

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

日本の株式市場におけるボラティリティの  
長期記憶性とオプション価格

たけうち あすか わたなべ としあき  
竹内 明香・渡部 敏明

Discussion Paper No. 2008-J-5

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

**備考：** 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

## 日本の株式市場におけるボラティリティの 長期記憶性とオプション価格

たけうち あすか わたなべ としあき  
竹内 明香\*・渡部 敏明\*\*

### 要 旨

近年、資産価格のボラティリティには長期記憶性があるとの指摘が数多くなされている。そこで本稿では、日経 225 株価指数のボラティリティに長期記憶性があるかどうか、また、ボラティリティの長期記憶性を考慮することで日経 225 オプションの価格をより正確に捉えることができるかどうか分析を行った。さらに株式市場では、価格が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティは上昇する傾向があることが知られているため、ボラティリティの長期記憶性に加え、そうした非対称性も考慮できる FIEGARCH モデルを用いて分析を行った。異なる 78 の期間で擬似尤度に基づく LM 検定を行った結果、多くの期間でボラティリティの長期記憶性と非対称性が検出された。また、FIEGARCH モデルを用いることで実際のオプション価格をより正確に捉えられることも明らかになった。

キーワード：オプション、長期記憶性、非対称性、ボラティリティ、  
FIEGARCH、LM 検定

JEL classification: C22、C52、C53、G13

\* 日本銀行金融研究所 (E-mail: asuka.takeuchi@boj.or.jp)

\*\* 一橋大学経済研究所教授、日本銀行金融研究所 (E-mail: watanabe@ier.hit-u.ac.jp)

本稿の作成に当たっては、大森裕浩氏ならびに大屋幸輔氏、新谷元嗣氏から貴重なコメントを頂いた。また、2007 年度統計関連学会連合大会 (神戸大学) 参加者、金融研究所ファイナンス研究担当スタッフからも有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りは、すべて筆者たち個人に属する。本稿は一橋大学経済研究所 21 世紀 COE プログラム「社会科学の統計分析拠点構築」および筆者の渡部が代表を務める科学研究費補助金特別研究促進費「高頻度データを用いた日本の証券市場の計量分析」より助成を受け購入したデータを使用している。

## 1. はじめに

資産価格変化率ないしは収益率（以下、リターンと呼ぶ）の標準偏差を表すボラティリティは、オプション価格を決める重要な変数である。オプション価格の計算に通常用いられる Black and Scholes [1973] モデル（以下、BS モデルと呼ぶ）では、ボラティリティは時間を通じて一定であると仮定されるが、近年、ボラティリティは確率的に変動するという考えが主流になっており、その変動を表すさまざまなモデルが提案されている。ボラティリティの変動特性としてよく知られているのは、ボラティリティが上昇（下落）すると、しばらくボラティリティの高い（低い）期間が続くということである。この現象はボラティリティ・クラスタリングと呼ばれ、あらゆる資産価格で観測される。こうした現象を捉えるため、Engle [1982] が ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) モデル、Bollerslev [1986] が GARCH (generalized ARCH) モデルを提案した。これらのモデルでは、ボラティリティに定常性を仮定すると、ボラティリティは短期記憶（short memory）過程に従い、ボラティリティのショックは時間と共に指数的に減衰する。ところが、近年、多くの論文で、ボラティリティのショックの減衰のスピードはそれより遅いことが指摘されている（白石・高山 [1998]、渡部・佐々木 [2006]、渡部 [2007] 参照）。そこで、その後、ボラティリティの長期記憶（long memory）性を考慮したモデルが提案された。

本稿は、日経 225 株価指数のボラティリティに長期記憶性があるかどうかを分析するとともに、ボラティリティ変動の長期記憶性を考慮することにより、日経 225 オプションの実際の価格変動をより正確に捉えられることができるかどうか分析を行ったものである。ボラティリティ変動の長期記憶性を考慮したモデルとして、本稿では、Bollerslev and Mikkelsen [1996] によって提案された FIEGARCH (fractionally integrated exponential GARCH) モデルを用いている。また株式市場では、株価が下がった日の翌日と上がった日の翌日を比べると、前者の方がボラティリティはより高まる傾向があることが知られており、そうしたボラティリティ変動の非対称性を考慮したモデルに、Nelson [1991] によって提案された EGARCH モデルがある。FIEGARCH モデルはこのモデルをボラティリティの長期記憶性を考慮して拡張したもので、ボラティリティの長期記憶性に加え、前日に株価が下がったか上がったかによるボラティリティ変動の非対称性も捉えることができる。

FIEGARCH モデルをオプション価格に応用した研究に、Bollerslev and Mikkelsen [1999] がある。彼らは、LEAPS (long-term equity anticipation securities) と呼ばれる S&P500 を原資産とする長期（平均の残存期間が 489 日）のオプションの価格について分析し、FIEGARCH モデルのパフォーマンスが高いことを示している。日経 225 オプションの場合、残存期間は最長

で15ヶ月のものが取引されているが、長期のオプションは取引が少ないので、本稿では、比較的流動性の高い残存期間が1ヶ月のオプションに限定して分析を行っている。日本の株式市場では、渡部・佐々木 [2006] が FIEGARCH モデルを用いてバリュー・アット・リスク (VaR) の予測を行い、パフォーマンスの高さを示しているが、FIEGARCH モデルをオプション価格に応用したのは本稿が初めてである。三井・渡部 [2003]、渡部 [2003]、竹内 [2006] がさまざまな ARCH 型モデルを用いて日経 225 オプションの理論価格を計算し市場価格との比較を行っているが、いずれも FIEGARCH モデルについては分析していない。

本稿では、FIEGARCH モデルとの比較のため、ボラティリティの短期記憶モデルである EGARCH モデルや GARCH モデルも用いている (以下、これらのモデルをまとめて、GARCH 型モデルと呼ぶ)。まず、これらのモデルを異なる 78 の期間 (各期間は、2001 年 4 月から 2007 年 9 月までの各月の日経 225 オプションの満期から 1ヶ月前の前日を終点とし、そこから 1500 日前を始点としている) で擬似最尤推定した。ここでいう擬似最尤推定とは、誤差項の分布が正規分布と異なるときに、それを正規分布であると仮定して計算した尤度 (擬似尤度) を最大化するパラメータの値を推定値とする方法である。その上で、擬似尤度を用いたラグランジュ乗数 (lagrange multiplier; LM) 検定により、ボラティリティに長期記憶性があるかどうかの検定を行った。この場合の LM 検定統計量の漸近分布は理論的に明らかになっていないので (GARCH モデルの擬似最尤推定量の漸近分布については、Straumann [2005] を参照されたい)、本稿では LM 統計量の臨界値をシミュレーションにより導出し検定を行っている。その結果、多くの期間でボラティリティの長期記憶性が検出された。また、既に述べたように、株式市場では株価が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日のほうがボラティリティはより上昇する傾向があることが知られており、FIEGARCH モデルや EGARCH モデルはこうしたボラティリティ変動の非対称性を捉えることができる。そこで、日経 225 株価指数のボラティリティにこうした非対称性が観測されるかどうかについても LM 検定を用いて検定を行った。その結果、ほとんどの期間で有意な非対称性が検出された。

次に、上記のすべての GARCH 型モデルと BS モデルを用いて満期から 1ヶ月前の日のオプションの理論価格を導出し、どのモデルの理論価格が日経 225 オプションの市場価格に最も近い比較を行った。原資産価格のボラティリティが GARCH 型モデルに従って変動する場合のオプション価格を導出する方法に、Duan [1995] が提案した局所危険中立評価関係 (local risk neutral valuation relationship; LRNVR) に基づく方法がある。この方法は投資家の危険中立性を仮定しないという意味でより一般的な方法であるが、渡部 [2003]、三井・渡部 [2003]、竹内 [2006] では、日経 225 株価指数には有意なリスクプレミアムが観測されないため、この方法は危険中立性を仮定することと差がないとの結果が得られている。そこで、本稿の分析の多く

は投資家の危険中立性を仮定して分析を行い、最後に Duan [1995] の方法を用いて結果の比較を行っている。その結果、FIEGARCH モデルのパフォーマンスが高いこと、また Duan [1995] の方法を用いてもパフォーマンスは改善されないことが明らかになった。

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 節で長期記憶性について説明した後、ボラティリティの長期記憶モデルである FIEGARCH モデルを中心に本稿の分析に用いている GARCH 型モデルについて説明する。第 3 節では分析に用いたデータについて説明する。第 4 節では各 GARCH 型モデルを推定し、ボラティリティの長期記憶性と非対称性について検定を行う。第 5 節では、オプション価格を用いて各モデルの比較を行う。最後に第 6 節で本稿の分析結果をまとめ、今後の課題を述べる。

## 2. モデル

### 2.1. 長期記憶性と ARFIMA モデル

ある変数  $x_t$  が (弱) 定常である場合<sup>1</sup>、自己共分散  $\varphi(j) = Cov(x_t, x_{t+j})$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) が有限になる。そこで、短期記憶性と長期記憶性は、 $\varphi(j)$  を使って以下のように定義される。まず、自己共分散  $\varphi(j)$  が以下の 2 つの条件を満たす時、 $x_t$  は短期記憶過程に従うという。

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(j)| < \infty \quad (1)$$

$$\varphi(j) = O(\alpha^j) \quad \text{as } j \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2)$$

(1) 式は自己共分散の絶対値の和が有限であることを表している。また、(2) 式は、 $\varphi(j)/\alpha^j$  が、 $j \rightarrow \infty$  とした時に、0 でない有限の値に収束する  $0 < \alpha < 1$  が存在することを意味する。言い換えると、(2) 式は、次数  $j$  が十分大きい場合、 $j$  が増えると、自己共分散が  $\alpha^j$  のスピードで指数的に減衰することを表している。通常の定常な ARMA (autoregressive moving average) モデルは短期記憶過程である。

次に、 $\varphi(j)$  が以下の 2 つの条件を満たす時、 $x_t$  は長期記憶過程に従うという。

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(j)| = \infty \quad (3)$$

<sup>1</sup> $x_t$  が以下の 3 つの仮定を満たすとき、(弱) 定常であるという。

(a)  $E(x_t) = \mu < \infty$

(b)  $Var(x_t) = \sigma^2 < \infty$

(c)  $Cov(x_t, x_{t+j}) = \varphi(j) < \infty, \quad j = 1, 2, \dots$

ここで、(a)、(b) はそれぞれ  $x_t$  の期待値  $E(x_t)$  と分散  $Var(x_t)$  が有限で時間を通じて一定であることを表している。また、(c) の  $\varphi(j)$  は時間間隔  $j$  だけに依存する関数を表す。したがって、(c) は自己共分散  $Cov(x_t, x_{t+j})$  が有限で、かつ  $j$  のみに依存し、 $t$  や  $t+j$  そのものには依存しないことを意味する。

$$\varphi(j) = O(j^{2d-1}) \quad \text{as } j \rightarrow \infty, \quad d < 0.5 \quad (4)$$

(3) 式は自己共分散の絶対値の和が発散することを表している。また、(4) 式の  $O(j^{2d-1})$  は  $\varphi(j)/j^{2d-1}$  が、 $j \rightarrow \infty$  とした時に、0 でない有限の値に収束する  $d < 0.5$  が存在することを意味する。言い換えると、次数  $j$  が十分大きい場合、 $j$  が増えると、自己共分散が  $j^{2d-1}$  のスピードで幾何級数的に減衰することを表している。したがって、長期記憶過程に従う変数は短期記憶過程に従う変数より自己共分散の減衰のスピードが遅い。

さらに、 $\varphi(j)$  が以下の 2 つの条件を満たす時、 $x_t$  は中期記憶 (intermediate memory) 過程に従うという。

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(j)| < \infty \quad (5)$$

$$\varphi(j) = O(j^{2d-1}) \quad \text{as } j \rightarrow \infty, \quad d < 0.5 \quad (6)$$

中期記憶過程に従う変数は、(5) 式より自己共分散の絶対値の和は有限であるが、(6) 式より、長期記憶過程同様、自己共分散は幾何級数的にゆっくりと減衰する。

長期記憶過程の代表的なモデルが、ARFIMA (autoregressive fractionally integrated moving average) モデルである。一般的な ARFIMA( $p, d, q$ ) モデルは以下の式で表される。

$$\Phi(L)(1-L)^d(x_t - \mu) = \Theta(L)u_t, \quad u_t \sim WN(0, \sigma_u^2) \quad (7)$$

ここで、 $u_t$  は誤差項で、ホワイト・ノイズ  $WN(0, \sigma_u^2)$  であると仮定する<sup>2</sup>。 $L$  はラグ・オペレータを表す。ラグ・オペレータとは、ある変数の期を 1 期前に戻す演算子のことで、 $Lx_t = x_{t-1}$  である。また、 $L^i x_t = x_{t-i}$  である。 $\Phi(L)$ 、 $\Theta(L)$  はラグ多項式

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p \quad (8)$$

$$\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q \quad (9)$$

で、これらは定常性の条件 ( $\Phi(L) = 0$  のすべての根の絶対値が 1 を越える) と反転可能性の条件 ( $\Theta(L) = 0$  のすべての根の絶対値が 1 を越える) を満たすものとする。また、 $(1-L)^d$  は、 $L = 0$  でテーラー展開すると、以下のように表すことができる。

$$(1-L)^d = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)}{k} (-L)^k \quad (10)$$

<sup>2</sup> $u_t$  が以下の 3 つの仮定を満たすとき、ホワイト・ノイズであるという。

- (a)  $E(u_t) = 0$
- (b)  $Var(u_t) = \sigma_u^2 < \infty$
- (c)  $Cov(u_t, u_{t+j}) = 0, \quad j = 0, 1, \dots$

(7) 式は、 $d = 0$  であれば、定常な ARMA( $p, q$ ) モデル

$$\Phi(L)(x_t - \mu) = \Theta(L)u_t, \quad (11)$$

になり、 $d = 1$  であれば、単位根を持ち非定常な ARIMA( $p, 1, q$ ) モデル

$$\Phi(L)(1 - L)x_t = \Theta(L)u_t, \quad (12)$$

になる。ARFIMA モデルでは  $d$  の値としてその他の実数値も考える。 $-0.5 < d < 0.5$  であれば、 $x_t$  は定常になる。 $0 < d < 0.5$  の場合は、自己共分散が (3)、(4) 式を満たすので、定常な長期記憶過程に従う。 $0.5 \leq d < 1$  の場合は非定常になり、自己共分散は定義できないが、その場合、通常、非定常な長期記憶過程に従うという。また、 $-0.5 < d < 0$  の場合は、自己共分散が (5)、(6) 式を満たすので、中期記憶過程になる。長期記憶過程や ARFIMA モデルについて、詳しくは、稲田 [2006]、田中 [2006]、矢島 [2003]、Beran [1994] を参照されたい。

近年、資産価格のボラティリティが長期記憶過程に従うとの結果が多くの研究で得られている。そこで、本稿では、以下、ボラティリティの長期記憶性について分析を行う。

## 2.2. リターンの定式化

ボラティリティの定式化の前に、リターンの定式化を行う。以下、第  $t$  日の原資産価格を  $S_t$  と表すと、連続複利計算による日次リターンは以下の式で計算される。

$$R_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) + div \quad (13)$$

ここで、 $div$  は連続複利計算された日次配当率を表す。 $div$  は時間  $t$  に依存するが、本稿では、一定であるものとして分析を行っている（詳細は第 3 節参照）。

この日次リターンを以下のように定式化する。

$$R_t = E(R_t | \mathbf{I}_{t-1}) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim NID(0, 1) \quad (14)$$

ここで、 $E(R_t | \mathbf{I}_{t-1})$  は  $t-1$  日の情報  $\mathbf{I}_{t-1}$  に基づく  $t$  日のリターンの条件付期待値を表し、以下、期待リターンと呼ぶ。また、 $\epsilon_t$  は  $R_t$  の予期されない変動を表し、以下では誤差項と呼ぶ。 $\sigma_t^2$  は  $t-1$  日の情報に基づく  $t$  日のリターンの条件付分散  $Var(R_t | \mathbf{I}_{t-1})$  で、この平方根すなわち条件付標準偏差  $\sigma_t$  をボラティリティと呼ぶ。誤差項  $\epsilon_t$  をボラティリティ  $\sigma_t$  で割って分散 1 に基準化した  $z_t$  を、以下、基準化した誤差項と呼ぶ。本稿では、 $z_t$  の分布には過去と独立な標準正規分布  $NID(0, 1)$  を仮定する。実際には、 $z_t$  の分布は正規分布よりも裾の厚い分布に従っ



ていることが知られているが (渡部 [2000] 2.4.2 節)、例えば  $z_t$  の分布を  $t$  分布にすると、以下の (15)、(16) 式の  $\frac{1}{2}\sigma_t^2$  に相当する項が解析的に求まらないことと、 $z_t$  の分布を  $t$  分布にしてオプション価格を計算してもそれほど差がないという結果が渡部 [2003]、竹内 [2006] で示されていることから、本稿では、標準正規分布を仮定して分析を行った。

本稿では、主に投資家の危険中立性を仮定して分析を行っている。その場合の期待リターンは以下のように表せる<sup>3</sup>。

$$E(R_t|I_{t-1}) = r_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \quad (15)$$

ここで、 $r_t$  は連続複利計算された安全資産の金利の日次の値を表す。

Duan [1995] は投資家の危険中立性を仮定しないで GARCH 型モデルの下でオプション価格を導出する方法を提案している。そこでは、 $\sigma_t$  に依存したリスクプレミアムの項を加えて期待リターンを以下のように定式化している。

$$E(R_t|I_{t-1}) = r_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \lambda\sigma_t \quad (16)$$

そこで、第 5.2 節において、(16) 式を用いた分析も行っている。

### 2.3. ボラティリティの定式化

ボラティリティの長期記憶性を捉えるために、本稿では、FIEGARCH モデルを用いる。具体的には、以下の FIEGARCH(1,  $d$ , 0) モデルを用いている<sup>4</sup>。

$$(1 - \phi L)(1 - L)^d \{\ln(\sigma_t^2) - \mu\} = g(z_{t-1}), \quad |\phi| < 1 \quad (17)$$

$$g(z_{t-1}) = \delta z_{t-1} + \gamma \{|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)\} \quad (18)$$

<sup>3</sup>投資家が危険中立的であれば、

$$E(\exp(R_t)|I_{t-1}) = \exp(r_t)$$

が成り立つ。 $x_t$  が正規分布に従う場合、

$$E(\exp(x_t)) = \exp\left(E(x_t) + \frac{1}{2}\text{Var}(x_t)\right)$$

となるので (証明は、渡部・佐々木 [2006] の脚注 30 を参照)、(14) 式より、

$$E(\exp(R_t)|I_{t-1}) = \exp\left(E(R_t|I_{t-1}) + \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)$$

となる。したがって、(15) 式が成り立つ。

<sup>4</sup>一般的な FIEGARCH( $p, d, q$ ) モデルは、以下のように表される。

$$\Phi(L)(1 - L)^d \{\ln(\sigma_t^2) - \mu\} = \Theta(L)g(z_{t-1})$$

ここで、 $\Phi(L)$ 、 $\Theta(L)$  は、それぞれ、(8)、(9) 式で定義されるラグ多項式である。

これは、ARFIMA( $p, d, q$ ) モデル (7) 式において、 $x_t = \ln(\sigma_t^2)$ 、 $u_t = g(z_{t-1})$ 、 $p = 1$ 、 $q = 0$  としたものである。より厳密な分析を行うためには、次数  $p$ 、 $q$  も選択すべきであるが、EGARCH モデルでは EGARCH(1,0) モデルが最もよく使われるので、本稿では FIEGARCH モデルでも  $p = 1$ 、 $q = 0$  とした FIEGARCH(1,  $d$ , 0) モデルを用いた。

GARCH 型モデルでは、 $t$  期のボラティリティを  $t - 1$  期に値が既知の変数のみの確定的な関数として定式化する (詳しくは、渡部 [2000] 参照)。そこで、ARFIMA モデルの誤差項  $u_t$  の代わりにリターンの式 (14) の基準化した誤差項  $z_{t-1}$  の関数  $g(z_{t-1})$  を用いている。株式市場では、株価が上がった日の翌日より株価が下がった日の翌日の方がボラティリティはより上昇する傾向があるので、こうしたボラティリティ変動の非対称性を捉えるため、(18) 式では、 $g(z_{t-1})$  を  $|z_{t-1}|$  だけでなく、 $z_{t-1}$  にも依存した関数として定式化している。その結果、 $z_{t-1} \geq 0$  であれば、

$$g(z_{t-1}) = (\gamma + \delta)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|) \quad (19)$$

となり、 $z_{t-1} < 0$  であれば、

$$g(z_{t-1}) = (\gamma - \delta)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|) \quad (20)$$

となるので、 $\delta < 0$  であれば、株式市場のボラティリティ変動の非対称性と整合的になる。 $z_{t-1}$  が標準正規分布に従う場合、(18) 式の  $E(|z_{t-1}|)$  は  $\sqrt{2/\pi}$  になる。

このモデルは、ARFIMA モデル同様、 $-0.5 < d < 0.5$  であればボラティリティは定常であり、 $0 < d < 1$  であれば長期記憶過程、 $-0.5 < d < 0$  であれば中期記憶過程に従う。また、 $d = 0$  であれば、ボラティリティは短期記憶過程に従い、 $d = 1$  であれば、ボラティリティは単位根を持つ非定常過程に従う。以下の分析では、 $-0.5 < d < 1$  との制約を課して推定を行っている。

$d = 0$  の場合、(17) 式は、Nelson [1991] が提案した EGARCH(1,0) モデル

$$(1 - \phi L)\{\ln(\sigma_t^2) - \mu\} = g(z_{t-1}), \quad |\phi| < 1 \quad (21)$$

になる。以下の分析では、この EGARCH モデルも用いている。

さらに、比較のため、簡単な GARCH(1,1) モデル (Bollerslev [1986])

$$\sigma_t^2 = \mu + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2, \quad \mu > 0, \beta \geq 0, \alpha \geq 0, \beta + \alpha < 1 \quad (22)$$

も用いている。FIEGARCH、EGARCH モデルが  $\ln(\sigma_t^2)$  を定式化しているのに対して、GARCH モデルは  $\sigma_t^2$  を定式化している。そのため、GARCH モデルでは、 $\sigma_t^2$  が負にならないよう、パ

ラメータに非負制約が必要になる。それに加えて、以下の分析では、ボラティリティが定常性の制約  $\beta + \alpha < 1$  を課して推定を行っている。

ボラティリティの長期記憶モデルには、FIEGARCH モデル以外にも、FIGARCH モデル (Baillie, Bollerslev and Mikkelsen [1996]) や FIAPGARCH モデル (Tse [1998]) があるが、これらのモデルはボラティリティの非負性を保証するためのパラメータの制約が複雑であるのと (Conrad and Haag [2006])、 $0 < d < 0.5$  であってもリターンの分散が無限大になるという問題があるので (Schoffer [2003])、本稿では用いない。

### 3. データ

本稿の分析に用いたのは、日経 225 株価指数とそれを原資産とする日経 225 オプションの価格である。日経 225 オプションは大阪証券取引所で取引されているヨーロッパオプションである。日経 225 オプションは長期のものは取引が少なく効率的な価格付けがなされていない可能性があるため、本稿では、比較的取引の多い残存期間 1ヶ月のオプションに限定して分析を行った。具体的には、翌月に満期を迎えるオプションの残存期間が 30 日になる日が毎月 1 回あるので、2001 年 4 月から 2007 年 9 月までの各月で残存期間が 30 日 (その日が休日で取引がない月は、29 日) になる日の日経 225 オプションについて分析を行った。日経 225 株価指数は、東京証券取引所一部で取引されている代表的 225 銘柄の価格から算出されるが、これら 225 銘柄の取引終了時刻は 15:00 である。それに対して、日経 225 オプションの取引終了時刻は 15:10 である。そこで、原資産の取引終了時刻とそろえるため、オプションについては、14:00 から 15:00 までの間の同時刻に売り気配値と買い気配値がどちらもついているすべての権利行使価格のコールオプションとプットオプションを対象とし、それらの最も 15:00 に近い時刻の売り気配値と買い気配値の平均値を市場価格として用いた。

約定価格ではなく、売り気配値と買い気配値の平均値を用いているのは、売り気配値と買い気配値のどちらで約定するかわからないため、約定価格はマイクロストラクチャーノイズを含むことが知られているからである (詳しくは、Campbell, Lo and Mackinlay [1997] Chapter 3 参照)。こうしたビッド・アスク・バウンスの問題を避けるため、本稿では、約定価格ではなく、買い気配値と売り気配値の平均値を用いた。オプションの売り気配値と買い気配値は日経 NEEDS ティックデータから抽出した。また、14:00 から 15:00 の間で最も 15:00 に近い時刻の価格を使っているのは、15:00 のみを用いると売り気配値もしくは買い気配値がついていないものがあり、利用できるオプションの数が少なくなるためである。ただし、15:00 の価格だけを用いた分析も行ったが、結果は変わらなかった。

オプションの理論価格の計算に必要な金利と原資産価格には、オプション価格と同じ日の1ヶ月物のCDレートと15:00の日経225株価指数を用いた。また、配当率については、Nishina and Nabil [1997]に従い、年率0.5%で一定とした。15:00の日経225株価指数も日経NEEDSティックデータから抽出した。日経NEEDSティックデータには、日経225株価指数の値が1分ごとに記録されている。日経225株価指数を構成する銘柄の取引終了時刻は15:00であるが、日経225株価指数が算出された時刻が収録されているため、終値の時刻が15:00を越えている日がある。そこで、終値の時刻が15:00の場合には終値を、15:00を越えている場合には終値ではなく15:00の値を用いた。

GARCH型モデルの推定は、満期から30日前の日の前日から1500日前までの日経225株価指数の日次リターンを用いて行った。日経225株価指数の日次リターンは、(13)式に従い、その日と前日の日経225株価指数終値の対数階差に日次配当率を足して計算した<sup>5</sup>。最初の2001年4月で満期から30日前のオプションが取引されている日は11日である。そこで、まず、2001年4月10日からその1500日前までの日次リターンを用いて各GARCH型モデルを推定し、推定されたパラメータの値の下で、2001年4月11日の原資産価格と金利を用いてその日のオプションの理論価格を計算する。次に、2001年5月で満期から30日前のオプションが取引されている日は9日なので、2001年5月8日からその1500日前までの日次リターンを用いて各GARCH型モデルを推定し、推定されたパラメータの値の下で、2001年5月9日の原資産価格と金利を用いてその日のオプションの理論価格を計算する。これを2007年9月まで78回繰り返した。

GARCH型モデルの推定には擬似最尤法を用いた。ここでは誤差項の分布が正規分布でないときに、それを正規分布であると仮定して計算される尤度を擬似尤度といい、擬似尤度を最大化するパラメータを推定値とするのが擬似最尤法である。既に述べたように、リターンの式(14)の基準化した誤差項 $z_t$ の分布は、通常、正規分布ではないが、本稿ではそれを標準正規分布であると仮定して尤度を計算した。各モデルの擬似尤度の計算方法については、補論Aを参照されたい。また、オプション価格の計算方法については、第5節と補論Bで説明する。

#### 4. 推定結果

最初に、投資家の危険中立性を仮定し、期待リターンに(15)式を用いた場合の各GARCH型モデルのパラメータの推定結果について説明する。前節で述べたように、各GARCH型モデルは78個の異なる期間(各標本期間は2001年4月から2007年9月までの各月で日経225オ

<sup>5</sup>日次リターンの計算では、終値の時刻が15:00を過ぎていても、終値を用いた。

プシヨンの満期から1ヶ月前の日の前日を終点とし、そこから1500日前を始点としている)で推定を行った。図1は各標本期間での各GARCHモデルのパラメータの推定値を示したものである。

図1(a)にはFIEGARCHモデルのパラメータの推定値が示されている。FIEGARCHモデルのパラメータの中で最も重要なのは $d$ である。 $-0.5 < d < 1$ の制約の下で推定を行ったが、 $d$ の推定値は最大値が0.440、最小値が0.168で、すべての標本期間で定常な長期記憶の領域 $0 < d < 0.5$ に納まっている。すなわち、制約を課さなくても同様の推定結果が得られたことになる。ボラティリティが長期記憶過程に従っているかどうか、すなわち $d$ が有意に0を上回っているかどうかについては以下で仮説検定を行う。ボラティリティ変動の非対称性を表すパラメータ $\delta$ の推定値はすべての標本期間で負になっており、これは株価が下がった日の翌日の方が株価が上がった日の翌日よりボラティリティがより上昇する傾向があることと整合的である。ボラティリティ変動の非対称性が統計的に有意かどうか、すなわち $\delta$ が有意に0を下回っているかどうかについても以下で仮説検定する。

図1(b)にはEGARCHモデルのパラメータの推定値が示されている。EGARCHモデルでは $\phi$ の値が1に近いほど、ボラティリティのショックの持続性が高いことになる。EGARCHモデルの $\phi$ の推定値は最大値が0.978、最小値でも0.953で、すべての標本期間で1に近い値が得られている。ボラティリティ変動の非対称性を表すパラメータ $\delta$ の推定値は、FIEGARCHモデル同様、すべての標本期間で負になっている。EGARCHモデルの $\delta$ が有意に0を下回っているかどうかについても以下で仮説検定する。図1(c)には、GARCHモデルのパラメータの推定値が示されている。GARCHモデルでは $\beta + \alpha$ の値が1に近いほど、ボラティリティのショックの持続性が高いことになるので、図1(c)には $\beta$ と $\alpha$ の推定値の和も示されている。それも最大値が0.998、最小値でも0.949とすべての標本期間で1に近い値になっている。

図2には各モデルの残差 $\hat{\epsilon}_t$ をボラティリティの推定値 $\hat{\sigma}_t$ で割って基準化した $\hat{z}_t$ の統計量が示されている。まず、図2(a)には $\hat{z}_t$ のLjung-Box統計量LB(10)の値が示されている。 $z_t$ は過去と独立であると仮定しているため、モデルが正しければ、 $\hat{z}_t$ に有意な自己相関はないはずである。LB(10)は1次から10次までの自己相関がすべて0であるという帰無仮説を検定する統計量で、帰無仮説が正しければ漸近的に自由度10のカイ2乗分布に従う。ただし、Diebold and Lopez [1995]で指摘されるように、GARCH型の分散不均一性がある場合には、帰無仮説を過剰に棄却してしまうので、Diebold [1988]の方法により分散不均一性を調整している(詳しくは、渡部 [2000] 第1.5.1節参照)。有意水準10%点は15.99であり、すべてのモデル、すべての期間でLB(10)の値はそれを下回るため、 $z_t$ に自己相関がないという帰無仮説は有意水準10%でも棄却されない。

図 2(b) には  $\hat{z}_t^2$  の Ljung-Box 統計量 LB(10) の値が示されている。ボラティリティが自己相関を持っているので、 $\epsilon_t^2$  は自己相関を持つが、 $z_t$  は過去と独立であると仮定しているので、モデルが正しければ、 $\hat{z}_t^2$  にも有意な自己相関はないはずである。前半の標本期間では、すべてのモデルで LB(10) の値は有意水準 10% 点 (15.99) を下回っているが、後半では有意水準 1% 点 (23.21) をも上回っている期間がある。特に EGARCH モデルではそうした期間が長い。そこで、後半の標本期間では、ボラティリティのモデルの次数を上げる必要があるかもしれないが、これは今後の課題とする。

図 2(c) には  $z_t$  が正規分布に従うかどうかを検定するための Jarque-Bera 統計量が示されている。これは、 $\hat{z}_t$  の標本から計算される歪度と尖度をそれぞれ  $\hat{sk}$ 、 $\hat{ku}$ 、標本の大きさを  $T$  とすると、

$$JB = T(\hat{sk}^2/6 + (\hat{ku} - 3)^2/24) \quad (23)$$

として計算され、 $z_t$  が正規分布に従うという帰無仮説が正しければ、これは漸近的に自由度 2 のカイ 2 乗分布に従う。Kulperger and Yu [2005] はこの統計量が GARCH 型モデルの残差にも適用できることを示している。図 2(c) に示されている JB 統計量の値はすべてのモデル、すべての標本期間で有意水準 1% 点 (9.21) を上回っており、 $z_t$  が正規分布に従うという帰無仮説は棄却される。したがって、本稿では、 $z_t$  の分布を標準正規分布であると仮定して尤度を計算し、それを最大化するパラメータを推定値としているが、これは正しい最尤法ではなく、擬似尤度に基づく擬似最尤法ということになる。そこで、以下のボラティリティの長期記憶性や非対称性の検定は、このことを考慮して行う。

ボラティリティが長期記憶過程に従うかどうかの仮説検定では、FIEGARCH モデルの  $d$  に関して以下の検定を行う。

$$H_0 : d = 0, \quad H_1 : d > 0 \quad (24)$$

こうした検定には、ワルド検定、尤度比検定、ラグランジュ乗数 (LM) 検定が用いられるが、これらの中で擬似尤度を用いた場合への拡張がなされているのはワルド検定と LM 検定である (White [1982, 1996])。また、LM 検定が帰無仮説の下でモデルを推定すればよいのに対して、ワルド検定は対立仮説の下でより複雑なモデルを推定する必要がある。そこで、本稿では LM 検定を用いる。擬似尤度を用いた LM 統計量の計算方法については補論 C を参照されたい。

補論 C の (C7) 式から計算される LM 統計量は、通常、漸近的に標準正規分布に従うが、EGARCH モデルや FIEGARCH モデルでは漸近正規性が証明されていないので、ここでは、簡単なシミュレーションにより、上側 10%、5%、1% 点を求める。具体的には、最初の標本期間のパラメータの推定値の下で EGARCH モデルから 1500 個のリターン ( $R_1, \dots, R_{1500}$ ) を発生さ

せる。ただし、通常、 $z_t$  の分布は正規分布よりも裾が厚いので（渡部 [2000] 2.4.2 節参照）、標準正規分布ではなく、分散を 1 に基準化した自由度 7 の  $t$  分布としてシミュレーションを行った<sup>6</sup>。以上のようにして発生させた 1500 個のリターン ( $R_1, \dots, R_{1500}$ ) を使って EGARCH モデルのパラメータを推定し、FIEGARCH モデルにおいて  $d$  を 0、その他のパラメータを EGARCH モデルの推定値として (C7) 式から LM 統計量の値を計算する。これを 5000 回繰り返すことにより求めた上側 10%、5%、1% 点の値が表 1(a) に示されている。そこには、標準正規分布の上側 10%、5%、1% 点も示されているが、シミュレーションにより求めた値はそれより小さくなっている。さらに、標準正規分布の上側 10%、5%、1% 点の値を用いた場合とシミュレーションによって求めたそれらの値を用いた場合それぞれで、 $d = 0$  であるとの帰無仮説が棄却される標本期間の数も示されている。シミュレーションで求めた臨界値の方が標準正規分布の臨界値より低いので、シミュレーションで求めた値を使った方がより帰無仮説を棄却している。例えば、有意水準 5% では、標準正規分布の臨界値を使うと、78 個の異なる標本期間中、38 個の標本期間しか棄却されないのに対して、シミュレーションによって求めた値を使うと、53 個の標本期間で棄却される。シミュレーションによって求めた値が正しいとすると、多くの期間でボラティリティの長期記憶性が検出されていることになる。図 3(a) には、各標本期間の LM 統計量の値と、シミュレーションによって求めた臨界値が描かれている。それによると、後半の標本期間で LM 統計量の値が高く、有意水準 1% でボラティリティの長期記憶性が検出されている期間は後半に集中している。

既に述べたように、株式市場では、株価が上がった日の翌日より株価が下がった日の翌日の方がボラティリティが上昇する傾向があることが知られている。FIEGARCH モデルや EGARCH モデルはそうしたボラティリティ変動の非対称性を捉えることができる。そこで、次に、日経 225 株価指数のボラティリティにそうした非対称性が存在するかどうか仮説検定を行う。具体的には、FIEGARCH モデルあるいは EGARCH モデルの  $\delta$  に関して以下の仮説検定を行う。

$$H_0 : \delta = 0, \quad H_1 : \delta < 0 \quad (25)$$

この仮説検定にも擬似尤度に基づく LM 検定を用いる。この場合の LM 統計量も漸近分布が明らかになっていないので、長期記憶性の検定と同様のシミュレーションにより上側 10%、5%、1% 点を求めた。FIEGARCH モデルを用いた場合の結果が表 1(b) にまとめられている。表 1(a) のボラティリティの長期記憶性の検定と同様、シミュレーションで求めた臨界値は標準正規分

<sup>6</sup>渡部 [2003] では誤差項の分布に  $t$  分布を仮定して GARCH 型モデルの推定を行っている。渡部 [2003] の表 3 に示されているように、自由度の推定値は 7 付近となっているため、本稿では自由度 7 の  $t$  分布を用いてシミュレーションを行った。ただし、 $z_t$  を標準正規分布から発生させた場合やパラメータの値を最後の標本期間の推定値にした場合も試してみたが、結果はほとんど変わらなかった。

布の値よりも小さくなっている。有意水準 5% だと、標準正規分布の臨界値を用いた場合が 54 の標本期間で、シミュレーションで求めた臨界値を用いた場合が 58 の標本期間で非対称性がないという帰無仮説が棄却される。表 1(c) には EGARCH モデルを用いた場合の結果がまとめられている。この場合は、シミュレーションによって求めた臨界値が標準正規分布のそれを上回っている。しかし、その差は小さく、どちらを用いても帰無仮説が棄却される標本期間の数は同じである。有意水準 5% では、棄却されない期間の数は 1 個だけである。これらの結果から、ほとんどの期間で日経 225 株価指数のボラティリティにも有意な非対称性が観測されることがわかる。

## 5. オプション価格による比較

### 5.1. 危険中立性を仮定した分析

次に、FIEGARCH、EGARCH、GARCH モデルを使って日経 225 オプションの理論価格を計算し、どのモデルが最も実際のオプション価格に近いかが比較を行う。最初に、投資家の危険中立性を仮定してオプション価格を導出する。投資家の危険中立性を仮定すると、ヨーロッパアンオプションの価格は満期のオプションの価値の期待値を安全資産の金利で割り引いた割引現在価値に等しくなる。すなわち、残存期間が  $\tau$  で権利行使価格が  $K$  のコールオプションとプットオプションの  $T$  期の価格はそれぞれ以下ようになる。

$$C_T = \exp(-r_T \cdot \tau) E[\text{Max}(S_{T+\tau} - K, 0)] \quad (26)$$

$$P_T = \exp(-r_T \cdot \tau) E[\text{Max}(K - S_{T+\tau}, 0)] \quad (27)$$

これらの右辺の期待値を解析的に求めるのは難しいので、オプションの満期日の原資産価格  $S_{T+\tau}$  を各モデルからシミュレーションによって発生させ、それを使って期待値を評価する。具体的には、 $S_{T+\tau}$  として  $m$  個の値  $(S_{T+\tau}^{(1)}, \dots, S_{T+\tau}^{(m)})$  がサンプリングされたとすると、(26)、(27) 式は以下のように計算できる。

$$C_T \approx \exp(-r_T \cdot \tau) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{Max}(S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0) \quad (28)$$

$$P_T \approx \exp(-r_T \cdot \tau) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{Max}(K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0) \quad (29)$$

本稿では、 $m = 20000$  とし、分散減少法として、負相関法と制御変数法を組み合わせで用いた。また、投資家の危険中立性を仮定した場合には、 $t > T$  とすると、

$$S_T = \exp[-(r_T - div)(t - T)] E(S_t | \mathbf{I}_T) \quad (30)$$



が成り立たなければならないが、サンプリングした  $(S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(m)})$  ( $t = T + 1, \dots, T + \tau$ ) から計算した右辺の推定値

$$\exp[-(r_T - div)(t - T)] \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_t^{(i)} \quad (31)$$

は  $S_T$  から大幅に乖離する可能性があるので、Duan and Shimonato [1998] の経験マルチンゲールシミュレーションによって補正を行った。これらの方法について詳しくは補論 B を参照されたい。

また、比較のため、以下の Black-Scholes の公式によってもオプション価格を計算した。

$$C^{BS} = \exp(-div \cdot \tau) S_T N(d_1) - K \exp(-r_T \cdot \tau) N(d_2), \quad (32)$$

$$P^{BS} = -\exp(-div \cdot \tau) S_T N(-d_1) + K \exp(-r_T \cdot \tau) N(-d_2) \quad (33)$$

ただし、

$$d_1 = \frac{\ln(S_T/K) + (r_T - div + \sigma^2/2)\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_T/K) + (r_T - div - \sigma^2/2)\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}}$$

ここで、ボラティリティ  $\sigma$  には過去 20 営業日の日次リターンの標本標準偏差を用いた。

第 3 節で述べたように、分析に用いたのは 2001 年 4 月から 2007 年 9 月までの満期から 1ヶ月前の日の 14:00-15:00 の間で同時刻に売り気配値と買い気配値がついているすべての権利行使価格のコールオプションとプットオプションで、それらの 15:00 に最も近い時刻の売り気配値と買い気配値の平均値を市場価格として用いた。そうしたコールオプションの総数を  $N_C$ 、それらの市場価格を  $C_i$  ( $i = 1, \dots, N_C$ )、また各モデルから算出された理論価格を  $\tilde{C}_i$  とすると、理論価格のバイアスを測る指標として、

$$ME = \frac{1}{N_C} \sum_{i=1}^{N_C} (\tilde{C}_i - C_i)$$

$$MER = \frac{1}{N_C} \sum_{i=1}^{N_C} \left( \frac{\tilde{C}_i - C_i}{C_i} \right)$$

理論価格の市場価格からの乖離度を測る指標として、

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N_C} \sum_{i=1}^{N_C} (\tilde{C}_i - C_i)^2}$$

$$RMSE_R = \sqrt{\frac{1}{N_C} \sum_{i=1}^{N_C} \left( \frac{\tilde{C}_i - C_i}{\tilde{C}_i} \right)^2}$$

を計算した。ここで、ME (Mean Error: 平均誤差) と RMSE (Root Mean Square Error: 平均 2 乗誤差) が市場価格と理論価格の差をそのまま使っているのに対して、MER (Mean Error Rate: 平均誤差率) と RMSER (Root Mean Square Error Rate: 平均 2 乗誤差率) はそれを市場価格で割ることにより誤差率に直して評価している。RMSE と RMSER は、それらの値が小さいほど市場価格からの乖離が小さいことになる。それに対して ME と MER は、それらが正 (負) であれば、オプション価格を平均的に過大 (過小) 評価していることになる。

また、Bakshi, Cao and Chen [1997] に従い、原資産価格  $S$  を権利行使価格  $K$  で割ったマネネス ( $= S/K$ ) によって各オプションを表 2 のように分類し、マネネスごとにも上記の 4 つの指標を計算した。ただし、その場合の  $N_C$  はそのマネネスに含まれるコールオプションの総数である。プットオプションについても同様の分析を行った。

表 3(a) は、コールオプションについてマネネスごとと全体で上記 4 つの指標を計算したものである。最初に全体で比較すると、RMSE、RMSER とともに FIEGARCH モデルが最も小さくなっている。マネネスごとに見てみると、RMSER の OTM で BS モデルが最小になっている以外はすべて FIEGARCH モデルが最小になっている。以上をまとめると、コールオプションでは FIEGARCH モデルのパフォーマンスが最も高いことになる。ME と MER からは、ITM で BS モデルが、DITM で EGARCH モデル以外 (MER では EGARCH モデルと FIEGARCH モデル以外) のすべてのモデルが市場価格を過小評価している以外は、すべてのモデル、マネネスで、市場価格を過大評価していることがわかる。

表 3(b) は、プットオプションの結果をまとめたものである。最初に全体で比較すると、RMSER では BS モデルが最小になっているものの、RMSE ではやはり FIEGARCH モデルが最小になっている。マネネスごとに見てみると、RMSE では、DITM で GARCH モデルが最小になっているが、それ以外ではすべて FIEGARCH モデルが最小になっている。RMSER では、DOTM、OTM、ATM で BS モデル、ITM と DITM で FIEGARCH モデルが最小になっており、マネネスによって結果が異なる。そこで、プットオプションでは、必ずしも FIEGARCH モデルが最もパフォーマンスが良いとは言えないが、少なくとも RMSE を指標とした場合は FIEGARCH モデルのパフォーマンスが高い。ME と MER からは、DOTM の GARCH モデルと BS モデル (ME では FIEGARCH モデルも)、OTM の BS モデル (MER では全体の BS モデルも) を除きすべてのモデルの理論価格が市場価格を過大評価していることがわかる。

## 5.2. Duan [1995] の局所危険中立評価関係を用いた分析

これまでの分析では投資家の危険中立性を仮定したが、そうした仮定を置かずに GARCH 型モデルの下でオプション理論価格を求める方法が Duan [1995] によって提案されている。そこで、本節では、この方法を用いてオプション理論価格を導出し、市場価格との比較を行う。

ここでは、Duan [1995] に従い、期待リターンを (16) 式によって定式化する。(16) 式の  $\lambda$  は各 GARCH 型モデルのパラメータと一緒に擬似最尤推定した。GARCH 型モデルのパラメータの推定値は、危険中立性を仮定し、期待リターンを (15) 式にした場合の推定値 (図 1) とほとんど変わらなかったため、図 4(a) に  $\lambda$  の推定値だけ示している。

危険中立性の仮定をはずすと、現実の測度  $P$  と危険中立測度  $Q$  とが異なるので、オプションの理論価格を求める場合には、測度変換を行い、(26)、(27) の右辺の期待値を危険中立測度  $Q$  の下で評価しなければならない。Duan [1995] は、 $P$  と  $Q$  の関係について、局所中立評価関係 (local risk neutral valuation relationship; LRNVR) と呼ばれる以下の 3 つの仮定を置いている<sup>7</sup>。

1.  $R_t | \mathbf{I}_{t-1}$  が危険中立測度  $Q$  の下で正規分布に従っている。
2.  $E^Q[\exp(R_t) | \mathbf{I}_{t-1}] = \exp(r_t)$ .
3.  $Var^Q(R_t | \mathbf{I}_{t-1}) = Var^P(R_t | \mathbf{I}_{t-1})$  a.s.

この 1、2 の仮定から、日次リターンは危険中立測度  $Q$  の下では以下のように表される。

$$R_t = r_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t, \quad (34)$$

$$\xi_t = \sigma_t u_t, \quad u_t \sim NID(0, 1). \quad (35)$$

ここで、(34) 式と (16) 式を比べると、次の式が成り立つことがわかる。

$$\epsilon_t = \xi_t - \lambda \sigma_t, \quad (36)$$

$$z_t = u_t - \lambda \quad (37)$$

<sup>7</sup>LRNVR は、以下のいずれかの場合に、投資家の期待効用最大化と整合的になる。

- 代表的投資家が相対的危険回避度一定の効用関数を持ち、かつ集計された消費の成長率  $\ln(C_t/C_{t-1})$  が平均と分散が一定の正規分布に従う場合。
- 代表的投資家が絶対的危険回避度一定の効用関数を持ち、かつ集計された消費の変分  $C_t - C_{t-1}$  が平均と分散が一定の正規分布に従う場合。

ここで、 $C_t$  が  $t$  期の集計された消費を表す。詳しくは Duan [1995] を参照。

そこで、LRNVRの仮定3から、GARCH型モデルのボラティリティの式の $\epsilon_t$ または $z_t$ に(36)式または(37)式を代入したものが危険中立測度 $Q$ の下でのボラティリティの式になる。例えば、FIEGARCH(1,d,0)モデルの場合、 $Q$ の下でのボラティリティの式は次のようになる。

$$(1 - \phi L)(1 - L)^d \{\ln(\sigma_t^2) - \mu\} = g(u_{t-1}), \quad (38)$$

$$g(u_{t-1}) = \delta(u_{t-1} - \lambda) + \gamma\{|u_{t-1} - \lambda| - \sqrt{2/\pi}\}. \quad (39)$$

ここで(39)式の右辺 $\sqrt{2/\pi}$ は、 $z_t$ が正規分布に従うときの $|z_t|$ の期待値 $E(|z_t|) = \sqrt{2/\pi}$ である。

この方法は、 $\lambda = 0$ であれば、危険中立性を仮定するのと同じになる。そこで、 $\lambda$ が有意かどうかを調べるため、以下の仮説検定を行う。

$$H_0 : \lambda = 0, \quad H_1 : \lambda \neq 0 \quad (40)$$

この仮説検定はすべてのGARCH型モデルで行うことができるが、ここではFIEGARCHモデルのみで行った。この仮説検定も擬似尤度を用いたLM検定によって行い、LM統計量の臨界値は、ボラティリティの長期記憶性や非対称性の検定と同様のシミュレーションによって計算した。表4にはシミュレーションによって求めた臨界値と標準正規分布の臨界値が示されている。それによると、両者はあまり差がなく、標準正規分布と仮定して問題ないことがわかる。表4には帰無仮説が棄却される期間の数が示されているが、すべて0であり、有意水準を10%にしても、 $\lambda = 0$ であるという帰無仮説は棄却されない。図4(b)には、各期間のLM統計量の値とシミュレーションによって求めた上側5%点と下側5%点が示されているが、LM統計量の値はすべての期間で上側5%と下側5%点の間に含まれている。

日次リターンを(16)式で定式化し、Duan [1995]の方法を用いてオプション価格を評価した場合についても、ME、RMSE、MER、RMSERの4つの指標を計算した。結果は表5に示されているが、危険中立性を仮定した場合(表2)とほとんど変わらない。このことから、 $\lambda$ が有意でないため、Duan [1995]の方法を用いてオプション価格を評価しても、パフォーマンスは改善しないことがわかる。

期待リターンに $\sigma_t$ だけでなく、さらに定数項や $R_{t-1}$ を加えた分析も行ったが、結果は変わらなかった。

## 6. まとめと今後の課題

本稿では、FIEGARCHモデルを用いて日経225株価指数のボラティリティの長期記憶性について分析した。その結果、日経225株価指数のボラティリティに長期記憶性があることと、

ボラティリティの長期記憶性を考慮した FIEGARCH モデルが日経 225 オプションの市場価格を捉える上でパフォーマンスが良いことが明らかになった。FIEGARCH モデルを日経 225 オプション価格に応用した研究は本研究が最初であり、特に後者の結果は重要である。

しかし、本研究はいくつか課題も残している。まず、FIEGARCH モデルは日経 225 オプションの価格を捉える上でパフォーマンスが良かったが、唯一、RMSE を指標とした場合のプットオプションに関してはパフォーマンスが良くなかった。今後、この原因についても分析する必要がある。また、第 4 節で説明したように、本稿で分析した標本期間では前半と後半で構造変化が生じている可能性がある。特に、図 2(b)、図 3(a) から、後半、ボラティリティのショックの持続性が高くなった可能性や、図 3(c) から、後半、ボラティリティ変動の非対称性が弱くなった可能性が窺える。そこで、今後はそうした構造変化を考慮した分析も行う必要がある。

本稿ではボラティリティの長期記憶性の検定に擬似尤度に基づく LM 検定を用いた。その場合の LM 検定統計量の分布は未だ理論的に明らかにはされていないので、本稿ではシミュレーションにより臨界値を求めた。Hurvich, Moulines and Soulier [2005] が、 $0 < d < 3/4$  であれば、 $d$  の局所 Whittle 推定量が漸近正規性を満たすことを証明しているので、局所 Whittle 推定量を使えばシミュレーションを行わずにボラティリティの長期記憶性の検定を行える。また、本稿で用いているのは時系列データなので、ブロック・ブートストラップやサブ・サンプリング (Politis, Romano and Wolf [1999]) が応用できる。本稿では、擬似最尤法により GARCH 型モデルのパラメータを推定し、それを真の値としてオプションの理論価格を導出しているが、三井・渡部 [2003] では、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC) を用いたベイズ推定を行うことにより、パラメータの推定とオプション価格の導出を同時に行っている。こうした別の手法を用いて分析を行い、結果を比較することは重要である。最後に、ボラティリティの変動を表すモデルには、本稿で分析した GARCH 型モデル以外に確率的ボラティリティ変動 (stochastic volatility; SV) モデルがある。SV モデルもボラティリティ変動の非対称性や長期記憶性を考慮した非対称長期記憶 SV (asymmetric long memory; A-LMSV) モデル (Ruiz and Veiga [2008]) に拡張されているので、そうしたモデルを用いた分析も重要である。

## 補論 A. GARCH 型モデルの擬似最尤推定

本稿では、すべての GARCH 型モデルのパラメータを擬似最尤法によって推定している。推定するパラメータ (以下では、まとめて  $\omega$  と表す) がある値が与えられたときに、それを条件とする観測値  $(R_1, \dots, R_T)$  の条件付き密度  $f(R_1, \dots, R_T | \omega)$  のことを尤度と呼び、 $L$  で表す。また、尤度を  $\omega$  の関数と考えたものを尤度関数と呼び、 $L(\omega)$  で表す。誤差項の分布が正規分

布ではないときに、それを正規分布であると仮定して求めた尤度 (関数) を擬似尤度 (関数) と呼ぶ。擬似尤度関数を最大化するパラメータの値を推定値とするのが、擬似最尤法である。第4節で計算した基準化した残差  $\hat{z}_t$  の JB 統計量 (図 2(c)) から、リターンの式 (14) の基準化した誤差項  $z_t$  の分布が正規分布であるという帰無仮説はすべての標本期間で棄却された。本稿では、それを正規分布であると仮定することにより擬似尤度を求め、各 GARCH 型モデルのパラメータを擬似最尤推定している。

GARCH 型モデルの (擬似) 尤度を計算するのは難しいので、代わりに条件の中に  $\sigma_1^2$  を加えた  $f(R_1, \dots, R_T | \sigma_1^2, \omega)$  を用いている。以下では、条件の中の  $\omega$  は省略する。このように修正された尤度は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} L &= f(R_1, \dots, R_T | \sigma_1^2) \\ &= f(R_1 | \sigma_1^2) \prod_{s=2}^T f(R_s | R_1, \dots, R_{s-1}, \sigma_1^2) \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

擬似最尤法では、誤差項の分布を正規分布にするので、(A1) 式の右辺の  $f(R_s | R_1, \dots, R_{s-1}, \sigma_1^2)$  はすべて正規分布の確率密度になる。

実際に最大化を行うときには、(A1) 式のとった対数擬似尤度

$$\ln L = \ln f(R_1 | \sigma_1^2) + \sum_{s=2}^T \ln f(R_s | R_1, \dots, R_{s-1}, \sigma_1^2) \quad (\text{A2})$$

を用いる。

以下では、本稿で用いた各 GARCH 型モデルの (対数) 擬似尤度の計算方法を説明する。

## (1) GARCH モデル

まず最初に期待リターンに (15) 式を用いた場合の GARCH モデルの (対数) 擬似尤度の計算方法について説明する。その場合、 $\omega = (\mu, \beta, \alpha)$  である。

GARCH モデル (22) 式の下では、 $\sigma_t^2$  の無条件期待値が、

$$E(\sigma_t^2) = \mu / (1 - \beta - \alpha) \quad (\text{A3})$$

となるので、本稿では、ボラティリティの初期値を、

$$\sigma_1^2 = \mu / (1 - \beta - \alpha) \quad (\text{A4})$$

とした。それを使って、リターンの式 (14) と期待リターンの式 (15) より、 $\epsilon_1$  を以下のように計算できる。

$$\epsilon_1 = R_1 - E(R_1 | \mathbf{I}_0) = R_1 - E(R_1 | \sigma_1^2) = R_1 - r_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \quad (\text{A5})$$

そこで、 $f(R_1|\sigma_1^2)$  の値は次の式によって計算できる。

$$f(R_1|\sigma_1^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_1^2}{2\sigma_1^2}\right) \quad (\text{A6})$$

$\sigma_1^2$  に加えて  $R_1$  の値が与えられると、(A5) 式より  $\epsilon_1$  を計算できる。それと  $\sigma_1^2$  を (22) 式に代入すると  $\sigma_2^2$  を計算できる。また、(A5) 式同様、 $\epsilon_2$  を以下のように計算できる。

$$\epsilon_2 = R_2 - r_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \quad (\text{A7})$$

そこで、 $f(R_2|R_1, \sigma_1^2)$  の値は次の式によって計算できる。

$$f(R_2|R_1, \sigma_1^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_2^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad (\text{A8})$$

これを繰り返すと、(A1) 式の右辺の条件付き密度がすべて求まり、擬似尤度を以下のように計算できる。

$$L = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (\text{A9})$$

ここで、右辺の  $\sigma_t^2$  は、既に述べたように、 $\sigma_1^2$  からスタートして、(22) 式によって逐次的に計算される。また、 $\epsilon_t$  は以下の式から計算される。

$$\epsilon_t = R_t - r_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \quad (\text{A10})$$

対数擬似尤度 (A2) は以下の式で計算される。

$$\ln L = \sum_{t=1}^T \left\{ -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma_t^2) - \frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2} \right\} \quad (\text{A11})$$

期待リターンに (16) 式を用いた場合も同様に (対数) 擬似尤度を計算できる。その場合、 $\lambda$  も未知パラメータなので、 $\omega = (\mu, \beta, \alpha, \lambda)$  となる。また、 $\epsilon_t$  は (A10) 式に代わって以下の式で計算される。

$$\epsilon_t = R_t - r_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 - \lambda\sigma_t \quad (\text{A12})$$

## (2) EGARCH モデル

EGARCH モデルの (対数) 擬似尤度も GARCH モデルと同様にして計算することができる。期待リターンに (15) 式を用いた場合には、 $\omega = (\mu, \phi, \delta, \gamma)$ 、(16) 式を用いた場合には、 $\omega = (\mu, \phi, \delta, \gamma, \lambda)$  である。EGARCH モデル (21) 式の両辺の無条件期待値をとると、

$$E[\ln(\sigma_t^2)] = \mu \quad (\text{A13})$$

となるので、ボラティリティの初期値は、

$$\ln(\sigma_1^2) = \mu \quad (\text{A14})$$

とした。

擬似尤度 (A9)、対数擬似尤度 (A11) の  $\sigma_t^2$  は (21)、(18) 式に  $\sigma_{t-1}^2$  と  $z_{t-1} = \epsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}$  を代入することにより逐次的に計算できる。また、 $\epsilon_t$  は、GARCH モデルと同じく、(A10) 式もしくは (A12) 式によって計算できる。

### (3) FIEGARCH モデル

FIEGARCH モデルの (対数) 擬似尤度の計算には、Taylor [2001] によって提案された方法を用いた。期待リターンに (15) 式を用いた場合には、 $\omega = (d, \mu, \phi, \delta, \gamma)$ 、(16) 式を用いた場合には、 $\omega = (d, \mu, \phi, \delta, \gamma, \lambda)$  である。

(17) 式の左辺の  $(1-L)^d$  は、

$$(1-L)^d = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j L^j, \quad a_1 = d, \quad a_j = \frac{j-d-1}{j} a_{j-1} \quad (j \geq 2) \quad (\text{A15})$$

と表されるので、それに  $(1-\beta L)$  を掛けた  $(1-\beta L)(1-L)^d$  は次のように表せる。

$$(1-\beta L)(1-L)^d = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} b_j L^j, \quad b_1 = d + \beta, \quad b_j = a_j - \beta a_{j-1} \quad (j \geq 2) \quad (\text{A16})$$

そこで、 $\ln(\sigma_0^2) = \ln(\sigma_{-1}^2) = \dots$  をすべてその無条件期待値  $\mu$  とし、 $g(z_0)$  もその無条件期待値 0 とすると、 $\ln(\sigma_1^2)$  は以下のように計算できる。

$$\ln(\sigma_1^2) = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \{ \ln(\sigma_{1-j}^2) - \mu \} + g(z_0) = \mu \quad (\text{A17})$$

次に、 $R_1$  が与えられると、(A10) 式もしくは (A12) 式から  $\epsilon_1$  を計算できる。それと (A17) 式で計算された  $\sigma_1^2 (= \mu)$  を使って  $z_1 (= \epsilon_1/\sigma_1)$  を計算できるので、それを使って  $\ln(\sigma_2^2)$  を以下のように計算できる。

$$\ln(\sigma_2^2) = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \{ \ln(\sigma_{2-j}^2) - \mu \} + g(z_1) = \mu + b_1 \{ \ln(\sigma_1^2) - \mu \} + g(z_1) \quad (\text{A18})$$

以上を繰り返すことにより、 $(\sigma_1^2, \dots, \sigma_T^2)$  と  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_T)$  を計算できるので、それらを使って (A9) 式より擬似尤度、(A11) 式より対数擬似尤度を計算できる。



FIEGARCH モデルを提案した Bollerslev and Mikkelsen [1996] は、(17) 式を次のように MA モデルに直して推定している。

$$\ln(\sigma_t^2) = \mu + (1 - \phi L)^{-1}(1 - L)^{-d}g(z_{t-1}) \quad (\text{A19})$$

Taylor [2001] は、AR モデルを使った方が  $L^j$  の係数が早く 0 に収束することから、MA モデルではなく、AR モデルを使うことを提案しており、本稿でもそれに従った。

## 補論 B. オプションの理論価格の計算方法

本稿では各 GARCH 型モデルの下でのオプションの理論価格をシミュレーションによって求めている。その際、分散減少法として、負相関法と制御変数法とを組み合わせ用いている。また、シミュレーションによって得られた原資産価格がマルチンゲール性を満たすように Duan and Shimonato [1998] によって提案された補正を行っている。本補論ではこれらの方法について説明する。以下では、権利行使価格が  $K$  で満期が  $T + \tau$  日のコールオプションの  $T$  日の理論価格を求めるものとして説明するが、プットオプションの理論価格も同様に求められる。

最初に、第 5.1 節のように危険中立性を仮定した場合について説明する。この場合、まず、リターンの式を (14)、(15) とし、日経 225 株価指数の日次リターン  $(R_1, \dots, R_{T-1})$  を用いて各 GARCH 型モデルのパラメータを補論 A で説明した擬似最尤法により推定する。ただし、 $T = 1501$  としている。次に、リターンの式 (14) の基準化した誤差項  $z_t$  ( $t = T+1, \dots, T+\tau$ ) を標準正規分布からシミュレーションで発生させ、それをリターンの式 (14)、(15) と、パラメータを擬似最尤推定値とした各 GARCH モデルに代入することにより、資産価格  $S_t$  ( $t = T, \dots, T+\tau$ ) を発生させる。このときに負相関法と Duan and Shimonato [1998] の補正を用いる。

負相関法とは、シミュレーションにより、 $z_t$  に、 $(z_t^{(1)}, \dots, z_t^{(n)})$  が得られたとすると、それにマイナスを付けた  $(-z_t^{(1)}, \dots, -z_t^{(n)})$  も合わせて用いる方法である。そうすると、 $(z_t^{(1)}, \dots, z_t^{(n)})$  ( $t = T+1, \dots, T+\tau$ ) から計算される  $(S_{T+\tau}^{(1)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$  と  $(-z_t^{(1)}, \dots, -z_t^{(n)})$  ( $t = T+1, \dots, T+\tau$ ) から計算される  $(S_{T+\tau}^{(n+1)}, \dots, S_{T+\tau}^{(2n)})$  の間に高い負の相関が生じるので、それらを合わせて用いることによりオプションの理論価格の分散を小さくできる。以下、 $m = 2n$  とする。

また、危険中立性を仮定の下では、 $t > T$  とすると、

$$S_T = \exp[-(r_T - \text{div})(t - T)]E[S_t | \mathbf{I}_T] \quad (\text{B1})$$

が成り立たなければならない。ところが、上記のようにサンプリングした  $(S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(m)})$  ( $t =$

$T + 1, \dots, T + \tau$  から計算した

$$\exp[-(r_T - div)(t - T)] \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_t^{(i)} \quad (\text{B2})$$

は  $S_T$  から乖離する可能性がある。それを補正するのが、Duan and Shimonato [1998] の経験マルチンゲール法である。具体的には、 $(S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(m)})$  ( $t = T, \dots, T + \tau$ ) を以下の式を使って  $(S_t^{*(1)}, \dots, S_t^{*(m)})$  に補正する。

$$S_t^{*(i)} = S_T \frac{\eta_t^{(i)}}{\eta_t^{(0)}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = T + 1, \dots, T + \tau \quad (\text{B3})$$

ここで、

$$\eta_t^{(i)} = S_{t-1}^{*(i)} \frac{S_t^{(i)}}{S_{t-1}^{(i)}} \quad (\text{B4})$$

$$\eta_t^{(0)} = \exp[-(r - div)(t - T)] \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \eta_t^{(i)} \quad (\text{B5})$$

これらの式は、 $S_T^{(i)} = S_T^{*(i)} = S_T$  からスタートして逐次的に計算することができる。また、このように修正した  $(S_t^{*(1)}, \dots, S_t^{*(m)})$  が

$$S_T = \exp[-(r_T - div)(t - T)] \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_t^{*(i)} \quad (\text{B6})$$

を満たすことは容易に確かめられる。

以上のように計算した  $(S_{T+\tau}^{*(1)}, \dots, S_{T+\tau}^{*(m)})$  を用いることにより、コールオプションの理論価格を次のように計算できる。

$$\tilde{C}_T^G \approx \exp(-r_T \cdot \tau) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{Max}(S_{T+\tau}^{*(i)} - K, 0), \quad (\text{B7})$$

本稿では、オプションの理論価格の分散をさらに減少させるため、制御変数法を用いている。ここでは、BS モデルのオプション価格を制御変数とし、それを以下の 2 つの方法により計算する。まず、BS 公式 (32) を用いて解析的に計算する。その際のボラティリティ  $\sigma$  には過去 20 日間の日次リターンの標準偏差を用いた。このように解析的に求めた BS モデルの価格を  $C_T^{\text{BS}}$  と表す。次に、最初に発生させた  $(z_t^{(1)}, \dots, z_t^{(m)})$  ( $t = T + 1, \dots, T + \tau$ ) を BS モデル

$$R_t = r_t - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_t \quad (\text{B8})$$

に代入することにより、満期の原資産価格に直す。ここでも、ボラティリティ  $\sigma$  は過去 20 日間の日次リターンの標準偏差とした。それを上記の Duan and Shimonato [1998] の調整を行った

上で (B7) 式の  $S_{T+\tau}^{*(i)}$  に代入し、オプション価格を求める。このようにシミュレーションによって求めた BS モデルのオプション価格を  $\tilde{C}_T^{\text{BS}}$  と表す。

これらを用いて、最終的なコールオプションの理論価格を以下のように計算した。

$$C_T = \tilde{C}_T^{\text{G}} - \varphi(\tilde{C}_T^{\text{BS}} - C_T^{\text{BS}}) \quad (\text{B9})$$

$C_T$  の分散は、

$$\text{Var}(C_T) = \text{Var}(\tilde{C}_T^{\text{G}}) + \varphi^2 \text{Var}(\tilde{C}_T^{\text{BS}}) - 2\varphi \text{Cov}(\tilde{C}_T^{\text{G}}, \tilde{C}_T^{\text{BS}}) \quad (\text{B10})$$

と表され、これを最小にする  $\varphi$  は、

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\text{Cov}(\tilde{C}_T^{\text{G}}, \tilde{C}_T^{\text{BS}})}{\text{Var}(\tilde{C}_T^{\text{BS}})} \\ &= \frac{\text{Cov}(\text{Max}[S_{T+\tau}^{*\text{G}} - K, 0], \text{Max}[S_{T+\tau}^{*\text{BS}} - K, 0])}{\text{Var}(\text{Max}[S_{T+\tau}^{*\text{BS}} - K, 0])} \end{aligned} \quad (\text{B11})$$

である。ここで、 $S_{T+\tau}^{*\text{G}}$  と  $S_{T+\tau}^{*\text{BS}}$  はそれぞれ GARCH 型モデルと BS モデルからサンプリングされる満期の原資産価格を表す。そこで、 $\varphi$  は  $\text{Max}[S_{T+\tau}^{*\text{G}} - K, 0]$  と  $\text{Max}[S_{T+\tau}^{*\text{BS}} - K, 0]$  の標本共分散を後者の標本分散で割った値とした。

第 5.2 節の Duan [1995] の方法を用いる場合には、リターンの式を (14)、(16) とし、日経 225 株価指数の日次リターンを用いて各 GARCH 型モデルのパラメータを擬似最尤法により推定する。次に、第 5.2 節で説明したように、危険中立測度  $Q$  の下でのモデルに変換した上で、上記のシミュレーションを行う。

## 補論 C. 擬似尤度を用いた LM 検定

あるモデルのすべてのパラメータを  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)'$  とする。本稿で行う仮説検定は、すべて 1 つのパラメータに関するものなので、以下の帰無仮説を考える。

$$H_0 : \omega_1 = h \quad (\text{C1})$$

例えば、ボラティリティの長期記憶性の仮説検定 (26) では、 $\omega = (d, \mu, \phi, \delta, \gamma)$ 、 $\omega_1 = d$ 、 $h = 0$  である。

この帰無仮説の下で、残りのパラメータを擬似最尤推定し、得られた推定値を  $(\hat{\omega}_2, \dots, \hat{\omega}_k)$  とする。このとき、 $\omega_1 = h$ 、 $\omega_2 = \hat{\omega}_2$ 、 $\dots$ 、 $\omega_k = \hat{\omega}_k$  の下でのこのモデルの対数擬似尤度  $\ln L$  の  $\omega_1$  に関する 1 階微分を

$$g = \left. \frac{\partial \ln L}{\partial \omega_1} \right|_{\omega_1=h, \omega_2=\hat{\omega}_2, \dots, \omega_k=\hat{\omega}_k} \quad (\text{C2})$$

と表し、すべてのパラメータ  $\omega$  に関する 2 階微分 ( $k \times k$  行列) を

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \omega \partial \omega'} \Big|_{\omega_1=h, \omega_2=\hat{\omega}_2, \dots, \omega_k=\hat{\omega}_k} \quad (\text{C3})$$

と表す。また、対数擬似尤度 (A2) を構成する各期の  $\ln f(R_t | R_1, \dots, R_{t-1})$  を  $\omega_1 = h, \omega_2 = \hat{\omega}_2, \dots, \omega_k = \hat{\omega}_k$  の下で  $\omega$  に関して 1 階微分したもの ( $k \times 1$  ベクトル) を、

$$\mathbf{S}_t = \frac{\partial \ln f(R_t | R_1, \dots, R_{t-1})}{\partial \omega} \Big|_{\omega_1=h, \omega_2=\hat{\omega}_2, \dots, \omega_k=\hat{\omega}_k}, \quad t = 1, \dots, T \quad (\text{C4})$$

とする。

この外積の和 ( $k \times k$  行列) を、

$$\mathbf{G} = \sum_{t=1}^T \mathbf{S}_t \mathbf{S}_t' \quad (\text{C5})$$

とし、さらに

$$\mathbf{I} = -\mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{I} \mathbf{G} \mathbf{I} \quad (\text{C6})$$

と定義すると、擬似尤度を用いた場合の LM 統計量は以下のように計算される。

$$LM = g \mathbf{I}[1, 1] / \sqrt{\mathbf{C}[1, 1]} \quad (\text{C7})$$

ただし、 $\mathbf{I}[1, 1]$ 、 $\mathbf{C}[1, 1]$  はそれぞれ行列  $\mathbf{I}$ 、 $\mathbf{C}$  の (1, 1) 要素を表す。

例えば、ボラティリティの長期記憶性の仮説検定 (26) では、 $d$  を 0、残りのパラメータを EGARCH モデルの擬似最尤推定値として (C7) 式より LM 統計量を計算すればよい。

$z_t$  が正規分布に従う場合、すなわち擬似尤度ではなく、正しい尤度を用いている場合には、 $\mathbf{G} = \mathbf{I}^{-1}$  になるので、(C6) 式より、 $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  となる。したがって、(C7) 式より、LM 統計量は、

$$LM = g \sqrt{\mathbf{I}[1, 1]} \quad (\text{C8})$$

となる。

こうした擬似尤度を用いた LM 検定の詳細については、White [1982, 1996] を参照されたい。

## 参考文献

- 稲田将一、「ウェーブレット分散を用いた金融時系列の長期記憶性の分析」、『金融研究』第25巻別冊第2号、2006年、153～188頁
- 白石典義・高山俊則、「株式収益率ボラティリティの長期依存性とロングメモリー・モデル」、『ジャフィー・ジャーナル』、1998年、123～150頁
- 竹内明香、「日経225オプション価格の実証分析～ARCH, ARCH-t, SVモデルによる比較」、『一橋経済学』第2号、2006年、187～208頁
- 田中勝人、『現代時系列分析』、岩波書店、2006年
- 三井秀俊・渡部敏明、「ベイズ推定法によるGARCHオプション価格付けモデルの分析」、『日本統計学会誌』第33巻第3号、2003年、307～324頁
- 矢島美寛、「長期記憶をもつ時系列モデル」、刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓著『経済時系列の統計 その数理的基礎』第II部、岩波書店、2003年、103～202頁
- 渡部敏明、『ボラティリティ変動モデル』、朝倉書店、2000年
- 渡部敏明、「日経225オプションデータを使ったGARCHオプション価格付けモデルの検証」、『金融研究』第22巻別冊第2号、2003年、1～34頁
- 渡部敏明、「Realized Volatility-サーベイと日本の株式市場への応用」、『経済研究』Vol.58 No.4、2007年、352～373頁
- 渡部敏明・佐々木浩二、「ARCH型モデルと“Realized Volatility”によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」、『金融研究』第25巻別冊第2号、2006年、39～74頁
- Baillie, R. T., T. Bollerslev, and H. O. Mikkelsen, “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 74(1), 1996, pp.3-30.
- Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen, “Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models,” *Journal of Finance*, 52(5), 1997, pp.2003-2049.
- Beran, J., *Statistics for long-memory processes*, Chapman & Hall, 1994.

- Black, F., and M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81(3), 1973, pp.637–654.
- Bollerslev, T., “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31(3), 1986, pp.307–327.
- Bollerslev, T., and H. O. Mikkelsen, “Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility,” *Journal of Econometrics*, 73(1), 1996, pp.151–184.
- Bollerslev, T., and H. O. Mikkelsen, “Long-term Equity Anticipation Securities and Stock Market Volatility Dynamics,” *Journal of Econometrics*, 92(1), 1999, pp.75–99.
- Campbell, J. Y., A. W. Lo, and A. C. MacKinlay, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, 1997. (祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本多俊毅・和田賢治訳 『ファイナンスのための計量分析』、共立出版、2003.)
- Conrad, C., and B. R. Haag, “Inequality Constraints in the Fractionally Integrate GARCH Model,” *Journal of Financial Econometrics*, 4(3), 2006, pp.413–449.
- Diebold, F. X., *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*, Springer-Verlag, 1988.
- Diebold, F. X. and J. A. Lopez, “Modeling Volatility Dynamics,” in Hoover, K. D. (eds.), *Macroeconometrics: Developments, Tensions, and Prospects*, Kluwer Academic Publishers, 1995, pp.427–466.
- Duan, J.-C., “The GARCH Option Pricing Model,” *Mathematical Finance*, 5(1), 1995, pp.13–32.
- Duan, J.-C. and J.-G. Shimonato, “Empirical Martingale Simulation for Asset Prices,” *Management Science*, 44(9), 1998, pp.1218–1233.
- Engle, R. F., “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation,” *Econometrica*, 50(4), 1982, pp.987–1007.
- Hurvich, C. M., E. Moulines, and P. Soulier, “Estimating Long Memory in Volatility,” *Econometrica*, 73(4), 2005, pp.1283–1328.
- Kulperger, R. and H. Yu, “High Moment Partial Sum Processes of Residuals in GARCH models and Their Applications,” *Annals of Statistics*, 33(5), 2005, pp.2395–2422.

- Nelson, D. B., “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, 59(2), 1991, pp.247–370.
- Nishina, K. and M. N. Nabil, “Return Dynamics of Japanese Stock Index Options,” *The Japanese Economic Review*, 48(1), 1997, pp.43–64.
- Politis, D. N., J. P. Romano, and M. Wolf, *Subsampling*, 2nd edition, Springer, 1999.
- Ruiz, E., and H. Veiga, “Modelling Long-memory Volatilities with Leverage Effect: A-LMSV versus FIEGARCH,” *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(6), 2008, pp.2846–2862.
- Schoffer, O., “HY-A-PARCH: A Stationary A-PARCH Model with Long Memory,” Technical Report 4003, Fachbereich Statistik, Universität Dortmund, 2003.
- Straumann, D., *Estimation in Conditionally Heteroskedastic Time Series Models*, Springer-Verlag, 2005.
- Taylor, S. J., “Consequences for Option Pricing for a Long Memory in Volatility,” Working Paper 2001/017, Lancaster University Management School, 2001.
- Tse, Y. K., “The Conditional Heteroskedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate,” *Journal of Applied Econometrics*, 13(1), 1998, pp.49–55.
- White, H., “Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models,” *Econometrica*, 50(1), 1982, pp.1–25.
- White, H., *Estimation, Inference and Specification Analysis*, Cambridge University Press, 1996.

表 1: ボラティリティの長期記憶性と非対称性の検定

(a) ボラティリティの長期記憶性の検定

	10%	5%	1%
標準正規分布			
臨界値	1.282	1.645	2.326
$H_0$ が棄却された数	66	38	8
シミュレーション			
臨界値	1.174	1.471	2.105
$H_0$ が棄却された数	69	53	18

注) FIEGARCH モデルの  $d$  に関して、 $H_0 : d = 0$ 、 $H_1 : d > 0$  とする仮説検定を行っている。シミュレーションによる臨界値は、リターンの式を  $R_t = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t$ 、 $\epsilon_t = \sigma_t z_t$ 、 $z_t$  の分布を分散を 1 に基準化した自由度 7 の  $t$  分布、ボラティリティの式を EGARCH モデルとして大きさ 1500 のリターンを発生させ、それを使って LM 統計量を計算するという作業を 5000 回繰り返して求めた。 $H_0$  が棄却された数は、異なる 78 の期間の中で  $H_0$  が棄却された期間の数を表す。

(b) FIEGARCH モデルにおけるボラティリティの非対称性の検定

	10%	5%	1%
標準正規分布			
臨界値	-1.645	-1.960	-2.576
$H_0$ が棄却された数	58	54	18
シミュレーション			
臨界値	-1.416	-1.663	-2.201
$H_0$ が棄却された数	60	58	38

注) FIEGARCH モデルの  $\delta$  に関して、 $H_0 : \delta = 0$ 、 $H_1 : \delta < 0$  とする仮説検定を行っている。シミュレーションによる臨界値は、リターンの式を  $R_t = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t$ 、 $\epsilon_t = \sigma_t z_t$ 、 $z_t$  の分布を分散を 1 に基準化した自由度 7 の  $t$  分布、ボラティリティの式を FIEGARCH モデルとして大きさ 1500 のリターンを発生させ、それを使って LM 統計量を計算するという作業を 5000 回繰り返して求めた。 $H_0$  が棄却された数は、異なる 78 の期間の中で  $H_0$  が棄却された期間の数を表す。



## (c) EGARCH モデルにおけるボラティリティの非対称性の検定

	10%	5%	1%
標準正規分布			
臨界値	-1.645	-1.960	-2.576
$H_0$ が棄却された数	77	77	75
シミュレーション			
臨界値	-1.710	-2.042	-2.620
$H_0$ が棄却された数	77	77	75

注) EGARCH モデルの  $\delta$  に関して、 $H_0 : \delta = 0$ 、 $H_1 : \delta < 0$  とする仮説検定を行っている。シミュレーションによる臨界値は、リターンの式を  $R_t = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t$ 、 $\epsilon_t = \sigma_t z_t$ 、 $z_t$  の分布を分散を 1 に基準化した自由度 7 の  $t$  分布、ボラティリティの式を EGARCH モデルとして大きさ 1500 のリターンを発生させ、それを使って LM 統計量を計算するという作業を 5000 回繰り返して求めた。 $H_0$  が棄却された数は、異なる 78 の期間の中で  $H_0$  が棄却された期間の数を表す。

表 2: マネネスによるオプションの分類

	コールオプション	プットオプション
$S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	deep-in-the-money (DITM)
$0.91 < S/K < 0.97$	at-the-money (OTM)	in-the-money (ITM)
$0.97 < S/K < 1.03$	at-the-money (ATM)	at-the-money (ATM)
$1.03 < S/K < 1.09$	in-the-money (ITM)	at-the-money (OTM)
$1.09 < S/K$	deep-in-the-money (DITM)	deep-out-of-the-money (DOTM)

注)  $S$  は原資産価格、 $K$  は権利行使価格を表す。

表 3: 危険中立性の仮定の下でのオプション価格の比較

(a) コールオプション

	DOTM	OTM	ATM	ITM	DITM	全体
標本数	200	131	116	79	189	715
ME						
FIEGARCH	0.407	22.651	39.081	18.837	-1.422	12.310
EGARCH	1.569	30.317	51.910	29.805	0.137	17.745
GARCH	9.134	37.519	43.764	11.265	-6.197	16.136
BS	11.134	20.292	21.018	-6.382	-7.130	7.653
RMSE						
FIEGARCH	10.040	34.956	55.752	44.865	47.215	39.598
EGARCH	11.389	43.538	68.110	52.095	47.514	45.087
GARCH	16.711	49.225	66.070	49.530	48.729	46.141
BS	35.025	61.092	79.505	56.326	48.788	55.065
MER						
FIEGARCH	0.360	0.690	0.168	0.029	0.001	0.258
EGARCH	0.622	0.949	0.218	0.042	0.001	0.388
GARCH	1.975	1.299	0.213	0.021	-0.003	0.827
BS	1.278	0.384	0.072	-0.006	-0.003	0.438
RMSER						
FIEGARCH	1.356	1.061	0.253	0.061	0.026	0.855
EGARCH	1.764	1.471	0.323	0.072	0.026	1.134
GARCH	3.252	2.119	0.374	0.071	0.028	1.950
BS	3.259	1.058	0.264	0.076	0.028	1.785

## (b) プットオプション

	DOTM	OTM	ATM	ITM	DITM	合計
標本数	269	102	115	99	145	730
ME						
FIEGARCH	-1.399	15.413	35.697	22.566	0.498	10.421
EGARCH	0.429	25.346	48.792	30.445	1.257	15.765
GARCH	-7.501	7.700	40.477	34.660	4.659	10.314
BS	-7.851	-6.943	17.080	11.664	4.978	1.398
RMSE						
FIEGARCH	22.880	49.889	66.058	65.205	50.087	47.990
EGARCH	23.158	55.464	76.389	69.577	49.859	51.933
GARCH	26.635	54.518	75.066	71.767	49.602	52.456
BS	30.899	65.768	88.985	77.009	50.708	59.318
MER						
FIEGARCH	0.356	0.395	0.171	0.034	0.002	0.218
EGARCH	0.669	0.570	0.220	0.043	0.002	0.367
GARCH	-0.092	0.359	0.193	0.049	0.004	0.054
BS	-0.554	-0.073	0.057	0.017	0.004	-0.202
RMSER						
FIEGARCH	1.145	0.675	0.285	0.082	0.020	0.749
EGARCH	1.617	0.929	0.348	0.089	0.020	1.051
GARCH	0.973	0.779	0.343	0.095	0.021	0.674
BS	0.809	0.489	0.250	0.088	0.022	0.535

表 4: リスクプレミアムの検定

	下側			上側		
	1%	5%	10%	10%	5%	1%
標準正規分布						
臨界値	-2.576	-1.960	-1.645	1.645	1.960	2.576
$H_0$ が棄却された数	0	0	0	0	0	0
シミュレーション						
臨界値	-2.421	-1.775	-1.505	1.648	1.941	2.518
$H_0$ が棄却された数	0	0	0	0	0	0

注) リターンの式を  $R_t = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \lambda\sigma_t + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t = \sigma_t z_t$  にした時の  $\lambda$  に関して、 $H_0 : \lambda = 0$ 、 $H_1 : \lambda \neq 0$  とする仮説検定を行っている。シミュレーションによる臨界値は、上記のリターンの式で  $\lambda = 0$ 、 $z_t$  の分布を分散を 1 に基準化した自由度 7 の  $t$  分布にし、ポラティリティの式を FIEGARCH モデルとして大きさ 1500 のリターンを発生させ、それを使って LM 統計量を計算するという作業を 5000 回繰り返して求めた。 $H_0$  が棄却された数は、異なる 78 の期間の中で  $H_0$  が棄却された期間の数を表す。

表 5: Duan [1995] のモデルによるオプション価格の比較

(a) コールオプション

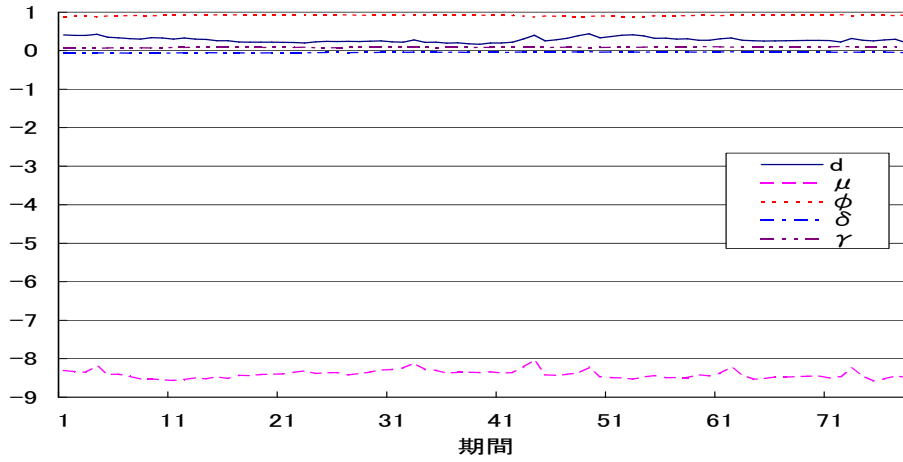
	DOTM	OTM	ATM	ITM	DITM	全体
標本数	200	131	116	79	189	715
ME						
FIEGARCH	0.349	22.501	38.918	18.666	-1.551	12.187
EGARCH	1.438	29.950	51.447	29.566	0.144	17.541
GARCH	8.729	36.999	43.976	11.990	-6.046	16.082
BS	11.134	20.292	21.018	-6.382	-7.130	7.653
RMSE						
FIEGARCH	10.097	34.927	55.495	44.815	47.268	39.549
EGARCH	11.295	43.249	67.824	51.892	47.701	44.985
GARCH	16.485	48.704	65.819	49.327	48.642	45.910
BS	35.025	61.092	79.505	56.326	48.788	55.065
MER						
FIEGARCH	0.374	0.685	0.167	0.029	0.001	0.261
EGARCH	0.616	0.941	0.217	0.041	0.001	0.385
GARCH	1.861	1.268	0.213	0.022	-0.003	0.789
BS	1.278	0.384	0.072	-0.006	-0.003	0.438
RMSER						
FIEGARCH	1.384	1.046	0.251	0.061	0.026	0.864
EGARCH	1.748	1.456	0.322	0.072	0.026	1.123
GARCH	3.075	2.059	0.374	0.071	0.028	1.856
BS	3.259	1.058	0.264	0.076	0.028	1.785

## (b) プットオプション

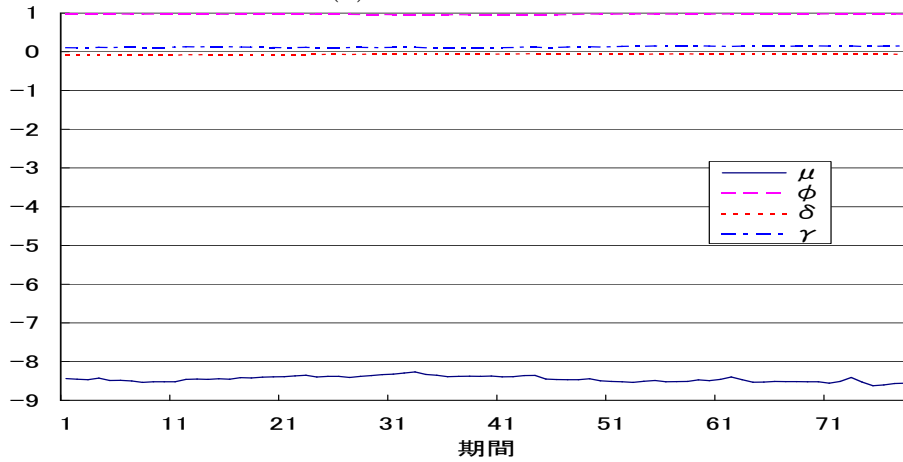
	DOTM	OTM	ATM	ITM	DITM	合計
標本数	269	102	115	99	145	730
ME						
FIEGARCH	-1.492	15.349	35.590	22.361	0.350	10.304
EGARCH	0.339	24.962	48.349	30.083	1.329	15.573
GARCH	-7.337	8.294	40.648	34.067	4.288	10.330
BS	-7.851	-6.943	17.080	11.664	4.978	1.398
RMSE						
FIEGARCH	22.928	49.785	66.050	65.358	50.221	48.037
EGARCH	23.079	55.230	76.064	69.437	49.744	51.762
GARCH	26.578	54.086	74.626	71.286	49.595	52.193
BS	30.899	65.768	88.985	77.009	50.708	59.318
MER						
FIEGARCH	0.348	0.391	0.170	0.033	0.002	0.215
EGARCH	0.687	0.566	0.219	0.043	0.002	0.373
GARCH	-0.096	0.364	0.193	0.049	0.004	0.053
BS	-0.554	-0.073	0.057	0.017	0.004	-0.202
RMSER						
FIEGARCH	1.132	0.665	0.282	0.082	0.020	0.740
EGARCH	1.611	0.925	0.347	0.089	0.020	1.047
GARCH	0.935	0.778	0.342	0.094	0.021	0.653
BS	0.809	0.489	0.250	0.088	0.022	0.535

図1：パラメータの推定値

(a) FIEGARCH モデル



(b) EGARCH モデル



(c) GARCH モデル

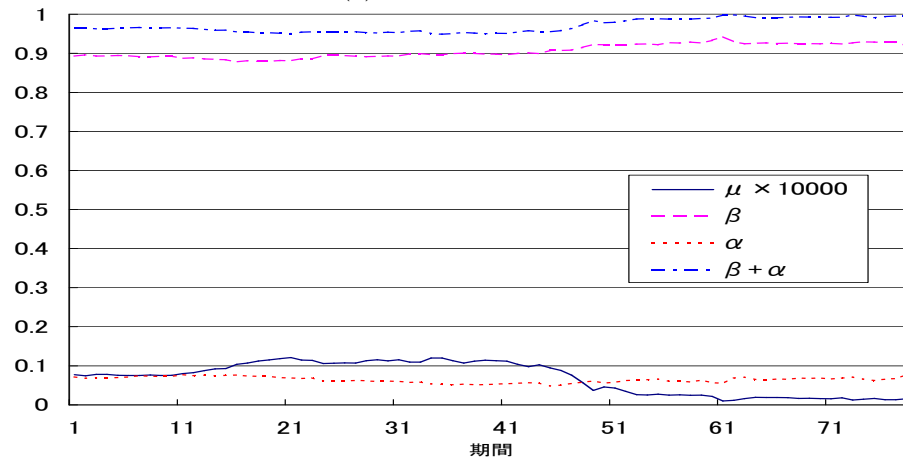
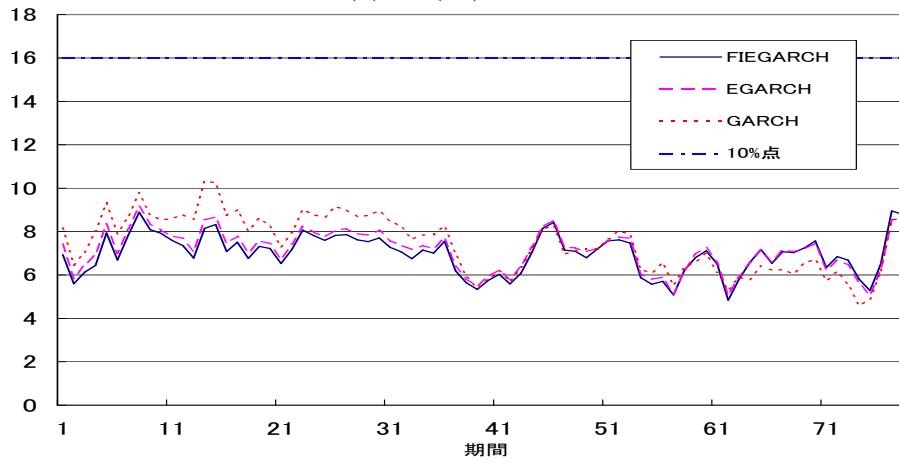
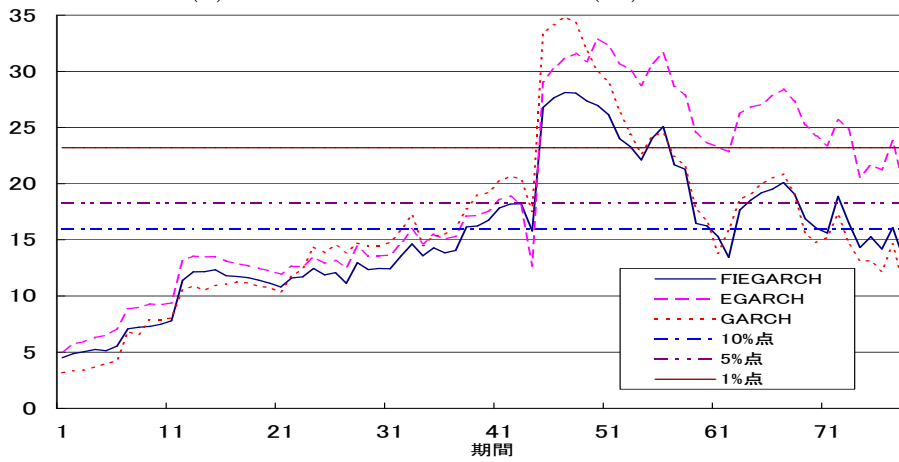


図2：GARCH型モデルの基準化した残差の統計量

(a) LB(10) 統計量



(b) 基準化した残差の2乗のLB(10) 統計量



(c) JB 統計量

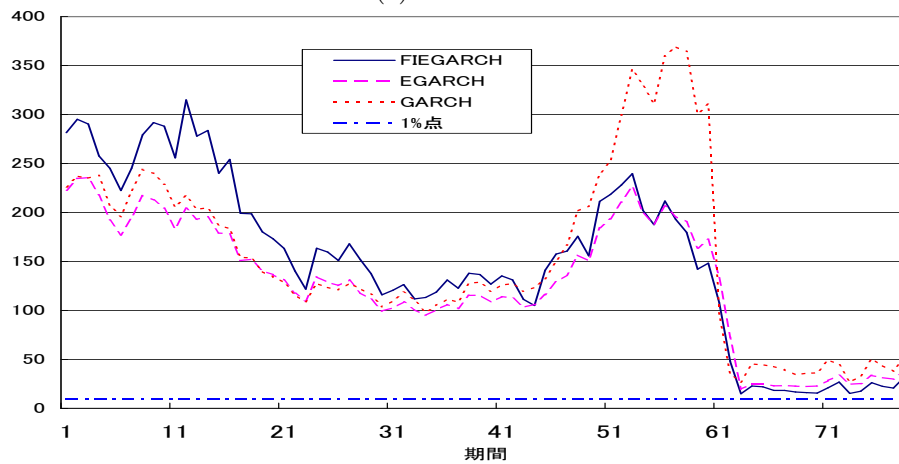
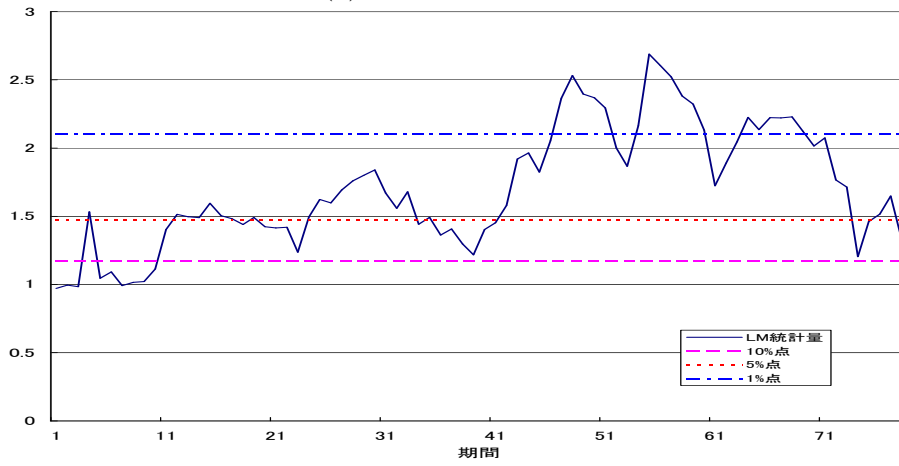
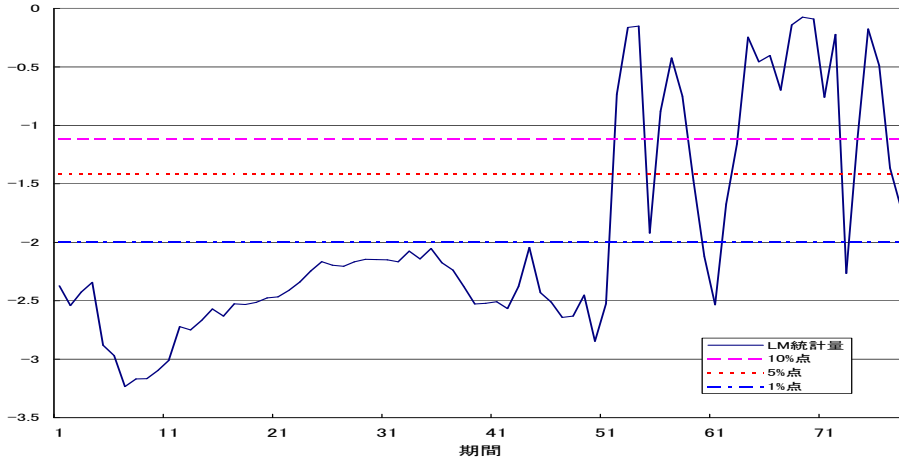




図3：LM統計量  
 (a) 長期記憶性の検定



(b) 非対称性の検定 (FIEGARCH)



(c) 非対称性の検定 (EGARCH)

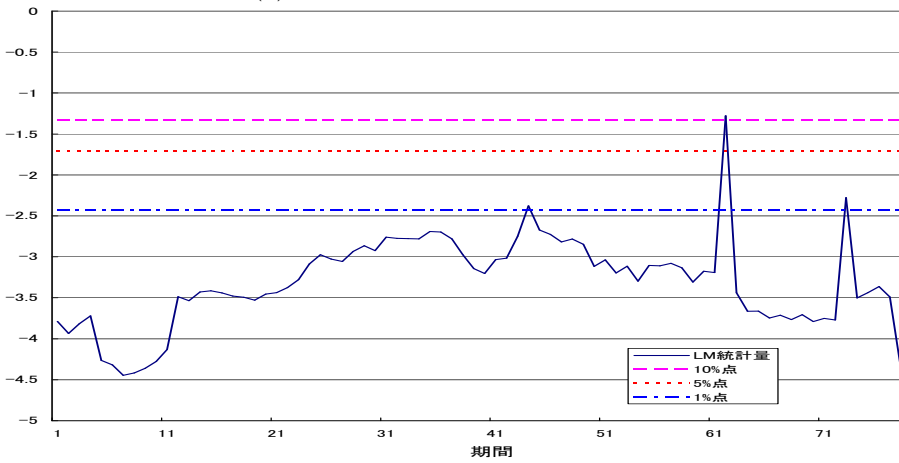
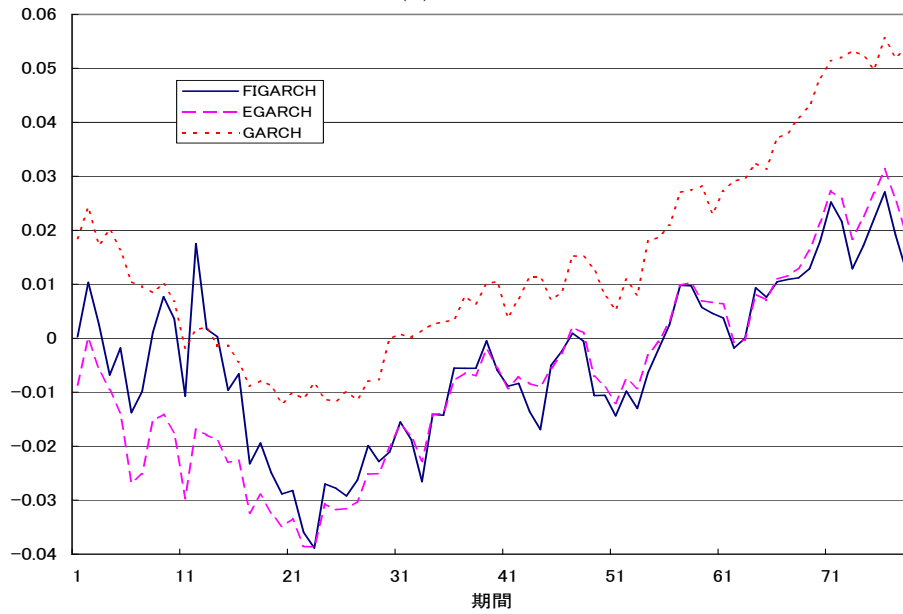


図4：リスクプレミアム $\lambda$ の推定結果

(a) 推定値



(b) LM 統計量 (FIEGARCH)

