

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

確率変数の密度関数の展開とモーメントの算出に基づく
金利派生商品価格の効率的な近似手法について

たなか けいいち やまだ たけし わたなべ としあき
田中 敬一・山田 健・渡部 敏明

Discussion Paper No. 2006-J-10

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、ディスカッション・ペーパーの内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

確率変数の密度関数の展開とモーメントの算出に基づく 金利派生商品価格の効率的な近似手法について

たなか けいいち*、やまだ たけし、わたなべ としあき
田中 敬一*、山田 健†、渡部 敏明‡

要 旨

本稿では、確率変数の密度関数の展開（エッジワース展開、グラム・シャリエ展開および一般化エッジワース展開）を用いて、金利派生商品の価格を近似する手法を検討した。確率変数の密度関数の展開では、モーメントを求める必要があるが、このモーメントの値をできるだけ短時間かつ正確に求めることが、近似を行ううえで重要である。

スワップションでは、スワップ価値が割引債価格の線形和で表現されることに着目した。金利の期間構造モデルの設定によっては、割引債価格の多項式、およびモーメントが解析的に求められるので、スワップション価格の近似式が得られた。また、CMS の評価では、コンベキシティ調整を必要とするが、それを割引債価格の多項式として近似を行うことで、CMS レートの近似式を得た。さらに、CMS レートの近似式に、密度関数の展開を組み合わせることで、CMS オプション価格の近似式を導出した。

そのうえで、アフィン型期間構造モデルであるガウシアン・モデルと CIR モデルを用いた数値計算例で、スワップション価格、CMS レートおよび CMS オプション価格を求めた。その結果、本稿の手法は、短い計算時間で高い近似精度を示すことを確認した。

キーワード：エッジワース展開、グラム・シャリエ展開、一般化エッジワース展開、スワップション、CMS、CMS オプション

JEL classification: G13

* 首都大学東京大学院社会科学部研究科（E-mail: tanaka-keiichi@center.tmu.ac.jp）

† 日本銀行金融研究所（E-mail: takeshi.yamada@boj.or.jp）

‡ 一橋大学経済研究所、日本銀行金融研究所（E-mail: watanabe@ier.hit-u.ac.jp）

本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

目次

1 . はじめに	1
2 . スワップション価格の近似手法	2
(1) スワップション価格の理論式	3
(2) 密度関数の展開を用いたスワップション価格の近似手法	4
3 . CMS レート、同オプション価格の近似手法	9
(1) CMS	9
(2) CMS オプション	12
4 . 各種金利派生商品の価格の数値計算例	13
(1) モデルのパラメータ	14
(2) グラム・シャリエ展開を用いたスワップション価格	18
(3) 一般化エッジワース展開を用いたスワップション価格	24
(4) CMS、CMS オプション	25
5 . おわりに	28
補論 1 . チェビシェフ・エルミート多項式	29
補論 2 . アフィン型期間構造モデル	29
補論 3 . 一般化エッジワース展開を用いたスワップション価格の導出	31
補論 4 . CIR モデルによる割引債価格の密度関数とその微分	33
参考文献	35

1. はじめに

金融機関は、一般に、多様な種類の派生商品を顧客に売買しているほか、自らもポジションを保有している。このため、金融機関の実務では、派生商品の価格をできるだけ正確にかつできるだけ短時間に求めることが重要となる。派生商品の価格を理論的に求める手続きでは、原資産価格の変動に特定の確率過程（モデル）が仮定される。この場合、価格の解析的表現が得られれば、パラメータに適当な値を代入することで簡単に価格を得ることができる。しかし、多くの場合で価格の解析的表現が得られないため、実務では、価格の算出にはモンテカルロ・シミュレーション等の何らかの数値計算手法を用いることが一般的となっている。

数値計算手法を用いて派生商品の価格を求める場合、「できるだけ正確に」という要請と「できるだけ短時間に」という要請は、一般には両立しない。これは、正確な価格を求めようとすれば、例えばシミュレーションの試行回数を増やすことが必要となり、その分時間を要することになるからである（トレードオフの問題）。こうした数値計算手法のトレードオフ問題を緩和して、価格の解析解がない派生商品の価格を求めるために、価格の近似解を考える。価格の近似解を得ることができれば、シミュレーションで多数の試行を繰り返すこともなく、短時間で価格を導出することが可能となるため、実務上、非常に有益なツールとなる。

そうした手法の1つに、満期での派生商品価値の分布の密度関数を計算が容易な他の関数で表現することで、派生商品価格の近似解を得るという手法がある。その展開方法にはエッジワース展開やグラム・シャリエ展開等がある。この手法を用いた先行研究としては、株式オプションを対象とした Jarrow and Rudd [1982]（以下、JR）のほか、金利派生商品の1つであるスワップションを対象とした Collin-Dufresne and Goldstein [2002]（以下、CDG）が挙げられる。JRは株価に対数正規分布を仮定した上で、一般化エッジワース展開を使って株式オプション価格の近似式を導出している。また、CDGはスポット・レート・モデルに多次元ガウシアン・モデルあるいは多次元コックス＝インガソル＝ロス（CIR）モデル（Cox, Ingersoll, and Ross [1985]）を仮定して、エッジワース展開を用いてスワップション価格の近似式を導出している。

最近では、Tanaka, Yamada and Watanabe [2005]（以下、TYW）が、CDGが扱

ったスワップション価格の近似解をグラム・シャリエ展開を用いて求めた。TYW は、スワップション価格の近似解を比較することで、TYW の手法が CDG のそれよりも高い精度となることを示した。また、TYW は、別の金利派生商品としてコンスタント・マチュリティ・スワップ (CMS) と CMS オプションの近似的な評価手法を検討した。CMS と CMS オプションの評価では、コンベキシティ調整 (convexity adjustment) と呼ばれる調整項を計算する必要があるが、これの解析解を得ることは一般的には困難である。Benhamou [2000]は、割引債価格が対数正規分布に従うモデルにウィナー・カオス展開を用いて、CMS 価格(レート)のコンベキシティ調整の近似解を導出している¹。密度関数を展開によって近似する手法はモーメントを必要とするが、金利の期間構造モデルによってはそのモーメントが解析的に表現される。TYW では、このことを用いて CMS レートの近似解を求めることで、コンベキシティ調整の精度を調べている。また、近似した CMS レートにグラム・シャリエ展開を用いることで、CMS オプションの価格の近似解を導出している。

本稿では、CDG と TYW の内容を解説するとともに、JR を応用することで、一般化エッジワース展開を用いてスワップションの価格の近似解を求め、その近似精度を検討する。

本稿の構成は以下のとおりである。2 節では、エッジワース展開、グラム・シャリエ展開、一般化エッジワース展開を用いてスワップション価格を算出する枠組みを説明し、スワップション価格の近似解を導出する。3 節では、密度関数の近似を行う際に必要なモーメントを用いて、CMS レートを近似しコンベキシティ調整の近似解を導出する。また、CMS レートにグラム・シャリエ展開を用いて、CMS オプション価格の近似式を導出する。4 節では、アフィン型期間構造モデルを用いて数値計算を行い、スワップション、CMS、CMS オプションそれぞれの価格の近似の精度を検討する。5 節で結論を述べる。

2 . スワップション価格の近似手法

本節では、確率変数の密度関数を近似することでスワップションの価格を求める方法を説明する。まず、スワップション価格の導出の基本となる理論式を示す。次

¹ コンベキシティ調整に関する各種文献は、Benhamou [2000]参照。

に、確率変数の密度関数を展開することでスワップション価格の近似式を求める。ここで用いる展開は、エッジワース展開、グラム・シャリエ展開および一般化エッジワース展開である。

(1) スワップション価格の理論式

時点 T を満期とする割引債の時点 t における価格を $P(t, T)$ 、確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義される J 次元標準ブラウン運動を W とする。また、リスク中立測度 Q 、リスク中立測度下でのブラウン運動 W^Q 、および任意の満期 T で $P(t, T)$ を基準財とするフォワード測度がそれぞれ存在すると仮定する。

行使レートを κ 、オプション満期を T_0 とし、オプションが行使されたときに $[T_1, \dots, T_N]$ ($T_0 < \dots < T_N$) の各時点で固定金利と変動金利の交換が行われるスワップションを考える。ここで、受払い時点間の間隔 $\delta = T_i - T_{i-1}$ ($i = 1, \dots, N$) は一定であるとする。

このとき、スワップの固定金利受け側の時点 $t (< T_0)$ での価値を $SV(t)$ とすると、次式を得る。

$$SV(t) = -P(t, T_0) + \delta \kappa \sum_{i=1}^N P(t, T_i) + P(t, T_N) \equiv \sum_{i=0}^N a_i P(t, T_i). \quad (1)$$

無裁定性の議論より、スワップション価格 $SOV(t)$ は、 r_s を時点 s のスポット・レートとして、リスク中立測度下で $SOV(t) = E_t^Q[\exp(-\int_t^{T_0} r_s ds) \max(SV(T_0), 0)]$ となる。しかし、スワップ価値 $SV(T_0)$ と割引率 $\exp(-\int_t^{T_0} r_s ds)$ は、それぞれがスポット・レートの関数であるため相関を持つ。このため、スワップション価格をリスク中立測度で求めるためには、この相関構造を勘案する必要がある。よって、以下ではリスク中立測度と同値である T_0 -フォワード測度 ($P(t, T_0)$ を基準財とする測度) を用いて、上記の相関構造を扱う必要がない形でスワップションの価格の算出を考える。 f をオプション満期時点 T_0 におけるスワップ価値 $SV(T_0)$ の T_0 -フォワード測度下での密度関数とすれば、スワップション価格は(2)式で表される。

$$SOV(t) = P(t, T_0) E_t^{T_0} [1_{\{SV(T_0) > 0\}} SV(T_0)] = P(t, T_0) \int_0^{\infty} x f(x) dx. \quad (2)$$

したがって、 f を求めることができればスワップション価格が得られる。

また、固定金利受け手側が権利を保有するスワップションは、権利行使価格を K 、価格を $CB(T_0) = \sum_{i=1}^N b_i P(T_0, T_i)$ とする利付債のコール・オプションと捉えることもできる。この場合、スワップション価格は、キャッシュ・フローの発生時点毎にフォワード測度 (T_i -フォワード測度 ($i = 0, \dots, N$)) を用意した上で、オプションがイン・ザ・マネー (ITM) になる確率を評価することによって、次の(3)式で表すことができる。

$$\begin{aligned}
 SOV(t) &= E_t^Q \left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} \max(CB(T_0) - K, 0) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N b_i E_t^Q \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} 1_{\{CB(T_0) > K\}} \right] - K E_t^Q \left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} 1_{\{CB(T_0) > K\}} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N b_i P(t, T_i) E_t^{T_i} [1_{\{CB(T_0) > K\}}] - K P(t, T_0) E_t^{T_0} [1_{\{CB(T_0) > K\}}].
 \end{aligned} \tag{3}$$

なお、スワップション価格の算出を(2)、(3)式のようなフォワード測度の下ではなくスワップ測度の下で行う手法もある。例えば、Schrager and Pelsser [2005] は、スワップ測度の下でのフォワード・スワップ・レートに近似を施すことで、スワップション価格の近似解を導出している²。

(2) 密度関数の展開を用いたスワップション価格の近似手法

イ. エッジワース展開、グラム・シャリエ展開による密度関数の展開

エッジワース展開やグラム・シャリエ展開では、対象となる確率変数の密度関数を特定の関数を用いて展開する。グラム・シャリエ展開は、エッジワース展開に含まれる指数関数をさらに展開し並びかえたものであり、密度関数をチェビシェフ・エルミート多項式で直交展開したものであると解釈することが可能である(同多項式の定義は補論1参照)。以下で、エッジワース展開およびグラム・シャリエ展開を説明する。

確率変数 X の密度関数を f とする。 f のエッジワース展開((4)式)とグラム・シャリエ展開((5)式)は、標準正規分布の密度関数を $\phi = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$ とし、それぞれ次式となる。

² Schrager and Pelsser [2005]は、金利の期間構造モデルにアフィン型期間構造モデルを採用している。アフィン型期間構造モデルは、補論2を参照。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{c_2}} \exp\left(\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k}{k!} D^k\right) \phi\left(\frac{x-c_1}{\sqrt{c_2}}\right), \quad (4)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k}{\sqrt{c_2}} H_k\left(\frac{x-c_1}{\sqrt{c_2}}\right) \phi\left(\frac{x-c_1}{\sqrt{c_2}}\right), \quad (5)$$

$$q_k = \frac{1}{k!} E\left[H_k\left(\frac{X-c_1}{\sqrt{c_2}}\right)\right].$$

ここで、 H_k はチェビシェフ・エルミート多項式、 D は微分演算子 d/dx である。 q_k は、密度関数 f の i 次キュムラント ($c_i, 2 \leq i \leq k$) を用いて、以下のように表現される³。

$$q_0 = 1, \quad q_1 = q_2 = 0, \quad q_3 = \frac{c_3}{3!c_2^{3/2}}, \quad q_4 = \frac{c_4}{4!c_2^2},$$

$$q_5 = \frac{c_5}{5!c_2^{5/2}}, \quad q_6 = \frac{c_6 + 10c_3^2}{6!c_2^3}, \quad q_7 = \frac{c_7 + 35c_3c_4}{7!c_2^{7/2}}, \dots$$

エッジワース展開とグラム・シャリエ展開では、それぞれの無限次数までの和は同じ値となるが、有限次数までの和は一般に等しくならない。しかし、有限次数までのエッジワース展開で、指数関数の近似の仕方によって有限次数までのグラム・シャリエ展開による表現と一致させることができる場合がある。以下の密度関数の近似では、エッジワース展開による表現とグラム・シャリエ展開による表現が、一致することをみる。

スワップション価格の(3)式の表現において、各 T_i -フォワード測度下でオプションが ITM ($CB(T_0) > K$) になる確率を求める必要がある。CDG は、密度関数 (f) の 7 次までのエッジワース展開で、次のように求めている。

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{c_2}} \exp\left[\sum_{k=3}^7 \frac{(-1)^k c_k}{k!} D^k\right] \phi\left(\frac{x-c_1}{\sqrt{c_2}}\right)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{c_2}} \left(1 + \sum_{k=3}^7 \frac{(-1)^k c_k}{k!} D^k + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{c_3}{3!} D^3\right)^2 - 2 \frac{c_3}{3!} \frac{c_4}{4!} D^3 D^4 \right)\right) \phi\left(\frac{x-c_1}{\sqrt{c_2}}\right).$$

上式は、以下のように 7 次までのグラム・シャリエ展開による表現と一致する

³ なお、 $3!q_3$ と $4!q_4$ は、それぞれ、歪度と尖度を表す。

ことが、TYW で示されている。

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{c_2}} (1 + q_3 H_3 + q_4 H_4 + q_5 H_5 + q_6 H_6 + q_7 H_7) \phi \left(\frac{x - c_1}{\sqrt{c_2}} \right),$$

$$H_k = H_k \left(\frac{x - c_1}{\sqrt{c_2}} \right).$$

(3)式に、7次までのエッジワース展開を用いると、スワップション価格は、

$$SOV(t) \approx \sum_{i=1}^N b_i P(t, T_i) \left(\sum_{j=0}^7 \gamma_j^{T_i} \lambda_j^{T_i} \right) - KP(t, T_0) \left(\sum_{j=0}^7 \gamma_j^{T_0} \lambda_j^{T_0} \right), \quad (6)$$

となる。ここで、 $\gamma_j^{T_i}$ および $\lambda_j^{T_i}$ は、それぞれ、 T_i -フォワード測度下での確率変数 $CB(T_0)$ のキュムラントおよび正規分布を用いて表現される（詳細は CDG 参照）。

一方、TYW は、(2)、(5)式から T_0 -フォワード測度下で、 L 次までのグラム・シャリエ展開によって、以下のようにスワップション価格の近似式を求めている⁴。

$$SOV(t) \approx C_1 N \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_2}} \right) + \sqrt{C_2} \phi \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_2}} \right) + \sqrt{C_2} \phi \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_2}} \right) \sum_{k=3}^L (-1)^k q_k H_{k-2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_2}} \right), \quad (7)$$

$$C_j = P(t, T_0)^j c_j \quad (j \geq 1).$$

ここで、 c_j は、 T_0 -フォワード測度下での確率変数であるスワップ価値 $SV(T_0)$ のキュムラントである。

(6)式と(7)式は、いずれもスワップション価格の近似式である。しかし、これらの式を用いて具体的にスワップション価格を計算する場合、同じ計算時間では両者による価格は必ずしも一致しない。これは、(6)式が T_i -フォワード測度

⁴ スワップション価格の近似式を微分することで、いわゆる「グリークス」を求めることができる。例えば、時点0での状態変数 ($X_i(0)$) に関するデルタは、以下で与えられる。

$$\frac{\partial SOV(0)}{\partial X_i(0)} = \frac{\partial C_2}{\partial X_i(0)} \frac{SOV(0)}{2C_2} + \sqrt{C_2} \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{\partial q_k}{\partial X_i(0)} H_{k-2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_2}} \right) \phi \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_2}} \right)$$

$$+ \left(\frac{\partial C_1}{\partial X_i(0)} - \frac{C_1}{2C_2} \frac{\partial C_2}{\partial X_i(0)} \right) \left[N \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_2}} \right) + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^{k-1} q_k H_{k-1} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_2}} \right) \phi \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_2}} \right) \right].$$

他のグリークスも同様に求めることができる。

($i=0, \dots, N$)という複数の測度に基づいている一方、(7)式は T_0 -フォワード測度という単一の測度に基づいていることによる、計算手続きの違いによるものである。

ここまでは、キュムラントを用いたスワップション価格の近似表現を説明してきた。実際にスワップション価格を求めるためには、このキュムラントの値を計算する必要がある。キュムラントの値は、通常はモーメントの値を計算することで得られる⁵。

T_i -フォワード測度の下でのキュムラントは、同測度下でのモーメントで表現される。CDGは(3)式に基づき利付債価格($CB(T_0)$)の T_i -フォワード測度下での m 次モーメントを $M_{i,m}^{CDG}$ として求めている。また、TYWは(2)式に基づき、 T_0 -測度下でのスワップ価値($SV(T_0)$)の m 次モーメントを $M_{0,m}^{TYW}$ として求めている。

$$\begin{aligned} M_{i,m}^{CDG} &= E_t^{T_i} [(CB(T_0))^m] \\ &= E_t^{T_i} \left[\left(\sum_{j=1}^N b_j P(T_0, T_j) \right)^m \right] \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_m \leq N} b_{j_1} \cdots b_{j_m} \mu^{T_i}(t, T_0, \{T_{j_1}, \dots, T_{j_m}\}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{0,m}^{TYW} &= E_t^{T_0} [(SV(T_0))^m] \\ &= E_t^{T_0} \left[\left(\sum_{j=0}^N a_j P(T_0, T_j) \right)^m \right] \\ &= \sum_{0 \leq j_1, \dots, j_m \leq N} a_{j_1} \cdots a_{j_m} \mu^{T_0}(t, T_0, \{T_{j_1}, \dots, T_{j_m}\}). \end{aligned}$$

$\mu^{T_i}(t, T_0, \{T_{j_1}, \dots, T_{j_m}\})$ は、 T_i -フォワード測度 ($i=0, \dots, N$)の下での、 $P(T_0, T_{j_k})$ の積 ($k=1, \dots, m$)の期待値である。以下では、 μ^{T_i} ($i=0, \dots, N$)を「債券モーメント」と呼称する。

⁵ キュムラント (c_i) とモーメント (μ_i) には、以下の関係がある (Stuart and Ord [1987])。

$$\begin{aligned} c_1 &= \mu_1, \quad c_2 = \mu_2 - \mu_1^2, \quad c_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3, \quad c_4 = \mu_4 - 4\mu_1\mu_2\mu_3 - 3\mu_2^2 + 12\mu_1^2\mu_2 - 6\mu_1^4, \\ c_5 &= \mu_5 - 5\mu_1\mu_2\mu_3 - 10\mu_2\mu_3\mu_4 + 20\mu_1^2\mu_3 + 30\mu_1\mu_2^2 - 60\mu_1^3\mu_2 + 24\mu_1^5, \quad c_6 = \mu_6 - 6\mu_1\mu_2\mu_3 - 15\mu_2\mu_3\mu_4 \\ &\quad + 30\mu_1^2\mu_4 - 10\mu_3^2 + 120\mu_1\mu_2\mu_3 - 120\mu_1^3\mu_3 + 30\mu_2^3 - 270\mu_1^2\mu_2^2 + 360\mu_1^4\mu_2 - 120\mu_1^6, \\ c_7 &= \mu_7 - 7\mu_1\mu_2\mu_3 - 21\mu_2\mu_3\mu_4 - 35\mu_3\mu_4\mu_5 + 140\mu_1\mu_2\mu_3^2 - 630\mu_1\mu_2^3 + 210\mu_1\mu_2\mu_4 - 1260\mu_1^2\mu_2\mu_3 \\ &\quad + 42\mu_1^2\mu_5 + 2520\mu_1^3\mu_2^2 - 210\mu_1^3\mu_4 + 840\mu_1^4\mu_3 - 2520\mu_1^5\mu_2 + 720\mu_1^7. \end{aligned}$$

$$\mu^{T_i}(t, T_0, \{T_{j_1}, \dots, T_{j_m}\}) \equiv E_t^{T_i} \left[\prod_{k=1}^m P(T_0, T_{j_k}) \right].$$

この債券モーメントが解析的に求まれば、モーメントとキュムラントの値を順に解析的に得ることができ、延いては、スワップション価格の近似値を比較的簡単に算出することが可能となる。

この点、債券モーメントが解析的に求められるモデルとしては、アフィン期間構造モデル(補論2参照)やガウシアン・タイプのヒース=ジャロウ=モートン(HJM)モデル(Musiela and Rutkowski [2005]参照)等がある。なお、補論2では、アフィン期間構造モデルに含まれる多次元ガウシアン・モデルと多次元CIRモデルにおける債券モーメントを導出している。

ロ．一般化エッジワース展開による密度関数の展開

上述のように、エッジワース展開とグラム・シャリエ展開では、対象となる密度関数は標準正規分布の密度関数によって近似が行われる。これに対して、任意の分布の密度関数を用いて対象となる密度関数の近似を行う展開が、一般化エッジワース展開である。

一般化エッジワース展開では、確率変数 F の密度関数 f を他の確率変数 G の密度関数 g と F, G の m 次キュムラント ($c_m(f), c_m(g)$) を用いて、以下のように展開する(補論3参照)。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k I_k}{k!} D^k g(x),$$

$$\begin{aligned} I_0 &= 1, \quad I_1 = c_1(f) - c_1(g), \quad I_2 = c_2(f) - c_2(g) + (c_1(f) - c_1(g))^2, \\ I_3 &= c_3(f) - c_3(g) + 3(c_1(f) - c_1(g))(c_2(f) - c_2(g)) + (c_1(f) - c_1(g))^3, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

この一般化エッジワース展開を用いて、スワップション価格の近似式を求める。まず、 f をオプション満期時点 T_0 におけるスワップ価値 $SV(T_0)$ の T_0 -フォワード測度下での密度関数とする。次に、任意の確率変数である G を選択する。スワップション価格に最も影響を与える確率変数を G とすると、近似精度が高まると考えられる。スワップ価値に最も影響を与える確率変数は、スワップ価値 $SV(T_0)$ を構成する部分の中では、想定元本額の価値 $P(T_0, T_N)$ である((1)式参照)。さらに、 G の期待値が F のそれに一致することが望ましいと考え、 G を

(9)式で定義する。 G は、 t 時点における期間 $[T_0, T_N]$ のスワップ価値の、 T_0 時点におけるフォワード価値である。(9)式では、最初の等号の右辺最終項 $P(T_0, T_N)$ 以外は定数であるとしている。

$$\begin{aligned} G &= -1 + \delta k \sum_{i=1}^N P(t, T_i) / P(t, T_0) + P(T_0, T_N) \\ &= P(T_0, T_N) - A. \quad (A \equiv 1 - \delta k \sum_{i=1}^N P(t, T_i) / P(t, T_0).) \end{aligned} \quad (9)$$

このとき、 G の密度関数 g を用いて、スワップション価格は以下のように近似される（補論3参照）。

$$\begin{aligned} SOV(t) &\approx I_0 C(A) + I_1 P(t, T_0) P_t^{T_0} [P(T_0, T_N) > A] \\ &\quad + \frac{I_2}{2!} P(t, T_0) g(0) - \frac{I_3}{3!} P(t, T_0) g'(0) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $C(A)$ は A を行使価格とする割引債のコール・オプションの時点 t での価格である。

(9)式の G では、 I_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) は、以下で与えられる。

$$I_0 = 1, \quad I_1 = 0, \quad I_2 = c_2(f) - c_2(g), \quad I_3 = c_3(f) - c_3(g), \quad \dots$$

$c_m(f)$ は、 F の m 次モーメント $E_t^{T_0} [F^m] = E_t^{T_0} [(-1 + \delta k \sum_{i=1}^N P(T_0, T_i) + P(T_0, T_N))^m]$ を使って求めることができる。また、 $c_m(g)$ も、同様に G の m 次モーメント $E_t^{T_0} [G^m] = E_t^{T_0} [(P(T_0, T_N) - A)^m]$ を使って求められる。これらのモーメントは、債券モーメントを用いて表現されることがわかる。

3 . CMS レート、同オプション価格の近似手法

本節では、まず CMS レートを債券モーメントによって近似し、コンベキシティ調整の近似解を導出する。次に、CMS レートにグラム・シャリエ展開を用いて、CMS オプションの価格の近似式を導出する。

(1) CMS

CMS とは、参照金利（変動金利）をスワップ・レートとする金利スワップ契約である。CMS の評価では、後述するようにいわゆる「コンベキシティ調整」の評価が必要となる。以下では、コンベキシティ調整の近似解の導出に焦点を当てるため、キャッシュ・フローの交換を 1 回とする CMS を対象とする。

参照金利の観測時点を T_0 、キャッシュ・フローの交換時点を T_1 ($T_0 < T_1$) とし、 $\delta = T_1 - T_0$ (=0.5 年) とする。時点 t ($t < T_0$) で、変動支払い側が時点 T_0 で観測される期間 $\tau (= \delta m)$ 年のスワップ・レートを時点 T_1 で支払い、固定金利支払い側が時点 T_1 で CMS レート ($CMS(t)$) を支払うという契約⁶を締結する。

$CMS(t)$ は、時点 t で変動金利支払い側の価値と固定金利支払い側のそれが等しくなるように定まる。時点 t では、固定金利支払い側の価値は、 $\delta P(t, T_1) CMS(t)$ で、変動金利支払い側のそれは、 $S(u, T_0, \tau)$ を時点 u で観測される $[T_0, T_0 + \tau]$ 期間のフォワード・スワップ・レート⁷として以下となる。

$$\delta E_t^Q[\exp(-\int_t^{T_1} r_s ds) S(T_0, T_0, \tau)] = \delta P(t, T_1) E_t^{T_1}[S(T_0, T_0, \tau)].$$

したがって、キャッシュ・フローの交換が 1 回の CMS では、以下の関係がある。

$$CMS(t) = E_t^{T_1}[S(T_0, T_0, \tau)].$$

ここで、フォワード・スワップ・レートが T_1 -フォワード測度下でマルチンゲールであれば、その期待値 $E_t^{T_1}[S(T_0, T_0, \tau)]$ と時点 t で観測される $S(t, T_0, \tau)$ は一致する。しかし一般に、フォワード・スワップ・レートは T_1 -フォワード測度下でマルチンゲールではないので、 $E_t^{T_1}[S(T_0, T_0, \tau)]$ と $S(t, T_0, \tau)$ とは異なる値を持つ。ここではその差を「広義のコンベキシティ調整」(以下、bCA)と呼ぶ⁸。

$$bCA \equiv E_t^{T_1}[S(T_0, T_0, \tau)] - S(t, T_0, \tau).$$

時点 t ($t < u < T_0$) で締結され、 $S(t, T_0, \tau)$ と 6MLIBOR を交換する $[T_0, T_m]$ 間の金利スワップを考える。時点 u での固定金利受け側から見たスワップ価値を $SV(u, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau)$ とすると、これは次式で与えられる。

$$SV(u, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau) = \delta \sum_{j=1}^m P(u, T_j) (S(t, T_0, \tau) - S(u, T_0, \tau)).$$

フォワード・スワップ・レートは以下のように書ける。

⁶ より一般的な設定は、Musielka and Rutkowski [2005]参照。

⁷ フォワード・スワップ・レートは、次式で与えられる。

$$S(u, T_0, \tau) = (P(u, T_0) - P(u, T_0 + \tau)) / \delta \sum_{j=1}^m P(u, T_j), \quad m = \tau / \delta.$$

⁸ CMS の参照金利を 0.5 年スワップ・レート (=6MLIBOR) とするとき、bCA=0 である。これは、 T_t 時点で観測して、 T_{t+1} 時点でキャッシュ・フロー交換が起きるフォワード 6MLIBOR は、 T_{t+1} -フォワード測度下でマルチンゲールであるからである。

$$\begin{aligned}
S(u, T_0, \tau) &= S(t, T_0, \tau) + \frac{\sum_{j=1}^m P(u, T_j)(S(u, T_0, \tau) - S(t, T_0, \tau))}{\sum_{j=1}^m P(u, T_j)} \\
&= S(t, T_0, \tau) - \frac{SV(u, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau)}{Dur(u, T_0, \tau)}.
\end{aligned}$$

ここで、 $\delta \sum_{j=1}^m P(u, T_j)$ を $Dur(u, T_0, \tau)$ とした。これはスワップ価値のデュレーションと解釈することができる。

上式で $u = T_0$ として、 T_1 -フォワード測度で期待値演算を行うと、広義のコンベキシティ調整として次式が得られる。

$$bCA = -E_t^T [SV(T_0, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau) Dur(T_0, T_0, \tau)^{-1}]. \quad (11)$$

CMS の評価を行うためには、(11)式の値を求める必要があるが、一般的にはこれを解析的に解くことはできない。そこで、以下では上述の債券モーメントを用いることによって、(11)式の近似式を導出する。

まず、 Dur の期待値を $D(t, T_0, \tau) = \delta \sum_{j=1}^m P(t, T_j) / P(t, T_0)$ とする。これはその形から確率変数 $Dur(T_0, T_0, \tau)$ と近い値になると考えられるため、以下の近似を行う。

$$\begin{aligned}
Dur(T_0, T_0, \tau)^{-1} &= \frac{D(t, T_0, \tau)^{-1}}{1 + \frac{Dur(T_0, T_0, \tau) - D(t, T_0, \tau)}{D(t, T_0, \tau)}} \\
&\approx \frac{1}{D(t, T_0, \tau)} \left(2 - \frac{Dur(T_0, T_0, \tau)}{D(t, T_0, \tau)} \right).
\end{aligned}$$

ここでは、1次近似 $(1+x)^{-1} \approx 1-x$ ($x \ll 1$) という関係を用いている⁹。

したがって、広義のコンベキシティ調整の1次近似として(12)式を得る。

⁹ 2次近似 $(1+x)^{-1} \approx 1-x+x^2$ ($x \ll 1$) を用いると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
Dur(T_0, T_0, \tau)^{-1} &= \frac{D(t, T_0, \tau)^{-1}}{1 + \frac{Dur(T_0, T_0, \tau) - D(t, T_0, \tau)}{D(t, T_0, \tau)}} \\
&\approx \frac{1}{D(t)} \left(3 - 3 \frac{Dur(T_0, T_0, \tau)}{D(t, T_0, \tau)} + \left(\frac{Dur(T_0, T_0, \tau)}{D(t, T_0, \tau)} \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{bCA} &= E_t^{T_1} [S(T_0, T_0, \tau)] - S(t, T_0, \tau) \\
&= -E_t^{T_1} [SV(T_0, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau) Dur(T_0, T_0, \tau)^{-1}] \\
&\approx -\sum_{j=0}^m a_j \left(\frac{2\mu^{T_1}(t, T_0, \{T_j\})}{D(t, T_0, \tau)} - \delta \sum_{k=1}^m \frac{\mu^{T_1}(t, T_0, \{T_j, T_k\})}{D(t, T_0, \tau)^2} \right), \tag{12} \\
a_j &= \begin{cases} -1 & \text{if } j=0, \\ \delta S(t, T_0, \tau) & \text{if } 0 < j < m, \\ 1 + \delta S(t, T_0, \tau) & \text{if } j=m. \end{cases}
\end{aligned}$$

bCA は、観測時点 T_0 とキャッシュ・フロー交換時点 T_1 という異なる時点間のコンベキシティ調整を表している。それに対して、観測時点とキャッシュ・フロー交換時点が同時点であるときのコンベキシティ調整を「狭義のコンベキシティ調整」（以下、nCA）と呼ぶ。

bCA と nCA には以下のような関係がある。(11)式を変形すると、

$$\begin{aligned}
\text{bCA} &= -E_t^{T_1} [SV(T_0, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau) Dur(T_0, T_0, \tau)^{-1}] \\
&= -Cov_t^{T_0} (SV(T_0, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau), Dur(T_0, T_0, \tau)^{-1}) \\
&\quad + (E_t^{T_0} [SV(T_0, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau) Dur(T_0, T_0, \tau)^{-1}] \\
&\quad - E_t^{T_1} [SV(T_0, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau) Dur(T_0, T_0, \tau)^{-1}]),
\end{aligned}$$

となるが、この右辺第1項は、

$$\begin{aligned}
&-Cov_t^{T_0} (SV(T_0, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau), Dur(T_0, T_0, \tau)^{-1}) \\
&= E_t^{T_0} [SV(T_0, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau) Dur(T_0, T_0, \tau)^{-1}]
\end{aligned}$$

であり、これが nCA を表す。すなわち、 T_1 -フォワード測度下の期待値が bCA で T_0 -フォワード測度下の期待値が nCA である。bCA と nCA の差を「タイミング調整」（以下、TA）と呼ぶ（Hull [2005]参照）。

(2) CMS オプション

次に(1)で考察した CMS レートの近似に、密度関数の展開を適用して、CMS オプションの評価方法を検討する。以下では、CMS レートを原資産価格とするフロア・レット価格を対象に近似を行う。

参照金利を $\tau(=\delta m)$ 年スワップ・レートとし、それを時点 T_0 で観測し、時点 T_1 ($\delta = T_1 - T_0$) でキャッシュ・フローの交換が行われる CMS を考える。オプション

の行使レートを K 、オプション満期を T_1 とすると、CMS フロア・レットの価格は(13)式で表される。

$$\begin{aligned} CMS \text{ Flooret}(t) &= E_t^Q \left[\exp\left(-\int_t^{T_1} r_s ds\right) \delta \max(K - S(T_0, T_0, \tau), 0) \right] \\ &= \delta P(t, T_1) E_t^{T_1} [\max(K - S(T_0, T_0, \tau), 0)]. \end{aligned} \quad (13)$$

(1)での考察により、スワップ・レートの1次近似は以下で与えられた。

$$\begin{aligned} S(T_0, T_0, \tau) &= S(t, T_0, \tau) + \frac{SV(T_0, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau)}{Dur(T_0, T_0, \tau)} \\ &\approx S(t, T_0, \tau) - SV(T_0, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau) \left(\frac{2}{D(t, T_0, \tau)} - \frac{1}{D(t, T_0, \tau)^2} Dur(T_0, T_0, \tau) \right). \end{aligned}$$

上式を(13)式に代入すると、CMS フロア・レットの価格は(14)式で近似される。

$$\begin{aligned} CMS \text{ Flooret}(t) &\approx \delta P(t, T_1) E_t^{T_1} \left[\max \left(K - S(t, T_0, \tau) + \frac{2SV(T_0, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau)}{D(t, T_0, \tau)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{D(t, T_0, \tau)^2} SV(T_0, S(t, T_0, \tau), T_0, \tau) Dur(T_0, T_0, \tau), 0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $SV(\cdot)$ と $Dur(\cdot)$ は上述のように債券価格の線形和で表されることから、(14)式右辺の \max の中の第1項のキウムラントは、債券モーメントで表現することが可能である。したがって、CMS フロア・レット価格の近似式を2節で扱ったスワップション価格の近似式と同様の考えで、密度関数の展開を用いて求めることが可能である。例えば、展開にグラム・シャリエ展開を用いるときは、スワップション価格の近似式である(7)式右辺における C_j に(14)式右辺の \max の中の第1項のキウムラントと $(\delta P(t, T_1))^j$ との積の値を用い、 q_j には同キウムラントの値を用いればよいことになる。

4. 各種金利派生商品の価格の数値計算例

本節では、2、3節で示した各種金利派生商品（スワップション、CMS、およびCMS オプション〈フロア・レット〉）の価格の近似式を用いて、価格の数値計算例を示す。

スポット・レートを $r(t) = \delta_0 + \delta_x^T X(t)$ とする。ここで、 $X = (X_1, \dots, X_J)^T$ は状

態変数で、リスク中立測度下で以下の確率過程に従うとする。この金利の期間構造モデルはアフィン型期間構造モデルと呼ばれる（詳細は補論2参照）。

$$dX(t) = K^Q(\theta^Q - X(t))dt + \Sigma D(X(t))dW^Q(t).$$

以下では、確率変数 X の変動モデルとして、CDG と同様にいずれもアフィン型期間構造モデルである、3ファクター・ガウシアン・モデル（以下、ガウシアン・モデル）と2ファクターCIRモデル（以下、CIRモデル）を採用する。

各金利派生商品価格の算出で用いる X の変動モデルは次のとおりである。

グラム・シャリエ展開によるスワップション価格...ガウシアン、CIR

一般化エッジワース展開によるスワップション価格...CIR

CMS レート...ガウシアン、CIR

CMS オプション（フロア・レット）価格...ガウシアン

表1に、以下で用いるガウシアン・モデルおよびCIRモデルの各変数をまとめた。

表1：ガウシアン・モデル、CIRモデルの各変数

ガウシアン	CIR
$\delta_x = (1, 1, 1)^T$	$\delta_x = (1, 1)^T$
$K^Q = \text{diag}[K_1, K_2, K_3]$	$K^Q = \text{diag}[K_1, K_2]$
$\theta^Q = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$	$\theta^Q = (\theta_1, \theta_2)^T$
$\Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]V$	$\Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2]V$
$VV^T = (\rho_{ij})_{ij}$	$VV^T = (\rho_{ij})_{ij}$
$D(X(t)) = \text{diag}[1, 1, 1]$	$D(X(t)) = \text{diag}[\sqrt{X_1(t)}, \sqrt{X_2(t)}]$

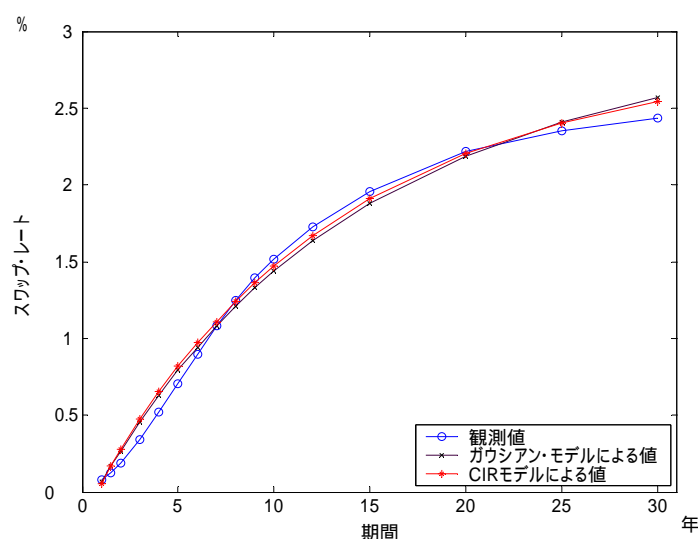
(1) モデルのパラメータ

ガウシアン・モデルとCIRモデルの各種パラメータは、観測日(2005年2月23日)の円のスワップ・レートのイールド・カーブに近似的に一致するように定めた(表2)。また、観測日のスワップ・レートのイールド・カーブ、およびモデルから構築される同イールド・カーブを図1に示す。

表 2 : ガウシアン・モデル、CIR モデルのパラメータ

	ガウシアン	CIR
δ_0	-0.0065	-0.02
K^Q	$diag[0.05, 0.1, 1]$	$diag[0.05, 0.5]$
θ^Q	$(0.015, 0.02, 0.02)^T$	$(0.085, 0.01)^T$
Σ	$diag[0.01, 0.02, 0.03]V$	$diag[0.08, 0.05]V$
VV^T	$\begin{pmatrix} 1 & -0.8 & 0.7 \\ -0.8 & 1 & -0.9 \\ 0.7 & -0.9 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$X(0)$	$(0.005, -0.02, 0.02)^T$	$(0.01, 0.01)^T$

図 1 : スワップ・レートの観測値とモデルによる値



上記の ~ の金利派生商品には、価格の解析解が存在しない。このため、本稿では 2、3 節で検討した価格の近似式の精度を比較するための基準として、別途モンテカルロ法（以下、MC 法）で算出した各派生商品の価格を「真値」とみなす。これ以降の数値計算での計算精度の評価には、各種展開手法によって計算した価格から、MC 法によって得られた真値を控除した残差（ベースス・ポイント <bp>）を用いる。

ガウシアン・モデルと CIR モデルを使った MC 法による乱数の発生方法は次のとおりである。

ガウシアン・モデルでは、 T_i -フォワード測度 ($i=0, \dots, N$) 下で T_0 時点における状態変数ベクトル $X(T_0)$ が従う多次元正規分布の平均と分散・共分散を解析的に得ることができる。このため、 T_0 における状態変数の値 (乱数) は、この分布から直接サンプリングした。なお、ガウシアン・モデルを使った MC 法では、分散減少法として負の相関を考慮した antithetic variates 法 (Glasserman [2004]) を用いた。

CIR モデルでは、各状態変数はリスク中立測度下で非心 χ^2 分布に従うように定義される。このとき、各状態変数が互いに独立であるならば、それらは T_i -フォワード測度 ($i=0, \dots, N$) 下でも非心 χ^2 分布に従う。そこで、本稿では CIR モデルの各状態変数が独立であると仮定して、 T_0 における状態変数の値 (乱数) を非心 χ^2 分布からサンプリングした (Brigo and Mercurio [2001] および Glasserman [2004] 参照)。

行使レートを ATMF (At The Money Forward swap rate¹⁰) とする、アット・ザ・マネー (ATM) でのスワップションを考える。様々なオプション期間とスワップ期間で、スワップション¹¹の価格 (bp) を、表 2 のパラメータを用いて計算した結果が表 3 である。ここでは、金利の期間構造モデルにガウシアン・モデルを採用し、MC 法を用いてスワップション価格を算出した。

表 3 : MC 法によるスワップション価格 (bp) の計算結果

		スワップ期間 (年)					
		1	2	3	5	7	10
オプション期間 (年)	1	32	57	84	138	183	231
	2	44	84	125	200	259	322
	3	54	105	154	241	309	381
	5	67	129	186	285	362	444
	7	73	138	199	302	382	467
	10	74	140	200	302	381	466

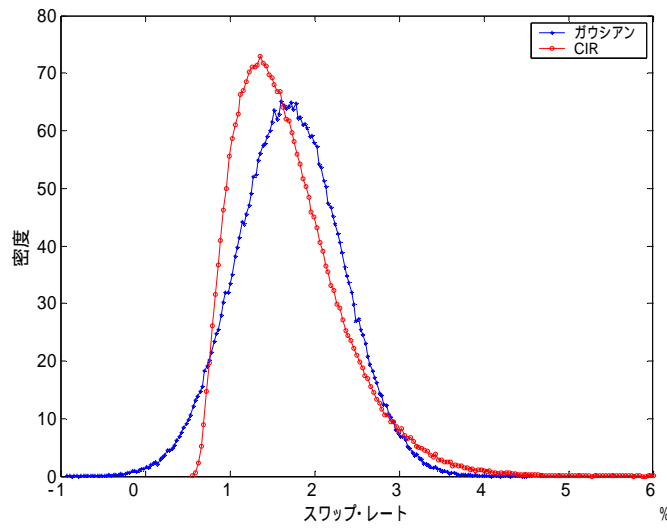
行使レートを ATMF とするときの 1 into 10 スワップションを考える。オプションの満期である 1 年後における 10 年スワップ・レートの密度関数は、図 2 のようになる。

¹⁰ 時点 t での ATMF は、以下で与えられる。

$$ATMF = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{\delta \sum_{i=1}^N P(t, T_i)}$$

¹¹ オプション期間が n 年、スワップ期間が m 年のスワップションを「 n into m スワップション」と呼ぶ。

図 2 : MC 法による 1 年後の 10 年スワップ・レートの密度関数



次に、グラム・シャリエ展開 (5式) を用いて、1 年後における 10 年スワップの価値の密度関数を計算した。ガウシアン・モデルによる密度関数を図 3 に、CIR モデルによるそれを図 4 に、それぞれ掲げた。ここで、グラム・シャリエ展開は 3 次、5 次および 7 次で行った。

図 3 : 1 年後の 10 年スワップの価値の密度関数 (ガウシアン・モデル)

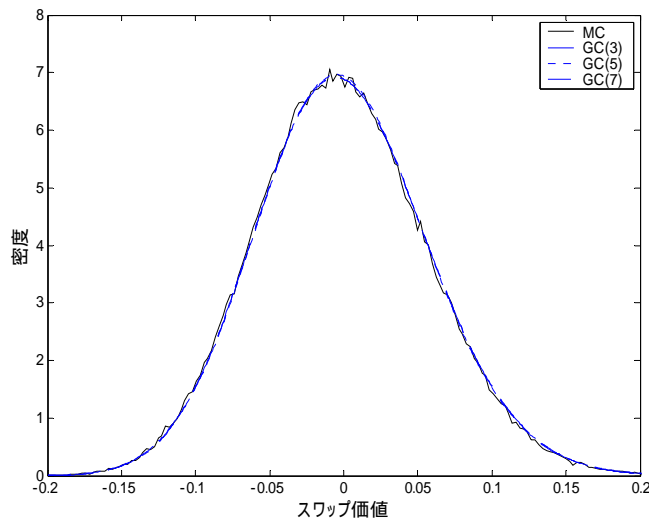


図4：1年後の10年スワップの価値の密度関数（CIRモデルの場合）

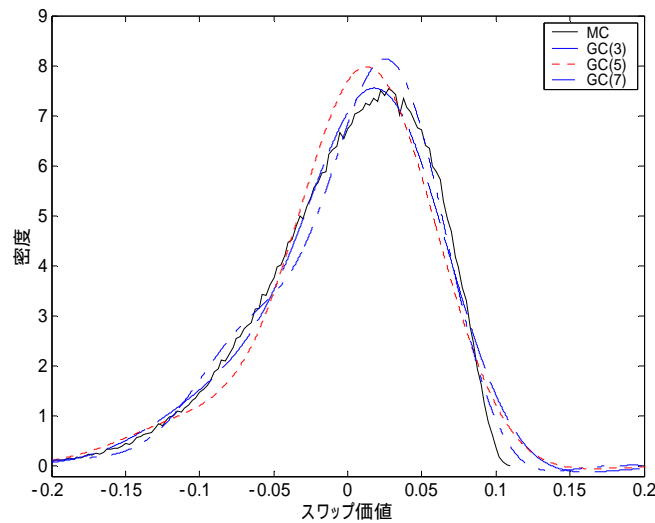


図3、4からは、ガウシアン・モデルの場合は展開次数に依らず誤差は小さい一方、CIRモデルの場合は展開次数を高くしても、比較的大きな誤差が残ることがわかる。

(2) グラム・シャリエ展開を用いたスワップション価格

イ．ガウシアン・モデル

3ファクター・ガウシアン・モデルとグラム・シャリエ展開(3~7次)を用いて、行使レートをATMF-2.5%からATMF+2.5%の範囲で、1 into 10スワップションの価格を計算する。

グラム・シャリエ展開を用いたスワップション価格の近似値は、(7)式で $L=3, 4, 5, 6, 7$ までをそれぞれ求めている。 L 次のキュムラントまで考慮した近似式を $GC(L)$ と表記する。

CDGは、 q_6, q_7 を構成する $c_6/6!$ と $c_7/7!$ はそれぞれ $(c_3/3!)^2/2$ と $c_3c_4/(3!4!)$ よりも十分小さい値であるとして¹²、 $c_6=c_7=0$ とし、 c_6 よりも番号が若いキュムラントで q_6 と q_7 を構成している。この方法では、6次以上のモーメントを計算する必要がなくなるため計算の効率化が図れる。このCDGによる方法を本稿でも採用し、これを

¹² 上述のように、以下の関係がある。

$$q_6 = \frac{c_6 + 10c_3^2}{6!c_2^3}, \quad q_7 = \frac{c_7 + 35c_3c_4}{7!c_2^{7/2}}.$$

GC(7')と呼ぶ。

ガウシアン・モデルを用いたスワップション価格の真値を計算するためのMC法では、4億回の試行を行った¹³。

計算の結果を図5に示した。図5の横軸は、行使レートのATMFからの乖離(%)、同縦軸は、MC法によって計算した価格を真値とするときの、展開の各次数で計算した価格からMC法による真値を控除した「残差」(bp)である。

図5：1 into 10 スワップションのGC展開による価格の残差 (ガウシアン・モデル)

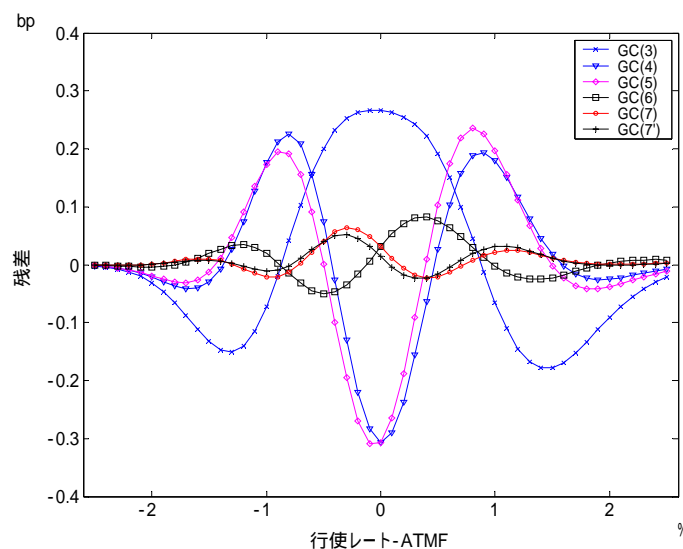


図5からは、スワップション価格の残差はGC(3)、GC(4)、GC(5)で0.3bp以下、GC(6)、GC(7)、GC(7')で0.1bp以下であることがわかる。また、GC(7')とGC(7)とは、残差は同じ水準であることもみてとれる。

GC(3)、GC(4)、GC(5)の結果をみると、グラム・シャリエ展開の次数を上げているにもかかわらず、行使レートによっては残差が改善しないことがあるが、これは、以下の理由によるものであると考えられる。

上述のように、 L 次までで近似したグラム・シャリエ展開は、次式で表される。

$$f(x) = \sum_{k=0}^L \frac{q_k}{\sqrt{c_2}} H_k \left(\frac{x - c_1}{\sqrt{c_2}} \right) \phi \left(\frac{x - c_1}{\sqrt{c_2}} \right).$$

ここで、 q_k (7 次まで)は、キュムラント(c_k)を用いて以下のように表現さ

¹³ 2000万回の試行を1セットとしたところ、20セット(計4億回)におけるスワップション価格の標準偏差は 10^{-6} のオーダーとなった。

れる（再掲）。

$$q_0 = 1, \quad q_1 = q_2 = 0, \quad q_3 = \frac{c_3}{3!c_2^{3/2}}, \quad q_4 = \frac{c_4}{4!c_2^2},$$

$$q_5 = \frac{c_5}{5!c_2^{5/2}}, \quad q_6 = \frac{c_6 + 10c_3^2}{6!c_2^3}, \quad q_7 = \frac{c_7 + 35c_3c_4}{7!c_2^{7/2}}.$$

例えば5次までのグラム・シャリエ展開を行うとしよう。このとき、展開式では、 q_1, \dots, q_5 の係数が用いられる。ところが、 q_k と c_k の上の関係から明らかのように、 q_6 と q_7 にも c_2, \dots, c_4 が用いられている。したがって、展開次数が3~5程度のグラム・シャリエ展開では、低次のモーメントの情報を必ずしも使い切れていないことになる。このことがグラム・シャリエ展開の計算精度に影響を与えていると考えられる。

ちなみに、 L 次までで近似したエッジワース展開

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{c_2}} \exp \left[\sum_{k=3}^L \frac{(-1)^k c_k}{k!} D^k \right] \phi \left(\frac{x - c_1}{\sqrt{c_2}} \right),$$

は、 c_1, \dots, c_L の情報を全て用いている。

次に、オプション期間、スワップ期間の違いによる近似精度を確認する。1 into 5 スワップションと5 into 10 スワップションの価格を、GC(3)、GC(5)、GC(7)、GC(7)で計算した結果が、それぞれ図6と図7である。残差が行使レートによって増減する点は、図5と同様である。

図6：1 into 5 スワップションのGC展開による価格の残差（ガウシアン・モデル）

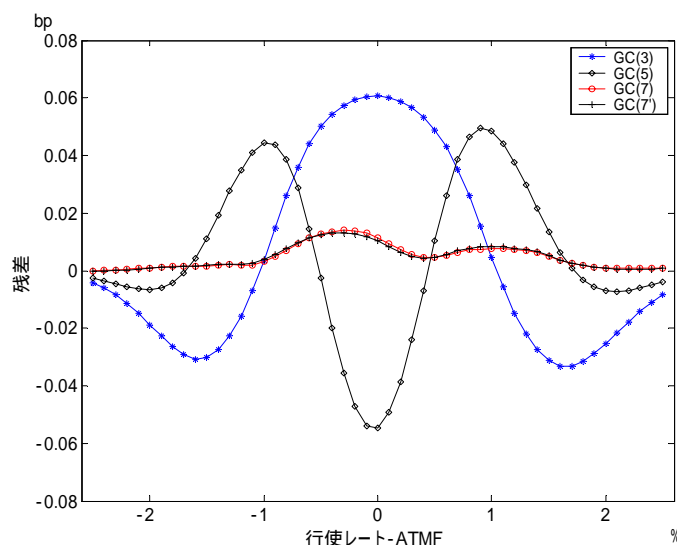
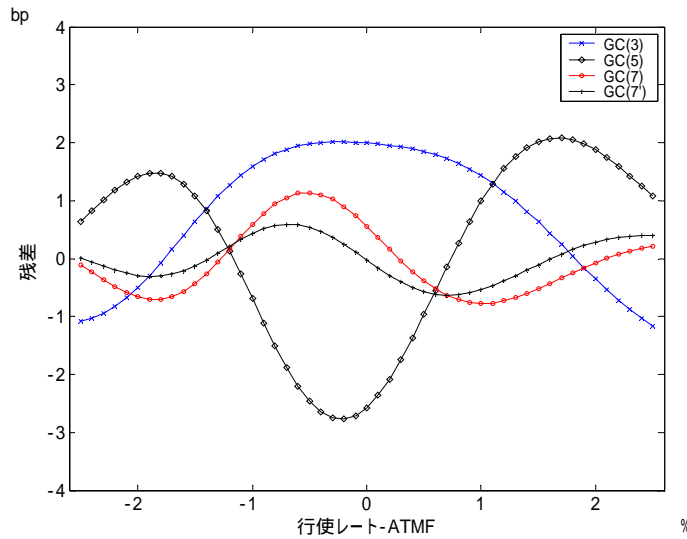


図7：5 into 10 スワップションの GC 展開による価格の残差 (ガウシアン・モデル)



次に、様々なオプション期間とスワップ期間の組み合わせで、行使レートを ATMF とする ATM のスワップションの価格を GC(7) で求めた。その価格の残差を示したものが図 8 である。残差は最大で 1bp 程度であり、グラム・シャリエ展開による近似は実務的にも十分有用であることが示唆される。

図 8：スワップションの GC(7) による価格の残差 (ガウシアン・モデル)

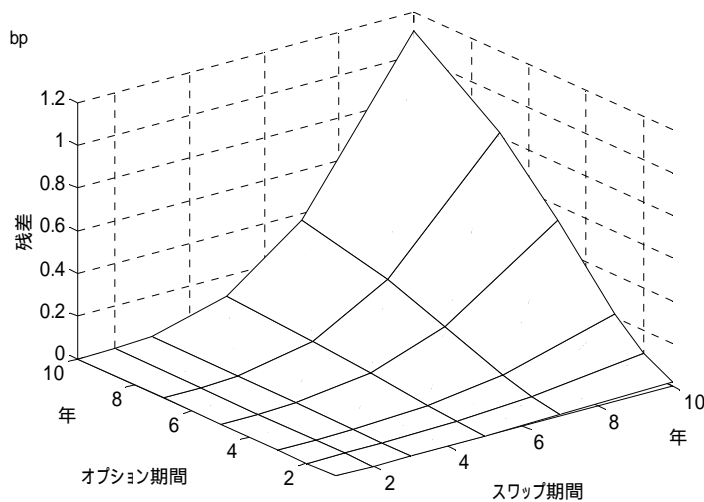


表 4 にスワップション価格の計算時間を掲げた¹⁴。計算時間は、スワップ期間の長さの増加関数となっている。これは、スワップ期間が長くなるとそれだけ計算を必

¹⁴ 計算に使った計算機の CPU は、ペンティアム 4 (2.4GHz) である。

要とする債券モーメントの個数が多くなるためである。計算精度は、図 5~7 では、GC(7)と GC(7')が最もよいとの結果を得たが、表 4 の計算時間によれば、GC(7')の方がより計算時間が短く、効率的であるといえることができる。これは、上述のように GC(7')では、5 次までのモーメントによって 7 次までのキュムラントを計算しているため、計算量が軽減されていることによるものである。

表 4：スワップション価格の計算時間（秒）の比較

	1 into 5	1 into 7	1 into 10
GC3	<0.000	<0.000	<0.000
GC5	<0.000	0.031	0.156
GC7'	<0.000	0.031	0.156
GC7	0.063	0.438	3.453
MC(2000万回)	78.266	90.766	109.531

(注) <0.000 は、計算時間が小数点以下 3 桁までは全て 0であることを示す。

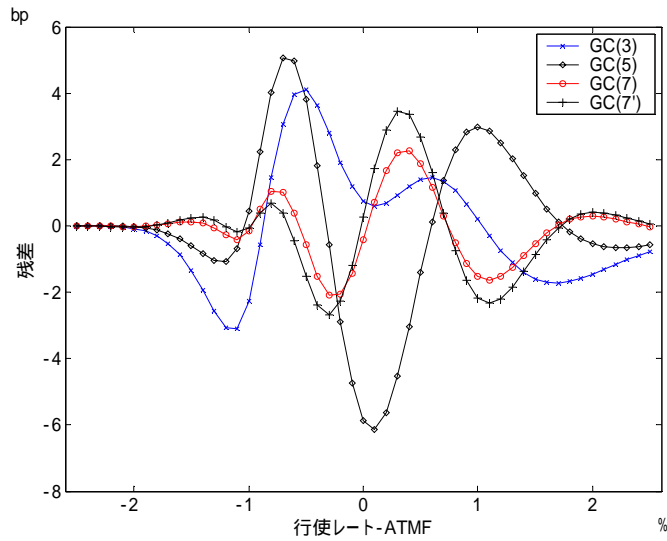
ロ . CIR モデル

2ファクターCIRモデルとグラム・シャリエ展開(3~7次)を用いて、行使レートを ATMF-2.5%から ATMF+2.5%の範囲で、1 into 10 スワップションの価格を計算する。ここで、スワップション価格は MC 法を用いて、1 億回の試行で計算する¹⁵。

計算結果を図 9 に示す。残差は GC(3)で最大 4bp 程度、GC(7)で最大 2bp 程度である。

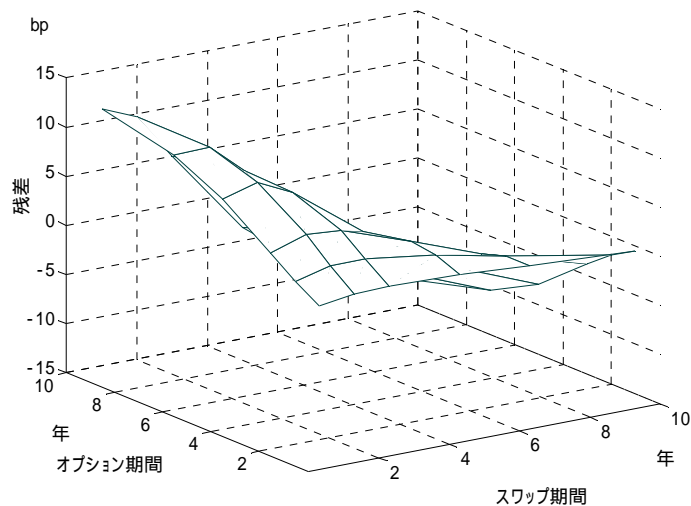
¹⁵ ガウシアン・モデルの MC 法の試行回数が 4 億回であるのに対して、CIR モデルのそれを 1 億回とした理由は、後者の非心 χ^2 分布に従う乱数を発生させる時間が、前者の正規分布に従う乱数を発生させる時間に比べて多少長めであること、MC 法によって計算した価格とグラム・シャリエ展開によって計算した価格を比較し得るようになるための MC 法の必要試行回数が、モデルによって異なったこと、である。

図 9 : 1 into 10 スワップションの GC 展開による価格の残差 (CIR モデル)



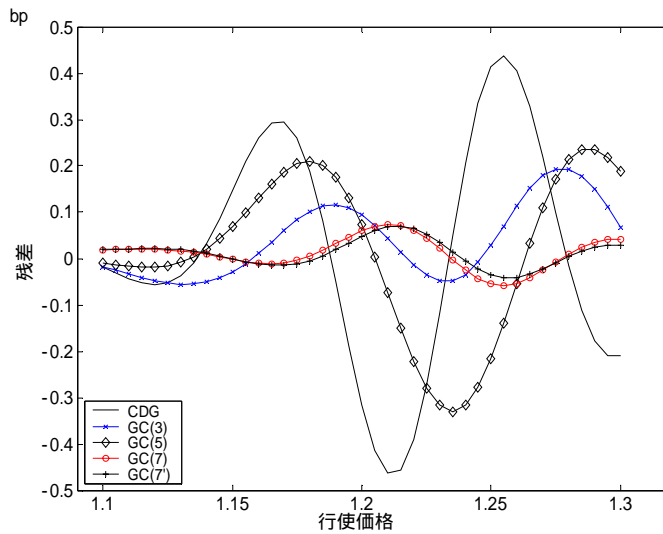
次に、様々なオプション期間とスワップ期間の組み合わせで、行使レートを ATMF とする ATM のスワップションの価格を GC(7)で求めた。その価格の残差を示したものが図 10 である。価格残差は最大で 10bp 程度と、ガウシアン・モデルによるそれに比べて大きいが、この水準であれば、実務的にも大きな支障はないと考えられる。

図 10 : スワップションの GC(7)による価格の残差 (CIR モデル)



次に、CDG の計算精度と TYW による GC の計算精度との比較を行う。比較のために、CDG が論文で用いたパラメータの値を使って、スワップションの価格を GC(3)、GC(5)、GC(7)、GC(7')および CDG によって求め、その真値からの残差を示したものが図 11 である。

図 11：スワップションの GC 展開と CDG による価格の残差 (CIR モデル)



複数のフォワード測度の下でスワップション価格の近似を行った CDG ((6)式) と比べると、1 つのフォワード測度の下でスワップション価格の近似を行った GC ((7)式) の方が、高い計算精度を示している。これは、CDG がフォワード測度毎に密度関数を近似しているため、計算の過程で近似誤差が積み重なっていくためであると考えられる。

図 11 を図 9 と比較すると、図 11 のスワップション価格の計算精度が概ね 1 桁高いことが分かる。図 9 は円金利を想定した低金利のイールド・カーブから作成したのに対して図 11 はドル金利を想定した高金利のイールド・カーブをもとにしている。これは、グラム・シャリエ展開によるスワップション価格の計算精度がパラメータの値に比較的強く依存することを示唆している。

(3) 一般化エッジワース展開を用いたスワップション価格

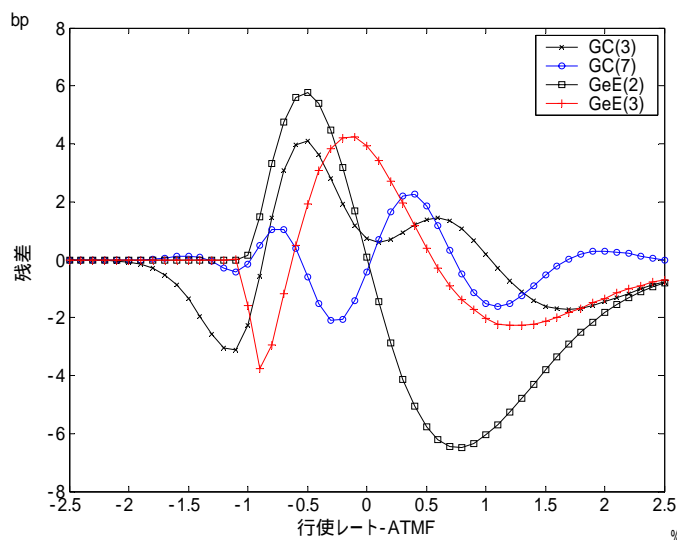
次に、一般化エッジワース展開を用いてスワップション価格の近似を行う。一般化エッジワース展開によるスワップション価格の近似式 ((10)式) では、モーメントの他に $C(A)$ 、 $g(0)$ 、 $g'(0)$ 等を求める必要がある。これらが解析的に求まるか否かはモデルに依存するが、ここでは、それらが解析的に求まらないモデルとして 2 ファクター CIR モデルを採用する。

この場合、2 ファクターであることから、 $C(A)$ 、 $g(0)$ 、 $g'(0)$ 等は、2 重積分で与えられる。このうち、コール・オプション価格 ($C(A)$) の値を 1 重積分で求める手

法が、先行研究 (Chen and Scott [1992]、Chen and Scott [1995]等) によって提案されている。本稿では、Chen and Scott [1995]の手法を用いて $C(A)$ を評価するとともに、同手法を応用して、 $g(0)$ 、 $g'(0)$ を評価する (詳細は補論 4 参照)。

L 次までのキュムラントを用いたスワップション価格の近似値を $GeE(L)$ と表記する。図 12 は、1 into 10 スワップションの価格を $GC(3)$ 、 $GC(7)$ 、 $GeE(2)$ および $GeE(3)$ を用いて計算した結果である。

図 12 : 1 into 10 スワップションの GC 展開と GeE 展開による価格の残差 (CIR モデル)



ここでの一般化エッジワース展開では、上述の(9)式のようにスワップション価格に最も影響を与えると考えられる債券価格 $P(T_0, T_N)$ の密度関数を用いて、スワップ価値の密度関数を近似している。したがって、一般化エッジワース展開によるスワップション価格の近似は、正規分布を用いるグラム・シャリエ展開による近似よりも高い計算精度を示すことが期待される。しかし、図 12 より、 $GeE(3)$ の計算精度は、 $GC(3)$ のそれと概ね同等であることがわかる。これは一般化エッジワース展開で評価が必要である $C(A)$ 、 $g(0)$ 、 $g'(0)$ を、数値積分で評価する際の誤差によるものであると考えられる。

(4) CMS、CMS オプション

次に、債券モーメントを用いて CMS レートに内包されるコンベキシティ調整を算出する。ここでは、1 期間の CMS として、 T_0 年後に観測される $\delta (= 0.5)$ 年毎に利払いが行われる τ 年スワップ・レートと固定金利を $T_1 (= T_0 + 0.5)$ 年時点で交換する契

約を対象に、CMS レートの広義のコンベキシティ調整 (bCA)、狭義のコンベキシティ調整 (nCA)、タイミング調整 (TA) を求める。

表 5 は、状態変数がガウシアン・モデルに従う場合に、MC 法によって求めた bCA、nCA、TA である。表 5 からは、コンベキシティ調整は T_0 と τ の増加関数であることがわかる。

表 5：1 期間 CMS レートのコンベキシティ調整 (bp) (ガウシアン・モデル)

bCA	1年	3	5	7	10	20
1年	0.14	0.65	1.18	1.60	2.00	2.30
3	0.46	2.24	3.74	4.83	5.81	6.45
5	0.76	3.49	5.65	7.17	8.54	9.51
10	1.14	5.08	8.08	10.21	12.19	13.99
nCA	1	3	5	7	10	20
1	0.51	0.85	1.32	1.72	2.10	2.38
3	1.47	3.05	4.45	5.47	6.37	6.85
5	2.38	4.86	6.86	8.26	9.50	10.18
10	3.56	7.18	9.96	11.90	13.66	15.03
TA	1	3	5	7	10	20
1	-0.37	-0.20	-0.14	-0.12	-0.10	-0.08
3	-1.01	-0.82	-0.71	-0.64	-0.56	-0.40
5	-1.62	-1.37	-1.22	-1.10	-0.95	-0.67
10	-2.43	-2.10	-1.87	-1.69	-1.48	-1.04

(注) 行の年数：スワップ・レート観測時点 (現時点からの期間)、列の年数：スワップ期間

表 6 は、状態変数がガウシアン・モデルに従う場合の、コンベキシティ調整の 1 次近似 ((12)式) による値の MC 法によるそれからの残差である。bCA で最大 0.29bp、nCA で最大 0.24bp、TA で最大 0.05bp と、いずれも高い計算精度である。

表 6：1 期間 CMS レートのコンベキシティ調整 (1 次近似) の残差 (ガウシアン・モデル)

bCA	1年	3	5	7	10	20
1年	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
3	0.00	0.00	0.01	0.02	0.04	0.06
5	0.00	0.01	0.03	0.05	0.08	0.14
10	0.00	0.02	0.05	0.09	0.16	0.29
nCA	1	3	5	7	10	20
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
3	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.05
5	0.00	0.01	0.02	0.03	0.06	0.11
10	0.00	0.01	0.04	0.07	0.12	0.24
TA	1	3	5	7	10	20
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
5	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02
10	0.00	0.01	0.02	0.02	0.04	0.05

(注) 行の年数：スワップ・レート観測時点 (現時点からの期間)、列の年数：スワップ期間

表7は、状態変数がCIRモデルに従う場合の、コンベキシティ調整の1次近似(12)式)による値、2次近似(脚注9参照)による値のMC法によるそれからの残差である。表7からは、ガウシアン・モデルの場合に比べると相対的に残差は大きいこと、また、2次近似の残差は1次近似のその半分程度となること、等がみてとれる。

表7：1期間CMSレートのコンベキシティ調整の残差(CIRモデル)

左図：1次近似、右図：2次近似

bCA	1年	3	5	7	10	20	bCA	1年	3	5	7	10	20
1年	-0.00	-0.01	-0.03	-0.05	-0.07	-0.11	1年	0.00	-0.00	-0.00	-0.01	-0.01	-0.02
3	-0.03	-0.13	-0.26	-0.4	-0.58	-0.91	3	-0.00	-0.01	-0.04	-0.08	-0.14	-0.30
5	-0.08	-0.33	-0.66	-0.99	-1.42	-2.19	5	-0.01	-0.05	-0.12	-0.24	-0.42	-0.89
10	-0.24	-0.98	-1.88	-2.77	-3.9	-5.94	10	-0.03	-0.19	-0.50	-0.89	-1.53	-3.09
nCA	1	3	5	7	10	20	nCA	1	3	5	7	10	20
1	-0.00	-0.02	-0.03	-0.05	-0.07	-0.12	1	0.00	-0.00	-0.00	-0.01	-0.01	-0.02
3	-0.03	-0.13	-0.27	-0.41	-0.6	-0.94	3	-0.00	-0.01	-0.04	-0.08	-0.14	-0.31
5	-0.08	-0.35	-0.69	-1.03	-1.48	-2.28	5	-0.01	-0.05	-0.13	-0.25	-0.44	-0.93
10	-0.25	-1.04	-2.00	-2.94	-4.15	-6.30	10	-0.03	-0.20	-0.53	-0.94	-1.61	-3.25
TA	1	3	5	7	10	20	TA	1	3	5	7	10	20
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
5	0.00	0.01	0.03	0.04	0.06	0.09	5	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03
10	0.02	0.06	0.12	0.18	0.24	0.36	10	0.00	0.01	0.03	0.05	0.08	0.16

(注) 行の年数：スワップ・レート観測時点(現時点からの期間)、列の年数：スワップ期間

次に、(14)式のCMSフロア・レット価格の近似式を用いて、オプションの満期が半年毎のCMSフロアの価格を計算する。このときは、まずCMSレートを債券モーメントで近似し、グラム・シャリエ展開を用いる。表8は、状態変数がガウシアン・モデルに従うとして、1次近似したCMSレートにGC(3)を適用することで求めた各CMSフロア・レットの価格およびその総和としてのCMSフロアの価格と、MC法によるそれらとの比較である。ここで、CMSの原資産を $\delta=0.5$ 年毎に利払いが行われる5年スワップ・レート、フロアの行使レートを $K=2\%$ とした。

表8：CMSフロア・レットと同フロアの価格のMC法とGC(3)による算出結果

オプション期間(年)	ATMF	MC法	GC(3)	オプション期間(年)	ATMF	MC法	GC(3)
0.5	0.96pct	51.7bp	51.7bp	5.5	2.24	24.0	23.8
1.0	1.12	45.1	45.1	6.0	2.33	22.7	22.5
1.5	1.28	40.5	40.5	6.5	2.42	21.5	21.3
2.0	1.42	37.2	37.1	7.0	2.50	20.4	20.2
2.5	1.56	34.5	34.5	7.5	2.58	19.3	19.1
3.0	1.69	32.3	32.2	8.0	2.66	18.3	18.1
3.5	1.81	30.3	30.2	8.5	2.73	17.4	17.2
4.0	1.92	28.5	28.4	9.0	2.80	16.6	16.3
4.5	2.03	26.9	26.8	9.5	2.86	15.8	15.5
5.0	2.14	25.4	25.2	計		528.3	525.8

5 . おわりに

本稿では、確率変数の密度関数の展開（エッジワース展開、グラム・シャリエ展開および一般化エッジワース展開）を活用して、金利派生商品の価格を近似する手法を検討した。確率変数の密度関数の展開では、モーメントを求める必要があるが、このモーメントの値をできるだけ短時間かつ正確に求めることが、近似を行ううえで重要である。

スワップションでは、スワップ価値が割引債価格の線形和で表現されることに着目した。金利の期間構造モデルの設定によっては、割引債価格の多項式、およびモーメントが解析的に求められるので、スワップション価格が得られた。また、CMS の評価では、コンベキシティ調整を必要とするが、それを割引債価格の多項式として近似を行うことで、CMS レートの近似式を得た。さらに、CMS レートの近似式に、密度関数の展開を組み合わせることで、CMS オプション価格の近似式を導出した。そのうえで、アフィン型期間構造モデルであるガウシアン・モデルと CIR モデルを用いた数値計算例で、スワップション価格、CMS レートおよび CMS オプション価格を求めた。その結果、本稿の手法は、短い計算時間で高い近似精度を示すことを確認した。

このように、本稿の手法は、金融実務上で非常に有益なツールとなり得る。この手法を応用し得る商品として、例えば、コンベキシティ調整が必要である LIBOR in arrears スワップ、CMS スプレッド・オプションあるいは 15 年変動利付国債等が考えられる。このように、今後は、本稿で扱った各種商品以外の金利派生商品の価格の算出にも、本稿の手法を適用することを検討する価値があると思われる。

以 上

補論 1 . チェビシエフ・エルミート多項式

グラム・シャリエ展開では、確率変数の密度関数の展開で、チェビシエフ・エルミート多項式を用いる。この多項式は、以下で定義される (Stuart and Ord [1987]参照)。

$$H_n(x) = (-1)^n \phi(x)^{-1} D^n \phi(x), \quad H_0(x) = 1.$$

チェビシエフ・エルミート多項式は、次式を満たす(この関係を直交性と呼ぶ)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) \phi(x) dx = \begin{cases} n! & \text{if } n = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

7次までの同多項式は、以下で表される。

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1, \quad H_3(x) = x^3 - 3x, \\ H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3, \quad H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x, \\ H_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15, \quad H_7(x) = x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x. \end{aligned}$$

補論 2 . アフィン型期間構造モデル

アフィン型期間構造モデルは、金利の期間構造モデルの 1 つであり、スポット・レート $r(t)$ は、リスク中立確率測度の下で

$$dX(t) = K^\theta (\theta^\theta - X(t)) dt + \Sigma D(X(t)) dW^\theta(t),$$

に従う J 次元状態変数ベクトル X を用いて、 $r(t) = \delta_0 + \delta_X^T X(t)$ と表される。

ここで、 $D(X(t))$ は、 (i, i) 成分が正値である以下の行列である。

$$D(X(t)) = \text{diag}[\sqrt{\alpha_1 + \beta_1^T X(t)}, \dots, \sqrt{\alpha_J + \beta_J^T X(t)}].$$

$\Sigma \in R^{J \times J}$ は、 $\Sigma \Sigma^T$ が共分散行列となる行列である。また、 $\delta_0, \alpha_1, \dots, \alpha_J \in R$ 、 $\delta_X, \theta^\theta, \beta_1, \dots, \beta_J \in R^J$ および $K^\theta \in R^{J \times J}$ である。

アフィン型期間構造モデルの下では、時点 t での時点 T 満期の割引債の価格は、 $P(t, T) = \exp(A(t, T) + B(t, T)^T X(t))$ という指数型で表せることが知られている。

$A(t, T)$ と $B(t, T)$ (J 次元ベクトル) は、それぞれ以下の微分方程式を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, T) = -(K^\theta \theta^\theta)^T B(t, T) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (\Sigma^T B(t, T))_j^2 \alpha_j + \delta_0, \quad A(T, T) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t, T) = K^{QT} B(t, T) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (\Sigma^T B(t, T))_j^2 \beta_j + \delta_x, \quad B(T, T) = 0.$$

アフィン型期間構造モデルでは、 $M(t) = M(t, T, T_0, \{T_1, \dots, T_m\})$ および $N(t) = N(t, T, T_0, \{T_1, \dots, T_m\})$ (J 次元ベクトル) として、「債券モーメント」も、指数型、つまり $\mu^T(t, T_0, \{T_1, \dots, T_m\}) = \exp(M(t) + N(t)^T X(t)) / P(t, T)$ で表される。

ここで、 $M(t)$ 、 $N(t)$ は以下の微分方程式を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial t} M(t) = -(K^Q \theta^Q)^T N(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (\Sigma^T N(t))_j^2 \alpha_j + \delta_0,$$

$$M(T_0) = \sum_{i=1}^m A(T_0, T_i) + A(T_0, T).$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N(t) = K^{QT} N(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (\Sigma^T N(t))_j^2 \beta_j + \delta_x,$$

$$N(T_0) = \sum_{i=1}^m B(T_0, T_i) + B(T_0, T).$$

以下では、状態変数が J ファクター・ガウシアン・モデル、あるいは J ファクター-CIR モデルに従う場合の $A(t, T)$ 、 $B(t, T)$ 、 $M(t)$ および $N(t)$ の関数形を示す。

(1) ガウシアン・モデル

状態変数が J ファクター・ガウシアン・モデルに従うとする。このときの $A(t, T)$ 、 $B(t, T)$ 、 $M(t)$ および $N(t)$ の関数形は以下で与えられる。

$$A(t, T) = -(T-t) \left(\delta_0 + \sum_{i=1}^J (1 - D(K_i(T-t))) \theta_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \frac{\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}{K_i K_j} (1 - D(K_i(T-t)) - D(K_j(T-t)) + D((K_i + K_j)(T-t))) \right).$$

$$B(t, T) = (B_1(t, T), \dots, B_J(t, T))^T,$$

$$B_j(t, T) = -\tau D(K_j(T-t)), \quad j = 1, \dots, J.$$

$$M(t) = A(t, T_0) + F_0 + \tau \sum_{j=1}^J K_j \theta_j F_j D(K_j \tau) + \frac{\tau}{2} \sum_{i,j=1}^J \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \left(F_i F_j D((K_i + K_j) \tau) + F_i \frac{D((K_i + K_j) \tau) - D(K_i \tau)}{K_j} + F_j \frac{D((K_i + K_j) \tau) - D(K_j \tau)}{K_i} \right).$$

$$\begin{aligned}
N(t) &= (N_1(t), \dots, N_J(t))^T, \\
N_j(t) &= B_j(t, T_0) + F_j \exp(-K_j(T_0 - t)), \quad j = 1, \dots, J, \\
D(x) &= (1 - \exp(-x))/x, \quad \tau = T_0 - t, \quad F_0 = \sum_{i=1}^m A(T_0, T_i) + A(T_0, T), \\
F_j &= \sum_{i=1}^m B_j(T_0, T_i) + B_j(T_0, T), \quad j = 1, \dots, J.
\end{aligned}$$

(2) CIR モデル

状態変数が J ファクター CIR モデルに従うとする。このときの $A(t, T)$ 、 $B(t, T)$ 、 $M(t)$ および $N(t)$ の関数形は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= -\delta_0(T - t) - \sum_{j=1}^J K_j \theta_j \left[\frac{2}{\sigma_j^2} \ln \frac{(K_j + \gamma_j)(e^{\gamma_j(T-t)} - 1) + 2\gamma_j}{2\gamma_j} + \frac{2}{K_j - \gamma_j} (T - t) \right], \\
B(t, T) &= (B_1(t, T), \dots, B_J(t, T))^T, \\
B_j(t, T) &= \frac{-2(e^{\gamma_j(T-t)} - 1)}{(K_j + \gamma_j)(e^{\gamma_j(T-t)} - 1) + 2\gamma_j}, \quad j = 1, \dots, J, \\
M(t) &= F_0 - \delta_0 \tau - \sum_{j=1}^J K_j \theta_j \left[\frac{2}{\sigma_j^2} \ln \frac{(K_j + \gamma_j - \sigma_j^2 F_j)(e^{\gamma_j \tau} - 1) + 2\gamma_j}{2\gamma_j} + \frac{(K_j + \gamma_j)F_j + 2}{K_j - \gamma_j - \sigma_j^2 F_j} \tau \right], \\
N(t) &= (N_1(t), \dots, N_J(t))^T, \\
N_j(t) &= \frac{-((K_j + \gamma_j)F_j + 2)(e^{\gamma_j \tau} - 1) + 2\gamma_j F_j}{(K_j + \gamma_j - \sigma_j^2 F_j)(e^{\gamma_j \tau} - 1) + 2\gamma_j}, \quad j = 1, \dots, J, \\
\tau &= T_0 - t, \quad F_0 = \sum_{i=1}^m A(T_0, T_i) + A(T_0, T), \quad \gamma_j = \sqrt{K_j^2 + 2\sigma_j^2}, \\
F_j &= \sum_{i=1}^m B_j(T_0, T_i) + B_j(T_0, T), \quad j = 1, \dots, J.
\end{aligned}$$

補論 3 . 一般化エッジワース展開を用いたスワプション価格の導出

以下では、一般化エッジワース展開を用いて、確率変数の密度関数の展開式を導出する。考察の対象とする確率変数 F の密度関数を f とする。特性関数 (ϕ_F) は、キュムラント $c_n(f)$ を用いて、次式で与えられる。

$$\ln \phi_F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(f)}{n!} (it)^n.$$

ここで、 F と異なる任意の確率変数 G を考え、その密度関数を g 、その特性関数を ϕ_G とすると、以下を得る。

$$\ln \frac{\phi_F(t)}{\phi_G(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(f) - c_n(g)}{n!} (it)^n.$$

両辺を変形して、テイラー展開を行うと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_F(t) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(f) - c_n(g)}{n!} (it)^n\right) \phi_G(t) \\ &= \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(f) - c_n(g)}{n!} (it)^n\right)^k\right] \phi_G(t) \\ &= \left[1 + (c_1(f) - c_1(g))(it) + \frac{c_2(f) - c_2(g) + (c_1(f) - c_1(g))^2}{2!} (it)^2 + \dots\right] \phi_G(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_k}{k!} (it)^k \phi_G(t). \end{aligned}$$

上式の逆フーリエ変換を行うと、(15)式が得られる（本文(8)式参照）。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_k}{k!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} (it)^k \phi_G(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k I_k}{k!} D^k g(x), \end{aligned} \tag{15}$$

$$I_0 = 1, \quad I_1 = c_1(f) - c_1(g), \quad I_2 = c_2(f) - c_2(g) + (c_1(f) - c_1(g))^2,$$

$$I_3 = c_3(f) - c_3(g) + 3(c_1(f) - c_1(g))(c_2(f) - c_2(g)) + (c_1(f) - c_1(g))^3, \dots$$

$0 \leq x < \infty$ での F の期待値は、 $\lim_{x \rightarrow \infty} g^{(k)}(x) = 0$ を仮定し、部分積分を繰り返し用いることで、以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x f(x) dx &= \int_0^{\infty} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k I_k}{k!} D^k g(x) dx \\ &= I_0 \int_0^{\infty} x g(x) dx + I_1 \int_0^{\infty} g(x) dx + \frac{I_2}{2!} g(0) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k I_k}{k!} D^{k-2} g(x) \Big|_{x=0} \dots \end{aligned}$$

上式をスワップシヨンの評価に応用する。 f を T_0 -フォワード測度の下におけるオプション満期時点 T_0 でのスワップ価値の密度関数とすると、スワップシヨンの価格

は(2)式を用いて算出することができる。

G を(9)式で定義すると、上式の右辺第1項は、 $P(T_0, T_N)$ を原資産価格、 A を行使価格とするコール・オプションの満期時点 T_0 での期待値、同第2項は、 $P(T_0, T_N)$ が A 以上となる確率を、それぞれ表す。また、同第3項目以降は、 G の密度関数とその微分(1次、2次、...)の $x=0$ での値の線形和である((10)式参照)。

グラム・シャリエ展開とは、(15)式において、 $g(x) = c_2^{-1/2} \phi((x-c_1)/\sqrt{c_2})$ (平均が c_1 、分散が c_2 の正規分布の密度関数)とする展開である。

補論4 . CIR モデルによる割引債価格の密度関数とその微分

Chen and Scott [1995]は、2ファクターCIRモデルで、2つのブラウン運動が互いに独立であるとき、割引債を原資産とするコール・オプションの価格が1次元の積分によって求められることを示した。

本稿では、Chen and Scott [1995]の結果を用いて、行使価格を A とする割引債のコール・オプションの時点 t での価格 $C(A)$ (A は(9)式参照)を求め、同手法を応用して、 $g(0)$ 、 $g'(0)$ を評価する。

Chen and Scott [1995]は、非負の確率変数 X が特性関数 Φ_X を持つとき、その分布関数は、次式で表されることを示している。

$$Q(X \leq x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{u} \Phi_X(u) du.$$

Chen and Scott [1995]は、割引債価格を $P(T_0, T_N) = \exp(\alpha(T_0, T_N) - \beta(T_0, T_N)^T X)$ とし、オプション満期時点における割引債価格の分布関数が、以下のように1次元の積分で表現されることを示した。

$$\begin{aligned} Q_i^T(P(T_0, T_N) > K) &= Q_i^T(\beta_1(T_0, T_N)X_1 + \beta_2(T_0, T_N)X_2 < -\log(K) + \alpha(T_0, T_N)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(uZ)}{u} \Phi_i^T(u) du. \quad (Z = -\ln(K) + \alpha(T_0, T_N).) \end{aligned}$$

$$\Phi_i^T(u) = \prod_{j=1}^2 \Phi_j^T(\beta_j(T_0, T_N)u).$$

ここで、 $\Phi_j^T(\cdot)$ は X_j の T_i -フォワード測度下の特性関数である。

コール・オプション価格は、フォワード測度下での割引債価格の分布関数で表現されることから、1変数の数値積分を2回行うことで、以下のように求められる。 $C(A)$ は、この式を使って求めることができる。

$$C(x) = P(t, T_N) Q_t^{T_N}(P(T_0, T_N) > x) - x P(t, T_0) Q_t^{T_0}(P(T_0, T_N) > x).$$

本稿では、3次までのキュムラントを用いて、スワップション価格の算出を行うので、 $C(A)$ に加えて、 $g(0)$ 、 $g'(0)$ を求める必要がある。以下では、Chen and Scott [1995]の手法を応用して、 $g(0)$ 、 $g'(0)$ を評価する。

$g(0)$ 、 $g'(0)$ は、それぞれ $P(T_0, T_N) - A$ の T_0 -フォワード測度下における密度関数とその1次微分であり、(16)、(17)式で表せる。

$$\begin{aligned} g(P(T_0, T_N) - A) &= \frac{\partial}{\partial K} Q_t^{T_0}(P(T_0, T_N) - A < K) \\ &= \frac{1}{\pi(K+A)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(uZ) \Phi^{T_0}(u) du. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} g'(P(T_0, T_N) - A) &= \frac{\partial^2}{\partial K^2} Q_t^{T_0}(P(T_0, T_N) - A < K) \\ &= -\frac{1}{\pi(K+A)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(uZ) \Phi^{T_0}(u) du + \frac{1}{\pi(K+A)} \int_{-\infty}^{\infty} u \sin(uZ) \Phi^{T_0}(u) du. \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、(16)、(17)式の導出には、以下の(18)式の関係を用いている。

$$\begin{aligned} Q_t^{T_0}(P(T_0, T_N) - A < K) &= 1 - Q_t^{T_0}(P(T_0, T_N) - A > K) \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(uZ)}{u} \Phi^{T_0}(u) du, \end{aligned} \quad (18)$$

$$Z \equiv -\ln(K+A) + \alpha(T_0, T_N).$$

本論の数値例では、Chen and Scott [1995]の数値積分の方法（離散化刻み、積分範囲）を(16)、(17)式の計算にも適用している。

参考文献

- Benhamou, E., "Pricing Convexity Adjustment with Wiener Chaos," Working paper, London School of Economics, 2000. (<http://papers.ssrn.com/>で入手可能)
- Brigo, D., and F. Mercurio, *Interest Rate Models Theory and Practice*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001.
- Chen, R., and L. Scott, "Interest Rate Options in Multifactor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure," *Journal of Derivatives*, Winter, 1995, pp. 53-72.
- Chen, R., and L. Scott, "Pricing Interest Rate Options in a Two-Factor Cox-Ingersoll-Ross Model of the Term Structure," *Review of Financial Studies*, Vol 5, Number 4, 1992, pp. 613-636.
- Collin-Dufresne, P., and R. S. Goldstein, "Pricing Swaptions within an Affine Framework," *Journal of Derivatives*, 10, Winter 2002, pp. 1-18.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53, 1985, pp. 385-407.
- Glasserman, P., *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag, New York, 2004.
- Hull, J., *Options, Futures and Other Derivatives*, 6th Edition, Prentice Hall, 2005.
- Jarrow, R., and A. Rudd, "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 10, 1982, pp. 347-369.
- Musiela, M., and M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2005.
- Schrager, D. F., and A. A. J. Pelsser, "Pricing Swaption and Coupon Bond Options in Affine Term Structure Models," *Mathematical Finance*, forthcoming, 2005.
- Stuart, A. and J. K. Ord, *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Volume 1 Distribution Theory*, Oxford University Press, 1987.
- Tanaka, K., T. Yamada, and T. Watanabe, "Approximation of Interest Rate Derivatives' Prices by Gram-Charlier Expansion and Bond Moments," IMES Discussion Paper Series 2005-E-16, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2005.