

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

ヒストリカル法による
バリュー・アット・リスクの計測
市場価格変動の非正常性への実務的対応

あんどう よしたか
安藤 美孝

Discussion Paper No. 2004-J-10

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

日本銀行金融研究所が刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.imes.boj.or.jp>

無断での転載・複製はご遠慮下さい。

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

ヒストリカル法によるバリュー・アット・リスクの計測
市場価格変動の非定常性への実務的対応

あんどう よしたか
安藤 美孝*

要 旨

バリュー・アット・リスク（以下、VaR）は、金融機関のリスク管理における、標準的なリスク指標である。VaR の算出には、リスク・ファクターの収益率分布に正規性を仮定することが多いが、分布の裾の厚さを捉えることは難しい。このため、近年では、経験分布を用いることで、収益率分布の裾の厚さを表現できる、ヒストリカル法に注目が集まっている。ただし、ヒストリカル法には、リスク・ファクターの直近の変動を捉えにくいという問題点が存在する。そこで、リスク・ファクターの直近の変動をよりうまく表現するための、改良手法がいくつか提案されている。

本稿では、ヒストリカル法およびいくつかの改良手法を解説するとともに、数値分析を通じて各手法の比較を行い、リスク管理実務において望ましい VaR 算出手法を検討する。

キーワード：VaR 算出手法、ヒストリカル法、標本分位点、Harrell-Davis 推定量、GARCH モデル

JEL classification: C14、G20

*日本銀行金融研究所研究第 1 課（E-mail: yoshitaka.andou@boj.or.jp）

本稿の作成に当たっては、小暮厚之教授（慶應義塾大学）から大変貴重なコメントを頂戴した。なお、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、全て筆者本人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

(目次)

1 . はじめに	1
2 . ヒストリカル法以外の代表的な VaR 算出手法	2
(1) VaR の定義	2
(2) ヒストリカル法以外の代表的な VaR 算出手法	2
3 . ヒストリカル法による VaR の算出手法	4
(1) ヒストリカル法による VaR の算出手順	4
(2) 分位点の推定	6
(3) ヒストリカル法による VaR 算出の具体例	9
4 . リスク・ファクターの直近の変動を考慮したヒストリカル法	11
(1) Boudoukh, Richardson and Whitelaw [1998]による手法	11
(2) Hull and White [1998]による手法	14
(3) Barone-Adesi, Giannopoulos and Vosper [1999]による手法	17
(4) 各種手法のまとめ	19
5 . 数値分析による各種 VaR 算出手法の比較	20
(1) 数値分析の設定	20
(2) 数値分析の結果	24
6 . 若干の考察	31
(1) リスク管理実務での VaR 算出手法の望ましい条件	31
(2) 各種 VaR 算出手法の実務での利用可能性	32
7 . おわりに	36
補論 1 . Harrell-Davis 推定量について	38
(1) Harrell-Davis 推定量の導出	38
(2) Harrell-Davis 推定量とブートストラップ法の関係について	39
補論 2 . Ljung-Box 統計量	40

1. はじめに

VaR (バリュー・アット・リスク) は、1990 年代に、金融機関のリスク管理実務において、標準的なリスク指標として用いられるようになった。VaR の算出には、市場価格ないしリスク・ファクターの変動に正規性を仮定した分散共分散法やモンテカルロ法が用いられることが多い。しかし、アジア通貨危機やロシア危機、LTCM 破綻等に伴う市場価格の急激な変動によって、実際の市場価格の分布は正規分布よりも厚い裾を持つこと、よって正規性の仮定は必ずしも十分ではないことが改めて認識されている。一方、正規分布以外のパラメトリックな分布を仮定すると、計算負荷が重くなり、実務上は、正規分布以外のパラメトリックな分布を仮定することは難しい。このため、近年では、VaR の算出において、分布にパラメトリックな仮定を置かず、経験分布を用いることで、分布の裾の厚さを表現できるヒストリカル法に注目が集まっている。

ヒストリカル法には、いくつかの派生的な手法が存在する。基本的なヒストリカル法は、過去に生じたリスク・ファクターの変動が将来も起きるという市場の定常性を仮定している。この方法では、過去のデータに一様の重みを与えているため、リスク・ファクターの直近の変動の特徴を捉えにくいという問題がある。そこで、市場価格の直近の変動を重視するように重み付けを行う、あるいはリスク・ファクターの直近の変動の大きさを反映するよう過去の収益率を修正する等の改良手法がいくつか提案されている。

本稿では、様々なヒストリカル法による VaR の算出の手順および特徴を解説するとともに、実際の市場データを用いた数値分析により各手法の比較を行う。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2 節では、VaR の定義およびヒストリカル法以外の代表的な VaR 算出手法を述べる。3 節では、ヒストリカル法の手順や特徴、4 節では、リスク・ファクターの直近の変動パターンを捉えることができるようヒストリカル法を改良した 3 つの手法の手順や特徴を説明する。5 節では、ヒストリカル法、ヒストリカル法を改良した 3 手法など、いくつかの種類の VaR 算出手法を用いて、株価指数、為替、円金利グリッドの実際のデータを用いて、VaR を算出し数値分析を行う。6 節では、5 節の数値分析の結果等を踏まえて、各種のヒストリカル法の中で、リスク管理実務の観点から望ましいと考えられる手法を検討する。最後に 7 節で、本稿のまとめを述べる。

2. ヒストリカル法以外の代表的な VaR 算出手法

本節では、リスク管理実務で VaR を算出するために用いられている、ヒストリカル法以外の代表的な手法を概説する。

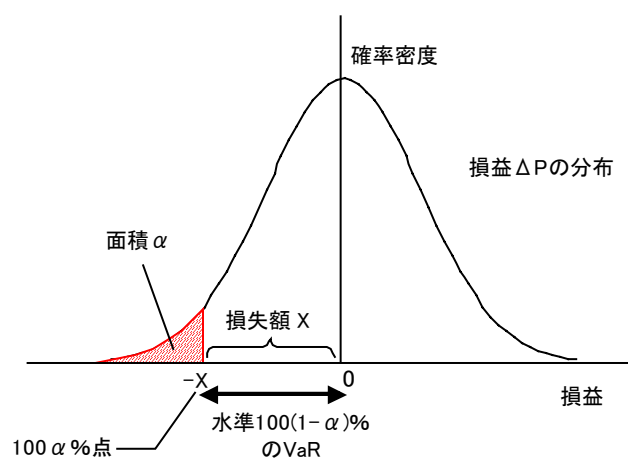
(1) VaR の定義

VaR とは、金融商品のポートフォリオを、現時点からある一定の期間保有するとき（この期間を保有期間という）に、リスク・ファクターの変動により、ある一定の確率で生じ得る最大損失額のことをいう。数学的には、現時点 t のポートフォリオの価値を $P(t)$ として、将来の時点 τ までに生じる損益額 $\Delta P (= P(\tau) - P(t))$ に対して、

$$\Pr[\Delta P \leq -X] = \alpha, \quad (1)$$

が成立するとき、損失額 X を、保有期間 $\tau - t$ 、信頼水準 $100(1 - \alpha)\%$ の VaR と呼ぶ。VaR を求めることは、損益 ΔP の分布の $100\alpha\%$ 点を求めることである（図表 1 参照）。

図表 1：損益分布と VaR



(2) ヒストリカル法以外の代表的な VaR 算出手法

ここでは、ヒストリカル法以外の代表的な VaR 算出手法として、分散共分散法およびモンテカルロ法を概観する¹。

¹ これらの VaR 算出手法の詳細は、例えば、木島 [1998]、山下 [2000]、Jorion [2000] を参照。

イ．分散共分散法

分散共分散法は、リスク・ファクターとポートフォリオ価値の間の線形関係だけを主に捉え、リスク・ファクターの収益率の変動が（多変量）正規分布に従うと仮定して、VaR を算出する手法である。分散共分散法は、シミュレーションの必要がなく、解析的に VaR を求められることが実務上の利点である。一方、リスク・ファクターとポートフォリオ価値に明確な非線形の関係があるオプション等の商品あるいはそうした商品を含むポートフォリオの VaR の算出には不向きである。さて、収益率分布を特徴づける、分散共分散行列の推定にはいくつかの手法が考えられる。そのうち、標準的な手法と指数型加重移動平均法について説明する。

（イ）標準的な手法

標準的には、リスク・ファクターの収益率のヒストリカル・データに対し、標本分散、同共分散を計算することで分散共分散行列を推定する。以下では、本手法による VaR 算出法を「分散共分散法」と呼ぶ。

（ロ）指数型加重移動平均法²

上記の標準的な手法に対し、VaR 算出時点に近いデータをより重視するように重み付けを行って、分散共分散行列を推定する³。これは、リスク・ファクターの変動が大きい時期や小さい時期が継続する傾向があるため、VaR 算出時点に近い時点のデータをより重視することで、その傾向を VaR の算出に反映することを企図したものである。以下では、本手法による VaR 算出法を「指数型加重移動平均法」と呼ぶ。

² Exponentially Weighted Moving Average Method.

³ 時点 t の分散 σ_t^2 は、1 時点前の分散の推定値 σ_{t-1}^2 および収益率の実現値 r_{t-1} から、 $\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2$ ($0 < \lambda < 1$) で推定される。 λ は減衰因子 (decay factor) と呼ばれる定数で、値が小さいほど直近の実現値を重視する。この分散の推定式は、 $\sigma_t^2 = (1-\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} r_{t-k}^2$ と整理でき、指数的に減少する重みを過去の実現値に与えその和 (平均) を求めていることがわかる。また、リスク・ファクター i, j の共分散は、同様に $\sigma_{ij,t}^2 = \lambda \sigma_{ij,t-1}^2 + (1-\lambda)r_{i,t-1}r_{j,t-1}$ で推定される。

ロ．モンテカルロ法

モンテカルロ法は、リスク・ファクターの変動にパラメトリックな仮定を置き、乱数を用いたシミュレーションにより、損益分布を求め、そこから VaR を算出する手法である。原理的には収益率分布に任意の仮定を置くことが可能であるが、実務では、取扱いが容易な多変量正規分布を先験的に仮定することが多い。モンテカルロ法による VaR 算出では、リスク・ファクターとポートフォリオ価値の間の非線形な関係を織り込むことができるが、線形なポートフォリオを考える場合、リスク・ファクターの収益率変動に正規分布を仮定すると、分散共分散法による VaR に一致する。

3．ヒストリカル法による VaR の算出手法

本節では、ヒストリカル法による VaR の算出手順等を解説する。

(1) ヒストリカル法による VaR の算出手順

ヒストリカル法は、過去の観測期間中のリスク・ファクターの変動パターンが、いずれも同じ確率で起きると仮定し、ポートフォリオの損益分布を求め、そこから VaR を算出する手法である。以下では、リスク・ファクターが1つの場合、同複数の場合に分けて、ヒストリカル法による VaR の算出手順を説明する。

イ．リスク・ファクターが1つの場合

現時点 t のリスク・ファクターの値を x_t 、 T 日の観測期間のリスク・ファクターの値を $x_{t-T}, \dots, x_{t-2}, x_{t-1}$ とすると、収益率 $r_{t-T+1}, \dots, r_{t-1}, r_t$ は、(2)式で計算される⁴。

$$r_{t-i+1} = \frac{x_{t-i+1}}{x_{t-i}} - 1, \quad i = 1, \dots, T. \quad (2)$$

さて、現時点のポートフォリオの価値を $P(x_t)$ とすると、1営業日後の損益 $\Delta P = P(x_{t+1}) - P(x_t)$ の分布を考える。ヒストリカル法では、収益率が時点に関係なく互いに独立に同一の分布に従っていると仮定して、収益率分布に経験分布を用いる。つまり、過去に観測された収益率 $r_{t-T+1}, \dots, r_{t-1}, r_t$ が同じ確率で実現するものと仮定して、 T 個のシナリオ $\{x_{t+1}^{(T)}, \dots, x_{t+1}^{(2)}, x_{t+1}^{(1)}\}$ を作成する。ここで、

⁴ 連続複利表現では、 $r_{t-i+1} = \ln(x_{t-i+1} / x_{t-i})$ ($i = 1, \dots, T$)である。

$$x_{t+1}^{(i)} = x_t(1 + r_{t-i+1}), \quad i = 1, \dots, T, \quad (3)$$

である。次に、(3)式で得られた T 個のシナリオを用いて、損益シナリオ $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ を以下で求める。

$$\Delta P_i = P(x_{t+1}^{(i)}) - P(x_t), \quad i = 1, \dots, T. \quad (4)$$

ここで、 $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ を ΔP の真の損益分布から無作為に抽出された標本であると考え、求めようとしている VaR に相当する分位点を推定する。 ΔP_i を昇順に並び替えたもの（順序統計量という）を

$$\{\Delta P_{(1)}, \Delta P_{(2)}, \dots, \Delta P_{(T)}\}, \quad (5)$$

とする。VaR の信頼水準を $100(1 - \alpha)\%$ とすれば、 $-\Delta P_{((T+1)\alpha)}$ が VaR となる。 $(T+1)\alpha$ が整数でないときには、 $(T+1)\alpha$ を挟む 2 つの整数番目の損益シナリオを線形按分して符号を逆にした値を VaR とする。このように、高々 2 個の順序統計量から、分位点に該当する VaR を求める方法を、ここでは「標本分位点 (Sample Quantile) 法」と呼ぶ。

ロ．リスク・ファクターが複数の場合

現時点 t の n 個のリスク・ファクターの値を $\{x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t}\}$ とする。 T 日のヒストリカル・データの観測期間のリスク・ファクター値と収益率をそれぞれ以下で表す。

$$\{x_{1,t-T}, x_{2,t-T}, \dots, x_{n,t-T}\}, \dots, \{x_{1,t-2}, x_{2,t-2}, \dots, x_{n,t-2}\}, \{x_{1,t-1}, x_{2,t-1}, \dots, x_{n,t-1}\}. \quad (6)$$

$$\{r_{1,t-T+1}, r_{2,t-T+1}, \dots, r_{n,t-T+1}\}, \dots, \{r_{1,t-1}, r_{2,t-1}, \dots, r_{n,t-1}\}, \{r_{1,t}, r_{2,t}, \dots, r_{n,t}\}. \quad (7)$$

現時点のポートフォリオの価値を $P(x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t})$ とする。1 営業日後の損益は $\Delta P = P(x_{1,t+1}, x_{2,t+1}, \dots, x_{n,t+1}) - P(x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t})$ となる。収益率が、時点に関係なく、同一の多変量分布に従っていると仮定し、収益率分布にはヒストリカル・データの経験分布を用いる。つまり、 $i = 1, 2, \dots, T$ として、ヒストリカル・データの観測期間中の時点 $t - i + 1$ の収益率の組 $\{r_{1,t-i+1}, r_{2,t-i+1}, \dots, r_{n,t-i+1}\}$ を用いて、1 営業日後の収益率の組の T 個のシナリオ $\{x_{1,t+1}^{(i)}, x_{2,t+1}^{(i)}, \dots, x_{n,t+1}^{(i)}\}$ を(8)式から作成する。

$$\begin{cases} x_{1,t+1}^{(i)} = x_{1,t}(1 + r_{1,t-i+1}) \\ x_{2,t+1}^{(i)} = x_{2,t}(1 + r_{2,t-i+1}) \\ \vdots \\ x_{n,t+1}^{(i)} = x_{n,t}(1 + r_{n,t-i+1}) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, T. \quad (8)$$

これにより、リスク・ファクター間の相関関係を織り込んだシナリオが得られる。

T 個のシナリオによる損益を

$$\Delta P_i = P(x_{1,t+1}^{(i)}, x_{2,t+1}^{(i)}, \dots, x_{n,t+1}^{(i)}) - P(x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t}), \quad i = 1, \dots, T, \quad (9)$$

とすれば、 $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ を得て、標本分位点で VaR を求めることができる。

(2) 分位点の推定

ヒストリカル法による VaR の算出では、損益シナリオ $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ を損益 ΔP の標本と考え、 $100\alpha\%$ 点に該当する分位点を推定する。シナリオ数（標本数）は、ヒストリカル・データの観測期間の日数である。この場合、多くのシナリオを得ようとしても、データの入手が困難なことがある。また、データを入手できたとしても、観測期間を長くし過ぎると、現在の市場の価格変動のパターン等と相容れないシナリオを含む惧れがある。その一方で、 α は通常 0.01 などの非常に小さな値であることから、シナリオ数が十分多くないと、VaR の高い推定精度は得られない。

こうしたシナリオ数と推定精度の問題に対応するために、実務で利用される手法として、ブートストラップ法、Harrell-Davis 推定量という推定量を用いる方法、分布の平滑化による推定法等が存在する。以下では、これらの手法の概要を説明する。

イ．ブートストラップ法による推定法

Efron [1979]によるブートストラップ法は、経験分布から、母集団分布の統計量等を推定する手法である⁵。ブートストラップ法による VaR 推定の手順を以下に示す。

基の標本セットとして $\{\Delta P_{(1)}, \Delta P_{(2)}, \dots, \Delta P_{(T)}\}$ が与えられたものとし、ここから重複を許して、無作為に T 個の標本を抽出する（復元抽出を行う）。

抽出した標本セットに標本分位点法を用いて、VaR の推定値を得る。

および を多数回繰り返し、 で得た複数の VaR 推定値の平均を VaR とする。

このように、ブートストラップ法による VaR 推定では、復元抽出により作成した多数の標本セットに標本分位点法を適用する。その過程では、基の標本セットに標本分位点法を適用するときには選ばれる高々2個の順序統計量に加えて、その近辺の順

⁵ ブートストラップ法に関する和文文献としては、例えば、汪・田栗ほか[2003]がある。

序統計量の情報（分布の裾に関する情報）が利用される。したがって、ブートストラップ法によって、VaR のより安定した推定値が得られることが期待される⁶。

□ . Harrell-Davis 推定量による推定法⁷

Harrell and Davis [1982]が提案した Harrell-Davis 推定量（以下、HD 推定量）は、 $\{\Delta P_{(1)}, \Delta P_{(2)}, \dots, \Delta P_{(T)}\}$ を所与とするときの $100\alpha\%$ 点 ΔP_α の推定量で、順序統計量 $\Delta P_{(i)}$ の重み付き平均をとった、

$$\Delta P_\alpha = \sum_{i=1}^T w_{T,i}^\alpha \Delta P_{(i)}, \quad (10)$$

として与えられる。ここで、重み関数 $w_{T,i}^\alpha$ は

$$w_{T,i}^\alpha = \frac{1}{\beta(k, T-k+1)} \int_{(i-1)/T}^{i/T} y^{k-1} (1-y)^{T-k} dy, \quad k = (T+1)\alpha, \quad (11)$$

で表される^{8, 9}。以下では、HD 推定量による分位点の算出方法を HD 推定法と呼ぶ。

標本分位点法による推定値は、高々2つの順序統計量により決定されるが、HD 推定法による推定値は、2つの順序統計量を中心に全ての順序統計量に重みを与えて平均をとるため、標本分位点法に比べて安定した推定値を与えることが期待される。

図表 2 に、 $\alpha=0.01, 0.05, T=250, 500$ のときの重み関数 $w_{T,i}^\alpha$ のグラフを示す。ここから、VaR を与える i の付近（ $i = (T+1)\alpha$ 付近）で重みが大きいがわかる。

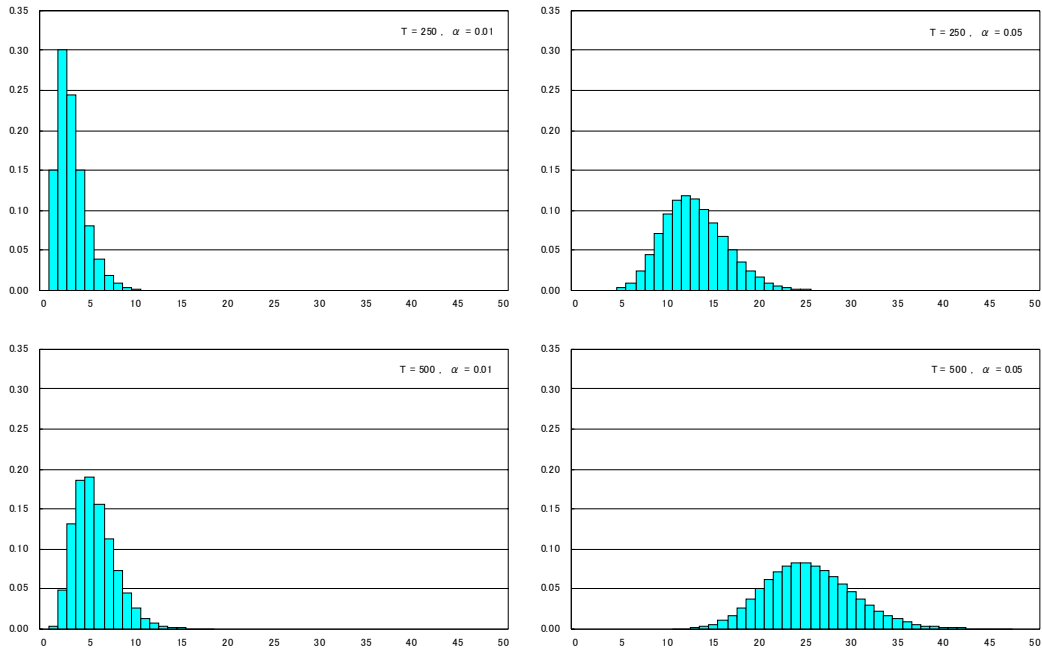
⁶ ただし、基の標本の数が少ない場合には、ブートストラップ法で多数の標本セットを作成しても、VaR のより安定した推定値は得られない。

⁷ ここでの説明は、Inui, Kijima and Kitano [2003]を参考にした。

⁸ $\beta(a,b)$ はベータ関数で、 $\beta(a,b) = \int_0^1 y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy$ ($a, b > 0$) である。HD 推定量の導出は、補論 1 の (1) を参照。なお、ベータ関数の定義から $\sum_{i=1}^n w_{T,i}^\alpha = 1, w_{T,i}^\alpha > 0$ が成立する。

⁹ $X_{(i)}$ を順序統計量とすると、一般に、 $L = \sum_{i=1}^n w_i X_{(i)}, w_i \geq 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1$ で表現される統計量 L を L 統計量という。HD 推定量および標本分位点は L 統計量である。

図表 2 : HD 推定量の重み関数 $w_{T,i}^\alpha$ (縦軸 : 重み、横軸 : i)



ところで、HD 推定量は、ブートストラップ法による推定量の期待値と一致することが知られている (Sheather and Marron [1990])¹⁰。つまり、HD 推定量を用いれば、ブートストラップ法による多数の復元抽出なしに、同様の推定量を解析的に得ることができる。このことは、HD 推定量を用いることの利点である。

八．分布の平滑化による推定法

ここでは、分布の平滑化を概説する¹¹。平滑化は、離散的な標本から滑らかな確率密度関数を推定する方法である。標本 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ が与えられたとき、平滑化では、推定確率密度関数 $\hat{f}(x)$ は、次式で与えられる。

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right). \quad (12)$$

ここで、 h はバンド幅と呼ばれる平滑化の程度を表すパラメータで、 $K(u)$ は、カーネル関数と呼ばれる密度関数である。図表 3 に、代表的な関数形を挙げる。

¹⁰ 証明は補論 1 の (2) を参照。

¹¹ 分布の平滑化の詳細は、シモノフ [1999] を参照。

図表 3 : カーネル関数の例 (シモノフ [1999]より抜粋)

カーネル名	関数形
ガウス型	$(2\pi)^{-1/2} e^{-u^2/2}$ $[-\infty, \infty]$
イバネクニコフ	$3/4(1-u^2)$ $[-1, 1]$
2乗重み	$15/16(1-u^2)^2$ $[-1, 1]$

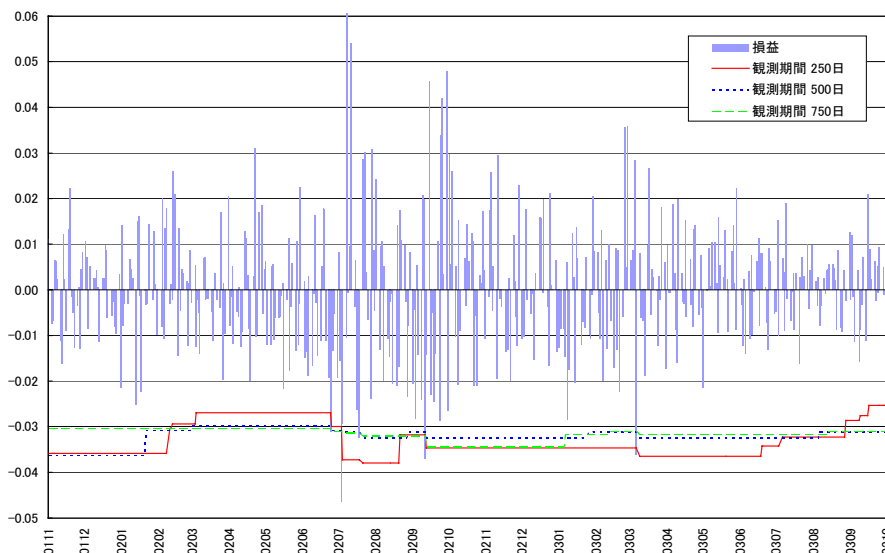
平滑化で確率密度関数が得られれば、標本が少ない場合でも、分位点の推定値を得ることが可能である¹²。しかし、平滑化には、カーネル関数やバンド幅の設定により推定値が大きく変動するほか、推定手続きが煩雑である等の実務上の問題がある。

(3) ヒストリカル法による VaR 算出の具体例

ここでは、ヒストリカル法による VaR 算出を行い、異なる観測期間で計測した VaR の比較、VaR の標本分位点法による推定量と HD 推定量の比較を試みる。

図表 4 は、損益がダウ・ジョーンズ工業株価平均指数 (以下、NY ダウ平均) に連動するポジション 1 単位で、ヒストリカル法による VaR (信頼水準 99%、標本分位点法で推定) と損益を日次で計算した結果である。棒グラフは損益 (収益率)、3本の折線グラフは 250、500、750 営業日の観測期間のヒストリカル・データを用いて計算した VaR を示したものである¹³。

図表 4 : ヒストリカル法による VaR と損益



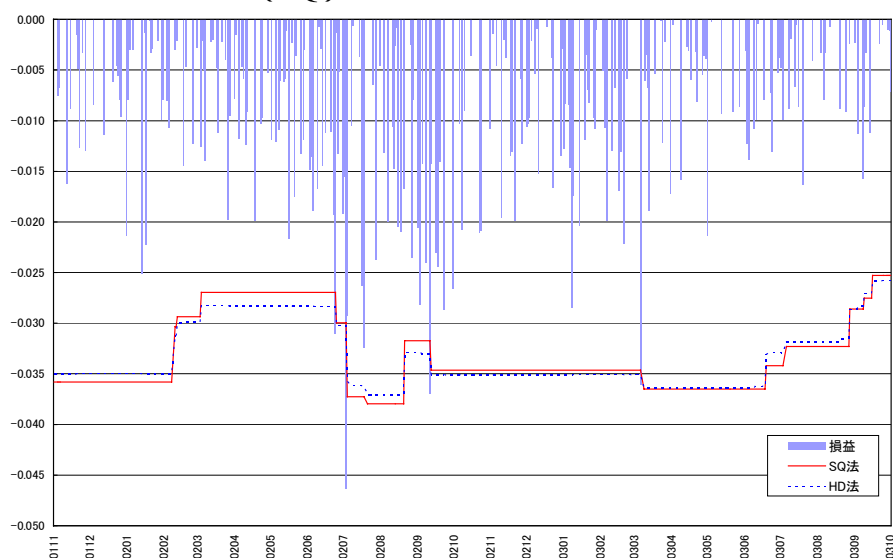
¹² 平滑化を利用して VaR の算出を試みた既存研究に Buttler and Schachter [1997]がある。

¹³ 図表 4、5 および 7~12 では、2001/11/16 日~2003/10/16 日を VaR の算出対象期間とした。

図表 4 から、VaR は、ほぼ一定の水準の時期がしばらく続いた後に、ジャンプして、再度ほぼ一定水準の時期が再び続くということを繰り返していることがわかる。これは、分位点の推定に採用されている標本がしばらくの間は不変で、ヒストリカル・データの観測期間が変わることで、分位点の推定に採用されている標本が入れ替わるためである。また、ヒストリカル法では損失だけを勘案しているため¹⁴、比較的大きな利益が出ても VaR は不変で、比較的大きな損失が生じたときに VaR が増加することもみてとれる。さらに、観測期間が短いほど標本数が少ないため、VaR の変動が頻繁で大きいことがわかる。

次に、図表 5 に、標本分位点法および HD 推定法による VaR を比較した結果を示す。観測期間は 250 営業日で、そのほかの前提は図表 4 と同一である。なお、図表 5 には、損益のうち損失のみを掲げてある。

図表 5：標本分位点 (SQ) による VaR と HD 推定量による VaR の比較



図表 5 から、両手法による VaR はほぼ同様の値を与えているが、HD 推定法の VaR の方が、標本分位点法の VaR よりも変動が小さいことがみてとれる。これは、上述のように、HD 推定法が、標本分位点法に比べて安定した推定値を与えるためである。

¹⁴ 後述の、ヒストリカル法に改良を加えた手法には、大きな利益が生じた場合にも、VaR が増加する手法がある。

4. リスク・ファクターの直近の変動を考慮したヒストリカル法

ヒストリカル法による VaR の算出では、経験分布を用いており、特定の分布を仮定していない。このことは、損益分布の裾に注目して行う VaR 推定という点では、特定の分布（例えば正規分布）を先験的に仮定する他の VaR 推定手法に比べると、実務上は好ましい。しかし、観測期間内の標本がいずれも同一確率で将来発生すると考えるヒストリカル法は、リスク・ファクターの直近の変動パターンを VaR の推定に反映させ難いという実務上の問題点もあわせ持つ。

こうした問題意識から、近年、ヒストリカル法で、リスク・ファクターの直近の変動パターンをより反映させやすいようにした手法が、Boudoukh, Richardson and Whitelaw [1998]、Hull and White [1998]、Barone-Adesi, Giannopoulos and Vosper [1999] により提案されている。本節では、これらの手法を解説する。

(1) Boudoukh, Richardson and Whitelaw [1998]による手法

Boudoukh, Richardson and Whitelaw [1998]は、ヒストリカル法による VaR 算出手順の中で、損益シナリオに対して、指数型加重移動平均と類似の重み付けを行う VaR 算出手法を提案している。以下、本手法を BRW 法と呼ぶ。

BRW 法は、損益シナリオの作成までは、従来のヒストリカル法と同じであるが、損益シナリオに指数的に減少する重み付けを行い、リスク・ファクターの直近の変動パターンをより重視するように工夫した手法である。以下に、BRW 法による VaR 算出手順を示す。

現時点から $1, 2, \dots, T$ 営業日前のリスク・ファクターの変動によって、 T 個の損益シナリオ $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ が得られたとする。

損益シナリオ $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ に対して、過去にさかのぼるに従って一定の割合 $\lambda (0 < \lambda < 1)$ で減少する重み $\{w_1, w_2, \dots, w_T\}$ を(13)式で与える¹⁵。

$$w_i = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^T} \lambda^{i-1}. \quad (13)$$

λ は減衰因子 (decay factor) と呼ばれる定数で、この値が小さいほど直近のデータ

¹⁵ 重みの合計は $\sum_{i=1}^T w_i = \sum_{i=1}^T (1-\lambda)\lambda^{i-1} / (1-\lambda^T) = 1$ である。

を重視することになる¹⁶。

損益シナリオ $\{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_T\}$ を昇順に並び替えた順序統計量を $\{\Delta P_{(1)}, \Delta P_{(2)}, \dots, \Delta P_{(T)}\}$ とし、それぞれに与えられた重みを $\{w_{(1)}, w_{(2)}, \dots, w_{(T)}\}$ とする¹⁷。VaR の信頼水準を $100(1-\alpha)\%$ とするとき、損失の大きなシナリオから、順に重みを足し上げていき、 α に達したときの損益シナリオ（の絶対値）を VaR の推定値とする。正確に α にならない場合には、損益シナリオの線形補間により VaR を求める。 $w_{(1)}$ が α より大きい場合には、 $-\Delta P_{(1)}$ を VaR とする。数式で表すと以下のようになる¹⁸。

(a) $\sum_{i=1}^k w_{(i)} \leq \alpha < \sum_{i=1}^{k+1} w_{(i)}$ のとき

$$\text{VaR}_\alpha = -\left\{(\alpha - \sum_{i=1}^k w_{(i)})\Delta P_{(k+1)} + (\sum_{i=1}^{k+1} w_{(i)} - \alpha)\Delta P_{(k)}\right\} / w_{(k+1)}. \quad (14)$$

(b) $w_{(1)} \geq \alpha$ のとき

$$\text{VaR}_\alpha = -\Delta P_{(1)}. \quad (15)$$

図表 6 は、BRW 法による VaR 算出において、減衰因子 (λ) および観測期間にいくつかの値を与え、損益シナリオの重みを過去にさかのぼって和をとり、それが 0.99 を超えた時点までの日数¹⁹を示したものである。VaR の信頼水準を 99% とすれば、この日数は、大雑把に言えば、「実質的な観測期間」と考えることができる。

¹⁶ BRW 法の減衰因子は、指数型加重移動平均法の減衰因子とは意味合いが異なることに注意してほしい。後者は、過去の実現収益率に対して、指数関数的に減少する重みを与えるが、前者は、損益シナリオに対して、指数関数的に減少する重みを与える。

¹⁷ $\Delta P_{(i)}$ が ΔP_j に該当するならば、 $w_{(i)} = w_j$ である。

¹⁸ ここで示した方法は、原論文とやや異なっている。本稿では、 $\Delta P_{(k)}$ は $\sum_{i=1}^k w_{(i)} \times 100\%$ 点に該当するが、原論文では、 $\{\sum_{i=1}^{k-1} w_{(i)} + w_{(k)} / 2\} \times 100\%$ 点に該当するとしている。ここで、 λ を限りなく 1 に近づけて、各損益シナリオに与える重みを同一 ($w_{(i)} = 1/n$) としよう。このとき、 $\Delta P_{(k)}$ は、本稿の方法では $(k/n) \times 100\%$ 点に該当し、原論文の方法では $\{(k-0.5)/n\} \times 100\%$ 点に該当する。一方、標本分位点法では、 $\Delta P_{(k)}$ は、 $\{k/(n+1)\} \times 100\%$ 点に該当する。このため、 n に比べ k が十分小さい（つまり、 k は、VaR 算出対象となる分布の裾にある）と、原論文の方法に比べて本稿の方法が、標本分位点法に近い推定値を与えることになる。つまり、 λ が 1 に近い場合、BRW 法のような損益シナリオの重み付けを行う方法による VaR と、標本分位点法による VaR とは近い値をとるのが自然であると思われる。このため、ここでは、本稿の手法を採用することにした。

¹⁹ $\sum_{i=1}^N (1-\lambda)\lambda^{i-1} / (1-\lambda^N) > 0.99$ となる N の最小値。

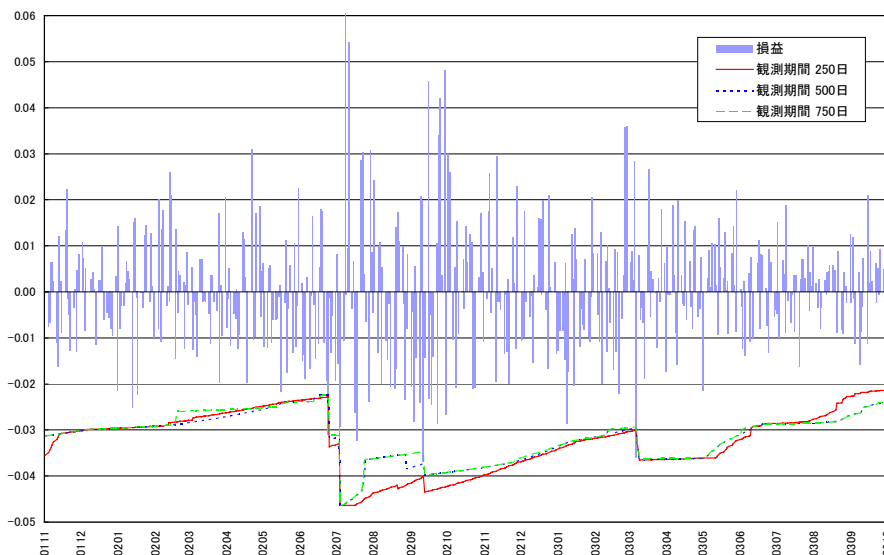
図表 6：BRW 法の「実質的な観測期間」

	$\lambda = 0.94$	$\lambda = 0.97$	$\lambda = 0.99$
250営業日	75	150	240
500営業日	75	152	409
750営業日	75	152	454

図表 6 から、 $\lambda=0.94$ 、 0.97 のときには、減衰因子が小さいため、「実質的な観測期間」は、基の観測期間に比べかなり短いことがわかる。「実質的な観測期間」が短いと、分布の裾をうまく表現できなくなる可能性がある。したがって、減衰因子 λ の水準を決定する際には、「実質的な観測期間」の長さにも留意する必要がある。

図表 7 は、NY ダウ平均に損益が連動するポジション 1 単位で、BRW 法による VaR（信頼水準 99%）と損益を日次で計算した結果である。観測期間は、250、500、750 営業日の 3 とおりとし、減衰因子は $\lambda = 0.99$ とした。

図表 7：BRW 法による VaR と損益（観測期間の比較）

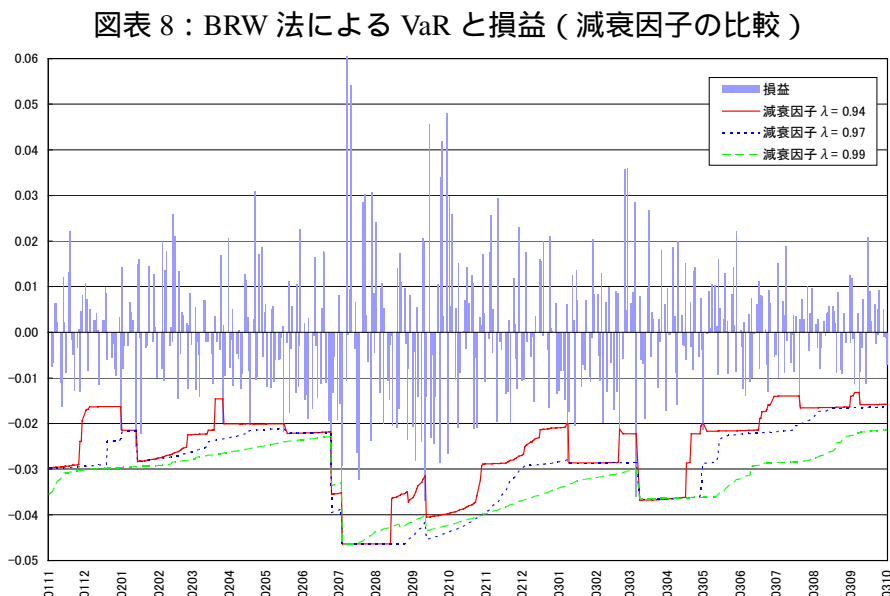


図表 7 から、VaR はジャンプして上昇した後、徐々に低下するという動きを繰り返す傾向がみてとれる。これは、BRW 法では、1 営業日ずつずらしていく観測期間の中に大きな損失が生じた営業日が入ってくると、VaR はジャンプする形で増加するが、その後、各シナリオに与えられた重みは徐々に低下するので、新たに大きな損失を発生させた営業日が観測期間に入っていない限りは、VaR は徐々に低下する、ためである。なお、図表 7 では、通常のカスタム法と同様に、損失のみが VaR に勘案される様子もわかる。

各観測期間の VaR をみると、500 営業日および 750 営業日の際の VaR の傾向はほぼ同様になっていることがわかる。これは、図表 6 で示したように、重みを勘案

した「実質的な観測期間」が、両者で大きな差がないことが背景となっている。

次に、図表 8 に、観測期間を 250 営業日とし、減衰因子を 0.94、0.97、0.99 として、BRW 法で算出した VaR を掲げた。



図表 8 からは、減衰因子が小さいほど VaR の変動が大きいことがわかる。これは、減衰因子が小さいほど、「実質的な観測期間」が短くなることがその理由である。

(2) Hull and White [1998]による手法

Hull and White [1998]は、ヒストリカル法に、指数型加重移動平均によるボラティリティ推定を組み合わせた手法を提案した。以下では、この手法を HW 法と呼ぶ。

通常のヒストリカル法では、損益シナリオを作成する際に、過去に生じた収益率をそのまま用いるが、HW 法では、リスク・ファクターの直近の変動パターンを反映するよう、過去に生じた収益率を修正して用いる。収益率の修正は、観測された収益率を、指数型加重移動平均で計算したその時点の推定ボラティリティで除し、現時点の推定ボラティリティを乗ずることで行われる。以下に、この HW 法の概要および具体的な適用方法を示す。

まず、リスク・ファクターを 1 つとする。収益率 r_t のボラティリティが指数型加重移動平均で計算されるとして、収益率を以下のように表現する。

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t. \quad (16)$$

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2. \quad (17)$$

ここで、 ε_t は、互いに独立に、同一の分布（平均 0、分散 1）に従う確率変数である。

さて、現時点 t で、推定ボラティリティ σ_t および収益率の実現値 r_t は既知であるから、(17)式より時点 $t+1$ の推定ボラティリティ σ_{t+1} が求められる。VaR を算出するためには、 r_{t+1} の変動をモデル化する必要があるが、(16)式から ε_{t+1} の分布を決めればよいことがわかる。ここで、 $\varepsilon_{t+1} \sim N(0,1)$ とすれば、2 節で述べた指数型加重移動平均法と同じこととなる。一方、HW 法では、過去の実現値 ε_{t-i+1} ($i=1, \dots, T$) から得られる経験分布を利用する。 ε_{t-i+1} ($i=1, \dots, T$) は、過去の実現収益率 r_{t-i+1} ($i=1, \dots, T$) および推定ボラティリティ σ_{t-i+1} ($i=1, \dots, T$) を用いて、

$$\varepsilon_{t-i+1} = r_{t-i+1} / \sigma_{t-i+1}, \quad i=1, \dots, T, \quad (18)$$

により計算される。これに σ_{t+1} を乗じて収益率 r_{t+1} のシナリオとすれば、VaR を算出できる。算出手順を整理すると、以下のようなになる。

過去に観測された収益率を $\{r_{t-T+1}, \dots, r_{t-1}, r_t\}$ 、指数型加重移動平均による推定ボラティリティを $\{\sigma_{t-T+1}, \dots, \sigma_{t-1}, \sigma_t\}$ 、時点 $t+1$ の推定ボラティリティを σ_{t+1} とし、

$$r_{t-i+1}^* = \frac{r_{t-i+1}}{\sigma_{t-i+1}} \sigma_{t+1}, \quad i=1, 2, \dots, T, \quad (19)$$

により、修正された収益率 $\{r_{t-T+1}^*, \dots, r_{t-1}^*, r_t^*\}$ を得る²⁰。

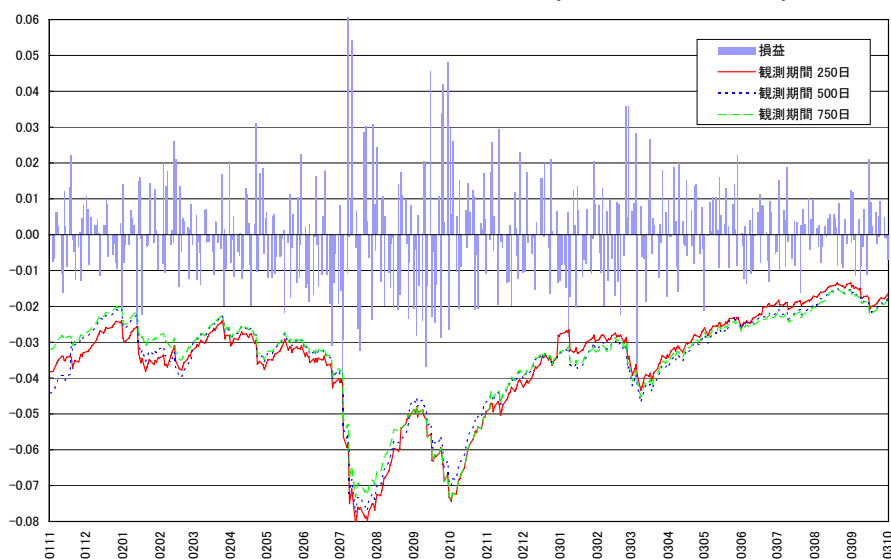
修正された収益率 $\{r_{t-T+1}^*, \dots, r_{t-1}^*, r_t^*\}$ を用いて、通常の方法と同様の手順により VaR を算出する。

リスク・ファクターが複数のときも同様に、全リスク・ファクターの過去の収益率を、(19)式に従って修正し、通常の方法と同様の手順により VaR を算出することが可能である。

図表 9 は、NY ダウ平均に損益が連動するポジション 1 単位で、HW 法による VaR（信頼水準 99%）と損益を日次で計算した結果である。観測期間は 250、500、750 営業日の 3 とおりとし、減衰因子は $\lambda = 0.94$ とした。

²⁰ (19)式は、過去の収益率に $\sigma_{t+1} / \sigma_{t-i+1}$ を乗ずることで、リスク・ファクターの直近の変動パターンを反映するように修正したものと解釈することができる。

図表 9：HW 法による VaR と損益（観測期間の比較）



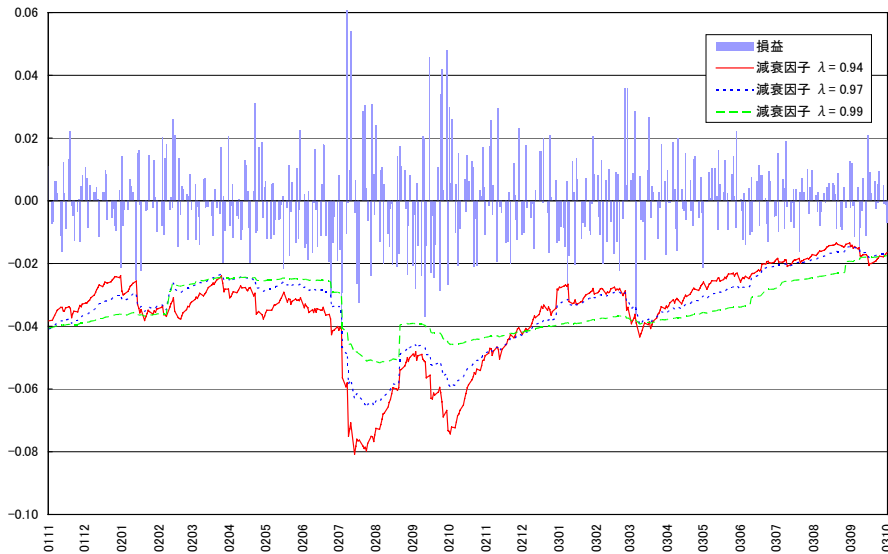
図表 9 からは、損益が正負によらず大きく動いたときに、VaR が増加していることがわかる。これは、通常のコスト法および BRW 法では、損失のみが VaR の水準に影響を与えるのに対し、HW 法では、損益が正負に関係なく大きく振れた場合には推定ボラティリティが上昇し、VaR の水準に影響を与えることによるものである。

HW 法では、観測期間の違いによる推定値の違いはさほど大きくないことがわかる。収益率の変動が(16)、(17)式で適切に表現されているならば、 ε_t は時点に関係なく同一の分布に従う。このとき、(18)、(19)式で修正された収益率シナリオも時点に関係なく同一の分布に従うので、観測期間によらず VaR はほぼ同水準となるはずである。したがって、観測期間による推定値の差異が小さいというここで得られた結果から、収益率の変動が適切に表現されているための必要条件の 1 つが満たされているといえる²¹。

次に、図表 10 に、観測期間を 250 営業日に固定し、減衰因子 λ を 0.94、0.97、0.99 の 3 とおりとして、HW 法で VaR を計算した結果を掲げた。

²¹ 厳密には、(16)、(17)式が適当な定式化であるか否かは、 ε_t が時点に関係なく同一の分布（平均 0、分散 1）に従うこと、および互いに独立であることを、統計的に検証する必要がある（検証方法は、例えば渡部 [2000]を参照）。

図表 10：HW 法による VaR と損益（減衰因子の比較）



図表 10 からは、減衰因子が小さい方が VaR の変動が大きいことがわかる。これは、減衰因子が小さいほど、推定ボラティリティの変動が大きくなるためである。

(3) Barone-Adesi, Giannopoulos and Vosper [1999]による手法

Barone-Adesi, Giannopoulos and Vosper [1999]が提案した手法は²²、ボラティリティの推定に GARCH モデルを利用することを除き、HW 法と同様の手法である。同論文では、提案した手法をフィルター付ヒストリカル・シミュレーション (Filtering Historical Simulation < FHS >) と呼んでいる。以下、この手法を FHS 法と呼ぶ。

FHS 法が HW 法と異なる点は、収益率の変動の定式化である。本稿では、以下のように、収益率 r_t が GARCH(1,1)モデルに従っていると仮定する²³。

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t. \quad (20)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (21)$$

ここで、 ε_t は互いに独立に同一の分布 (平均 0、分散 1) に従う確率変数で、 α 、 β 、 ω はパラメータである。

(17)式と(21)式を比べると、FHS 法の分散の定式化 (GARCH モデル)の方が、HW

²² Barone-Adesi, Bourgoin and Giannopoulos [1998]も参照。

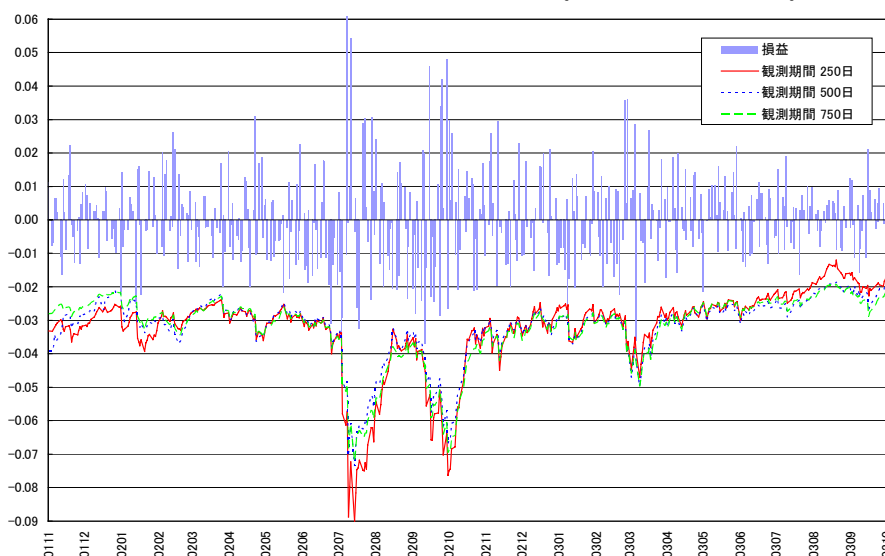
²³ 原論文では ARMA-GARCH(1,1)モデルを仮定しているが、本稿では簡単化のため GARCH(1,1)モデルを利用する。

法のそれ（指数型加重移動平均）よりも、パラメータの自由度が多く、収益率の変動をよりの確に捉えられると期待できる。

本稿では、GARCH モデルのパラメータを、擬似最尤法により求める²⁴。VaR の算出を日次で行う都度、観測期間中のデータに対して尤度を最大化するよう、パラメータの推定を行う。そのほかの手順は、HW 法と全く同じである。また、リスク・ファクターが複数の場合も、ボラティリティの推定法を除いて、HW 法と全く同じである。

図表 11 は、NY ダウ平均に損益が連動するポジション 1 単位で、FHS 法による VaR（信頼水準 99%）と損益を日次で計算した結果である。観測期間は、250、500、750 営業日の 3 とおりとした。

図表 11：FHS 法による VaR と損益（観測期間の比較）



図表 11 では、HW 法と同様に、損益が正負によらず大きく動いたときに、VaR が増加している。また、観測期間が短い方が、変動が若干大きいようである。これは、観測期間が短いと、推定した GARCH モデルのパラメータが振れやすいためであると考えられる。しかし、HW 法と同様に、各観測期間の VaR は水準がほぼ同じであり、収益率の変動が適切に捉えられるための必要条件の 1 つは満たされているといえよう。

²⁴ 通常の GARCH モデルのパラメータ推定方法と同様に、 ε_t が標準正規分布に従っていると仮定して、尤度を最大化するようにパラメータを推定する。 ε_t が標準正規分布に従っていない場合でも、標本数を十分大きくすると、推定量が真の値に収束することが示されている (Bollerslev and Wooldrige [1992])。

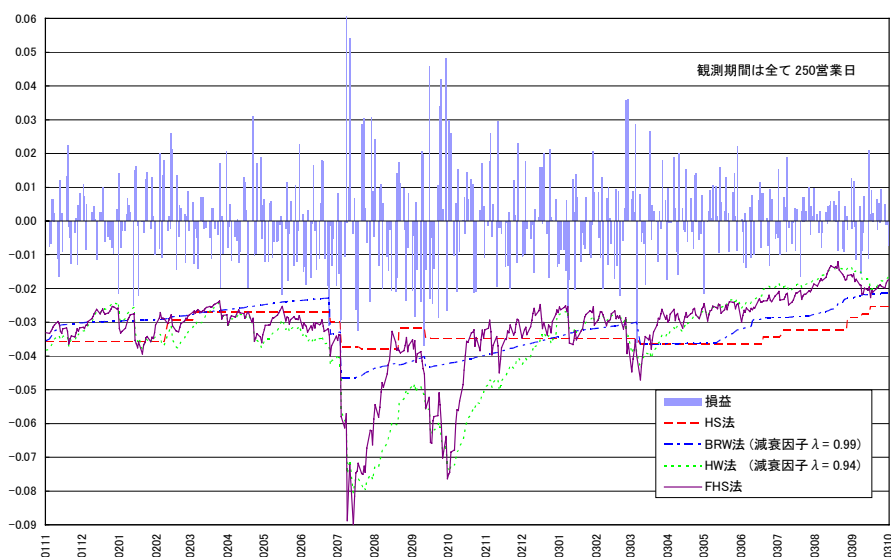
(4) 各種手法のまとめ

本節で説明した BRW 法、HW 法、FHS 法、および通常のコスト法（以下、HS 法）のポイントを下表にまとめる。

	収益率変動のシナリオ	損益シナリオの重み付け
HS 法	過去の収益率をそのまま利用	均等
BRW 法	過去の収益率をそのまま利用	指数関数的に減少
HW 法	指数型加重移動平均による推定ボラティリティを利用し、過去の収益率を修正して利用	均等
FHS 法	GARCH による推定ボラティリティを利用し、過去の収益率を修正して利用	均等

次に、図表 12 に、各手法によって算出した VaR を示した。観測期間は 250 営業日で、減衰因子は BRW 法で 0.99、HW 法で 0.94 とした²⁵。

図表 12：HS 法、BRW 法、HW 法、FHS 法による VaR の比較



図表 12 から、HS 法と BRW 法、HW 法と FHS 法の計測結果の傾向が比較的類似しているように見受けられる。これは、BRW 法が、観測期間を実質的に短くした HS 法と見なせること、HW 法と FHS 法が、いずれも可変分散モデルを利用していること、が背景にあると考えられる。VaR の変動は、HS 法や BRW 法に比べて、可変分散モデルに基づく HW 法や FHS 法の方が大きくなっているようにみとれる。

²⁵ Boudoukh, Richardson and Whitelaw [1998]および Hull and White [1998]を参考にした。

5. 数値分析による各種 VaR 算出手法の比較

本節では、分散共分散法(以下、VCV法)、指数型加重移動平均法(以下、EWMA法)、HS法、BRW法、HW法およびFHS法の6種類のVaR算出手法を用いて、実際の市場データからVaRを算出し、比較を行う。

VaRの算出対象として、株価指数・為替・円金利の単一リスク・ファクターのポジション、円金利のポートフォリオ、を採用した。の目的は、株価指数・為替・円金利の多様なリスク・ファクターで比較を行うことにより、各VaR算出手法の特徴を浮かび上がらせることである。の目的は、昨年夏場の円金利(特に中長期金利)に短期間で大きな変動が生じた時期、および昨年夏場以前の円金利が比較的落ち着いていた時期を採り上げ、相場の変動がVaR算出手法へ与える影響を考察することである。以下では、数値分析の設定を説明した後、数値分析の結果を考察する。

(1) 数値分析の設定

イ. 算出対象のリスク・ファクターおよびデータの取扱い

図表13に、分析の対象とするリスク・ファクターの一覧を掲げる。

図表13：算出対象リスク・ファクター

株価指数(7種)	円金利(15種)
NYダウ工業株30種平均	円LIBOR1ヵ月
トロント総合300種株価指数	円LIBOR3ヵ月
FT100種総合株価指数	円LIBOR6ヵ月
CAC40種株価指数	円LIBOR12ヵ月
DAX株価指数	円スワップ2年
日経225種平均	円スワップ3年
ハンセン指数	円スワップ5年
	円スワップ7年
	円スワップ10年
為替(10種)	円債1年
ユーロ	円債2年
英ポンド	円債3年
スイス・フラン	円債5年
シンガポール・ドル	円債7年
カナダ・ドル	円債10年
オーストラリア・ドル	
デンマーク・クローネ	
スウェーデン・クローナ	
ニュージーランド・ドル	
米ドル	

また、図表14に、ヒストリカル・データの取得期間を示す。データは、取得期間中の月曜日から金曜日までの日次データを対象として Bloomberg より取得し、欠損

値がある場合には、前後の日次データで線形に補間した。なお、VaR 算出の基準通貨を円とするため、為替のデータは、円建てに換算して利用した。

図表 14：データ取得期間

株価指数	1990/1/1-2003/10/17 (3,600営業日)
為替	1990/1/1-2003/10/17 (3,600営業日)
円金利	1996/1/1-2003/10/17 (2,035営業日)

(注)ユーロの1999年以前のデータはドイツ・マルクを換算して利用した。

ロ．VaR 算出対象ポジションの設定

(イ) 単一リスク・ファクター

図表 13 に挙げた全てのリスク・ファクター(32種類)について、図表 15 のポジションを VaR 算出の対象とする。

図表 15：ポジション保有量

株価指数、為替	各指数、各通貨が1単位
円金利	各金利グリッドのベース・ポイント・バリューが1単位

また、VaR の算出対象期間は、図表 16 とした。

図表 16：VaR 算出対象期間

株価指数	1992/11/16-2003/10/17 (2850営業日)
為替	1992/11/16-2003/10/17 (2850営業日)
円金利	1998/11/16-2003/10/17 (1285営業日)

(ロ) 円金利ポートフォリオ

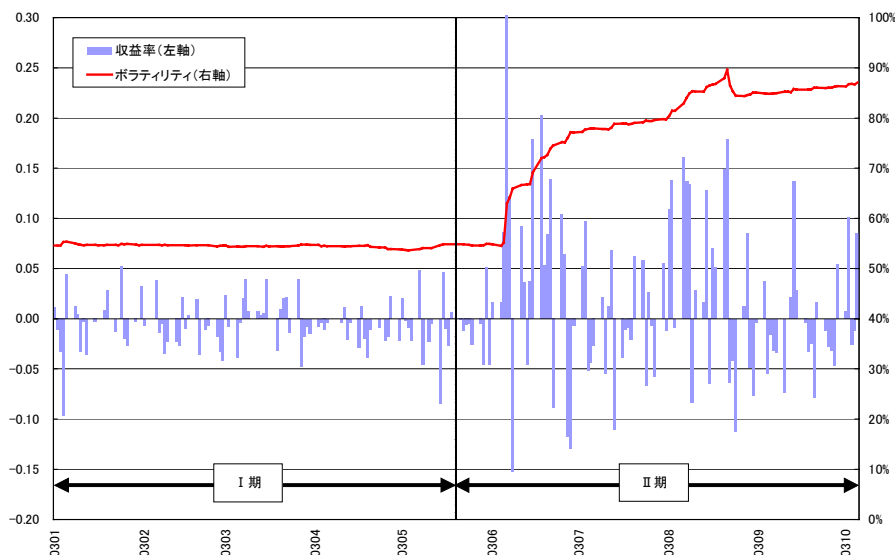
円 LIBOR 1～12 ヶ月、円スワップ金利 2～10 年の 9 個の円金利グリッド(図表 13 参照)にポジションを保有する円金利ポートフォリオを考える。ここでは、各円金利グリッドの BPV を -1～+1 の範囲でランダムに振らせることで、100 個のポートフォリオを作成した²⁶。

この円金利ポートフォリオの VaR の算出対象期間は、長期金利に大きな変動がみられた時期として、2003/6/02 日～2003/10/17 日(100 営業日)を採用し、比較的相場環境が落ち着いていた時期として、その直前の時期の 2003/1/13 日～2003/5/30 日

²⁶ Hendricks [1996]によるポートフォリオ作成方法を参考にした。

(100 営業日)を採用した。以下、2003/1/13 日～2003/5/30 日を I 期、2003/6/02 日～2003/10/17 日を II 期と呼ぶことにする。図表 17 に、I 期および II 期における、円スワップ金利(5 年)の収益率およびボラティリティ(年率)²⁷を示す。

図表 17：円スワップ金利(5 年)の収益率およびボラティリティ



八．VaR 算出手法の設定

VaR の信頼水準は 99%とし、観測期間 T は 250、500、750 営業日の 3 種類とする。減衰因子 λ は 0.94、0.97、0.99 の 3 種類とする²⁸。

HS 法では、標本分位点法と HD 推定法の 2 種類の手法で VaR を算出した。以下では、前者による HS 法を HS (SQ) 法、後者によるそれを HS (HD) 法と呼ぶ。図表 18 に、数値分析を行う手法の設定をまとめる。

²⁷ 過去 250 営業日の収益率データの標本標準偏差を計算した。

²⁸ 減衰因子は、EWMA 法、BRW 法および HW 法で用いるが、手法により意味が異なる。脚注 16 で述べたように、BRW 法では、それを損益シナリオの重み付けに用いる。一方、EWMA 法および HW 法では、それを指数型加重移動平均による分散の推定に用いる。EWMA 法は推定した分散(および共分散)を損益変動幅の決定に利用し、HW 法は推定した分散を過去の収益率シナリオの修正に利用する。

図表 18：VaR 算出手法の設定

	手法	観測期間	減衰因子	信頼水準
1	VCV	250	-	99%
2	VCV	500	-	99%
3	VCV	750	-	99%
4	EWMA	-	0.99	99%
5	EWMA	-	0.97	99%
6	EWMA	-	0.94	99%
7	HS(SQ)	250	-	99%
8	HS(SQ)	500	-	99%
9	HS(SQ)	750	-	99%
10	HS(HD)	250	-	99%
11	HS(HD)	500	-	99%
12	HS(HD)	750	-	99%
13	BRW	250	0.99	99%
14	BRW	500	0.99	99%
15	BRW	750	0.99	99%
16	BRW	250	0.97	99%
17	BRW	500	0.97	99%
18	BRW	750	0.97	99%
19	BRW	250	0.94	99%
20	BRW	500	0.94	99%
21	BRW	750	0.94	99%
22	HW	250	0.99	99%
23	HW	500	0.99	99%
24	HW	750	0.99	99%
25	HW	250	0.97	99%
26	HW	500	0.97	99%
27	HW	750	0.97	99%
28	HW	250	0.94	99%
29	HW	500	0.94	99%
30	HW	750	0.94	99%
31	FHS	250	-	99%
32	FHS	500	-	99%
33	FHS	750	-	99%

二．VaR 算出結果の考察基準

VaR の算出結果に基づき、各種 VaR 算出手法の比較を行うため、超過回数の比率、VaR ボラティリティ、超過事象の相関、VaR の相対水準、の 4 つの基準を採用した。

(イ) 超過回数の比率

これは、いわゆるバック・テストングのことである。ここでは、VaR の全算出対象日数に対する、損失額が VaR を超過した日数の比率を計算する。VaR の信頼水準を 99%としているので、この比率は 1%近傍になることが望ましい。

(ロ) VaR のボラティリティ

VaR の変動度合いをみるために、各手法が算出した VaR の年率ボラティリティを求める。リスク管理実務では、VaR をポジションの保有枠に用いることがあるため、その観点では、VaR のボラティリティが小さい手法の方が実務上は望ましい。

(八) 超過事象の相関

VaR が日々正確に算出されていれば、超過事象は毎日 1% の確率で独立に生じる。超過事象を表す確率変数 X_t を導入する。

$$X_t = \begin{cases} 1 & (\text{時点 } t \text{ において損失額が VaR を超過した}) \\ 0 & (\text{時点 } t \text{ において損失額は VaR を超過していない}). \end{cases} \quad (22)$$

超過事象が独立であれば、時系列 $\{X_t\}$ の全ての自己相関は 0 である。

本稿では、 $\{X_t\}$ の 1~15 次の標本自己相関が全て 0 であるという帰無仮説²⁹ に対し、Ljung-Box 統計量³⁰ による検定を行った。リスク・ファクターの変動パターンをうまく捉えられていない手法では、相場変動が大きくなったときに超過事象が頻繁に起こるため、検定では帰無仮説が棄却されやすいことが予想される。実務的には、VaR の算出結果が、検定で棄却されにくい方が好ましい。

(二) VaR の相対的水準

VaR 算出対象ポジション（対象ポートフォリオ）ごとに、各手法で、全算出日の VaR の平均値を計算する。各手法の VaR 平均値と、全手法の VaR 平均値（各手法の VaR 平均値を全手法 < 33 種類 > で平均したもの）との乖離を計算することで、相対的な大小関係を表せる。実務では、一般的に、VaR を所要自己資本額の基準としているため、VaR が小さい方が自己資本額は小さくなる。このため、実務的には自己資本の効率的運用の観点から、VaR は必要以上に大きすぎない方がよい。

(2) 数値分析の結果

イ．単一リスク・ファクターの結果

ここでは、33 種類の手法で、単一リスク・ファクターのポジションの VaR を算出し、4 種類の基準で各手法を比較した結果を示す。また、標本分位点法による VaR と HD 推定法による VaR に関して、若干の考察を行う。

²⁹ この帰無仮説は、Hull and White [1998] のそれになった。

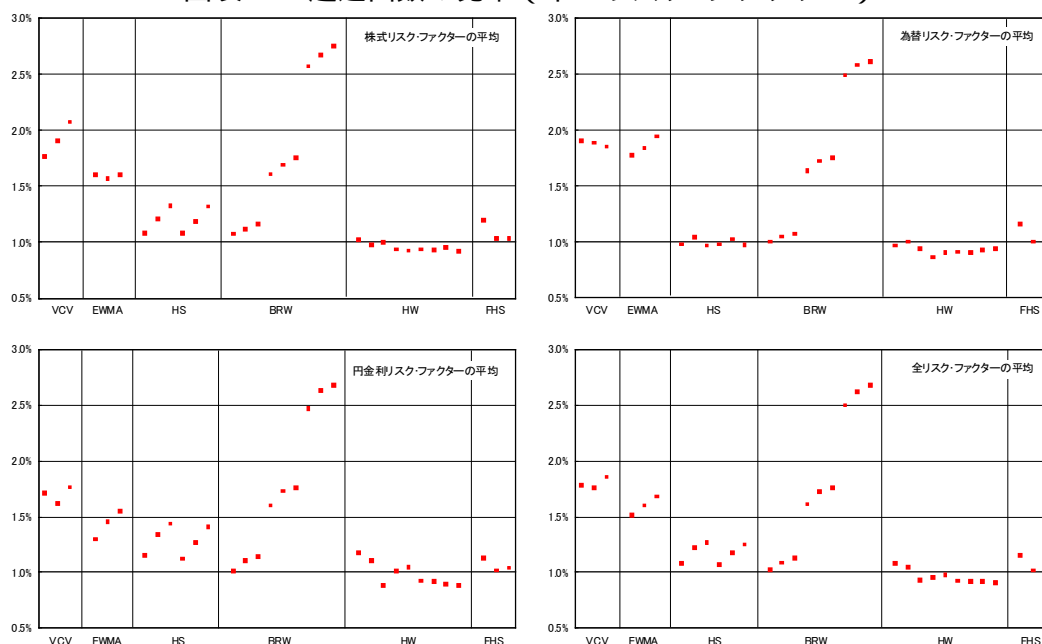
³⁰ Ljung-Box 統計量の詳細は、補論 2 を参照。

(イ) 各種基準による各手法の比較

a. 超過回数の比率

図表 19 に、株価指数・為替・円金利のリスク・ファクターおよび全リスク・ファクターに対して、超過回数の比率を平均した結果を、VaR 算出手法の通し番号順（図表 18 参照）に左からプロットしたグラフを示す。

図表 19：超過回数の比率（単一リスク・ファクター）



上述のように、超過回数の比率は、VaR の信頼水準を 99%としているので、1% になることが望まれる。このことを念頭に図表 19 をみると、超過回数比率が比較的 1%に近い値をとっているのは、HW 法、FHS 法、HS 法および BRW 法（減衰因子 0.99）であること、それ以外の手法では 1%を相当上回っていること、がわかる。

は、いずれの手法も損益分布に正規性等の仮定を置かず、実際の損益の経験分布に基づく手法であることが、良好な結果に繋がったものと考えられる³¹。

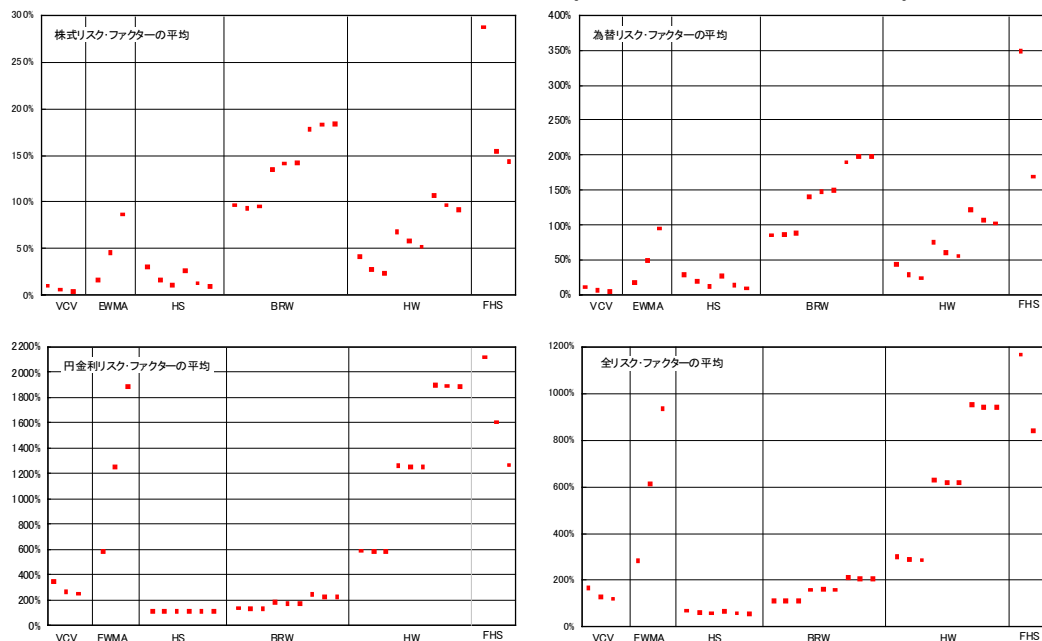
は、VCV 法と EWMA 法では収益率分布に正規性の仮定を置いていることが、BRW 法（減衰因子 0.94 または 0.97）では実質的な観測期間が短くなっていることが、それぞれ、実際の損益分布の裾を十分に表現できない背景であると考えられる。

³¹ HS 法では、観測期間を 250、500、750 営業日としたが、観測期間が短いほど超過回数比率は 1%に近い。これは、いたずらに観測期間を長くして分布の裾のデータ数を増やすより、直近のリスク・ファクターの変動パターンを反映できるようにした方がよい場合があることを意味する。

b . VaR のボラティリティ

図表 20 に、株価指数・為替・円金利のリスク・ファクターおよび全リスク・ファクターで、ボラティリティを平均した結果をプロットしたグラフを示す。

図表 20 : VaR のボラティリティ (単一リスク・ファクター)

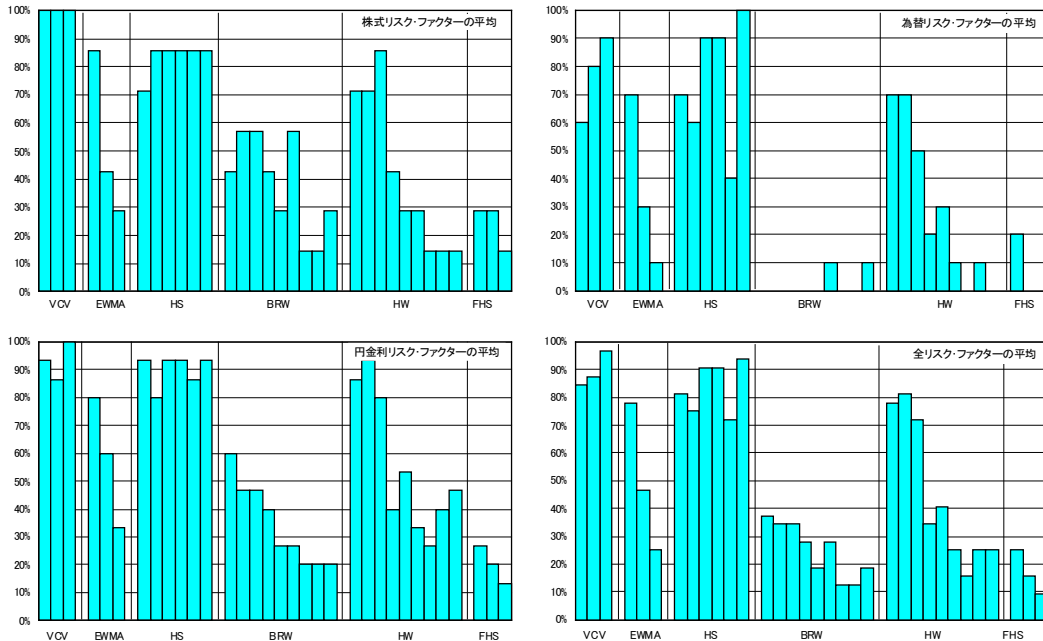


図表 20 をみると、相対的にボラティリティが小さい手法は HS 法、VCV 法であることがわかる。これは、リスク・ファクターの直近の変動パターンを反映しきれないことの裏返しでもある。これらの手法以外で、ボラティリティが低めに算出される手法は、円金利では BRW 法を、それ以外のリスク・ファクターでは HW 法 (減衰因子 0.99) を挙げることができる。

c . 超過事象の相関

図表 21 に、リスク・ファクターごとに、Ljung-Box 統計量を用いて、超過事象の相関の検定を行った結果を掲げる。具体的には、株価指数・為替・円金利のリスク・ファクターおよび全リスク・ファクターのうち有意水準 1% で棄却された割合を示す。

図表 21：超過事象の相関の検定（単一リスク・ファクター）



図表 21 をみると、EWMA 法（減衰因子 0.94）、BRW 法（減衰因子 0.94）、HW 法（減衰因子 0.94）および FHS 法の棄却割合が相対的に小さいこと、VCV 法と HS 法は、棄却割合が 80～90%と非常に高いこと、EWMA 法、BRW 法および HW 法では、減衰因子が小さいほど棄却割合が小さくなる傾向があること、がみてとれる³²。

³² 図表 21 では、為替リスク・ファクターで、BRW 法の棄却割合が相対的にかなり低い。この点、実際のデータを詳細に観察したところでは、為替リスク・ファクターでは、大きな損失が生じてからしばらくの間に、さらに大きな損失が生じることは、株や円金利に比べて少なかった。一方、ここでの BRW 法（信頼水準 99%の VaR を算出）では、減衰因子を 0.94、0.97、0.99 の 3 とおりとしているため、(13)式で直近のデータに与えられる重みはいずれも 1%超である。このため、直近の観測期間中のどの損失よりも大きい損失が新たに生じると、それは、その時点の VaR を超える。その損失額は、(15)式により翌日の VaR として採用される。その後、VaR として採用された損失を上回る損失が発生しない限り、VaR として採用された損失に与えられる重みは日々徐々に低下し、1%を割り込んだ時点で、今度は(14)式によって VaR が計算される。この点、重みは時間の経過に伴い急速には低下しないので、VaR の水準が大きく変動することは殆どなく、損失が VaR を超過するのは、VaR として採用された損失を上回る損失が発生するときにほぼ限定される。このことが、為替リスク・ファクターの棄却割合が低い背景となっていると考えられる。

なお、株価指数や円金利に比べて、相対的に、為替リスク・ファクターで大きな損失が継続的には発生しない背景として、通貨当局による為替介入あるいは為替介入に対する市場の警戒感によって急激な為替変動の継続が抑制されていると推論できるかもしれない。しかし、この点については、本稿ではこれ以上は立ち入らない。

は、いずれもリスク・ファクターの直近の変動パターンを重視する手法であることが理由であると考えられる。

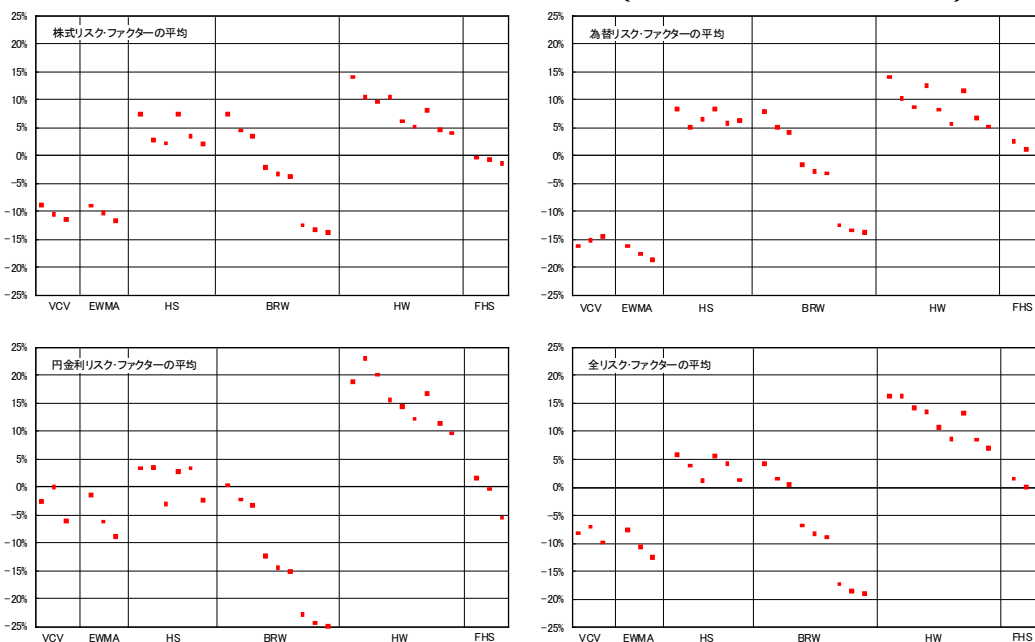
は、VCV 法と HS 法が、収益率分布に定常性を仮定しており、リスク・ファクターの直近の変動パターンを捉えにくい手法であることが背景となっている。

は、減衰因子が小さいほど、リスク・ファクターの直近の変動パターンを重視し、超過事象は毎日独立に発生する度合いが高くなることを意味している。

d . VaR の相対的水準

図表 22 に、株価指数・為替・円金利のリスク・ファクターおよび全リスク・ファクターで、VaR の全手法平均値からの乖離を平均した結果を示す。

図表 22：VaR の全手法平均値からの乖離（単一リスク・ファクター）



図表 22 をみると、HW 法を除いた各手法では、図表 19 とは上下が概ね逆になっている。これは、相対的に小さい VaR を算出する手法の方が、損失が VaR を上回る回数（超過回数）の比率も相対的に大きくなる傾向があるためである。

一方、HW 法では、VaR の平均からの乖離が正で相対的にかなり大きい。その一方で、図表 19 では、HW 法の超過回数比率は概ね 1% の水準にある。直観的には、相対的に大きな VaR を算出する手法では、超過回数の比率も相対的に小さくなると思われるが、HW 法の結果はその直観と必ずしも整合的ではない。この理由を、

前掲の図表 12 を基に考えてみる。図表 12 で、HW 法と FHS 法を比較すると、両手法とも、相場変動が大きくなると比較的速やかに VaR が大きくなる一方で、その後相場が落ち着いたときの VaR の低下速度は、HW 法の方が遅い傾向がある。このため、相場変動が大きく損失が VaR を超過する可能性が高まったときには、両手法とも速やかに VaR を引き上げ、超過の過度な発生を抑えているが、HW 法は、相場が落ち着き、超過の可能性が低下したときも VaR を相対的に高止まりさせている。したがって、結果として、HW 法では、超過回数比率は概ね 1% と期待通りの水準になる一方で、算出される VaR は時間平均をとると高めに算出されるのである。

(口) 標本分位点法と Harrell-Davis 推定法の比較

Inui, Kijima and Kitano [2003]では、正規分布、 t 分布等の裾が凸性を持つ損益分布で、HS (SQ) 法で VaR を算出すると、VaR を過大に推定する可能性があること、一定の条件の下で³³、HS (HD) 法を用いて VaR を算出すると、HS (SQ) 法よりさらに過大な VaR を推定すること、を数値実験で示している。一方、乾 [2003]では、実際の市場データ(円・ドル為替レートおよび日経平均株価指数)を用いて数値分析を行い、Inui, Kijima and Kitano [2003]の指摘とは異なり、VaR を過小評価する傾向がみられることを示した。考えられる理由として、乾 [2003]は、実際の収益率分布の裾が凸性を満たしていないこと、収益率が互いに独立に同一分布に従っていないこと、を挙げている。

ここでは、本稿の上述の数値計算結果を用いて、乾 [2003]と同様の傾向がみられるか否かを検討する。まず、超過回数の比率(図表 19)をみると、両手法とも、殆どのリスク・ファクターで超過比率が僅かながら 1% を超えるにとどまっており、過大な VaR を推定しているとは言い難い。また、両手法が計算した VaR 水準(図表 22)をみても、明確な大小関係はなく、HS (HD) 法が HS (SQ) 法よりも、過大な VaR を算出するという傾向はない³⁴。

このように、株・為替・円金利の多くの種類のリスク・ファクターでも、乾 [2003]と同様の傾向がみられることが示された。したがって、リスク管理実務が対象とする実際の市場データには、Inui, Kijima and Kitano [2003]の指摘は、必ずしも該当しな

³³ t 分布等の裾が厚い分布ほど、この条件が満たされやすくなる。詳細は Inui, Kijima and Kitano [2003]を参照。

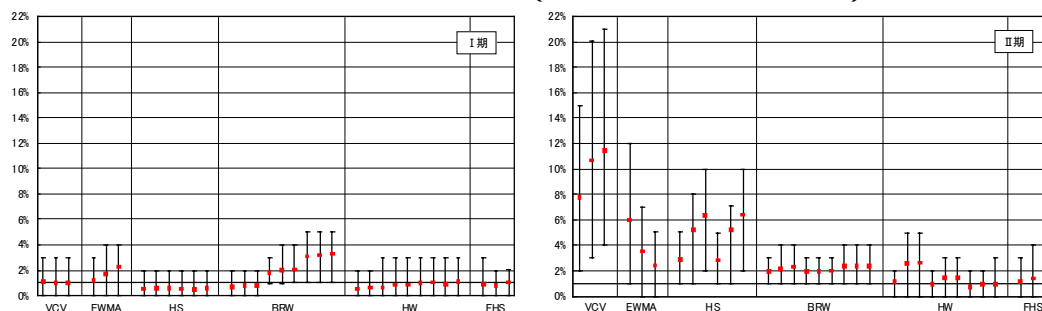
³⁴ 各リスク・ファクターで個別にみても同様である。

いと考えておいてよいと思われる。しかし、乾 [2003]と同じ傾向がみられる理由については、本稿では立ち入らず、乾 [2003]が挙げた 2 つの可能性を肯定するにとどめておきたい。

ロ．円金利ポートフォリオの数値計算の結果

次に、上述した円金利ポートフォリオを用いて、相場変動が比較的落ち着いていた時期（2003/01/13日～2003/05/30日＜期＞）、および円金利（特に中・長期金利）に大きな変動があった時期（2003/06/02日～2003/10/17日＜期＞）で行った数値分析の結果を示す。具体的には、期、期ともに、単一リスク・ファクターの場合と同様に、超過回数の比率（図表 23）、VaR の全手法平均値からの乖離（図表 24）、および VaR のボラティリティ（図表 25）を計算した³⁵。なお、図表 23、24、25 では、各指標の平均値とともに、100 個のポートフォリオ中、上位 5 番目および下位 5 番目の結果も合わせて示した。

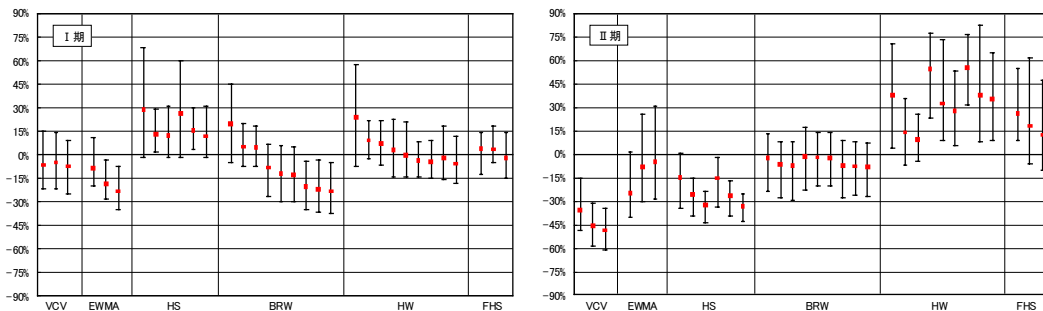
図表 23：超過回数の比率（円金利ポートフォリオ）



図表 23 をみると、期では、EWMA 法および BRW 法の一部を除いて、ほぼ 1% の超過率を示している。なお、HS 法および HW 法（減衰因子 0.99）の超過率が 0.5% 程度と若干 1% を下回っているが、これは、期の直前の相場変動が大きかったため、相対的に大きな VaR が推定されたことによると考えられる。一方、期では、VCV 法、EWMA 法および HS 法の超過率が 1% を大きく上回っているうえ、同一手法で算出される VaR のばらつきも期に比べると大きい。これに対して、BRW 法、HW 法および FHS 法は、超過率は 1～2% 程度にあるほか、VaR のばらつきも他の手法に比べると小さい。

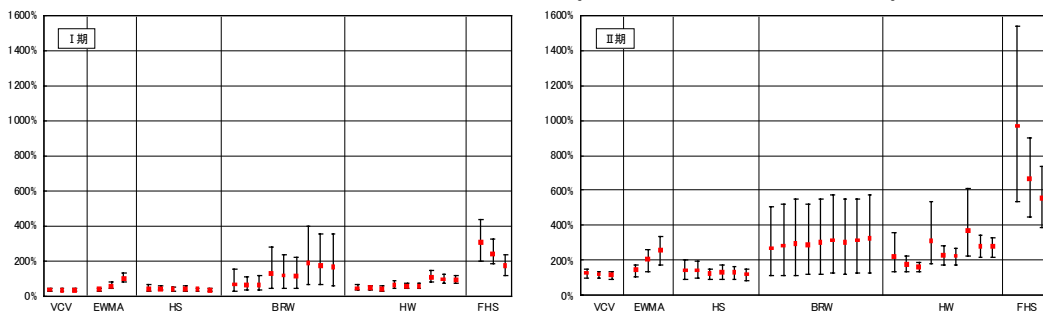
³⁵ VaR の算出対象期間が 100 営業日と短いため、ここでは、超過事象の相関の検定は行わない。

図表 24：VaR の全手法平均値からの乖離（円金利ポートフォリオ）



図表 24 をみると、I 期では、HS 法および HW 法（減衰因子 0.99）の VaR が大きく、図表 23 の結果と整合的である。II 期では、1% 程度の超過比率を示した HW 法や FHS 法の VaR 水準が比較的大きいことがわかる。これは、他の手法が VaR を過小評価していることが原因である（図表 23 参照）。HW 法と FHS 法を比べると、VaR は、単一リスク・ファクターのときと同様に、HW 法の方が大きい傾向がある。

図表 25：VaR のボラティリティ（円金利ポートフォリオ）



図表 25 をみると、II 期では I 期に比べて VaR のボラティリティの水準が大幅に増加していることがわかる。

6. 若干の考察

本節では、リスク管理実務での VaR 算出手法として望ましい条件を考え、通常の方法（HS 法）、方法に拡張を加えた手法（BRW 法、HW 法、および FHS 法）の実務上の利用可能性を考察する。

（1）リスク管理実務での VaR 算出手法の望ましい条件

前節では、VaR の算出結果を基に各種 VaR 算出手法の比較を行うため、超過回数の比率、VaR のボラティリティ、超過事象の相関、VaR の相対水準、とい

う4つの基準を設定した。

本稿では、実際に VaR 算出手法をリスク管理実務で利用する観点では、「VaR が損失を適切に捉えていること」() に対応) が最も重要であり、次に、その条件が満たされたうえで、「算出される VaR の変動が過度に大きくないこと」() に対応) が実務上要請される、と考えることにする。さらに、そのうえで、 と の基準が満たされれば、実務上はなお好ましいと考える。

また、「VaR が損失を適切に捉えていること」および「算出される VaR の変動が過度に大きくないこと」という条件のほかでは、「VaR 算出手法が複雑すぎないこと」も同様に重要である。リスク管理実務上、VaR は日々算出される重要な経営指標の1つとなっていることから、VaR の算出に多大な時間(例えば数日)を要するような計算負荷の大きく複雑な手法でないことが要請される。また、VaR 算出に関連して何らかの問題が生じた際に、速やかに原因を追究できるためにも、手法が複雑すぎないことが必要となる。

(2) 各種 VaR 算出手法の実務での利用可能性

次に、(1) で挙げた各種条件を前提に、本稿で解説した各種 VaR 算出手法の、実務での利用可能性を検討する。ここでは、まず、単一リスク・ファクターの VaR の算出結果(全リスク・ファクターの平均)を用いる。図表 14 にあるように、ここでは、最長 10 数年の日次データを用いており、リスク・ファクターが過去に示した様々な変動パターンを分析の対象としている。この意味で、以下ではまず、相場の安定期や変動期を含めた長期間における、各種 VaR 算出手法の利用可能性をみていくことになる。その後、前節の円金利ポートフォリオの分析結果を基に、リスク・ファクターが大幅に変動する時期に注目して、各種 VaR 算出手法を考察する。

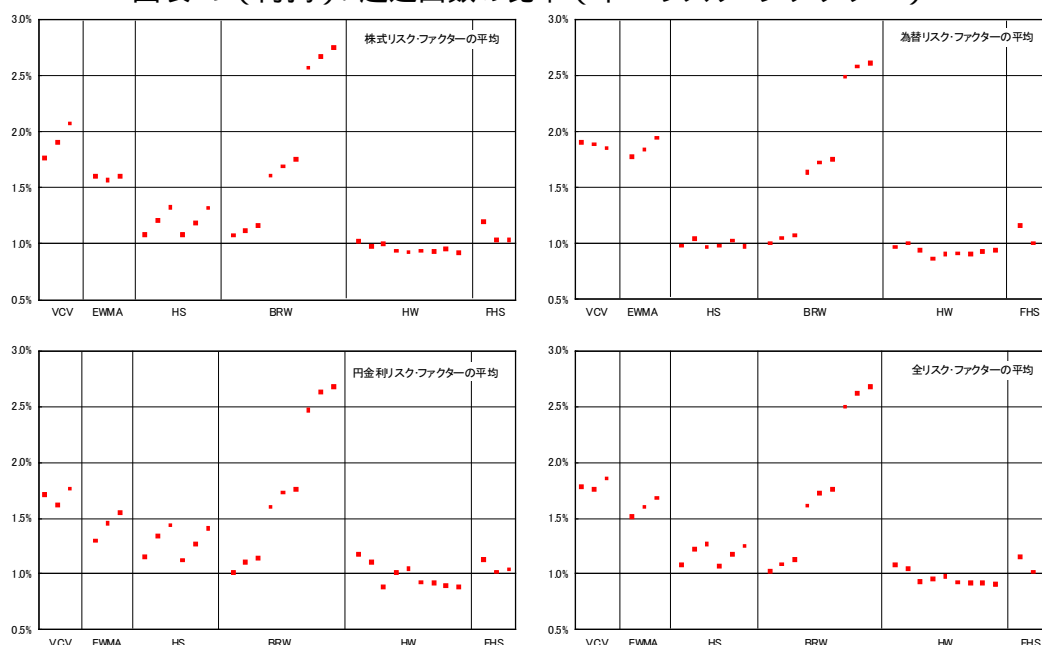
イ．単一リスク・ファクターの分析結果を基に

最初に、「VaR 算出手法が複雑すぎないこと」という条件を検討する。HS 法は、リスク・ファクターの過去の変動が将来も繰り返されるという単純な仮定を置いており、また計算負荷が軽いことから、この条件を十分満たしていると考えられる。また、BRW 法も HS 法の単純な拡張であるので、この条件を満たしている。一方、HW 法および FHS 法は、これらも HS 法の拡張であり、その考え方自体は決して難

しいものではない。しかし、HW 法や FHS 法では、GARCH 等の分散推定モデルを用いて分散を定式化しているため、各種パラメータの推定作業が相当煩雑になる(ただし、HS 法等と同様に、リスク・ファクター間の相関を求める必要はないという点は実務上の利点である)。したがって、HW 法および FHS 法は、この条件を十分満たしているとは言い難いと思われる。

次に、「VaR が損失を適切に捉えていること」に関しては、超過比率でみると、損益分布に正規性等の仮定を置かず、実際の損益分布に基づく手法である HS 法(HS <SQ> 法、以下 HS 法)、BRW 法(減衰因子 0.99、以下 BRW 法)、HW 法および FHS 法は、比較的良好な結果を示した³⁶(図表 19<再掲>の右下図参照)。

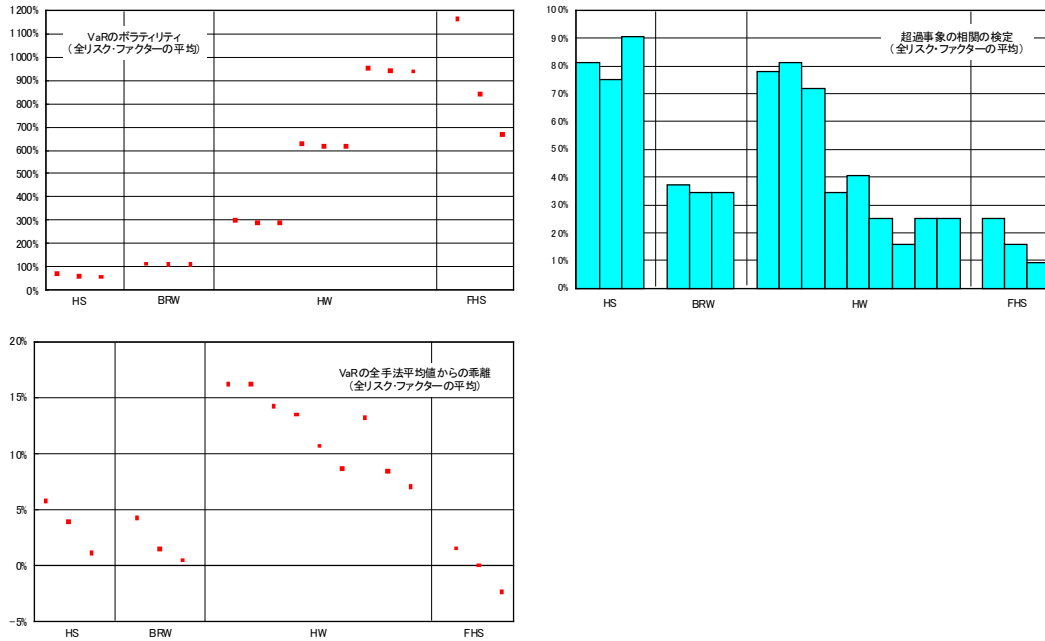
図表 19 (再掲): 超過回数の比率 (単一リスク・ファクター)



以下では、「VaR が損失を適切に捉えていること」という条件を満たした HS 法、BRW 法、HW 法および FHS 法のみを対象に、その他の条件を満たすか否かという観点で考察する。図表 26 にそれらの手法による VaR の分析結果をまとめた。

³⁶ ちなみに、マーケット・リスクに関するバーゼル合意(いわゆるマーケット・リスク規制)では、銀行の内部モデルを規制上の自己資本の計測に用いる場合に、VaR を損失が超過した比率によるバック・テストを義務付けている。具体的には、250 個の標本において、5 回以上の超過があったときには、追加的な自己資本を課す扱いとしている (Basel Committee on Banking Supervision [1996])。この規制の存在を前提とすると、銀行にとっては、2% (=5/250) 未満の超過比率となる VaR 算出手法が必要となるが、ここでの HS 法、BRW 法、HW 法および FHS 法はいずれも超過比率は 1.5% を下回る水準にある。

図表 26：HS 法、BRW 法、HW 法および FHS 法の各種分析結果



「算出される VaR の変動が過度に大きくないこと」という条件でみると (図表 26 の左上図)、HS 法と BRW 法で VaR の変動が相対的に小さいことがわかる。上述のように、「VaR が損失を適切に捉えていること」と「算出される VaR の変動が過度に大きくないこと」の 2 つの条件を重要視する立場では、HS 法と BRW 法がその条件に合致する。

さらに、超過事象の相関、VaR の相対水準という 2 つの条件を加えると、の観点では、HS 法と BRW 法では、観測期間が長いほど、VaR は相対的に小さくなる (ただし、図表 19 をみると、観測期間が長いほど超過比率が高くなる傾向はある)。また、については、棄却割合は、HS 法よりも BRW 法が小さく、後者の方が好ましいといえる。

本稿の数値分析に基づくこれらの評価結果を踏まえると、リスク管理実務上で用いるヒストリカル法に基づく VaR 算出手法としては、HS 法あるいは BRW 法が相対的に望ましいと結論付けることができる。

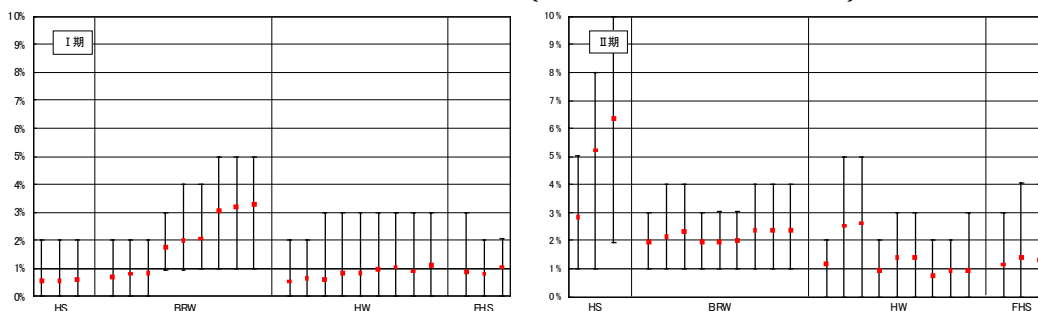
ロ．円金利ポートフォリオの分析結果を基に

イ．では、相場の安定期や変動期を含めた長期間における、各種 VaR 算出手法の利用可能性をみてきた。次に、前節の円金利ポートフォリオの分析結果を基に、リ

スク・ファクターが大幅に変動する時期に注目して各種 VaR 算出手法を考察する。

相場変動が比較的落ち着いていた時期（2003/01/13日～2003/05/30日＜期＞）、および円金利（特に中・長期金利）に大きな変動があった時期（2003/06/02日～2003/10/17日＜期＞）について、図表 27 に、「VaR が損失を適切に捉えていること」という条件に対応する超過回数比率（HS＜SQ＞法＜以下、HS 法＞、BRW 法、HW 法および FHS 法）を掲げる³⁷。

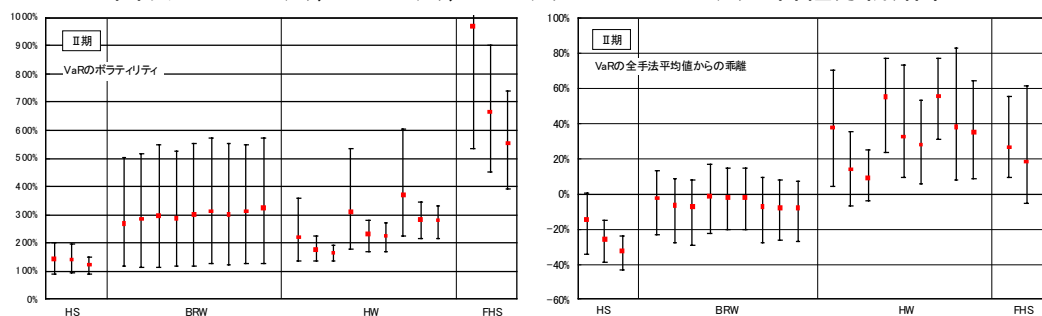
図表 27：超過回数の比率（円金利ポートフォリオ）



図表 27 をみると、期では、まずⅠ期で相対的に望ましいとされた HS 法はかなり高めの超過比率を示しているほか、同 BRW 法は HS 法に比べれば低めであるが 2% 程度とやや高めの超過比率となっている。この一方、HW 法と FHS 法は比較的良好な結果となっている。これは、特に HW 法と FHS 法がリスク・ファクターの直近の変動パターンを重視する枠組みを持つことが背景にあると考えられる。

次に、これらの 4 つの手法がその他の条件を満たすか否かという観点で考察する。図表 28 に、期での、それらの手法による VaR の分析結果をまとめた^{38、39}。

図表 28：HS 法、BRW 法、HW 法および FHS 法の各種分析結果



³⁷ HS (HD) 法、VCV 法および EWMA 法の結果を省いた以外は、図表 23 と同様。

³⁸ 脚注 35 で述べたように、ここでは超過事象の相関の検定は行わない。

³⁹ 図表 28 は、図表 24、25 からの抜粋。

「算出される VaR の変動が過度に大きくないこと」という条件でみると（図表 28 の左図）、BRW 法、HW 法および FHS 法ではいずれも VaR のボラティリティが相対的にかなり大きいことがわかる。また、特に HW 法および FHS 法では、他の手法に比べて、大きめの VaR を算出する傾向があることもみてとれる（図表 28 の右図）。これらは、特に HW 法および FHS 法が、「VaR が損失を適切に捉えていること」という条件を満たしていることの裏返しである。

このように、上述の 期のようなリスク・ファクターの急激な変動があったときには、VaR 算出手法が、「VaR が損失を適切に捉えていること」、「算出される VaR の変動が過度に大きくないこと」という 2 つの条件を同時に満たすことは難しい。

イ . では、相場の安定期や変動期を含めた長期間の市場データを用いて、各種 VaR 算出手法を検討した結果、HS 法か減衰因子 0.99 の BRW 法が相対的に望ましいとの結論を得た。ここで仮に、リスク管理実務の連続性の観点から、特定の VaR 算出手法を継続的に使用することが望ましいと考えるならば、相場の状況にかかわらず、HS 法か減衰因子 0.99 の BRW 法のいずれかを VaR 算出手法として採用することになる。この点、上述の 期では、HS 法は、超過比率がかなり高く、前者の条件に必ずしも適う手法ではない。一方、BRW 法は、超過比率は HS 法よりは低く、少なくとも前者の条件をある程度満たしていると考えられることができる。したがって、本稿の分析結果を前提にすると、ヒストリカル・データを用いた各種 VaR 算出手法の中では、BRW 法がリスク管理実務上は相対的に好ましい手法であるとの評価を与えられると思われる。

7 . おわりに

本稿では、通常ヒストリカル法（HS 法）および HS 法に改良を加えた 3 つの手法（BRW 法、HW 法、FHS 法）による VaR の算出手法を説明し、分散共分散法（VCV 法）、指数型加重移動平均法（EWMA 法）を加えて、数値分析による各手法の比較を行った。

単一リスク・ファクターを用いた数値分析（多様なリスク・ファクターの長期間のデータを用いた分析）からは、収益率分布に正規性の仮定を置いた手法（VCV 法、EWMA 法）は、分布の裾を適切に捉えられないのに対し、過去の経験分布を利用する HS 法および HS 法に改良を加えた手法は、分布の裾を相対的によく表現することが示された。また、HS 法に改良を加えた手法は、リスク・ファクターの直近の変動

パターンを捉えることもある程度対応できており、この点で HS 法よりも優れた VaR 算出手法であることがわかった。円金利ポートフォリオを用いた数値分析からは、相場が安定的な時期には HS 法でも問題はないが、相場が不安定な時期でも分布の裾を相対的にうまく捉えられる手法は、分布にパラメトリックな仮定を設けず、かつ直近のデータをより重視する BRW 法、HW 法および FHS 法であることが示された。

リスク管理実務での利用を考えると、VaR 算出手法に求められる条件としては、「VaR が損失を適切に捉えていること」、「VaR の変動が過度に大きくないこと」の 2 つが特に重要である。これらの条件で数値分析の結果をみると、単一リスク・ファクターの数値分析からは、HS 法、減衰因子が高めの BRW 法が望ましいとの結論が導かれる。一方、円金利ポートフォリオの数値分析からは、リスク・ファクターの急激な変動があったときには、本稿で検討した VaR 算出手法は、いずれも「VaR が損失を適切に捉えていること」、「算出される VaR の変動が過度に大きくないこと」という 2 つの条件を同時に満たすことは難しいことが判明した。リスク管理実務の連続性の観点から、特定の VaR 算出手法を継続的に使用することが望ましいとする立場では、本稿の数値分析の結果をみる限りは、HS 法よりも、減衰因子が高めの BRW 法を使うことが相対的に好ましいとの評価を与えられるように思われた。

ただし、本稿の分析およびその評価は、いくつかの種類リスク・ファクターやポートフォリオを対象としたものである。つまり、本稿で示した各種の考察が、あらゆるポートフォリオに該当する訳ではない。したがって、実際のリスク管理実務においては、独自に、本稿のような数値分析を行い、それ基に様々な観点で検討を加え、適切と思われる VaR 算出手法を選択することが必要となる。

以 上

補論 1 . Harrell-Davis 推定量について

(1) Harrell-Davis 推定量の導出

分布関数 $F(x)$ 、確率密度関数 $f(x)$ の分布より得られた標本を $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 、経験分布の分布関数を $F_n(x) = 1/n \sum_{i=1}^n 1_{\{x \geq X_i\}}$ ⁴⁰、標本を昇順に並べ替えた順序統計量を $\{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}\}$ とする。このとき、 k 番目の順序統計量 $X_{(k)}$ で、

$$P\{X_{(k)} \leq x\} = \sum_{i=k}^n \frac{n!}{(n-i)!i!} F^i(x)(1-F(x))^{n-i}, \quad (23)$$

が成立する。順序統計量 $X_{(k)}$ の確率密度関数 $f_k(x)$ は、(23)式を微分して、

$$f_k(x) = \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} F(x)^{k-1} \{1-F(x)\}^{n-k} f(x), \quad (24)$$

で与えられる⁴¹。このとき、順序統計量 $X_{(k)}$ の期待値は

$$\begin{aligned} E[X_{(k)}] &= \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_{-\infty}^{\infty} x F(x)^{k-1} \{1-F(x)\}^{n-k} dF(x) \\ &= \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_0^1 F^{-1}(y) y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy, \end{aligned} \quad (25)$$

となる。 $E[X_{(n+1)\alpha}]$ は、 $n \rightarrow \infty$ のとき $100\alpha\%$ 点に収束するので、経験分布 $F_n(x)$ を用いて $100\alpha\%$ 点を

$$HD_\alpha = \frac{1}{\beta((n+1)\alpha, (n+1)(1-\alpha))} \int_0^1 F_n^{-1}(y) y^{(n+1)\alpha-1} (1-y)^{(n+1)(1-\alpha)-1} dy, \quad (26)$$

により推定する。これが HD 推定量である⁴²。

経験分布の定義より(26)式は、以下のように書き換えることが可能である。

$$HD_\alpha = \sum_{i=1}^n w_{n,i}^\alpha X_{(i)}. \quad (27)$$

ここで、 $w_{n,i}^\alpha$ は次式で表される。

$$w_{n,i}^\alpha = \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_{(i-1)/n}^{i/n} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy, \quad k = (n+1)\alpha. \quad (28)$$

⁴⁰ $1_{\{x \geq X_i\}}$ は、 $x \geq X_i$ のとき 1、 $x < X_i$ のとき 0 となる定義関数。

⁴¹ ここで $\beta(\cdot, \cdot)$ はベータ関数であり、 $\beta(k, n-k+1) = (k-1)!(n-k)!/n!$ が成立する。

⁴² ここで、 $(n+1)\alpha$ は整数でなくてもよい。

(2) Harrell-Davis 推定量とブートストラップ法の関係について

$(n+1)\alpha = k$ が整数である場合に、ブートストラップ法による推定値の期待値が HD 推定量に一致することを示す。

ブートストラップ法による分位点の推定は以下の手順で行われる。

順序統計量 $\{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}\}$ から、重複を許して、無作為に n 個の標本を抽出する。

抽出した標本から、 k 番目に小さい値を抽出する。

および を必要回数繰り返し、 で得た抽出した標本の平均を分位点の推定値とする。

上記 の手順で、順序統計量 $X_{(i)}$ が抽出される確率を考える。まず、 の重複を許した抽出において、 $X_{(i)}$ 以下の標本を k 個以上抽出する確率（このとき、 で抽出される値は $X_{(i)}$ 以下となる）は、

$$\sum_{j=k}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} (i/n)^j \{1 - (i/n)\}^{n-j}, \quad (29)$$

である。同様に、 $X_{(i-1)}$ 以下の値を k 個以上抽出する確率（このとき、 で抽出される値は $X_{(i-1)}$ 以下となる）は、

$$\sum_{j=k}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \{(i-1)/n\}^j [1 - \{(i-1)/n\}]^{n-j}, \quad (30)$$

である。したがって、 で抽出される k 番目に小さい値が $X_{(i)}$ である確率 $W_{n,i}^\alpha$ は、

$$W_{n,i}^\alpha = \sum_{j=k}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} (i/n)^j \{1 - (i/n)\}^{n-j} - \sum_{j=k}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \{(i-1)/n\}^j [1 - \{(i-1)/n\}]^{n-j} \quad (31)$$

となり、ブートストラップ法による推定値の期待値は $\sum_{i=1}^n W_{n,i}^\alpha X_{(i)}$ で表される。

ところで、確率変数 X がベータ分布 $Beta(k, n-k+1)$ に従い、確率変数 Y が二項分布 $Bi(n, p)$ に従うとき以下の関係が成立することが知られている（蓑谷 [1998]）。

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq p) &= \Pr(Y \geq K) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_0^p y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy &= \sum_{j=k}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} p^j (1-p)^{n-j} \quad (32) \end{aligned}$$

(32)式を用いれば、(31)式の $W_{n,i}^\alpha$ は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} W_{n,i}^\alpha &= \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_0^{i/n} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy \\ &\quad - \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_0^{(i-1)/n} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy \\ &= \frac{1}{\beta(k, n-k+1)} \int_{(i-1)/n}^{i/n} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy . \end{aligned} \quad (33)$$

これは、(28)式の HD 推定量の重み $w_{n,i}^\alpha$ にほかならない。よって、ブートストラップ法による推定値の期待値が HD 推定量に一致することが示された。

補論 2 . Ljung-Box 統計量⁴³

時系列データ $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ を所与とするとき、1次から m 次までの標本自己相関係数は、 \bar{x} を $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ の標本平均として、

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^T (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (34)$$

で定義される。

このとき、Ljung-Box 統計量 $LB(m)$ は、標本自己相関係数を用いて、

$$LB(m) = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}^2(k)}{T-k}, \quad (35)$$

で計算される。

Ljung-Box 統計量は、1次から m 次までの自己相関係数が全てゼロであるという帰無仮説の下で、自由度 m のカイ 2 乗分布 $\chi^2(m)$ に漸近的に従う。自由度 m 、上側確率 α に対する値を $\chi_\alpha^2(m)$ とすると、有意水準 α での検定では $LB(m) > \chi_\alpha^2(m)$ のときに帰無仮説を棄却すればよいことになる。なお、 $m=15$ のとき、有為水準 1% の棄却域は、 $LB(15) > \chi_\alpha^2(15) = 30.5779$ である。

⁴³ ここでの説明は、渡部 [2000]を参考にした。

参考文献

- 乾 孝治、「VaR のバイアスと内挿・外挿による修正」、日本保険・年金リスク学会 第 1 回設立記念大会予稿集、2003 年、153 頁
- 木島 正明 編著、『金融リスクの計量化【上】バリュー・アット・リスク』、金融財政事情研究会、1998 年
- シモノフ, ジェフリー S. (竹澤邦夫・大森宏 訳)、『平滑化とノンパラメトリック 回帰への招待』、農林統計協会、1999 年
- 蓑谷 千凰彦、『すぐに役立つ統計分布』、東京図書、1998 年
- 山下 智志、『市場リスクの計量化と VaR』、朝倉書店、2000 年
- 渡部 敏明、『ボラティリティ変動モデル』、朝倉書店、2000 年
- 汪 金芳・田栗 正章・手塚 集・樺島 祥介・上田 修功、『統計科学のフロンティア 11 計算統計 確率計算の新しい手法』、岩波書店、2003 年
- Barone-Adesi, G., F. Bourgoin and K. Giannopoulos, “Don’t Look Back,” *RISK*, 11(8), 1998, pp. 100-104.
- Barone-Adesi, G. and K. Giannopoulos and L. Vosper, “VaR without Correlations for Non-linear Portfolios,” *Journal of Futures Markets*, 19, 1999, pp. 583-602.
- Basel Committee on Banking Supervision, “Supervisory framework for the use of “backtesting” in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements,” Basel Committee Publications No. 22, January 1996.
(<http://www.bis.org/>で入手可、日本銀行仮訳は <http://www.boj.or.jp/>で入手可)
- Bollerslev, T. and J. M. Wooldridge, “Quasi Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances,” *Econometric Reviews*, 11, 1992, pp. 143-172.
- Boudoukh, J., M. Richardson, and R. Whitelaw, “The Best of Both Worlds,” *RISK*, 11(5), 1998, pp. 64-67.
- Butler, J. S. and B. Schachter, “Estimating Value-at-Risk with a Precision Measure by Combining Kernel Estimation With Historical Simulation,” Working Paper, 1997.
- Efron, B., “Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife,” *The Annals of Statistics*, 7, 1979, pp. 1-26.
- Harrell, F. E. and C. E. Davis, “A new distribution-free quantile estimator,” *Biometrika*, 69, 1982, pp. 635-640.

- Hendricks, D., "Evaluation of Value at Risk Models Using Historical Data," *Economic Policy Review*, Federal Reserve Bank of New York, April 1996, pp. 36-69.
- Hull, J. and A. White, "Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk," *Journal of Risk*, 1, 1998, pp. 5-19.
- Inui, K., M. Kijima and A. Kitano, "VaR is subject to a significant positive bias," Working Paper, 70, Graduate School of Economics Kyoto University, 2003.
- Jorion, P., *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, Chicago, 2000.
- Sheather, S. J. and J. S. Marron, "Kernel quantile estimators," *Journal of the American Statistical Association*, 85, 1990, pp. 410-416.