

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

CDO プライシングの離散高速アプローチ（1）：
ツリーを用いた準解析的プライシングの
1ファクター・モデルへの適用

よこやしんや
横谷進弥

Discussion Paper No. 2007-J-13

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい

備考：日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

CDO プライシングの離散高速アプローチ（1）：
ツリーを用いた準解析的プライシングの
1ファクター・モデルへの適用

よこや しんや
横谷 進弥*

要 旨

日本のクレジット市場では CDS（Credit Default Swap）取引やインデックス取引（iTraxx Japan）の拡充とともに、CDO（Collateralized Debt Obligation）取引も年々取引量が増しており、プライシングの高速化が実務上の重要な課題となっている。本稿では、CDO のプライシングの高速化を可能とする新しい計算手法を提示し、そのパフォーマンスを示す。この手法は、準解析的手法の枠組みの中で、条件付同時デフォルト確率をツリーを用いて正確かつ効率的に計算する手法である。ツリー・メソッドはオプション理論等で既に多くの実務家に親しまれており、本稿の手法は理論面のみならず実装面での平易さからみても実用的である。また、本稿で証明した離散特性関数とツリー・メソッドの同値性は、CDO のプライシングだけに留まらず、一般的なオプション・プライシングにおいても応用可能である。

キーワード：CDO、離散特性関数、高速フーリエ変換、ツリー・メソッド、不均等プール、オプション・プライシング

JEL classification: G12、G13

* 日本銀行金融研究所（E-mail: shinya.yokoya@boj.or.jp）

本稿は、2007年3月に日本銀行で開催された「信用リスク評価の高速化手法」をテーマとするファイナンス研究会への提出論文に加筆・修正を施したものである。同研究会の参加者からは、貴重なコメントを多数頂戴した。記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

本稿は、4月20日に公表された第1稿を改訂したものである。計算アルゴリズムを実装するうえでコーディングを効率化したこと、および4.5節の“Recursive Method”の計算アルゴリズムを訂正したことから、6節の計算事例の結果を修正している。

目次

1	はじめに	1
2	準解析的 CDO プライシング	3
2.1	1 ファクター・モデルと条件付確率の設定	3
2.2	デフォルト時損失率について	4
2.3	CDO プライシング手法	4
3	特性関数を用いた期待損失率の求め方	5
3.1	離散フーリエ変換、離散逆フーリエ変換の定義	6
3.2	評価手法	6
3.3	時間微分について	7
4	ツリーを用いた期待損失率の求め方	9
4.1	ツリーによる解法	9
4.2	演算記号の設定	9
4.3	離散フーリエ変換によるツリーの表現	10
4.4	特性関数を使った解法との同値性	11
4.5	ツリー・メソッドの工夫	12
5	感応度の計算	14
6	1 ファクター・モデルの計算事例	15
7	まとめ	19
	参考文献	20

1 はじめに

これまで、CDO (Collateralized Debt Obligation) のプライシング手法がさまざまな形で考案されてきた。CDO のプライシングで最大の問題となるのは、ポートフォリオの中に含まれる参照銘柄間の資産相関構造を考慮に入れたときの同時デフォルト確率をいかに捉えるかという問題であり、現在では Li [2000] が提唱したコピュラの応用法が定着している。コピュラとは相関構造を持つ多次元確率分布の表現法であり、これを CDO のプライシングに応用したモデルでは、(1) 確率分布の与え方 (正規分布、t 分布など)、(2) 相関の表現手法 (ファクター・モデル、相関行列のコレッキー分解法) などにより様々な分類の仕方がある。現在、クレジット市場では、(1) に関しては正規分布 (正規コピュラ) を用いることが定着しており、(2) に関しては、CDO の参照銘柄間に任意の相関行列を想定する場合は、コレッキー分解によるモンテカルロ法が用いられ¹、単一相関を想定する場合は、1 ファクター・モデルに対して数値積分を用いる手法 (以下、準解析的手法) が定着している。コレッキー分解を用いた手法は、所与の相関構造を正確に反映させるため、精緻な評価が可能となる反面、計算に時間を要するという問題を抱えている。そこで、所与の相関構造をマルチ・ファクター・モデルで表現し、それに対してモンテカルロ法の分散減少法 (加重サンプリング法や分割化法等) を応用する研究がなされている (Glasserman and Li [2005]、Chen and Glasserman [2006])。もっとも、実務において標準的手法としての地位を確立したものは未だない。

本稿では、近年 CDO の高速計算手法として定着化している正規コピュラと 1 ファクター・モデルの組み合わせに対して、オプションのプライシングなどに用いられているツリー・メソッドを活用した新しい手法を提示する。ツリー・メソッドは、様々な準解析的手法に応用できるが本稿ではまず単一相関を想定した 1 ファクター・モデルに適応し、プライシングの計算を大幅に高速化させる効率的な手法であることを示す。

準解析的手法に基づくプライシングは、(A) 共通ファクターの確率変数を所与とした条件付デフォルト確率を考えることで各参照銘柄のデフォルト事象を独立なものとして捉え、(B) その条件付確率のもとでプール全体の条件付デフォルト確率を求め、(C) 共通ファクターの確率変数に対して数値積分を用いて期待値を求める、という手順を踏む。現在、この分野で注目されているのは (B) に関する「互いに独立なデフォルト事象のもとでプール全体の条件付同時デフォルト確率をいかに求めるか」という技術であり、本稿もこれを扱ったものである。(B) の問題は、もし単一相関、均一デフォルト時エクスポージャー、均一デフォルト率を仮定すれ

¹相関を持った正規乱数をコレッキー分解法を用いて発生させる手法は、湯前・鈴木 [2000] に詳しい。

ば、2項分布で計算することができるが、3つの仮定のうち1つでも成立しない場合、2項分布では正確に計算できない。そこで、近年の多くの研究では、大数の法則や中心極限定理に基づき近似的に同時確率を求める手法の開発に関心が集まっている (Richard and Ordovas [2006]、安藤 [2005])。近似手法は参照銘柄数が大きいほど近似精度が高いという性質を持っているため、銀行のポートフォリオ分析など参照銘柄が多い分析では、計算速度の面で有益である。一方、CDO、FtD (First-to-Default) 等のクレジット商品の参照銘柄は銀行のポートフォリオと比べ圧倒的に少なく (日本のクレジット市場では、CDO は平均 100 銘柄、FtD は平均 10 ~ 20 銘柄) 近似手法では近似誤差が問題となり得る。特に、エクイティの近似誤差が大きい傾向がある。これに対して、Laurent and Gregory [2005] は、厳密な条件付同時確率を算出できる手法として、条件付同時確率分布と一対一対応している離散特性関数 (離散フーリエ変換) に対して離散逆フーリエ変換を行う手法を推奨している。その際、高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform, FFT) を用いているが、FFT は条件付同時デフォルト確率の計算手法として速くはなく、特に、デフォルト時エクスポージャーが不均等なプールでは計算負荷が大きくなるという批判がある (Richard and Ordovas [2006])。

そこで、本稿では、均等・不均等の区別なく条件付同時確率を高速に計算する手法として、ツリー・メソッドを用いた手法を提案し、そのパフォーマンスを比較、評価する。このツリー・メソッドは、離散特性関数に対して離散逆フーリエ変換を行った手法と理論的に同値であり、厳密な条件付同時確率を求めることができ、かつ計算速度が速いという優れた特性を保っている。また、この手法は Andersen, Sidenius and Basu [2003] が提示した格子を使った手法 “Recursive Method” の効率化と捉えることもできる。彼らの手法は、全ての格子点を計算するものであったが、ツリー・メソッドではこれを大幅に効率化することができる。

さらに、このツリー・メソッドはこれまでの準解析的手法における様々な研究成果に対して殆どそのまま応用することができる。その一例として、Andersen, Sidenius and Basu [2003] に提示されている感応度計算²のツリー・メソッドによる応用を説明する。

以下、2節では、CDO の 1 ファクター・モデルにおけるプライシング手法の概要を説明し、3節では2節を踏まえ、離散特性関数を利用した CDO トランシェの期待損失率の求め方を説明する。4節では本稿の主要論点であるツリー・メソッドによる CDO トランシェの期待損失率の求め方を説明するとともに、同手法が3節で説明した特性関数を用いた解法との同値性を有していることを証明する。5節で

²感応度とは、CDO のヘッジやリスク管理に用いる指標で、CDO の理論価格式を任意のパラメータ (CDS (Credit Default Swap) スプレッドや資産相関など) について微分もしくは差分したものを指す。

は応用例として感応度の計算法を示す。6節では1ファクター・モデルの計算速度について従来の手法と比較し、大幅な高速化が可能となることを示す。7節はまとめと本稿のプライシング法の応用例を述べる。

2 準解析的CDOプライシング

本節では、1ファクター・モデルと条件付確率の設定を行ったうえで、準解析的なCDOのプライシング手法を説明する。

2.1 1ファクター・モデルと条件付確率の設定

各参照銘柄間の資産相関を ρ ($0 \leq \rho \leq 1$) で表すことができると仮定すると、1ファクター・モデルは、参照銘柄数を m として、以下のように定義することができる。

$$v_i = \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\epsilon_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

ここで、 Y, ϵ_i は互いに独立な標準正規分布に従うとする。

v_i を各参照企業の資産価値を決定付ける確率変数であるとする、資産価値は共通のファクター項（共通ファクター） Y と、独自の要因（固有ファクター） ϵ_i によって決まる。

ここで、各参照企業の時点 t でのデフォルト確率を \hat{p}_i とする（以下の議論は任意の t について成立するため、 t を省いて表記する）。(1) 式で v_i は標準正規分布に従うことから、

$$\hat{p}_i = \Pr[v_i < \Phi^{-1}(\hat{p}_i)], \quad (2)$$

が成り立つ。ここで、(1) 式の共通ファクター Y が与えられたもとでの条件付デフォルト確率を p_i とすると、

$$\begin{aligned} p_i &= \Pr[v_i < \Phi^{-1}(\hat{p}_i) | Y = y] \\ &= \Pr[\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\epsilon_i < \Phi^{-1}(\hat{p}_i) | Y = y] \\ &= \Pr\left[\epsilon_i < \frac{\Phi^{-1}(\hat{p}_i) - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}} \mid Y = y\right] \\ &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\hat{p}_i) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

となり、任意の i, j ($i \neq j$) に対して p_i, p_j は独立な事象に対する確率となる。参照銘柄全体（以下、プール）の条件付同時デフォルト確率は、この条件付デフォルト確率を用いて解くことができる。

2.2 デフォルト時損失率について

ここでは、後の説明に使うデフォルト時損失額とデフォルト時損失率についての記号の定義を行う。まず、参照銘柄のデフォルト時損失額（額面 \times (1 - 回収率)）について考える。後述するように CDO をプライシングする際、(3) 式によって求まる条件付デフォルト確率を用いて、プールの条件付同時デフォルト確率を計算することになる。そのときデフォルト時損失額が同じであれば、同時デフォルト確率は「 i 銘柄デフォルトする確率 (i は銘柄数の合計を最大とする自然数)」と定義できる。一方、デフォルト時損失額が銘柄間で異なれば、銘柄を単位として考えることは難しい³。そこで、本稿ではデフォルトを数える単位を細かくし、デフォルト時損失額の最大公約数を単位とする。このように設定することにより、各銘柄のデフォルトを「最大公約数を基準として k 単位デフォルトする (k は自然数)」という事象として捉えることができ、同時デフォルト確率もこの単位で表現することができる。ここで、デフォルト時損失額を自然数で表すことができるとし⁴、そのそれぞれの損失額を $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ とする。このとき、 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ の最大公約数を H として、

$$b_i = \frac{a_i}{H}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

を要素とするとするベクトル $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}^T$ を定義する。 b_i は各銘柄のデフォルト時損失額が H を基準として何単位分かを示す自然数である。以下では、この B を用いて同時デフォルト確率を考えていくことにする。さらに、総単位数を n とし、 $n = \sum_{i=1}^m b_i$ と定義する。

また、トランシェの損失率を表すベクトルをサイズ $n+1$ のベクトル L とし、その要素 $l_k (k = 0, 1, \dots, n)$ はプールが k 単位毀損されたときの、トランシェの損失率を表すものとする。

2.3 CDO プライシング手法

CDO トランシェのプライシングは満期までの任意時点の期待損失率を計算することができればプロテクション・レグ（デフォルト発生時の支払額）の価値は額面を掛ければよく、プレミアム・レグ（期中プレミアムの支払額）の価値は期待損失率の関数として考えることができる⁵。したがって、ここでは基礎となる期待損失率の求め方を説明する。

³例えば、全ての銘柄間でデフォルト時損失額が違うのであれば、同時デフォルトの場合の数が 2 の銘柄数乗となる。

⁴クレジット商品は各参照銘柄を億円単位で取引することが普通であり、回収率もパーセント表示で小数点以下まで細かく既定することは稀であるので、ほとんどの場合この仮定は成り立つ。

⁵Laurent and Gregory [2005] または小宮 [2003] が詳しい。

まず、時点 t までに n 単位中 k 単位だけプールが毀損する条件付同時デフォルト確率を

$$cp(t, k, n|Y), \quad (5)$$

時点 t までに n 単位中 k 単位以上プールが毀損する条件付同時デフォルト確率を

$$CP(t, k, n|Y), \quad (6)$$

とする。また、アタッチメント（トランシェの下限の総額面に対する比率）を o 、デタッチメント（トランシェの上限の総額面に対する比率）を O とし、プール全体の損失率が $[o, O]$ に収まる単位数を $[d, u]$ (d, u は自然数)⁶ とすると、時点 t のトランシェの瞬間期待損失率 $G(t)$ は次のように求まる。

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{j=d}^{u-1} l_j \frac{\partial cp(t, j, n|Y)}{\partial t} + l_u \frac{\partial CP(t, u, n|Y)}{\partial t} \right\} d\Phi(Y). \quad (7)$$

ここで t 時点の割引率を $D(t)$ とすると、時点 0 でのトランシェの割引期待損失率は、満期を T とすると以下のように求めることができる。

$$\int_0^T G(t)D(t)dt. \quad (8)$$

(7) 式、(8) 式の積分を解析的に解くことは通常困難であり、数値積分により計算することになる。上記の手法はモンテカルロ法ではなく数値積分を用いる解法であることから、「準解析的手法」と呼ばれている。

3 特性関数を用いた期待損失率の求め方

前節では、CDO の割引期待損失率を求める準解析的な手法を説明した。ここからは、 \hat{p}_i （各参照銘柄の無条件デフォルト確率）は所与とし⁷、 $D(t)$ （割引率）を確定的な関数として、(5) 式と (6) 式の条件付同時デフォルト確率の求め方のみに限定して議論を進める。本節では Laurent and Gregory [2005] が提示している離散特性関数を用いた手法を説明する。よく知られているように特性関数を逆フーリエ変換することで確率密度関数が得られる。これを条件付デフォルト確率の算出に応用する。以下、まず離散フーリエ変換、離散逆フーリエ変換を定義し、それを用いて CDO プールのデフォルト事象に対する離散特性関数を定義し、その離散逆フーリエ変換として同時デフォルト確率を求めていく。

⁶総額面を TN とすると、 $d = \min(k|o < \frac{kH}{TN}, k \in \{1, \dots, n\})$, $u = \min(k|O \leq \frac{kH}{TN}, k \in \{1, \dots, n\})$ 。

⁷通常、何らかのモデルを仮定して CDS もしくは社債のスプレッドから逆算して求める。Schönbucher [2003] が詳しい。

3.1 離散フーリエ変換、離散逆フーリエ変換の定義

本節で用いる離散フーリエ変換、離散逆フーリエ変換を定義する。ここで、求めたい単位ごとの条件付同時デフォルト確率を $x_j (j = 0, 1, \dots, n)$ とし、それらを要素とするベクトルを \mathbf{X} とする。

このとき、離散フーリエ変換は以下のように定義される。起こりうる事象の数、すなわち合計単位のデフォルトが発生する事象の数と全くデフォルトしない事象の数の和を $N (= n + 1)$ とすると、 $k = 0, 1, \dots, N - 1$ に対して、

$$f_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-\frac{2\pi i}{N} jk} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j W^{jk} = \mathbf{X}^T \mathbf{W}_k. \quad (9)$$

ただし、 i は虚数単位、 $W = \exp(-2\pi i/N)$ 、 $\mathbf{W}_k = \{W^{0k}, W^{1k}, \dots, W^{(N-1)k}\}^T$ ($k = 0, 1, \dots, N - 1$) とし、 f_k を要素とするベクトルを \mathbf{F} とする。また、 $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ を \mathbf{X} のフーリエ変換を表す関数とする ($\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{X})$)。

離散逆フーリエ変換は以下のように定義される。

$$x_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{\frac{2\pi i}{N} kj} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{-kj} = \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{W}_j^{-1}}{N}. \quad (10)$$

ここで、 $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{F})$ を \mathbf{F} の離散逆フーリエ変換を表す関数とする ($\mathbf{X} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{F})$)。

3.2 評価手法

3.1 節の定義により、求めたい条件付同時デフォルト確率 \mathbf{X} は、プール全体の特性関数 \mathbf{F} が求めれば (10) 式によって求まることがわかる。以下で、 \mathbf{F} の求め方を示す。

$\mathbf{q}_i (i = 1, 2, \dots, m)$ をサイズ $n+1$ のベクトルとして、第 1 要素を $1-p_i$ 、第 (b_i+1) 要素を p_i とし、それ以外の要素を 0 とする。このとき、 $\mathcal{F}(\mathbf{q}_i) (i = 1, 2, \dots, m)$ は各参照銘柄のデフォルト事象に対する離散特性関数 (離散フーリエ変換) となる。 $p_i (i = 1, 2, \dots, m)$ は独立なので、プール全体の離散特性関数 \mathbf{F} は以下のように求めることができる。

$$\mathbf{F} = \prod_{i=1}^m \mathcal{F}(\mathbf{q}_i). \quad (11)$$

\mathbf{F} の各要素 $f_k(k = 0, 1, \dots, n)$ は

$$\begin{aligned} f_k &= \prod_{i=1}^m \{(1 - p_i)W^{0k} + p_i W^{b_i k}\} \\ &= \prod_{i=1}^m \left\{ 1 - p_i + p_i \exp\left(-2\pi \frac{ib_i k}{N}\right) \right\} \\ &= \prod_{i=1}^m \left[1 - p_i + p_i \left\{ \cos\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) + i \sin\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) \right\} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

と計算できるので⁸、FFT を使わずにすむ。

(11) 式、(12) 式によりプール全体の離散フーリエ変換が求めれば、離散逆フーリエ変換の定義式 (10) 式により \mathbf{X} を求めることができる。以上より、トランシェの期待損失率 (Tl) は、

$$Tl = \sum_{k=0}^n l_k x_k = \mathbf{L}^T \mathcal{F}^{-1} \left(\prod_{i=1}^m \mathcal{F}(\mathbf{q}_i) \right) = \mathbf{L}^T \mathbf{X}, \quad (13)$$

と表すことができ、FFT を使って計算することができる。

3.3 時間微分について

前述したように、最終的に CDO を評価する際、(7) 式において (13) 式の時間微分を求める必要がある。もし何も工夫しないと、(13) 式を数値微分しなくては行けないが、それでは離散逆フーリエ変換を 2 度行わないとまらないため、時間が不必要にかかる。そこで、ここでは解析的に時間微分を行い、離散逆フーリエ変換を 1 回で済ませる手法を示す。

まず、(13) 式において時間依存する変数は条件付確率 p_i のみであることより、(13) 式の時間微分は以下のように表すことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{L}^T \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{L}^T \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right). \quad (14)$$

⁸最後の等式は $\cos x + i \sin x = \exp(ix)$ を用いた。

(14) 式の最後の括弧の中の微分の要素は (12) 式の時間微分であり、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_k}{\partial t} &= \frac{\partial \exp(\ln(f_k))}{\partial t} \\
&= \exp(\ln(f_k)) \frac{\partial \ln(f_k)}{\partial t} \\
&= f_k \frac{\partial \ln(f_k)}{\partial t} \\
&= f_k \sum_{i=1}^m \frac{\partial \ln(1 + p_i(W^{b_i k} - 1))}{\partial t} \\
&= f_k \sum_{i=1}^m \frac{W^{b_i k} - 1}{1 + p_i(W^{b_i k} - 1)} \frac{\partial p_i}{\partial t}, \tag{15}
\end{aligned}$$

となる。 $\partial p_i / \partial t$ については、 $p_i(t)$ が t に関して解析的な微分が不可能であれば数値微分で $(p_i(t) - p_i(t - \Delta t)) / \Delta t$ とすればよい。また、 $(W^{b_i k} - 1) / (1 + p_i(W^{b_i k} - 1))$ は分子分母ともに複素数であるので、以下のように解析的に解くことができる。ここで、

$$W^{b_i k} - 1 = \lambda_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \tag{16}$$

$$1 + p_i(W^{b_i k} - 1) = \lambda_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2), \tag{17}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\frac{W^{b_i k} - 1}{1 + p_i(W^{b_i k} - 1)} &= \frac{\lambda_1 e^{i\theta_1}}{\lambda_2 e^{i\theta_2}} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)), \tag{18}
\end{aligned}$$

と表すことができる。ただし、

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \sqrt{\left[\cos\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) - 1 \right]^2 + \sin\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right)^2}, \\
\lambda_2 &= \sqrt{\left[1 + p_i \left\{ \cos\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) - 1 \right\} \right]^2 + \left[p_i \sin\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) \right]^2}, \\
\theta_1 &= \arctan\left(\frac{\sin\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right)}{\cos\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) - 1}\right) = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{b_i k}{N}\right), \\
\theta_2 &= \arctan\left(\frac{p_i \sin\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right)}{1 + p_i \left\{ \cos\left(-2\pi \frac{b_i k}{N}\right) - 1 \right\}}\right), \tag{19}
\end{aligned}$$

となる⁹。

⁹ θ_1 の 2 つ目の等式は $\arctan \theta = \pi/2 - \operatorname{arccot} \theta$ を使う。

4 ツリーを用いた期待損失率の求め方

本節では、まず本稿の主要論点であるツリー・メソッドによる CDO トランシェの期待損失率の計算手法を示し、Černý [2004] に基づいてツリーによる解法を離散フーリエ変換を用いて表現し、それと (13) 式との同値性を示す。最後に、ツリー・メソッドにおける計算上の工夫について議論する。

4.1 ツリーによる解法

ファクター・モデルのもとでは、共通ファクターの確率変数を条件とすると、参照銘柄のデフォルト事象の独立性が成り立つことから、トランシェの条件付期待損失率はツリーを用いて以下のようにバックワード（1銘柄ごとの逐次期待損失率計算）で計算することができる。

1. ベクトル \mathbf{l} をツリーの最後に並べる（サイズは $n + 1$ 。要素は上で定義した $l_k (k = 0, 1, \dots, n)$ ）
2. サイズ $(n + 1 - b_m)$ のベクトル \mathbf{C}_m を用意し、その要素を $c_m(k) = (1 - p_m)l_k + p_m l_{k+b_m}$, $k = 0, \dots, n - b_m$ とする。
3. 同様にバックワードに計算していき、途中では、サイズ $(n + 1 - \sum_{j=i}^m b_j)$ のベクトル \mathbf{C}_i を用意し、その要素を $c_i(k) = (1 - p_i)c_{i+1}(k) + p_i c_{i+1}(k + b_i)$, $k = 0, \dots, n - \sum_{j=i}^m b_j$ とする。
4. 最後に求まる $c_0(0)$ がトランシェの条件付期待損失率となる。

図1は4銘柄、11単位のプールについて、アタッチメント（トランシェの下限）が2単位、デタッチメント（トランシェの上限）が5単位に設定されたトランシェの期待損失率の解法を図示したものである。矢印は上記アルゴリズムの2.や3.の和の計算を表している。ここでは、離散特性関数を用いた手法（3節）との同値性を示すためにバックワード・アルゴリズムを示したが、さらに効率的に計算できるフォワード・アルゴリズムが存在し、これは4.5節で示す。

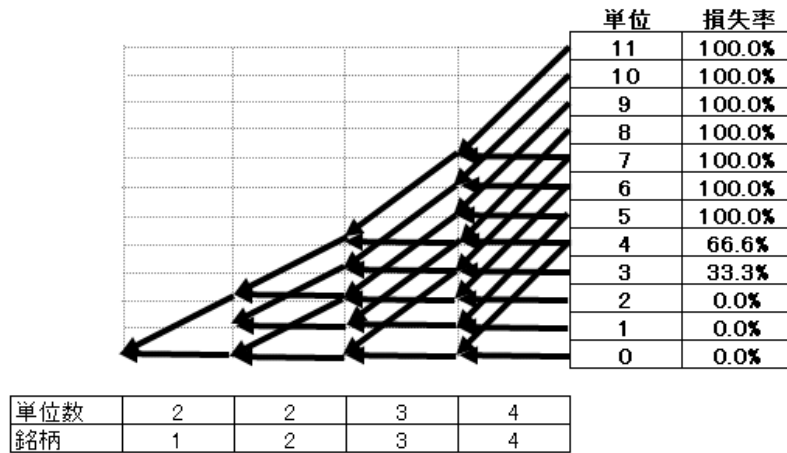
4.2 演算記号の設定

ここで、後で必要となる関数 $\text{rev}(\cdot)$ と演算記号 $*$ を設定しておく。

$\text{rev}(\cdot)$ は、 $\mathbf{g} = \{g_0, g_1, \dots, g_{N-1}\}$ として、以下のように定義される関数である。

$$\text{rev}(\mathbf{g}) = \{g_0, g_{N-1}, g_{N-2}, \dots, g_1\}.$$

図 1: バックワード・アルゴリズムの例



また、* はコンボリュージョン (畳込み) を表す記号であり、 $\mathbf{g} = \{g_0, g_1, \dots, g_{N-1}\}$ 、 $\mathbf{h} = \{h_0, h_1, \dots, h_{N-1}\}$ とすると、 $\mathbf{g} * \mathbf{h}$ はサイズ N のベクトルで、第 $(1+j)$ 要素 ($j = 0, \dots, N-1$) は次のように定義される。

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_{j-k} h_k. \quad (20)$$

上式では、 g の要素記号 $j-k$ が負になることがあるが、そのときは $j-k$ に N を加えて g の要素を選択する。

4.3 離散フーリエ変換によるツリーの表現

4.1 節で示したツリーによる解法の離散フーリエ変換による表現を Černy [2004] に沿って説明する。ちなみに、Černy [2004] は 2 項ツリーのバックワードによる解の離散フーリエ変換による表現法を提示したが、以下はその一般化である。

3.2 節で定義した $\mathbf{q}_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を用いて、TL を

$$\mathbf{TL} = \mathbf{L} * \text{rev}(\mathbf{q}_1) * \dots * \text{rev}(\mathbf{q}_m), \quad (21)$$

と定義すると、TL の第 1 要素 TL_0 が 4.1 節のツリーによる解 $c_0(0)$ と一致する¹⁰。ちなみに、均等プールであれば (全ての銘柄に対して $b_i = b_j (i \neq j)$ のとき) 2 項ツリーを表現していることになる。

¹⁰(21) 式の導出法は Černy [2004] を参照。

また、上記の \mathbf{g}, \mathbf{h} の設定を用いると以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbf{g} * \mathbf{h}) &= \mathcal{F}(\mathbf{g})\mathcal{F}(\mathbf{h}), \\
\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{g} * \mathbf{h}) &= N\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{g})\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{h}), \\
\mathcal{F}(\text{rev}(\mathbf{g})) &= N\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{g}), \\
\mathcal{F}^{-1}(\text{rev}(\mathbf{g})) &= \frac{\mathcal{F}(\mathbf{g})}{N}, \\
\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{g})) &= \mathbf{g}, \\
\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathbf{g})) &= \mathbf{g}.
\end{aligned} \tag{22}$$

(22) 式より、(21) 式は離散フーリエ変換を用いて以下のように表すことができる。

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{TL}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{L})N^m \prod_{i=1}^m \mathcal{F}^{-1}(\text{rev}(\mathbf{q}_i)), \tag{23}$$

$$\mathbf{TL} = \mathcal{F} \left(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{L}) \prod_{i=1}^m \mathcal{F}(\mathbf{q}_i) \right). \tag{24}$$

4.4 特性関数を使った解法との同値性

Černy [2004] はツリーを用いた解が (24) 式により求まる \mathbf{TL} の第 1 要素と一致することを示したが、(11) 式、(22) 式より、以下のように式を展開することができる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{TL} &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{L})\mathcal{F}(\mathbf{X})) \\
&= \mathcal{F}(N\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{L})\mathcal{F}^{-1}(\text{rev}(\mathbf{X}))) \\
&= \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{L} * \text{rev}(\mathbf{X}))) \\
&= \mathbf{L} * \text{rev}(\mathbf{X}).
\end{aligned} \tag{25}$$

この \mathbf{TL} の第 1 要素 TL_0 は $\mathbf{L}^T \mathbf{X}$ と等しいので、(13) 式により \mathbf{TL} の第 1 要素 TL_0 は

$$TL_0 = Tl, \tag{26}$$

が成り立つ。つまり、4.1 節のツリーを用いた手法により、特性関数を用いた期待損失率と厳密に一致する解が求められたことになる。

以上のことを一般化して定理としてまとめると、以下のようになる。

定理 (ツリー・メソッドと離散特性関数を用いた手法の同値性)

トランシェの損失率ベクトルを \mathbf{L} 、各銘柄の条件付確率ベクトルを $\mathbf{q}_i (i = 1, \dots, m)$ とする。ただし、各 \mathbf{q}_i は $N (= \sum_{j=1}^m b_j + 1)$ 次ベクトルで、第 1 要素から第 $1 + b_i$ 要素までを $\tilde{p}_i(k) (k = 1, \dots, 1 + b_i)$ 、ただし、 $0 \leq \tilde{p}_i(k) \leq 1$ 、 $\sum_{k=1}^{1+b_i} \tilde{p}_i(k) = 1$ 、それ以外の要素は 0 とし、 \mathbf{L} も N 次ベクトルとする。このとき、ツリー・メソッドにより求まる条件付期待損失率は

$$\mathbf{L}^T \mathcal{F}^{-1} \left(\prod_{i=1}^m \mathcal{F}(\mathbf{q}_i) \right), \quad (27)$$

と同値である。

3 節以降の説明は、定理において $\tilde{p}_i(k) (k = 1, \dots, 1 + b_i)$ を $\tilde{p}_i(1) = 1 - p_i$ (p_i は i 銘柄の条件付デフォルト確率)、 $\tilde{p}_i(1 + b_i) = p_i$ 、それ以外は $\tilde{p}_i(k) = 0 (k = 2, \dots, b_i)$ としたものに相当する。定理のように $\mathbf{q}_i (i = 1, \dots, m)$ を一般化した設定からも (26) 式を導き出すことができる¹¹。

4.5 ツリー・メソッドの工夫

4.1 節では、離散特性関数を用いた手法との同値性を表現するためにバックワードのツリー・メソッド・アルゴリズムを示したが、CDO をプライシングする場合は更なる工夫を施したフォワード・アルゴリズムを構成することができる。

工夫のための着眼点は 2 点あり、第 1 点は 4.1 節の計算はフォワード・アルゴリズムでも計算でき、その結果ツリーの最後の列がプールの条件付同時デフォルト確率になる¹²という点である。もう 1 つの着眼点は、CDO ではプール全体の損失率がデタッチメント (トランシェの上限) を超えた場合、トランシェの損失率は 1 となり、トランシェの損失率が 1 となる確率は 1 から「デタッチメント・ポイントより低い単位まで毀損する確率」を引けばよいという点である。

したがって、必要なツリーの高さはデタッチメント・ポイントより 1 単位低い単位までであり、ツリーをフォワードで計算し、最後の列の条件付同時デフォルト確率とそれに相応するトランシェの損失率を掛け合わせ、さらに 1 から条件付同時デフォルト率の和を引いた値を足し合わせれば、トランシェの条件付期待損失率が求まる。

¹¹この定理の応用については、7 節のまとめで言及する。

¹²離散逆フーリエ変換とツリー・メソッドが同値であることから明らか。

上記の計算を数式で表すと以下ようになる。 $l_k (k = 0, \dots, n)$ をトランシェの損失率、 $x_k (k = 0, \dots, n)$ をツリーから求まる条件付同時デフォルト確率、デタッチメントより小さい最大の（前述した最大公約数 H を単位とした）単位数を $detach-$ とすると、トランシェの条件付期待損失率 Tl は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} Tl &= \sum_{k=0}^{detach-} l_k x_k + \left(1 - \sum_{k=0}^{detach-} x_k \right) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{detach-} (l_k - 1) x_k. \end{aligned} \quad (28)$$

また、3.3 節と同様に (7) 式において (28) 式の時間微分を用意する必要があるが、

$$\frac{\partial Tl(t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{detach-} (l_k - 1) \frac{\partial x_k}{\partial t}, \quad (29)$$

を計算すればよい。ただ、 $\partial x_k / \partial t$ は数値微分をする必要がある。

以上より、ツリーのフォワード・アルゴリズムは次のように与えられる。

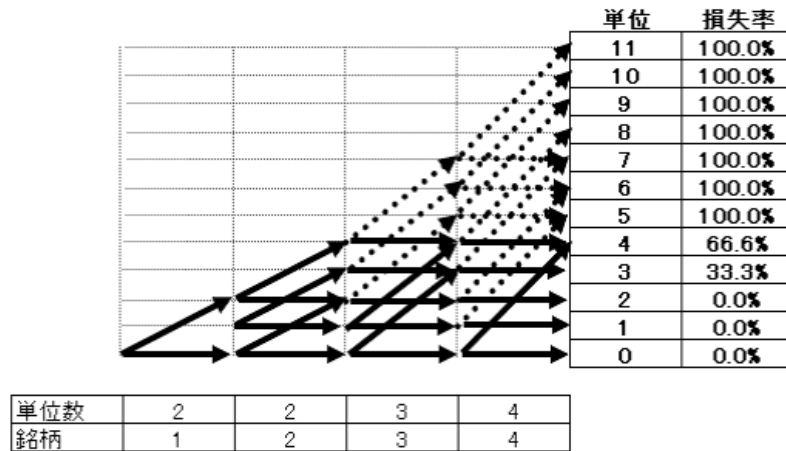
1. $c_0(0) = 1$ とする。
2. $i = 1, \dots, m$ の順序で、サイズ $(1 + \sum_{j=1}^i b_j)$ のベクトル C_i を用意し（ただし、 $1 + \sum_{j=1}^i b_j > detach-$ の時は、サイズを $(detach-) + 1$ とする）、各要素は $c_i(k) = p_i c_{i-1}(k - b_i) + (1 - p_i) c_{i-1}(k)_{k=0, \dots, (\text{Size of } C_{i-1})}$ と計算する。ただし、 $k - b_i < 0$ の際は第 1 項を 0 とする。逆に、 $c_{i-1}(k)$ がない場合は第 2 項を 0 とする。
3. 最後の C_m の要素が $c_m(k) = x_k$ （条件付同時デフォルト確率）となるので、(29) 式により条件付期待損失率の時間微分が求まる。

上記のアルゴリズムでは、デタッチメントを考慮しなければ、格子の総計は

$$\sum_{i=1}^m \left(1 + \sum_{j=1}^i b_j \right), \quad (30)$$

となる。この格子の総計がツリーの計算量と比例するので、これを最小化させた方が計算負荷が少なくてすむ。そのためには、上記のアルゴリズムの前に、銘柄をデフォルト時エクスポージャー (b_i) の小さい順に並べておくとよい。ちなみに、上記の計算結果は並べ方に対して無差別になることが (21) 式の畳込みの性質によ

図 2: フォワード・アルゴリズムの例



り保証されている。なお、Andersen *et al.* [2003] の “Recursive Method” は、全ての過程で $C_i (i = 1, \dots, m)$ のサイズを $1 + \sum_{j=1}^i b_j$ として計算する手法を提示しているが、本稿のアルゴリズムの方がより効率的である。

図 2 は図 1 と同じ CDO についてフォワード・アルゴリズムを図示したものである。実線の矢印が実際に計算が必要な和の計算を表しており、点線は Andersen, Sidenius and Basu [2003] の “Recursive Method” においてさらに付加される和の計算を表している¹³。図 1、図 2 の 2 つの図を比べるとフォワード・アルゴリズムによる計算手法の効率性を視覚的に理解することができる。

また、同じプール内で複数のトランシェを同時にプライシングする場合¹⁴、この手法を用いることで計算が非常に効率的になる。つまり、同じプールであれば、条件付同時確率 (X) は同一なので、まず計算するトランシェのうち最上位 (シニア) のトランシェを計算し、そのツリーの結果 (条件付同時確率) をメモリに記録しておき、他のトランシェに用いればよいのである。このようにすることで、最上位のトランシェ以外はツリーを構築することなく計算することができる。

5 感応度の計算

4 節の手法は、感応度の計算にも活用できる。CDO を評価する場合、プレミアムと同時に各参照銘柄の CDS のスプレッドの変化に対する感応度を計算すること

¹³CDO トランシェのデタッチメントは低い (高くても 30%) のので、本稿のフォワード・アルゴリズムは “Recursive Method” と比べ計算を相当部分を省略することができる。

¹⁴全てのトランシェに対する資産相関 (ρ) が同じであることを仮定する。

が実務上必要となる。本節ではその計算で用いる条件付期待損失率の「無条件」デフォルト確率に対する感応度の解法について Andersen, Sidenius and Basu [2003] に倣って説明する。

(28) 式により、条件付期待損失率の各参照銘柄の無条件デフォルト確率 \hat{p}_i による微分は $i = 1, \dots, m$ に対して、

$$\frac{\partial Tl}{\partial \hat{p}_i} = \frac{\partial p_i}{\partial \hat{p}_i} \frac{\partial Tl}{\partial p_i} = \frac{\partial p_i}{\partial \hat{p}_i} \sum_{k=0}^{detach-} (l_k - 1) \frac{\partial x_k}{\partial p_i}, \quad (31)$$

となる。

まず、(31) 式の $\partial p_i / \partial \hat{p}_i$ は、(3) 式により以下のように計算することができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial \hat{p}_i} &= \partial \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\hat{p}_i) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}} \right) / \partial \hat{p}_i \\ &= \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\hat{p}_i) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}} \right) \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(\hat{p}_i))\sqrt{1-\rho}}. \end{aligned} \quad (32)$$

ただし、 $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数である。

次に、 $\partial x_k / \partial p_i$ の計算について考える。条件付同時デフォルト確率 (X) は、4.5 節のフォワード・アルゴリズムを用いて求めればよいが、その解は (21) 式の畳込みの性質により銘柄の並べ方に関して無差別であった。したがって、第 i 銘柄のみ対象銘柄から除いたプールの条件付デフォルト確率を $X^{(i)}$ とすると、

$$x_k = x_k^{(i)}(1 - p_i) + x_{k-b_i}^{(i)}p_i, \quad k = 0, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m \quad (33)$$

が成り立つ。これより、

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_i} = x_{k-b_i}^{(i)} - x_k^{(i)}, \quad \text{if } k < b_i \text{ then } x_{k-b_i}^{(i)} = 0, \quad (34)$$

が求まる。ちなみに、(33) 式より、 $x_k^{(i)}$ は x_k が既知であれば求めることができる。つまり、一度トランシェの理論価格を計算した際に用いた同時デフォルト確率をメモリに記録しておけば、それを用いて $x_k^{(i)}$ を計算することができるため、感応度の計算用に新たにツリーを構築する必要はない。

6 1ファクター・モデルの計算事例

本節では、1ファクター・モデルにおけるモンテカルロ法（以下、MC法）を使った結果とツリー・メソッド、FFTを用いた手法、Andersen, Sidenius and Basu [2003] の“Recursive Method”の比較を行う。また、5節で説明した感応度の計算速度の例を示す。

表 1: プール 2 の額面と単位数

銘柄	額面 (億円)	単位
1 ~ 10	1.0	2
11 ~ 20	1.5	3
21 ~ 30	2.0	4
31 ~ 40	2.5	5
41 ~ 50	3.0	6

計算を行うにあたり、均等プールと不均等プールでのパフォーマンスを比較するため額面構成のみが異なる想定プールを 2 つ用意した。計算対象とする CDO は 50 銘柄の CDS (Credit Default Swap) を原資産とするシンセティック CDO であり、満期は 5 年、クーポンの支払いは年 4 回とし、デフォルト時に経過利子分を受け渡す契約とする。割引率は固定ショートレート関数 ($\exp(-rt)$) を仮定し、 $r = 1.34\%$ とする。各参照銘柄の CDS も満期は 5 年、クーポン支払いは年 4 回とし、デフォルト時に経過利子分を受け渡す契約とする。全銘柄のデフォルト時回収率は 40% とする。2 つのプールのうち 1 番目 (以後、プール 1) は各々 1 億円の同額面とし (したがって、デフォルト時損失額の単位数は全て 1 単位)、2 番目 (プール 2) は表 1 に示したように、10 銘柄ごと違う額面のプールとした。満期 5 年の CDS スプレッドは 1 銘柄目が 2bp (1bp = 0.01%)、2 銘柄目が 4bp、と 2bp ずつ上昇し、50 銘柄目が 100bp とする¹⁵。全ての銘柄のデフォルト確率に対して固定ハザードレート関数 ($1 - \exp(-ht)$) を仮定し、各 h は CDS スプレッドから逆算した。また、単一相関係数 ((1) 式の ρ) は 20% に設定した。ちなみに、数値積分はガウス求積法を用いており、その中で (7) 式に対してはガウス = エルミート (Gauss = Hermite) 法を、(8) 式に対する積分はガウス = ルジャンドル (Gauss = Legendre) 法を適用し、(7) 式は 10 分割、(8) 式は 40 分割¹⁶して計算した。

上記の設定のもとで、まずトランシェの計算時間を比較してみる¹⁷。計算時間は使用する PC によって異なるため、プール 1 のツリー・メソッドを 1 に基準化し、他の手法がツリー・メソッドの何倍要したかを示した。表 2 は左がプール 1、右がプール 2 の結果である。どちらの表もアタッチメント 6%、デタッチメント 9% のトランシェの理論価格 (スプレッド) を計算している。「MC 法」は Li [2000] の手法により 100 万回のシミュレーションによって計算した結果を示しており、「ツリー」

¹⁵ プール 2 の設定は、あえて数値積分の収束が悪くなるケースを想定した。CDS のスプレッドが大きい銘柄ほど額面を大きくすると、数値積分の収束が遅くなる。

¹⁶ 各クーポン期間内 (今回は 0.25 年を想定) ごとに 2 分割の積分を行った。

¹⁷ プログラム言語は C++ で、コンパイラーは Microsoft Visual C++.Net 2003 を用いた。筆者の PC のスペックは、CPU が Intel(R) Celeron(R) 2.66GHz で、メモリは 512MB である。

表 2: 1 ファクター・モデルの計算時間：プール1 ツリー・メソッドの計算時間を 1 に基準化（トランシェ：6%～9%）

	プール1		プール2	
	スプレッド [bp]	時間	スプレッド [bp]	時間
MC 法	147.0	1535.0	222.2	1538.0
ツリー	146.9	1	222.2	2.0
FFT	146.9	51.1	222.2	193.2
Recursive	146.9	2.0	222.2	5.3

は 4.5 節のツリー・メソッド、「FFT」は 3 節の FFT を使った手法¹⁸、「Recursive」は Andersen *et al.* [2003] の “Recursive Method” を各々用いて計算した結果である。表 2 をみると、プール 1 においてもプール 2 においてもトランシェのスプレッドは全ての手法でほぼ同じであるが、計算時間はツリー・メソッドが他の手法に比べ明らかに速いことがわかる¹⁹。既存の研究成果である「Recursive」と比べても、プール 1、プール 2 のどちらも約 2 倍の差がある²⁰。また「FFT」や「Recursive」に比べて不均等プールでも計算速度が大きく悪化しないことが窺える。

4.5 節で、同一プールの複数トランシェをプライシングするときは上位のトランシェの計算のときに使う条件付同時デフォルト確率を記録して、他のトランシェに再利用すると効率的であることを述べたが、実際の効果を表 3 と表 4 に示した。表 3 がプール 1 を、表 4 がプール 2 を計算した結果である。「メモリなし」列はメモリを用いないで計算した時の各トランシェにかかる計算時間とその合計である。「メモリあり」の「合計」の行はメモリを使った場合の計算時間である。プール 1 の 12% をアタッチメント・ポイントとするトランシェにかかる計算時間を 1 として比較した²¹。メモリの活用によりプール 1、プール 2 のどちらも約 3 倍弱の差が生じており、メモリを使った方が効率的であることがわかる。また、表中の「MC 法」と「ツリー」の列のスプレッド格差は 1bp 以内である。ちなみに、「メモリなし」の列でトランシェごとの計算時間が異なるのは、フォワード・アルゴリズムを適用した場合、低いトランシェほど計算が必要な同時デフォルト確率の数が少なくなるからである。

最後に、5 節で説明した感応度の計算の応用事例として、CDS スプレッド感応度の計算例を示す。具体的には、CDS スプレッドが 1bp 上昇したときの CDO トラ

¹⁸FFT には “FFTW” のライブラリを用いた。http://www.fftw.org/ 参照。

¹⁹筆者の PC ではプール 1（均等プール）に対するツリー・メソッドの計算時間は約 0.05 秒であった。

²⁰この比率は銘柄が増えるごとに大きくなる。

²¹筆者の PC ではこの計算時間は 0.09 秒であった。

表 3: メモリーを使った手法の効果 (プール1): 12%をアタッチメントとするトランシェにかかる計算時間を1としたときの比較

アタッチメント	デタッチメント	スプレッド [bp]		時間	
		MC 法	ツリー	メモリなし	メモリあり
0 %	3 %	1,466.2	1,466.3	0.50	
3 %	6 %	423.2	423.3	0.65	
6 %	9 %	147.0	146.9	0.67	
9 %	12 %	60.4	60.0	0.67	
12 %	22 %	11.5	11.3	1	
合 計				3.35	1.18

表 4: メモリーを使った手法の効果 (プール2): プール1の12%をアタッチメントとするトランシェにかかる計算時間を1としたときの比較

アタッチメント	デタッチメント	スプレッド [bp]		時間	
		MC 法	ツリー	メモリなし	メモリあり
0 %	3 %	1,651.5	1,651.5	0.82	
3 %	6 %	544.9	545.2	1.16	
6 %	9 %	222.2	222.2	1.33	
9 %	12 %	97.0	96.7	1.67	
12 %	22 %	21.9	21.7	2.49	
合 計				7.37	2.68

ンシェの理論価格の変化幅を求めた。5節のような解析的な手法を用いなくとも、数値差分を行うことで同様な結果が得られるが、全ての銘柄に対して計算する場合は(銘柄数+1)回分だけトランシェの価格を計算する必要がある(今回の例では51回)。表5はトランシェの価格の計算時間に50銘柄の感応度の計算時間を加えたものを示しており、各トランシェごと価格を1回計算する時間を1に基準化して表している。プールやトランシェによって結果は様々であるが、いずれも51を下回っており、数値差分より速く計算できることがわかる²²。

²²この比率は銘柄数が大きくなると小さくなる。

表 5: 全銘柄の CDS スプレッド感応度の計算時間：トランシェの現在価値の計算時間（これを 1 とする）+ 全 50 銘柄の感応度の計算時間

プール	プール 1		プール 2	
トランシェ	0%~3%	6%~9%	0%~3%	6%~9%
時間	44.2	35.0	27.67	19.50

7 まとめ

本稿では、CDO トランシェのプライシングを高速化する手法として、ツリー・メソッドと計算アルゴリズム上の工夫を提示した。1ファクター・モデルに正規コピュラを用いた準解析的手法に、ツリー・メソッドを応用する手法を示し、その高速化の効果を CDO 価格の計算速度比較によって確認した。この手法は、トランシェの真の条件付同時デフォルト確率を計算する手法であるという点で他の近似手法と比べ優れており、しかも一般的なバスケット商品の銘柄数であれば高速に計算でき、かつ理論面、実装面での平易さから実用的であるといえる。

本稿で示した手法は様々な応用可能性を有している。考えうる応用例として以下のような活用事例が挙げられる。

1. 近年、日本のクレジット市場にも CDO のインデックスであるトランチド・インデックス (iTraxx Japan) が普及し始めてきたが、同取引で指標となるベース・コレレーションやコンパウンド・コレレーション²³の計算には本稿で説明した 1ファクター・モデルが用いられており、ツリー・メソッドを使うことで、効率的に計算することができる。
2. プライシングのみならずデフォルト率に関する感応度の計算も平易かつ高速に計算することができる。
3. 本稿では正規コピュラを用いたが、t-コピュラ (Andersen, Sidenius and Basu [2003]) や他のコピュラについてもツリー・メソッドにより効率的な計算が可能となる。
4. 本稿では回収率を一定とする仮定を置いたが、回収率に何らかの分布を想定することもできる²⁴。ただし、ツリーでは計算負荷が増大するため、FFT を用いたプライシングの方が高速となる可能性がある。

²³Willemann [2005] に、これらの指標の解法、特徴、注意点が詳しく示してある。

²⁴回収率に分布を導入する手法として、1 銘柄のデフォルト時エクスポージャーを b 単位に固定せず、 $b-1$ 単位や $b-2$ 単位にもある確率で起こりうると考え、これにより回収率の不確実性を近似表現するアプローチが考えられる。ただし、計算量は増大する。

5. 3 節の離散フーリエ変換による解と 4 節のツリー・メソッドによる解の同値性の証明 (4.4 節) は、Černý [2004] の 2 項ツリーと離散特性関数の同値性の証明の一般化であり、この結果はツリーを用いた一般的なオプション・プライシングに応用可能である。例えば、今回はデフォルト事象を扱うため 2 項事象のみ考察したが、多項事象を扱う場合にもツリー・メソッドは応用できる²⁵。この場合、FFT を用いた離散フーリエ変換の方が速く計算できる可能性があり、どちらか計算速度が速い方を使えばよい。また、3 項ツリーモデルなど既存の多項ツリー・モデルでは各時点における項数を一定とすることが多かったが、本稿で示した定理により一定である必要性はないことが示された。したがって、これらに応用すると様々なモデルをツリーまたは FFT によって計算することができる。

また、本稿では、1 ファクター・モデルにツリー・メソッドを適用したが、任意の相関行列に対応したマルチ・ファクター・モデルに対しても、ツリー・メソッドはプライシングを高速化させるメリットが大きい。マルチ・ファクター・モデルでの効率的な計算手法については、別稿で検証する予定である。

参考文献

- Andersen, L., J. Sidenius, and S. Basu, “All your hedges in one basket,” *Risk*, 16(11), pp. 67–72, 2003.
- Baheti, P., R. Mashal, M. Naldi, and L. Schloegl, “Squaring factor copula models,” *Risk*, 18(6), pp. 73–75, 2005.
- Černý, A., “Introduction to Fast Fourier Transform in Finance,” *Journal of Derivatives*, 12(1), pp. 73–88, 2004.
- Chen, Z. and P. Glasserman, “Fast Pricing of Basket Default Swaps,” 2006. Working paper, <http://www2.gsb.columbia.edu/faculty/pglasserman/Other/FPBDS.pdf>.
- Glasserman, P. and J. Li, “Importance sampling for portfolio credit risk,” *Management Science*, 51(11), pp. 1643–1656, 2005.

²⁵本稿では各銘柄に対して b_i 単位デフォルトが起こる事象とデフォルトが生じない事象の 2 つの事象の確率のみを考えたが、各 k 単位 ($0 \leq k \leq b_i$) すべての事象に対して確率がある多項事象の場合も成り立つことは定理 1 に示したとおりである。その一例が 4. に示した回収率が不確定な場合への応用である。

- Laurent, J. P. and J. Gregory, “Basket default swaps, CDOs and factor copulas,” *Journal of Risk*, 7, pp. 103–122, 2005.
- Li, D. X., “On default correlation: a copula function approach,” *Journal of Fixed Income*, 9(4), pp. 43–54, 2000.
- Richard, M. and R. Ordovas, “An indirect view from the saddle,” *Risk*, 19(10), pp. 94–99, 2006.
- Schönbucher, P. J., *Credit derivatives pricing models: models, pricing and implementation*, Wiley, 2003.
- Willemann, S., “An Evaluation of the Base Correlation Framework for Synthetic CDOs,” *Journal of Credit risk*, 1(4), pp. 180–190, 2005.
- 安藤美孝、「与信ポートフォリオの信用リスクの解析的な評価方法:極限損失分布およびグラニユリティ調整を軸に」、『金融研究』、第24巻別冊第2号、39–120頁、2005年。
- 小宮清孝、「CDOのプライシング・モデルとそれを用いたCDOの特性等の考察:CDOの商品性、国内市場の概説とともに」、『金融研究』、第22巻別冊第2号、89–130頁、2003年。
- 湯前祥二・鈴木輝好、『モンテカルロ法の金融工学への適用』、朝倉書店、2000年。