambda)} dK \right] \\ &= \int_0^{F_t} w(K) \tilde{P}(\tau, K) dK + \int_{F_t}^\infty w(K) \tilde{C}(\tau, K) dK, \end{aligned}$$

となり、プットとコールの和として表現できる。

ウェイト  $w(K)$  は、 $K \geq F_t$  のとき、 $k = \ln(K/F_t)$  とおくことで、

$$\begin{aligned} w(K) &= \frac{1}{K^2 \sqrt{\tau\pi}} \sum_{\pm} \int_0^\infty \frac{\theta^\pm(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{K}{F_t} \right)^{p^\pm(\lambda)} d\lambda \\ &= \frac{1}{K^2 \sqrt{\tau\pi}} \left( \frac{K}{F_t} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\pm} \int_0^\infty \frac{\theta^\pm(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{K}{F_t} \right)^{\pm \frac{\sqrt{1-8\lambda}}{2}} d\lambda \\ &= \frac{e^{\frac{k}{2}}}{F_t^2 e^{2k} \sqrt{\tau\pi}} \left\{ \int_0^\infty \frac{\cosh\left(k \frac{\sqrt{1-8\lambda}}{2}\right)}{\sqrt{\lambda}} d\lambda - \int_0^\infty \frac{\sinh\left(k \frac{\sqrt{1-8\lambda}}{2}\right)}{\sqrt{\lambda(1-8\lambda)}} d\lambda \right\} \\ &= \frac{e^{\frac{k}{2}}}{F_t^2 e^{2k} \sqrt{\tau\pi}} (M - N). \end{aligned}$$

$M$  は、 $u = \sqrt{1-8\lambda}$ ,  $v = \sqrt{8\lambda-1}$  の変数変換にて、

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty \frac{\cosh\left(k\frac{\sqrt{1-8\lambda}}{2}\right)}{\sqrt{\lambda}} d\lambda \\ &= \int_0^{1/8} \frac{\cosh\frac{k\sqrt{1-8\lambda}}{2}}{\sqrt{\lambda}} du + \int_{1/8}^\infty \frac{\cosh\left(i\frac{k\sqrt{8\lambda-1}}{2}\right)}{\sqrt{\lambda}} dv \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \frac{u \cosh\frac{ku}{2}}{\sqrt{1-u^2}} du + \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{v \cos\frac{kv}{2}}{\sqrt{1+v^2}} dv. \end{aligned}$$

ここで、 $-1$  次の修正シュトループ関数  $L_{-1}(z)$  と  $1$  次の第 1 種修正ベッセル関数  $I_1(z)$  の関係

$$\begin{aligned} L_{-1}(z) &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{u \cosh(uz)}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= I_1(z) - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} - 1 \right) \cos(uz) du, \end{aligned}$$

を用いると、

$$M = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} I_1\left(\frac{k}{2}\right) + \sqrt{2} \int_0^\infty \cos(ku) du,$$

となる。第 2 項はディラックのデルタ関数  $\delta(x)$  に比例する。なぜなら、

$$\int_{-\infty}^\infty dk \int_0^\infty du \cos(ku) = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ku)}{k} dk = \arctan k \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi,$$

であることから、任意の有界なテスト関数  $\phi(x); |\phi(x)| \leq M (\forall x)$  について、

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^\infty dk \phi(k) \int_0^\infty du \cos(ku) - \pi \phi(0) \right| \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^\infty \{\phi(k) - \phi(0)\} \frac{\sin(ku)}{k} dk \right|. \end{aligned}$$

$y = ku$ ,  $u = 1/\varepsilon$  の変換を行い、正の実数  $L > 0$  に関して積分区間を分割すると

$$\begin{aligned} \text{(上式)} &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-L} + \int_{-L}^L + \int_L^\infty \right] \left| (\phi(y\varepsilon) - \phi(0)) \frac{\sin(y)}{y} \right| dy \\ &\leq 2M(-2 \arctan L + \pi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-L}^L \left| \{\phi(y\varepsilon) - \phi(0)\} \frac{\sin(y)}{y} \right| dy. \end{aligned}$$

$L$  を十分大きくとると、第 1 項はゼロに近似される。この十分大きな  $L$  を固定し

て、 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとることで、

$$\begin{aligned}
 (\text{上式}) &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{-L \leq y \leq L} |\phi(y\varepsilon) - \phi(0)| \int_{-L}^L \frac{\sin(y)}{y} dy \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{-L \leq y \leq L} |\phi(y\varepsilon) - \phi(0)| 2 \arctan L \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

よって、

$$\int_0^\infty \cos(ku) du = \pi \delta(k),$$

と表せる。従って、 $M$  は、

$$M = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} I_1\left(\frac{k}{2}\right) + \sqrt{2}\pi \delta(k).$$

同様に  $N$  についても、0 次の修正シュトループ関数  $L_0(z)$  と第 1 種修正ベッセル関数  $I_0(z)$  の関係

$$\begin{aligned}
 L_0(z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sinh(uz)}{\sqrt{1-u^2}} du \\
 &= I_0(z) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(uz)}{\sqrt{1+u^2}} du, \quad (z \neq 0)
 \end{aligned}$$

であるから、 $k \neq 0$  のとき

$$\begin{aligned}
 N &= \int_0^\infty \frac{\sinh\left(k \frac{\sqrt{1-8\lambda}}{2}\right)}{\sqrt{\lambda(1-8\lambda)}} d\lambda \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{\sinh \frac{ku}{2}}{\sqrt{1-u^2}} du + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{kv}{2}}{\sqrt{1+v^2}} dv \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} I_0\left(\frac{k}{2}\right), \quad (k \neq 0)
 \end{aligned}$$

となる。 $k = 0$  のときは  $\sinh 0 = 0$  より  $N = 0$ 。

従ってウェイト  $w(K)$  は、 $k \geq 0$  のとき、

$$w(K) = \frac{1}{K^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\tau} e^{\frac{k}{2}} \left\{ 4\delta(k) + I_1\left(\frac{k}{2}\right) - I_0\left(\frac{k}{2}\right) \mathbf{1}(k \neq 0) \right\}, \quad (k \geq 0)$$

$k < 0$  のときも同様に求められ、まとめると、

$$w(K) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{8\tau K^3 F_t}} \left\{ I_1 \left( \ln \sqrt{\frac{K}{F_t}} \right) - I_0 \left( \ln \sqrt{\frac{K}{F_t}} \right) \right\}, & (K > F_t) \\ \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} \frac{1}{K^2} \delta(k), & (K = F_t) \\ \sqrt{\frac{\pi}{8\tau K^3 F_t}} \left\{ I_0 \left( \ln \sqrt{\frac{K}{F_t}} \right) - I_1 \left( \ln \sqrt{\frac{K}{F_t}} \right) \right\}. & (K < F_t) \end{cases}$$

特に  $K = F_t$  ( $k = 0$ ) のとき、 $dk = dK/K$  であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{MFIVol}} \Big|_{K=F_t} &= \int_0^{F_t} K^2 w(K) \frac{\tilde{P}(\tau, K)}{K} \frac{dK}{K} + \int_{F_t}^{\infty} K^2 w(K) \frac{\tilde{C}(\tau, K)}{K} \frac{dK}{K} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} \left\{ \int_{-\infty}^0 dk \delta(k) \frac{\tilde{C}(\tau, F_t e^k) - F_t + F_t e^k}{F_t e^k} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} dk \delta(k) \frac{\tilde{C}(\tau, F_t e^k)}{F_t e^k} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dk \delta(k) \frac{\tilde{C}(\tau, F_t e^k)}{F_t e^k} + \int_{-\infty}^0 dk \delta(k) (1 - e^{-k}) \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} \left\{ \frac{\tilde{C}(\tau, F_t)}{F_t} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \delta(k) (1 - e^{|k|}) \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2\tau}} \frac{P(\tau, F_t) + C(\tau, F_t)}{F_t B(t, T)}, \\ &\quad \left( \because \tilde{C}(\tau, F_t) = \frac{C(\tau, F_t)}{B(t, T)} = \frac{C(\tau, F_t) + P(\tau, F_t)}{2B(t, T)} \right). \end{aligned}$$

以上より、(A-10) 式が成立する。■

### 補論3 . ボラティリティ・デリバティブ

将来の期待価格変動そのものをデリバティブとして売買する商品が、ボラティリティ・デリバティブである。ボラティリティ・デリバティブには、ボラティリティ・スワップ、バリエーション・スワップ、ボラティリティ・オプションなどがある。その中で、最もシンプルかつ代表的な商品であるバリエーション・スワップとボラティリティ・スワップについて簡単に解説する。

ボラティリティ・スワップとは、2者の取引主体間で、将来の特定時  $T$  (満期) に契約時  $t$  から  $T$  までのヒストリカル・ボラティリティ (HV) と契約時に定められた一定値 (ボラティリティ・スワップ・レート) を交換する取引である。バリエーション・スワップは、同形態の取引で、交換対象がボラティリティではなくボラティリティの二乗 (バリエーション) となったものである。HV 算出の前提となるリターンの算出間隔は、取引主体が自由に設定できる。また、ある一定の大きさを超えたりターンを除いて算出した HV を交換対象とするコリドー型スワップも存在する<sup>27</sup>。

ボラティリティ・デリバティブを用いると、ボラティリティの買い手は、あらかじめ定められたレートでボラティリティを購入できるため価格変動リスクを事前に固定できる。一方、売り手は、ボラティリティ・スワップレートと HV の差が損益となる。

以下では、ボラティリティおよびバリエーション・スワップレートの定義を概説し、両者をオプションでスタティック・ヘッジする手法を概説する。なお、簡単化のため、HV に係るリターンの算出間隔が連続であるとして考察する。

#### (1) ボラティリティ / バリエーション・スワップ・レートの定義

時刻  $t$  における満期  $T (> 0)$  までのボラティリティ・スワップ・レートを  $V_{\text{VOS}}(t, T)$  とかくとき、ボラティリティの買い手のポジションの現在価値は、

$$B(t, T)E^Q \left[ \sqrt{\langle S \rangle_{t, T}} - V_{\text{VOS}}(t, T) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (\text{A-20})$$

一方、ボラティリティの売り手のポジションの現在価値は、(A-20) 式に  $-1$  を乗じた値となる。売り手と買い手の現在価値が一致する、すなわち、(A-20) 式がゼロとな

<sup>27</sup> コリドー・バリエーション・スワップについては、Carr and Lewis [2004] に詳しい。

るように  $V_{\text{VOS}}(t, T)$  を決めると、

$$V_{\text{VOS}}(t, T) = E^Q \left[ \sqrt{\langle S \rangle_{t, T}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \sigma_{\text{MFIVol}}(t, T), \quad (\text{A-21})$$

となり、ボラティリティ・スワップ・レートは MFIVol と一致する。バリエンス・スワップ・レート  $V_{\text{VAS}}(t, T)$  も同様に、

$$V_{\text{VAS}}(t, T) = E^Q [\langle S \rangle_{t, T} | \mathcal{F}_t] = \sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, T), \quad (\text{A-22})$$

となり、MFIVar の二乗値と一致する。

## (2) ボラティリティ・デリバティブのスタティック・ヘッジ

ボラティリティ・デリバティブ市場が成長するには、既存の他の金融商品からフェアバリューを算出できることが重要である。これは同時に、ボラティリティの売り手が自己のポジションをヘッジできること、すなわち、他の商品で合成できることを意味する。MFIV の合成近似を示す (5)、(6) 式に立ち戻ると、いずれも、オプションの線形和で離散近似することが可能である。すなわち、理論上はバリエンス・スワップ、ボラティリティ・スワップとも複数のオプションのバスケットにて合成可能である。また、こうしたヘッジはスワップの開始時にのみ 1 回だけ行えばよく、ダイナミック・ヘッジの必要がない。具体的には、以下のとおり行えばよい。

**バリエンス・スワップのヘッジ** バリエンス・スワップをヘッジする場合は、市場で取引可能な限りの権利行使価格に対する OTM コール・オプションと OTM プット・オプションをある分量ずつ購入すればよい。(5) 式は、

$$\sigma_{\text{MFIVar}}^2(\tau) \simeq \sum_{i: K_i \leq F(\tau)} w_i^P P(\tau, K_i) + \sum_{i: K_i > F(\tau)} w_i^C C(\tau, K_i). \quad (\text{A-23})$$

ただし、

$$w_i^C = w_i^P = \left[ \frac{2e^{r(\tau)\tau} \Delta K}{\tau K_i^2} \right], \quad (\text{A-24})$$

のように離散近似できる。ここで、 $[a]$  は  $a$  に最も近い整数値、 $\Delta K$  はオプション市場で取引可能な権利行使価格の間隔（一般にオプション市場では  $\Delta K$  は一定）を示

す。すなわち、 $w_i^C, w_i^P$  だけコールとプットを購入することで、バリエーション・スワップが合成可能である。離散近似に伴い、当然ヘッジ誤差が生じるため、何らかの調整が必要である。特に、近似に最も影響するフォワード ATM 付近は、コールとプットの価格をともに用いて、以下のように配分すると精度が向上する。

$$\begin{cases} w_{ATM}^P = \frac{e^{r(\tau)\tau}(F_t - K_i)}{\tau F_t^2}, \\ w_{ATM}^C = \frac{e^{r(\tau)\tau}(K_{i+1} - F_t)}{\tau F_t^2}. \end{cases} \quad (\text{A-25})$$

ただし、 $F_t \in [K_i, K_{i+1})$  である。

フォワード ATM が市場で取引可能な権利行使価格から大きく外れる場合には、以下の式を用いて、現物、キャッシュを加えてヘッジする手法も有効である。すなわち、(5) 式にプット / コール・パリテイ  $C(\tau, K) = P(\tau, K) + Se^{-\delta\tau} - Ke^{-r\tau}$  を適用すると、適当な正数  $x$  を用いて、

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{MFIVar}}^2(t, T) \simeq \frac{2}{\tau B(t, T)} & \left[ \int_0^x \frac{P(\tau, K)}{K^2} dK + \int_x^\infty \frac{C(\tau, K)}{K^2} dK \right] \\ & + \frac{2}{\tau} \left( 1 - \frac{F_t}{x} + \ln \frac{F_t}{x} \right), \end{aligned} \quad (\text{A-26})$$

と表せる。 $x$  を市場で取引されている権利行使価格に一致させれば、ヘッジ精度が向上する。このとき、オプションのほかに、別途先物とキャッシュを保有する必要がある。また (A-26) 式の第 2 項の対数部分を直接組成することはできないので、テイラー展開等を施し近似する必要もある。

ボラティリティ・スワップのスタティック・ヘッジ MFIVol の合成近似を示す (6) 式を離散近似すると、ボラティリティ・スワップレートは、次のとおりコール / プット・オプションの線形式となる。

$$\sigma_{\text{MFIVol}} \simeq \tilde{w}^S [P(\tau, F(t, T)) + C(\tau, F(t, T))] + \sum_{i: K_i < F(\tau)} \tilde{w}_i^P P(\tau, K_i) + \sum_{i: K_i > F(\tau)} \tilde{w}_i^C C(\tau, K_i). \quad (\text{A-27})$$

ただし、

$$\begin{cases} \tilde{w}^S = \left[ \frac{1}{F(t,T)} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau}} \right], \\ \tilde{w}_i^P = \left[ \sqrt{\frac{\pi}{8\tau K_i^3 F(t,T)}} \left[ I_0 \left( \ln \sqrt{\frac{K_i}{F(t,T)}} \right) - I_1 \left( \ln \sqrt{\frac{K_i}{F(t,T)}} \right) \right] \Delta K \right], \\ \tilde{w}_i^C = \left[ \sqrt{\frac{\pi}{8\tau K_i^3 F(t,T)}} \left[ I_1 \left( \ln \sqrt{\frac{K_i}{F(t,T)}} \right) - I_0 \left( \ln \sqrt{\frac{K_i}{F(t,T)}} \right) \right] \Delta K \right]. \end{cases} \quad (\text{A-28})$$

すなわち、オプションからなるポートフォリオ

$$\begin{cases} \tilde{w}^S \text{の ATM コールとプット (= ATM ストラドル)} \\ \tilde{w}_i^P \text{のプット} \quad (K < F(t,T)) \\ \tilde{w}_i^C \text{のコール} \quad (K > F(t,T)) \end{cases} \quad (\text{A-29})$$

によって、ボラティリティ・スワップを合成できることが分かる。

なお、通常  $w^P, w^C$  は小さいことから、 $w^S$  で示されたストラドルの量がヘッジ精度に大きく影響する。市場で取引可能な権利行使価格と原資産先物価格の水準が大きく乖離する場合には、権利行使価格がフォワード ATM となるようなストラドルを店頭市場などにおいて組成する必要がある。

## 参考文献

- Andrews, D.W.K., “Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation,” *Econometrica*, 59(3), pp. 817–858, 1991.
- Bollerslev, T. and H. Zhou, “Expected Stock Returns and Variance Risk Premia,” *Finance and Economics Discussion Series, Division of Research and Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board, Washington D.C.*, 11, 2007.
- Britten-Jones, M. and A. Neuberger, “Option Prices, Implied Price Processes and Stochastic Volatility,” *Journal of Finance*, 55, pp. 839–866, 2000.
- Campa, J.M and P.H.K. Chang, “Testing the Expectations Hypothesis on the Term Structure of Volatility in Foreign Exchange Options,” *Journal of Finance*, 50(2), pp. 529–547, 1995.
- Carr, P. and R. Lee, “Realized Volatility and Variance: Options via Swaps,” *Journal of Risk*, pp. 76–83, 2007a.
- “Robust Replication of Volatility Derivatives,” *Discussion Paper, Bloomberg LP and University of Chicago*, 2007b.
- Carr, P. and K. Lewis, “Corridor Variance Swaps,” *Risk*, 17(2), pp. 67–72, 2004.
- Carr, P. and L. Wu, “Variance Risk Premiums,” *Review of Financial Studies*, 22(3), pp. 1311–1341, 2007.
- CBOE, *The CBOE Volatility Index - VIX*, Chicago Board Options Exchange, 2009.
- Demeterfi, K., E. Derman, M. Kamal, and J. Zou, “More Than You Ever Wanted To Know About Volatility Swaps,” *Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs*, March, 1999.
- Dupire, B., “Arbitrage Pricing with Stochastic Volatility,” *Societe Generale*, 1992.
- Fitz, P. and J. Gatheral, “Valuation of Volatility Derivatives as an Inverse Problem,” *Quantitative Finance*, 5, pp. 531–542, 2005.

- Gatheral, J., “Further Development in Volatility Derivatives Modeling,” *Briefing Paper, Quant Congress USA 2008*, 2008.
- Hansen, P.R. and A. Lunde, *Realized Variance and IID Market Microstructure Noise*, Brown University, Department of Economics, 2004.
- Heston, S., “A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options,” *The Review of Financial Studies*, 6, pp. 327–343, 1993.
- Jiang, G.J. and Y.S. Tian, “The Model-Free Implied Volatility and Its Information Content,” *Review of Financial Studies*, 18, pp. 1305–1342, 2005.
- “Extracting Model-Free Volatility from Option Prices: An Examination of the VIX Index,” *Journal of Derivatives*, Spring, pp. 35–60, 2007.
- Litterman, R. and J. Scheinkman, “Common Factors Affecting Bond Returns,” *Journal of Fixed Income*, 1(1), pp. 54–61, 1991.
- Maghrebi, N., “An Introduction to the Nikkei 225 Implied Volatility Index,” *Kinzai Riron, Wakayama Economic Review*, 336, pp. 35–55, 2007.
- Mixon, S., “The Implied Volatility Term Structure of Stock Index Options,” *Journal of Empirical Finance*, 14, pp. 333–354, 2007.
- Neuberger, A., “Volatility Trading,” *Working Paper, London Business School*, 1990.
- Newey, W.K. and K.W. West, “A Simple Positive Semi-Definite Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix,” *Econometrica*, 55, pp. 703–708, 1987.
- Nishina, K., N. Maghrebi, and M. Kim, “Stock Market Volatility and the Forecasting Accuracy of Implied Volatility Indices,” *Discussion Papers in Economics and Business, Graduate School of Economics and Osaka School of International Public Policy*, No.06-09, 2006.

山口圭子、「日経 225 株価指数のモデル・フリー・インプライド・ボラティリティの  
計算方法に関して：ボラティリティ予測力の観点から」、『一橋経済学』、第 3 巻、  
29-43 頁、2008 年。